Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	3	1	3	5	2	1

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ПОНОМАРЕНКО

Имя АННА

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 17.05.2005 Класс 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 листах Дата выполнения работы 13.03.2021

Номер телефона +79535888149 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	3	1	3	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$z(z+1)=x(x+1)=y(y+1)$

$$\begin{cases} z(z+1)=x(x+1) \\ z(z+1)=y(y+1) \\ x(x+1)=y(y+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2+z=x^2+x \\ z^2+z=y^2+y \\ x^2+x=y^2+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z-x)(z+x)=x-z \\ (z-y)(z+y)=y-z \\ (x-y)(x+y)=y-x \end{cases}$$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	6	86

30

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{ll} z=x & (1) \\ z+x=-1 & (2) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} z=y & (3) \\ z+y=-1 & (4) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} x=y & (5) \\ x+y=-1 & (6) \end{array}\right. \end{cases}$$

Чтобы выполнялось равенство $(x-y)(y-z)(z-x)=0$, достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из равенств (1), (3)(5). Предположим, что это не так. ~~т.е. решениями системы~~ Тогда

$$\begin{cases} z+x=-1 & (2) \\ z+y=-1 & (4) \\ x+y=-1 & (6) \end{cases}$$

Из (2) и (4) $\Rightarrow x=y$

Из (2) и (6) $\Rightarrow z=y$.

$\Rightarrow x=y=z$.

Значит, одно из равенств (1), (3)(5) будет выполняться всегда $\Rightarrow (z-y)(y-z)(z-x)=0$

Доказано.

№2.

Для определённости предположим, что в таблице 10 столбцов и 7 строк.

① Значит, минимально возможная сумма чисел в строке 10, а максимальная 30. Из этого промежутка на 9 делятся числа 18 и 27.

$18=3\cdot 6=3\cdot 5+1\cdot 3=3\cdot 4+1\cdot 6$

Значит, в каждой строке должно быть 4 тройки и 6 единиц. Таким образом, всего в таблице должно быть 28 троек и 42 единицы.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 3 1 3 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$27 = 3\cdot 9 = 3\cdot 8 + 1\cdot 3$ — длина строки таблицы не позволит сделать в ней сумму чисел, равную 27.

2) Минимально возможная сумма чисел в столбце 7, а максимальная 21. Из этого промежутка на 9 делятся числа 9 и 18.

$9 = 3\cdot 3 = 3\cdot 2 + 1\cdot 3 = 3\cdot 1 + 1\cdot 6$

Значит, в каждом столбце должна быть 1 тройка и 6 единиц, а всего в таблице должно быть 10 троек и 60 единиц.

$18 = 3\cdot 6 = 3\cdot 5 + 1\cdot 3$ — длина столбца не позволит сделать в нем такую сумму

3) В п.1 мы получили, что в таблице должно быть 28 троек и 42 единицы, а в п.2. 10 троек и 60 единиц — противоречие.

Ответ: нет, не удастся.

$x^3y^5 = 3^{50}\cdot 6^{50}\cdot 10^{33}$ №4.

$x^3y^5 = 3^{50}\cdot 2^{50}\cdot 3^{50}\cdot 2^{33}\cdot 5^{33}$

$x^3y^5 = 3^{100}\cdot 2^{83}\cdot 5^{33}$

Т.к. $x\in N$ и $y\in N$, то x^3 и y^5 равны ~~соответственно~~ произведению чисел 2, 3 и 5 в степенях, кратных 3 или 5 соответственно.

Среди чисел от 0 до 100 есть 21 число, кратное 5. При этом необходимо, чтобы разность 100 и этого числа была кратна 3. Этому условию удовлетворяют числа ~~5, 20, 35~~ ~~10, 20, 30~~ 10; 25; 40; 55; 70; 85 и 100. Этих чисел ~~8~~ 7.

Среди чисел от 0 до 83 есть 17 чисел, кратных 5. При этом необходимо, чтобы разность 83 и каждого из этих чисел была кратна 3. Это числа 5; 20; 35; 50; 65 и 80. Таких чисел 6.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	3	1	3	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Среди чисел от 0 до 33 есть 7 чисел, кратных 5. При этом необходимо, чтобы разность 33 и каждого из этих чисел была кратна 3. Это числа 0; 15; 30. Таких чисел 3.

Таким образом, мы можем выбрать y^5 и, соответственно, y_2 числом способов, равным $7\cdot 6\cdot 3 = 126$.

Каждому y будет соответствовать единственный x.

Ответ: 126 решений.

+

№5.

(x_n) - последовательность

$x_1 = 1$; $x_2 = \frac{5}{8}$

$x_{n-1}(x_n + x_{n-2}) = 2x_n x_{n-2}$

Пусть $x_n = x_3$, тогда $\frac{5}{8}(x_3+1) = 2\cdot x_3\cdot 1$

$\frac{5}{8}x_3 + \frac{5}{8} = 2x_3$

$\frac{11}{8}x_3 = \frac{5}{8}$

$11x_3 = 5$

$x_3 = \frac{5}{11}$

Пусть $x_n = x_4$, тогда $\frac{5}{11}\left(x_4 + \frac{5}{8}\right) = 2\cdot x_4\cdot\frac{5}{8}$

$\frac{5}{11}x_4 + \frac{25}{88} = \frac{10}{8}x_4$

$\frac{110-40}{88}x_4 = \frac{25}{88}$

$70x_4 = 25$

$x_4 = \frac{25}{70}$

$x_4 = \frac{5}{14}$

$x_1 = \frac{5}{5}$; $x_2 = \frac{5}{8}$; $x_3 = \frac{5}{11}$; $x_4 = \frac{5}{14}$

Значит, $x_n = \frac{5}{5+3(n-1)}$ д-во?

$x_{101} = \frac{5}{5+3\cdot 100} = \frac{5}{305} = \frac{1}{61}$

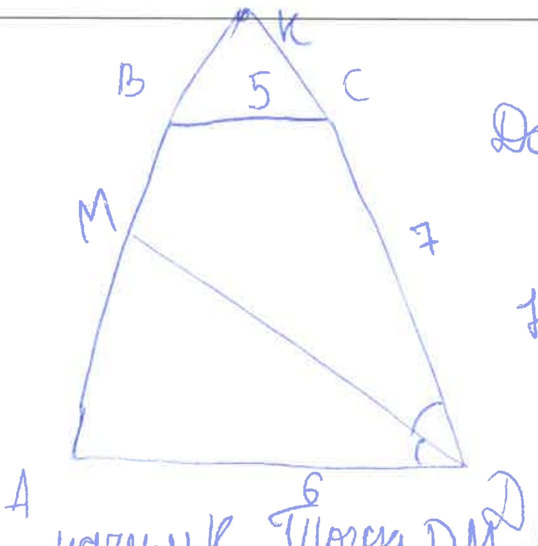
Ответ: $\frac{1}{61}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 3 1 3 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№3

Дано: $ABCD$ – трапеция; $AD \parallel BC$

DM – биссектриса $\angle D$

$BC = 5$; $CD = 7$; $DA = 6$

Найти: $AM : MB$

Решение:

1) Продлим прямые AB и DC до пересечения. Точку пересечения обозначим K. Тогда DM – биссектриса $\triangle AKD$.

2) $\triangle BKC \sim \triangle AKD$ – по двум углам ($\angle BAD = \angle KBC$. $\angle CDA = \angle KCB$ – как соответственные при $BC \parallel AD$ и секущих AK и DK). $\Rightarrow \frac{KC}{KD} = \frac{BC}{AD} = \frac{KB}{AK} = \frac{5}{6} \Rightarrow KC = 35$.

3) По св-ву биссектрисы $\frac{KM}{AM} = \frac{DK}{DA} = \frac{42}{6} = 7$

4) Пусть $KB = a$; $BM = b$; $MA = c$, тогда из (2) и (3) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 5x \\ a + b + c = 6x \\ a + b = 7y \\ c = y \end{cases} \Rightarrow 6x = 8y \Rightarrow x = \frac{4}{3}y$$

$a + b + c = 8y$; $c = y$ $\Rightarrow$

$a = 5x \Rightarrow a = \frac{20}{3}y \Rightarrow a = 6\frac{2}{3}y$ $\Big| \Rightarrow b = \frac{1}{3}y$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{c}{b} = \frac{y}{\frac{1}{3}y} = 3$$

Ответ: $AM : MB = 3 : 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ | МА000106022 1

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия Спрыжков

Имя Тимофей

Отчество Сергеевич

Дата рождения 19.09.2005 **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 9 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +79048988695 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	6	0	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

1.

Дано:

$z(z+1)=x(x+1)=y(y+1)$

~~Найти~~ Д-ть:

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$

Д-во:

1. Раскроем скобки:

$(x-y)(y-z)(z-x)= \cancel{xyz}-xz^2-y^2z+yz^2-x^2y+x^2z+xy^2-\cancel{xyz}=$

$=x^2z-x^2y+xy^2-y^2z+yz^2-xz^2$

2. Далее, выведем из условия следующие равенства:

$\begin{cases} z(z+1)=x(x+1) \\ z(z+1)=y(y+1) \\ x(x+1)=y(y+1) \end{cases} \sim \begin{cases} z^2+z=x^2+x \\ z^2+z=y^2+y \\ x^2+x=y^2+y \end{cases} \sim \begin{cases} x-z=z^2-x^2 \\ z-y=y^2-z^2 \\ y-x=x^2-y^2 \end{cases}$

3. ~~(Приведём подобные в п.1)~~ Сгруппируем слагаемые в п.1:

$x^2z-x^2y+xy^2-y^2z+yz^2-xz^2=x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)$

4. Подставим равенства из п.2 в п.3:

$x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)=x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)=$

$=\cancel{x^2y^2}-\cancel{x^2z^2}+\cancel{y^2z^2}-\cancel{x^2y^2}+\cancel{x^2z^2}-\cancel{y^2z^2}=0$, ч.т.д.

2.

Дано:

прямоуг. таблица 7×10

числа „3" и „1" сумма в столбцах и сумма в строках кратны 9

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 | 0 | 2 | 2 | 1 |

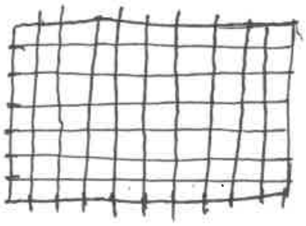
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Найти:

Можно ли так сделать - ?

Решение:



1. Расположим таблицу так, чтобы в столбце было 7 клеток, а в строке - 10.

2. Если весь столбец заполнить числами „3", то сумма чисел в столбце, очевидно, будет равна $3 \cdot 7 = 21$. Если же поменять одну „3" на „1", то сумма уже будет меньше на 2: $3 \cdot 6 + 1 = 19$. Далее, при замене всё большего количества „3" на „1", сумма будет уменьшаться в арифметической прогрессии, с разностью $d=2$, до 7. Следовательно, единственным числом $\vdots 9$ и ~~каждая~~ являющ. членом данной а.п. является число 9. Оно достигается при сложении шести „1" и одной „3" $\Rightarrow$ в столбце ~~не~~ может быть только одно число „3" (9-единственное, т.к. ~~числа~~ члены данной а.п.-нечётные, а $d=2$)

3. Далее, если всю строку заполнить числами „3", то сумма чисел в столбце будет равна $3 \cdot 10 = 30$. Аналогично п. 2, если мы будем менять числа „3" на „1", то получим арифм. прогрессию с разностью $d=2$. Следовательно, т.к. ~~числа~~ члены данной а.п. чётные, а разность $d=2$, то единственным членом данной прогрессии $\vdots 9$ будет число 18. Оно достигается при сложении четырёх „3" и шести „1".

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА0001060221

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

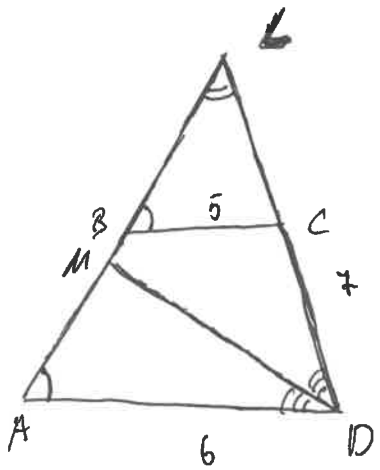
4. Далее, возникает противоречие. Нам необходимо, чтобы в столбце было ровно одно число „3", а в строке ровно четыре числа „3". Но столбцов всего 10, а чисел „3" необходимо ~~…~~ $4\cdot 7=28$ (строк 7),

а в столбцах можно использовать только 10 чисел „3" ~~…~~

Значит, из-за данного противоречия, Вася не сможет расставить числа „3" и „1", как сказано в условии

Ответ: не сможет.

3.



Дано:

ABCD - трапеция ($BC \parallel AD$)

DM - биссектриса $\angle D$ ($DM \cap AB = M$)

$BC=5$

$CD=7$

$AD=6$

Найти:

$\frac{AM}{BM}$ - ?

Решение:

1. Д.п. $AB \cap CD = L$ (достроим трапецию до Δка)

2. Рассмотрим $\triangle ALD$ и $\triangle BLC$:

$\angle LBC = \angle LAD$ (как соответственные при $BC \parallel AD$ и сек. AB)

$\angle L$ - общий

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

значит, можно сделать вывод, что $\triangle ALD \sim \triangle BLC$. Следовательно, можно записать следующее соотношение:

$\frac{LC}{LD} = \frac{BC}{AD}$. Обозначим $LC = x$, тогда $LD = LC + CD = x + CD$

Соответственно,

$$\frac{x}{x+CD} = \frac{BC}{AD}$$

$$\frac{x}{x+7} = \frac{5}{6}$$

$$\cancel{6}x = 35 + \cancel{5x}$$

$$x = 35 \Rightarrow LC = 35$$

3. Если $LC = 35$, то $LD = 35 + 7 = 42$

4. DM - биссектриса $\triangle ALD$ $\Rightarrow$ по св-ву биссектрисы угла в $\triangle$-ке:

$$\frac{AD}{LD} = \frac{AM}{LM} \Rightarrow \frac{AM}{LM} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

5. Далее, из того факта, что $\triangle ALD \sim \triangle BLC$, следует, что

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AD} = \frac{5}{6}$$

6. Обозначим $AM = y$, тогда $LM = 7y \Rightarrow AL = AM + LM = 8y$, тогда $\frac{BL}{AL} = \frac{BL}{8y} = \frac{5}{6} \Rightarrow BL = \frac{40y}{6}$.

7. Из построения следует, что $BM = ML - BL = 7y - \frac{40y}{6} = \frac{y(42-40)}{6} = \frac{2y}{6} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{y}{y/3} = \frac{3}{1}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: AM:BM= 3:1

5.

Дано:

$\{x_n\}$

$x_1=1$

$x_2=\frac{5}{8}$

при $n\geq 3$,

$x_{n-1}(x_n+x_{n-2})=2x_nx_{n-2}$

Найти:

x_{101} - ?

Решение:

1. Преобразуем условие для $n\geq 3$

$$x_{n-1}(x_n+x_{n-2})=2x_nx_{n-2}$$

$$x_nx_{n-1}+x_{n-1}\cdot x_{n-2}=2x_nx_{n-2}$$

$$2x_nx_{n-2}-x_nx_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}$$

$$x_n(2x_{n-2}-x_{n-1})=x_{n-1}x_{n-2}$$

$$x_n=\frac{x_{n-1}\cdot x_{n-2}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$$

2. Найдём последовательно x_3, x_4 и x_5:

$$x_3=\frac{x_2\cdot x_1}{2x_1-x_2}=\frac{1\cdot\frac{5}{8}}{2-\frac{5}{8}}=\frac{5}{8\cdot(2-\frac{5}{8})}=\frac{5}{16-5}=\frac{5}{11}$$

$$x_4=\frac{x_3\cdot x_2}{2x_2-x_3}=\frac{\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{10}{8}-\frac{5}{11}}=\frac{25}{8\cdot 11(\frac{10}{8}-\frac{5}{11})}=\frac{25}{110-40}=\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 0 6 0 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$x_5 = \frac{x_4\cdot x_3}{2x_3 - x_4} = \frac{\frac{5}{14}\cdot\frac{5}{11}}{\frac{10}{11}-\frac{5}{14}} = \frac{25}{14\cdot 11\left(\frac{10}{11}-\frac{5}{14}\right)} = \frac{25}{140-55} = \frac{25}{85} = \frac{5}{17}$$

3. Выпишем найденные нами значения:

$x_1 = 1 = \frac{5}{5}$

$x_2 = \frac{5}{8} = \frac{5}{5+3}$

$x_3 = \frac{5}{11} = \frac{5}{8+3}$

$x_4 = \frac{5}{14} = \frac{5}{11+3}$

$x_5 = \frac{5}{17} = \frac{5}{14+3}$

Как видно, в числителе всегда стоит 5, а знаменатель увеличивается на 3

На ум сразу приходит предположение, что в знаменателе этих чисел стоит арифм. прогрессия с разностью $d=3$.

4. Проверим это предположение в общем виде:

$$\frac{\frac{5}{x}\cdot\frac{5}{x-3}}{\frac{2\cdot 5}{x-3}-\frac{5}{x}} = \frac{25}{x(x-3)\left(\frac{10}{x-3}-\frac{5}{x}\right)} = \frac{25}{10x-5(x-3)} = \frac{25}{10x-5x+15} = \frac{\cancel{25}^{\,5}}{\cancel{5x+15}_{\,x+3}} = \frac{5}{x+3}.$$

Значит, наше предположение верно, и $x_n = \frac{5}{5+3(n-1)} = \frac{5}{5+3n-3} = \frac{5}{3n+2}$

Следовательно, $x_{101} = \frac{5}{3\cdot 101+2} = \frac{5}{303+2} = \frac{5}{305} = \frac{1}{61}$

Ответ: $x_{101} = \frac{1}{61}$

Вариант № 3 | МА0001060221

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

и.

Дано:
$x^3y^5=3^{50}\cdot 6^{50}\cdot 10^{33}$

Найти:
кол-во решений, если $x, y \in N$ - ?

Решение:

1. $3^{50}\cdot 6^{50}\cdot 10^{33} = 3^{50}\cdot 2^{50}\cdot 3^{50}\cdot 2^{33}\cdot 5^{33} = 3^{100}\cdot 2^{83}\cdot 5^{33}$

2. Если $\begin{cases} x\in N \\ y\in N \end{cases}$, то $x^3y^5 \in N$, значит решение будет выглядеть примерно следующим образом:

$\begin{cases} y^5 = 3^a\cdot 2^b\cdot 5^c \\ x^3 = 3^{100-a}\cdot 2^{83-b}\cdot 5^{33-c} \end{cases}$, где $a, b, c \geq 0$

$a \vdots 5 \quad 100-a \vdots 3$
$b \vdots 5 \quad 83-b \vdots 3$
$c \vdots 5 \quad 33-c \vdots 3$

3. Рассмотрим каждую из переменных a, b, c:

а) $\begin{cases} a \vdots 5 \\ 100-a \vdots 3 \end{cases}$ Составим пары чисел a и $(100-a)$, удовл. усл.:

a	$100-a$
$10 \vdots 5$	$90 \vdots 3$
$25 \vdots 5$	$75 \vdots 3$
$40 \vdots 5$	$60 \vdots 3$
$55 \vdots 5$	$45 \vdots 3$
$70 \vdots 5$	$30 \vdots 3$
$85 \vdots 5$	$15 \vdots 3$
$100 \vdots 5$	$0 \vdots 3$

Можно составить конечную а.п. для a:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | MA00010602 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a_n = 100 - (100-85)\cdot(n-1) = 100 - 15(n-1) = 100 - 15n + 15 = 115 - 15n$

Значит, $100 - a_n = 100 - 115 + 15n = 15n - 15$

б) $\begin{cases} b \,\vdots\, 5 \\ 83 - b \,\vdots\, 3 \end{cases}$ аналогично а), составим пары:

b	$83-b$
$80 \,\vdots\, 5$	$3 \,\vdots\, 3$
$65 \,\vdots\, 5$	$18 \,\vdots\, 3$
$50 \,\vdots\, 5$	$33 \,\vdots\, 3$
$35 \,\vdots\, 5$	$48 \,\vdots\, 3$
$20 \,\vdots\, 5$	$63 \,\vdots\, 3$
$5 \,\vdots\, 5$	$78 \,\vdots\, 3$

Аналогично а), вычисляется а.п.:

$b_m = 80 - (80-65)(m-1) = 80 - 15(m-1) = 80 - 15m + 15 = 95 - 15m$

Значит, $83 - b_m = 83 - 95 + 15m = 15m - 12$

с) $\begin{cases} c \,\vdots\, 5 \\ 33 - c \,\vdots\, 3 \end{cases}$ аналогично а) и б):

c	$33-c$
$30 \,\vdots\, 5$	$3 \,\vdots\, 3$
$15 \,\vdots\, 5$	$18 \,\vdots\, 3$
$0 \,\vdots\, 5$	$33 \,\vdots\, 3$

$C_k = 30 - (30-15)(k-1) = 30 - 15(k-1) = 45 - 15k$

$\cancel{100}\,33 - C_k = \cancel{100}\,33 - 45 + 15k = 15k - 12$

4. Значит, наше решение имеет вид:

$\begin{cases} y^5 = 3^{115-15n} \cdot 2^{95-15m} \cdot 5^{45-15k} \quad | \sqrt[5]{\ } \\ x^3 = 3^{15n-15} \cdot 2^{15m-12} \cdot 5^{15k-12} \quad | \sqrt[3]{\ } \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3^{23-3n} \cdot 2^{19-3m} \cdot 5^{9-3k} \\ x = 3^{5n-5} \cdot 2^{5m-4} \cdot 5^{5k-4} \end{cases}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. т.к $x, y \in N$, то необходимо потребовать:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}23-3n\geq 0\\5n-5\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}19-3m\geq 0\\5m-4\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}9-3k\geq 0\\5k-4\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}5n-5\geq 0\\5m-4\geq 0\\5k-4\geq 0\end{array}\right.$$ выполняются всегда, т.к. $n_1 \geq 0$, $m_1=1$, $k_1=1$, и прогрессии возрастающие, значит

достаточно потребовать:

$$\left[\begin{array}{l}23-3n\geq 0\\19-3m\geq 0\\9-3k\geq 0\end{array}\right. \sim \left[\begin{array}{l}3n\leq 23\\3m\leq 19\\3k\leq 9\end{array}\right. \sim \left[\begin{array}{l}n\leq \frac{23}{3}=7\frac{2}{3}\\m\leq \frac{19}{3}=6\frac{1}{3}\\k\leq \frac{9}{3}=3\end{array}\right.$$

Значит, т.к. $n, m, k \in N$:

$n_{max}=7$

$m_{max}=6$

$k_{max}=3$

+

7. Из п. 6. следует, что у нас 7 вариантов выбрать n (от 1 до 7)
6 вариантов выбрать m (от 1 до 6)
3 варианта выбрать k (от 1 до 3)

Причём, выбор n и m никак не связан с выбором k $\Rightarrow$

Значит, полное количество решений (в нат. числах): $N_{реш}=7\cdot 6\cdot 3=126$

Ответ: при $x, y \in N$, $N_{реш}=126$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	8	7	3	2	1

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ТОЛМАЧЕВА

Имя ЕЛИЗАВЕТА

Отчество ДЕНИСОВНА

Дата рождения 15.10.2005 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 89632570883 **Подпись** ТЕлф

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

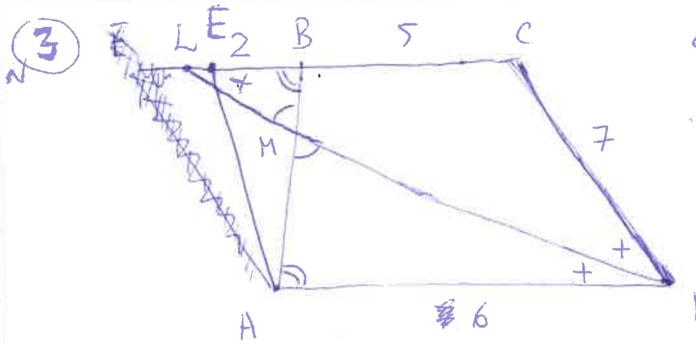
Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	0	8	7	3	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

③



Дано: ABCD – трапеция; DE – бис-са; BC = 5; CD = 7; DA = 6

Найти: $\frac{AM}{MB}$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	12	0	72

30б

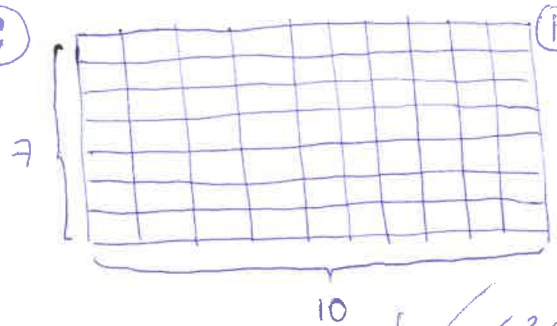
Решение:

1) достроим трапецию до пар-ма, продлив BC до E; (AECD – пар-м)
2) DL – прямая бис-сы MD; (L ∈ прямой EC)
3) DL – секущая при EC ∥ AD (по постр-ю) => ∠BLM = ∠MDA
4) △LCD – равнобедр => LC = CD = 7
5) LB = LC − BC = 7 − 5 = 2
6) ∠BLM = ∠MDA и ∠LMB = ∠AMD (верт-ые) => △LBM ∼ DAM
7) $k = \frac{AD}{LB} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{3}{1}$

+

Ответ: 3 : 1

②



① Число ⋮ 9, если сумма цифр числа ⋮ 9; т.к. max. сумма, которая может получиться в строке = 3·10 = 30, сумма во всех строках и столбцах ≤ 30 => суммы, которые ⋮ 9 и ≤ 30 = 27; 18; 9. В строке сумма = 18 или 27 (т.к. min. сумма = 10·1 = 10)

② минимальное кол-во клеток для получения суммы 27 = 9 => такая сумма может быть только в строке. Но тогда одна из клеток будет пуста => суммы 27 быть не может. (если ~~[illegible]~~ троек ≤ 8, то сумма цифр будет < 27)

+

③ Аналогично, в столбце не может быть суммы 18, т.к. max. сумма может быть при 6ти 3ках, но одна клетка будет пуста, а при меньшем кол-ве 3ек сумма цифр в столбце будет недостаточна.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	8	7	3	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(4) посчитаем, какое кол-во 3ек и 1ц нужно в столбце, чтобы сумма была $=9$:

кол-во		сумма
1	3	
7	0	7
6	1	9
5	2	11

каждая последующая сумма $(a_n) = a_{n-1}+2 \Rightarrow$ все суммы нечетные (не 18) сумма $=9$ может быть в единственном случае - при ~~...~~ 6ти 1цах и 1ой 3ке

(5) Аналогично, для строк; $a_1=10$; $a_n=a_{n-1}+2$ (все суммы четные $\Rightarrow S\neq 9,27$) Сумма $=18$ может быть при 6ти 1цах и 4ех 3ках.

(6) $\Rightarrow$ кол-во 3ек во всех столбцах $=10\cdot 1=10$, а во всех строчках $=7\cdot 4=28 \Rightarrow$ противоречие, т.к. кол-во 3ек в таблице однозначно.

Ответ: нет.

№1 $z(z+1)=x(x+1)=y(y+1)$

(1) $\Rightarrow z^2=x^2=y^2$

$z^2-x^2=0$	$x^2-y^2=0$
$(z-x)(z+x)=0$	$(x+y)(x-y)=0$
$z-x=0$ или $z+x=0$	$x+y=0$ или $x-y=0$
$z=x$ или $z=-x$	$x=y$ или $x=-y$

$\Rightarrow$ числа попарно обратны либо равны.

(2) $\Rightarrow$

$z^2+z=x^2+x=y^2+y$

квадрат обратного числа $\geq 0 \Rightarrow$ если какие либо 2 числа x,y,z обратны рав-во не достигается (т.к. квадраты равны) $(a-n\neq a+m)$

$x-y=y^2-x^2$ при $y^2=x^2$, что док-но $y^2-x^2=0$

$x=y=z$

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$

если $x-y=0$ или $y-z=0$ или $z-x=0$
$x=y$ $\quad y=z$ $\quad z=x$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x)=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 8 7 3 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 $x^3y^5=3^{50}\cdot 6^{50}\cdot 10^{33}=$

$x^3y^5=3^{50}\cdot 2^{50}\cdot 3^{50}\cdot 5^{33}\cdot 2^{33}$ (т.к. $6^{50}=2^{50}\cdot 3^{50}$ и $10^{33}=5^{33}\cdot 2^{33}$)

$x^3y^5=3^{100}\cdot 2^{83}\cdot 5^{33}$

$3^{100}=3^{3\cdot n_x+5\cdot n_y}$ (где n_x и n_y – кол-во множителей 3 и 5 в числах x и y)

аналогично,

$2^{83}=2^{3\cdot n_x+5n_y}$

$5^{33}=5^{3\cdot n_x+5n_y}$

для степеней:

$100=3n_x+5n_y$

найдем возможные значения:

$n_x=$	$n_y=$
0	20
10	14
20	8
30	2

т.е. 4 варианта

$83=3n_x+5n_y$

$n_x=$	$n_y=$
1	16
11	10
21	4

т.е. 3 в-та

$33=3n_x+5n_y$

$n_x=$	$n_y=$
1	6
6	3
11	0

т.е. 3 в-та.

найдем общее кол-во вар-тов : $4\cdot 3\cdot 3=36$

т.е. 36 значений (решений)

Ответ: 36.

№5 $x_1=1$, $x_2=\frac{5}{8}$

$x_{n-1}(x_n+x_{n-2})=2x_nx_{n-2}$

Для x_3:

$\frac{5}{8}(x_3+1)=2x_3$

$1\frac{3}{8}x_3=\frac{5}{8}$

$x_3=\frac{5}{11}$

Для x_4

$\frac{5}{11}(x_4+\frac{5}{8})=2x_4\cdot\frac{5}{8}$

$\frac{1}{4}x_4=\frac{95}{22}$

$x_4=4\frac{7}{22}$

$q=\frac{95}{22}\cdot\frac{11}{5}=\frac{19}{2}=9{,}5$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	2	4	7	2	2	1

Шифр

Вариант № 2.

Фамилия ШАРКОВСКАЯ

Имя АНТОНИНА

Отчество ГЕННАДЬЕВНА

Дата рождения 08.03.2005 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021.

Номер телефона 89082235704 **Подпись** Шар

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	4	7	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

30б

Задача 1.

$a(a+1)=b(b+1)=c(c+1)$

$a^2+a=b^2+b$ $\quad$ $b^2+b=c^2+c$ $\quad$ $c^2+c=a^2+a$

$a^2-b^2+a-b=0$ $\quad$ $b^2-c^2+b-c=0$ $\quad$ $c^2-a^2+c-a=0$

$(a-b)(a+b)+a-b=0$ $\quad$ $(b-c)(b+c)+b-c=0$ $\quad$ $(c-a)(c+a)+c-a=0$

$(a-b)(a+b+1)=0$ $\quad$ $(b-c)(b+c+1)=0$ $\quad$ $(c-a)(c+a+1)=0$

Если какое-то из выражений $\boxed{\begin{matrix} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{matrix}}$ верно, то $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ и равенство верно

Если нет $\boxed{\begin{matrix} a+b+1=0 \\ b+c+1=0 \\ a+c+1=0 \end{matrix}}$ то т.к. никакое из верхних выражений не выполнено $\Rightarrow$

НО если $b+c+1=0$, $a+c+1=0$ $\Rightarrow$ $b+c=-1$, $-a-c=1$ $\Rightarrow$ $b+c-a-c=0 \Leftrightarrow b-a=0$.

$\Rightarrow$ какие-то 2 числа в любом случае будут между собой $=$.

$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=0$. всегда.

Задача 2.

Надо чтобы комбинация чисел из 3 и 1, кол-во которых 5, в сумме делилось на 7

Пусть n чисел - кол-во троек среди 5, тогда сумма всех чисел $3n+5-n=2n+5$ ($(5-n)$-это кол-во единиц.)

$2n+5 \vdots 7$ (при этом $0 \le n \le 5$)

На данном промежутке условие выполняется только при $n=1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2.

М	А	0	0	0	1	2	4	7	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow$ Используя только 1 и 3, так чтобы кол-во цифр было 5, а их сумма делилась на 3, можно только с использованием одной 3 и четырех ед 1.

$3+1+1+1+1=7$.

Пусть k шт - кол-во 3, среди 8 чисел, тогда $(8-k)$ шт - кол-во единиц.

$3k+8-k=2k+8$ - сумма всех чисел.

Если $k=8$, то общая сумма чисел $=3\cdot 8=24$.

Если $k=0$, то общая сумма чисел $=1\cdot 8=8 \Rightarrow$

в промежутке от 8 до 24, только 14 и 21 $\vdots\, 7$. $\Rightarrow$

$2k+8=21$ или $2k+8=14$ $\qquad 3+3+3+1+1+1+1+1=14$.

$2k=13$ $\qquad 2k=6$

$k=6{,}5 \Rightarrow$ $\qquad \underline{k=3}$.

такое невозможно

т.к. k - кол-во чисел, которое всегда целое число. $\Rightarrow k=3 \Rightarrow$ 3ек три и 1ек пять.

Если считать сумму кол-ва 3 по строкам

$\overset{1}{\cancel{3}}\cdot 8=8$, а если считать кол-во 3ек по столбцам

она $=3\cdot 5=15 \Rightarrow$ т.к. количество 3ек подсчетом 2мя способами различно, то Васе не удастся сделать то, что он хотел.

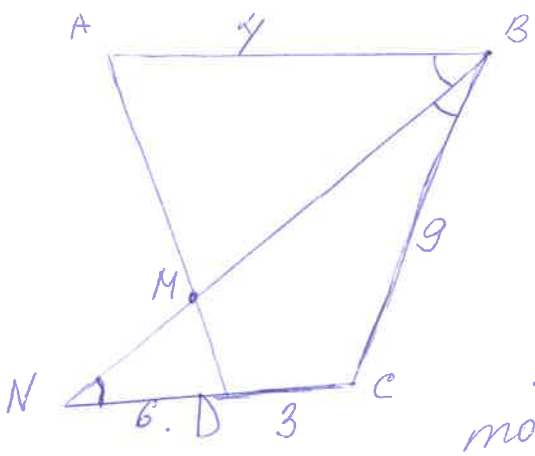
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 2 4 7 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3.



Продлим отрезок CD за точку D и бессектрису BM за точку M, до их пересечения. Обозначим их пересечение N. Т.к. BM - бессектриса, то $\angle ABM = \angle MBC$ по опред.

Т.к. $AB \parallel CD$ (т.к. эта трапеция), то $AB \parallel CN$ (т.к. N лежит на прямой CD) => при секущей BN - $\angle ABN = \angle BNC$ по с-у накрест. леж. $\angle$ при $\parallel$ прямых. =>

=> $\angle ABN = \angle NBC = \angle BNC$ => т.к. $\angle NBC = \angle BNC$, то $\triangle NBC$ - равнобедр. по признаку => $BC = CN = 9$.

$ND = NC - CD = 9 - 3 = 6$.

рас. $\triangle AMB$ и $\triangle DMN$.

$\angle MND = \angle ABM$ по выше сказ. \
$\angle AMB = \angle NMD$ по с-у верт. $\angle$. } 1ый пр $\sim \triangle$ =>

$\triangle AMB \sim \triangle DMN$. =>

$\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{AB}{DN} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ по опред $\sim \triangle$ т.к. стороны пропорциональны.

+

Ответ: $\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{2}{3}$. отношение $2:3$.

Задача 4.

$x^2y3 = 3^{15} \cdot 20^{20} \cdot 5^{-15} = 3^{15} \cdot 4^{20} \cdot 5^{20} \cdot 5^{-15} = 3^{15} \cdot 4^{20} \cdot 5^{-35} = 3^{15} \cdot 2^{40} \cdot 5^{-35}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	4	7	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$5^{35} = 5^{3a} \cdot 5^{2b}$

$3a + 2b = 35 \Rightarrow$ т.к. $2b \vdots 2$, $35 \not\vdots 2$, то $3a \not\vdots 2 \Rightarrow$ в промежутке от 0 до 35; $3a = 3; 9; 15; 21; 27; 33$. Т.е. разбиение 5^{35} на куб и квадрат можно осуществить 6 способами.

$2^{40} = 2^{3c} \cdot 2^{2d}$

$3c + 2d = 40 \Rightarrow$ т.к. $2d \vdots 2$ и $40 \vdots 2$, то $3c \vdots 2 \Rightarrow 3c \vdots 6 \Rightarrow$ в промежутке от 0 до 40, $3c = 0; 6; 12; 18; 24; 30; 36 \Rightarrow$ разбиение 2^{40} на куб и квадрат осуществляется 7 способами.

$3^{15} = 3^{2m} \cdot 3^{3k}$

$2m + 3k = 15 \Rightarrow 2m \vdots 2; 15 \not\vdots 2 \Rightarrow 3k \not\vdots 2 \Rightarrow$ в промежутке от 0 до 15, $3k = 3; 9; 15$. т.е. разбиение 3^{15} на квадрат и куб осуществляется 3мя способами.

Общее кол-во способов $=$

$6 \cdot 7 \cdot 3 = 126$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 2 4 7 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5.

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$$

$$x_n = \frac{x_{n-2}\, x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2}\, x_{n-1}} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_3} = \frac{2}{x_2} - \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_4} = \frac{2}{x_3} - \frac{1}{x_2} = \frac{4}{x_2} - \frac{2}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{3}{x_2} - \frac{2}{x_1}$$

Предположение индукции: $\frac{1}{x_n} = \frac{n-1}{x_2} - \frac{n-2}{x_1}$

База ✓. для x_{n-1} и x_{n-2} - предположение верно $\Rightarrow$

$$\frac{1}{x_{n-1}} = \frac{n-2}{x_2} - \frac{n-3}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_{n-2}} = \frac{n-3}{x_2} - \frac{n-4}{x_1}.$$

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}} = 2\cdot\left(\frac{n-2}{x_2} - \frac{n-3}{x_1}\right) - \frac{n-3}{x_2} + \frac{n-4}{x_1} =$$

$$= \frac{2n-4}{x_2} - \frac{2n-6}{x_1} - \frac{n-3}{x_2} + \frac{n-4}{x_1} = \frac{n-1}{x_2} - \frac{n-2}{x_1}$$ ✓ т.к. шаг

индукции работает, то она верна для всех членов последовательности ~~имеет~~ $\Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2.

М	А	0	0	0	1	2	4	7	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{1}{x_{100}} = \frac{100-1}{x_2} - \frac{100-2}{x_1} = \frac{99}{x_2} - \frac{98}{x_1} = \frac{99}{\frac{3}{5}} - \frac{98}{1} =$$

$$= \frac{\overset{33}{\cancel{99}} \cdot 5}{\cancel{3}} - 98 = 165 - 98 = 67 \Rightarrow x_{100} = \frac{1}{67}.$$

Ответ: $\frac{1}{67}$.

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	3	1	7	0	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Коркин

Имя Илья

Отчество Олегович

Дата рождения 05.07.2005 **Класс** 9

Предмет ~~мат~~ МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 8-960-760-93-39 **Подпись** Кор

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	3	1	7	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$a(a+1)=b(b+1) \Rightarrow a^2+a=b^2+b \Rightarrow a^2-b^2+(a-b)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a-b)(a+b)+(a-b)=0. \Rightarrow (a-b)(a+b+1)=0.$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	20	2	80

3.1

1сл. $a=b$, тогда равенство $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ выполняется сразу.
2сл. $a=-b-1$, с равенством не ясно, выполняется оно или нет.

Если верен 1 случай, то это конец решения. Берём неблагоприятный второй случай, когда $a=-b-1$.

Известно, что $b(b+1)=c(c+1)$. Тогда $b^2-c^2+(b-c)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (b-c)(b+c)+(b-c)=0 \Rightarrow (b-c)(b+c+1)=0.$

1 случай. $b=c$. Тогда $b-c=0$ и равенство $(b-c)(a-b)(c-a)$ выполняется.
2 случай. $b=-c-1$. Но вспомним, что $a=-b-1$, тогда $a=-b-1=-(-c-1)-1=$
$=c+1-1=c \Rightarrow c-a=0$ и ~~неравенство~~ равенство $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ выполняется.

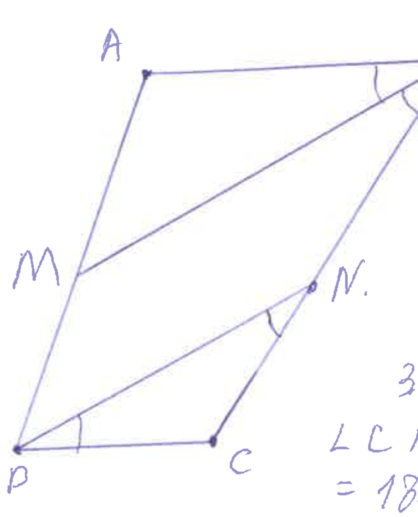
То есть и для $a=b$, и для $a=-b-1$ равенство всегда верно, а других значений у a нет $\Rightarrow$ в любом случае $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Что и требовалось доказать.

№2 Пометка. Знак $\not\vdots$ значит „не кратно"

Таблица 5×8. $\Rightarrow$ В каждой строке 8 чисел. 1сл. 8 троек, $3\cdot 8=24 \not\vdots 7$. 2сл. 7 троек и единица. $7\cdot 3+1=22 \not\vdots 7$. 3сл. 6 троек и 2 единицы. $6\cdot 3+2=20 \not\vdots 7$. 4сл. 5 троек и 3 единицы. $5\cdot 3+3=18 \not\vdots 7$. 5сл. 4 тройки и 4 единицы. $4\cdot 3+4=16 \not\vdots 7$. 6сл. 3 тройки и 5 единиц. $3\cdot 3+5=14 \vdots 7$. 7сл. 2 тройки и 6 единиц. $2\cdot 3+6=12 \not\vdots 7$. 8сл. 0 троек и 8 единиц. $0\cdot 3+8=8 \not\vdots 7$. Значит, в каждой строке по 3 тройки, только в этом случае сумма кратна 7. Пропишем то же для столбцов. Там 5 символов, начинаем с максимального кол-ва троек и уменьшаем его до 0 $\Rightarrow$ 1сл. $5\cdot 3=15 \not\vdots 7$. 2сл. $4\cdot 3+1=13 \not\vdots 7$. 3сл. $3\cdot 3+2=11 \not\vdots 7$. 4сл. $3\cdot 2+3=9 \not\vdots 11$. 5сл. $3\cdot 1+4=7 \vdots 7$. 6сл. $3\cdot 0+5=5 \not\vdots 7$. Только 5 случай подходит, в каждом столбце по одной тройке. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего троек $8\cdot 1=8$ шт. Но в каждом ряду по три тройки $\Rightarrow$ всего их $5\cdot 3=15$, противоречие $\Rightarrow$ Ответ: Нет, не сможет.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.



Дано: $ABCD$ – трапеция $AB \parallel CD$. $AB = 4$, $CD = 3$, $BC = 9$. BM – биссектриса, $M \in AD$. Найти: $AM:MD$

Решение:

1.) Дополнительное построение DN, $N \in BC$ и $DN \parallel BM$.

2.) Тогда $\angle DNC = \angle MBN$ (односторонние при $BM \parallel ND$ и секущей BC.

3) Пусть $\angle ABM = x \Rightarrow \angle ABC = 2x$, тогда $\angle C$ по св-ву трапеции равен $180^\circ - \angle ABC =$ $= 180^\circ - 2x$.

4.) В $\triangle DNC$: $\angle C = 180 - 2x$, $\angle N = x \Rightarrow \angle NDC = 180^\circ - (180^\circ - 2x) - x =$ $= 180^\circ - 180^\circ + 2x - x = x \Rightarrow \triangle NDC$ – равнобедренный, $NC = DC$. Но по условию $DC = 3$. $\Rightarrow NC = 3 \Rightarrow BN = 9 - 3 = 6$ (т.к. $BC = 9$ по условию) $\Rightarrow BN : NC = 2:1$. По теореме Фалеса параллельные прямые отсекают отрезки в равном отношении $\Rightarrow BN:NC = AM:MD = 2:1$.

Ответ: В отношении $2:1$ ($AM:MD = 2:1$)

№4.

$x^2y^3 = 3^{15} \cdot 20^{20} \cdot 5^{15}$. Но $20^{20} = 4^{20} \cdot 5^{20}$, но $4^{20} = (2^2)^{20} = 2^{40}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2y^3 = 3^{15} \cdot 2^{40} \cdot 5^{20} \cdot 5^{15} \Rightarrow x^2y^3 = 3^{15} \cdot 2^{40} \cdot 5^{35}$.

1.) Сколько двоек может содержать x? y^3 разложим на n^3, h^3, m^3, где n содержит только тройки, h – только двойки, m – только ~~пятерки~~ пятерки. $h^3 = 2^g$, где g – натуральное число. $h^3 \vdots 2^g \Rightarrow h \vdots \sqrt[3]{2^g} \Rightarrow$ $\Rightarrow h^3 = (2^j)^3$, где j – натуральное число. Степень двойки тогда равна $3j$, $3j < 40$. $\Rightarrow j < \frac{40}{3} \Rightarrow j < 13\frac{1}{3} \Rightarrow j \in [1;13]$, включая только натуральные числа из промежутка. h^3 имеет 13 вариантов решения. Это $2^3, 2^6, 2^9, 2^{12}, 2^{15}, 2^{18}, 2^{21}, 2^{24}, 2^{27}, 2^{30}, 2^{33}, 2^{36}, 2^{39}$, но x^2 содержит в себе всегда чётное число двоек, т.к. его степень чётна $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ т.к. всего двоек чётное кол-во, то и g чётно $\Rightarrow h^3 = 2^g$ будет принадлежать множеству чисел $\{2^6, 2^{12}, 2^{18}, 2^{24}, 2^{30}, 2^{36}\}$. Это 6 вариантов, значит и у x^2 тоже 6 вариантов содержания двоек. Но ещё h может содержать 0 двоек, а x содержать 2^{20}

(Продолжение на следующем листе.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	3	1	7	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Сколько же ~~трёх~~ вариантов содержания троек и пятёрок у x^2. Как уже говорилось, x^2 - число в чётной степени, а это значит, что любых множителей у него чётное кол-во. Почему? потому что при возведении числа в квадрат степени его делителей перемножаются, а при умножении на чётное всегда получается чётное.

$x^2y^3 = 3^{15} \cdot 2^{40} \cdot 5^{35}$. 3 имеет 15 степень, значит у содержит минимум одну тройку.

x^2 аналогично y^3 разложим на множители. c^2 содержит только 3, d^2 - только 5.

Тогда $c^2n^3 = 3^{15}$: n содержит от одной тройки. Может ли c^2 равнятся 3^{12}? да, $c = 3^6$, $c^2 = 3^{12}$. Это 1сл.

2сл. $n = 3^2 \Rightarrow n^3 = 3^6 \Rightarrow c^2 = 3^{11}$, невозможно

3сл. $n = 3^3 \Rightarrow n^3 = 3^9 \Rightarrow c^2 = 3^6$, $c = 3^3$

4сл. $n = 3^4 \Rightarrow n^3 = 3^{12} \Rightarrow c^2 = 3^3$, невозможно

5сл. $n = 3^5 \Rightarrow n^3 = 3^{15} \Rightarrow c^2 = 0$, $c = 0$.

3 возможных случая содержания троек.

Теперь с пятерками.

$d^2m^3 = 5^{35}$. Если m содержит чётное число пятёрок, то $d^2 = 5^l$, где $l = 35 -$ чётное = нечётное, что невозможно, т.к. степень d - чётная. $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ m - нечётное число пятёрок.

$m = 5 \Rightarrow m^3 = 5^3 \Rightarrow d^2 = 5^{32} \Rightarrow d = 5^{16}$. При любых m не кратных двум d определено, т.к. тогда $d^2 = 5^r$, где r - чётная степень (и кратных 5) привели пример при $m = 5$. Это 1сл.

~~2сл. $m = 5^3 \Rightarrow m^3 = 5^9$ ... $m^3 \le 5^{35}$~~

2сл. $m = 5^3 \Rightarrow m^3 = 5^9$, $d = 5^{26}$, $d = 5^{13}$

3сл. $m = 5^5 \Rightarrow m^3 = 5^{15}$, $d = 5^{20}$, $d = 5^{10}$

4сл. $m = 5^7 \Rightarrow m^3 = 5^{21}$, $d = 5^{14}$, $d = 5^7$

5сл. $m = 5^9 \Rightarrow m^3 = 5^{27}$, $d = 5^8$, $d = 5^4$

6сл. $m = 5^{11} \Rightarrow m^3 = 5^{33}$, $d = 5^2$, $d = 5$

7сл. $m = 5^{13} \Rightarrow m^3 = 5^{39}$, но $m^3 \le 5^{35}$. $\Rightarrow$ Есть 6 случаев содержания 5-к в числах.

Продолжение на ~~след~~ следующей странице.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 12

М	А	0	0	0	1	3	1	7	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Итого:

у нас для x^2 6 возможных случаев содержания ~~в~~ пятёрок, 3 случая содержания троек и семь вариантов содержания двоек. Эти величины не зависят друг от друга ⇒ всего вариантов $6 \cdot 3 \cdot 7 = 126$

Ответ: 126 решений.

~~№5.~~

~~$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \,\Big|\, \cdot (x_{n-1} \neq 0,$ т.к. если $x_{n-1} = 0$, тогда такая x_{n+1} он является x_{n-2}, тогда $x_n \cdot 1 = 0$, $x_{n-1} = 0)$~~

№5

$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \,\Big|\, \cdot x_{n-1} \neq 0$, т.к. x_{n-1} стоит в знаменателе.

$x_n = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$. $x_3 = \frac{1}{2 - 0{,}6} = \frac{1}{1{,}4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

$x_4 = \frac{0{,}6}{1{,}2 - \frac{5}{7}} = \frac{0{,}6}{\frac{6}{5} - \frac{5}{7}} = \frac{0{,}6}{\frac{42}{35} - \frac{25}{35}} = \frac{0{,}6}{\frac{17}{35}} = \frac{6 \cdot 35 \cdot 7 \cdot 3}{10 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{21}{17}$.

$x_5 = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{10}{7} - \frac{21}{17}} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{170 - 147}{119}} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{23}{119}} = \frac{5 \cdot 119 \cdot 17}{7 \cdot 23} = \frac{85}{23}$.

Последовательность возрастающая.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

М	А	0	0	0	1	3	6	9	9	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Степанов

Имя Иван

Отчество Дмитриевич

Дата рождения 07.06.2005 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона [redacted] **Подпись** Ctep

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	3	6	9	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	20	6	84

31

№ 2

$3+1+1+1+1=7 \Rightarrow$ делится на 7
$3+3+1+1+1=9 \Rightarrow$ не делится на 7
$3+3+3+1+1=11 \Rightarrow$ не делится на 7
$3+3+3+3+1=13 \Rightarrow$ не делится на 7
$3+3+3+3+3=15 \Rightarrow$ не делится на 7
$1+1+1+1+1=5 \Rightarrow$ не делится на 7

$\Rightarrow$ в каждом столбце будет стоять по 4 единицы и по 1 тройке $\Rightarrow 4\cdot 8 = 32$ единицы и $8\cdot 1 = 8$ троек.

Т.к. сумма чисел в каждом столбце делится на 7, то и сумма всех чисел должна делиться на 7. Сумма всех чисел равна $32 + 8\cdot 3 = 56 \vdots 7$

$1+1+1+1+1+1+1+1=8 \Rightarrow$ не делится на 7
$3+1+1+1+1+1+1+1=10 \Rightarrow$ не делится на 7
$3+3+1+1+1+1+1+1=12 \Rightarrow$ не делится на 7
$3+3+3+1+1+1+1+1=14 \Rightarrow$ делится на 7

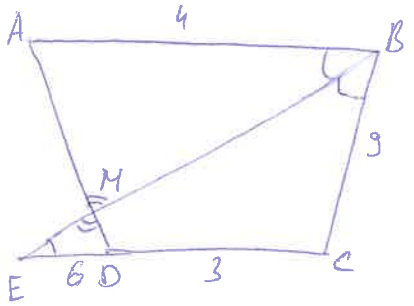
$\Rightarrow$ в каждой строке должно быть минимум три „3", строк 5, а „3" восемь $\Rightarrow$ на каждую строку не хватит по три „3" $\Rightarrow$ Вася не сможет так расставить числа.

Ответ: не удастся.

№ 3

Дано: ABCD – трапеция
AB и CD – основания
BM – биссектриса
$AB=4$; $BC=9$; $CD=3$

$AM:MD=?$



Решение:
Продолжим сторону CD до пересечения с BM.
$\angle BEC = \angle EBC$ (накрест лежащие углы при $AB \parallel EC$ и секущей BE) $\Rightarrow$

$\triangle BCE$ – равнобедр. $\Rightarrow EC = BC = 9 \Rightarrow ED = EC - DC = 9-3=6$.

Рассмотрим $\triangle AMB$ и $\triangle EMD$

1) $\angle BEC = \angle EBC$ (доказано)
2) $\angle AMB = \angle EMD$ (вертикальные)

$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle EMD \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{MB}{EM} = \frac{AM}{MD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Ответ: точка M делит отрезок AD в отношении 2 к 3.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 3 6 9 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4

$x^2y^3=3^{15}\cdot 20^{20}\cdot 5^{15}=3^{15}\cdot 4^{20}\cdot 5^{20}\cdot 5^{15}=3^{15}\cdot 2^{20}\cdot 2^{20}\cdot 5^{20}\cdot 5^{15}=3^{15}\cdot 2^{40}\cdot 5^{35}$

3^{15} можно разбить на 3 и 2 степены 3 способами: $3^0\cdot 3^{15}$; $(3^3)^2\cdot(3^3)^3$; $(3^6)^2\cdot 3^3$.

2^{40} можно разбить на 3 и 2 степены 7 способами: $(2^2)^2\cdot(2^{12})^3$; $(2^5)^2\cdot(2^{10})^3$; $(2^8)^2\cdot(2^8)^3$; $(2^{11})^2\cdot(2^6)^3$; $(2^{14})^2\cdot(2^4)^3$; $(2^{17})^2\cdot(2^2)^3$; $(2^{20})^2\cdot 2^0$.

5^{35} можно разбить на 3 и 2 степени 6 способами: $5^2\cdot(5^{11})^3$; $(5^4)^2\cdot(5^9)^3$; $(5^7)^2\cdot(5^7)^3$; $(5^{10})^2\cdot(5^5)^3$; $(5^{13})^2\cdot(5^3)^3$; $(5^{16})^2\cdot 5^3$.

+

$n=3\cdot 7\cdot 6=126$ решений.

Ответ: 126 решений.

№ 5

Выписав несколько первых членов последовательности, можно заметить, что знаменатель увеличивается на 2, а числитель не меняется ($\frac{3}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{3}{13}$) $\Rightarrow$ первый знаменатель равен 3, тогда сотый знаменатель будет равен $3+2\cdot 99=201 \Rightarrow x_{100}=\frac{3}{201}=\frac{1}{67}$

Ответ: $x_{100}=\frac{1}{67}$

№ 1

$a(a+1)=b(b+1)=c(c+1)$, $a(a+1)=b(b+1)$ при $a\neq b$ только когда $a=-b-1$ или $b=-a-1$, поэтому различными могут быть только 2 числа из a, b и c $\Rightarrow$ 2 из них будут одинаковыми $\Rightarrow$ в выражении $(a-b)\cdot(b-c)(c-a)$ одна из скобок будет равна нулю $\Rightarrow$ произведение скобок будет равно нулю.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	2	6	9	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Торокулова

Имя Жанылай

Отчество Мурбековна

Дата рождения 20.11.2005 **Класс** 9

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 89029465093 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	3	2	6	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	12	–	72

3.1

4). $a(a+1) = b(b+1)$

$a^2+a = b^2+b$

$a^2-b^2 = b-a$

$(a-b)(a+b) = -(a-b)$

$(a-b)(a+b)+(a-b)=0$

$(a-b)(a+b+1)=0$

$a-b=0$ или $a+b+1=0$

$a=b$ $\quad b=-1-a$

$b(b+1)=c(c+1)$

$b^2+b=c^2+c$

$b^2-c^2=c-b$

$(b-c)(b+c)+(b-c)=0$

$(b-c)(b+c+1)=0$

$b-c=0$ или $b+c+1=0$

$b=c$

$a(a+1)=c(c+1)$

$a^2+a=c^2+c$

$a^2-c^2=c-a$

$(a-c)(a+c)=-(a-c)$

$(a-c)(a+c+1)=0$

$a-c=0$ или $a+c+1=0$

$c=-1-a$

Если $(a-b)=0$ или $b-c=0$ или $a-c=0$, то

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$

Иначе:

$b=-1-a$, $c=-1-a$ $\Rightarrow b=c \Rightarrow b-c=0 \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=0$

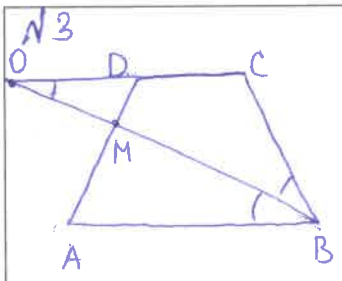
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 3 2 6 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Достроим ~~BD~~ DC и ~~B~~BM до точки пересечения (пусть она будет называться O)

1) Т.к. $OC \parallel AB$ ~~тра~~ т.к. ~~ABCD~~ $DC \parallel AB$ как основан. трапец.

$\angle ABM = \angle BOC$ — как накрестлеж. при $\parallel$

$\Downarrow$

$\angle BOC = \angle MBC$, т.к. BM — биссектриса

$\Downarrow$

$\triangle OCB$ — равнобедрен. по призн. равноб. $\triangle$

$OC = CB = 9$ — опред. равноб. $\triangle$

$OD = OC - CD = BC - CD = 9 - 3 = 6$

2) Рассмотрим $\triangle ODM$ и $\triangle BMA$

$\angle ODA = \angle DAB$ — как накрестлеж. $\angle$ при $OC \parallel AB$

~~$\angle$ и $AMB=$~~ $\Downarrow$

$\triangle ODM \sim \triangle BAM$ (подобны) — по двум углам

$\Downarrow$

~~$\frac{OD}{BM} = \frac{DM}{MA} = \frac{OM}{MB}$~~

~~Т.к. $\frac{OD}{BM}$~~

$\frac{OD}{AB} = \frac{DM}{AM} = \frac{OM}{BM}$ по свойству подоб. $\triangle$

Т.к. $\frac{OD}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, то

$\frac{DM}{AM} = \frac{3}{2}$ +

Ответ: 3:2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 3 2 6 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) $3^{15}\cdot 20^{20}\cdot 5^{15} = 3^{15}\cdot 2^{40}\cdot 5^{35}$

Каждый из этих множителей ~~взаимно~~ прост, поэтому этими числа (с ~~разными~~ различными показателями степеней) будут как в x так и в y, т.е

Рассмотрим каждое число отдельно

$x^2y^3 = (3^{n_1}\cdot 2^{n_2}\cdot 5^{n_3})^2\cdot(3^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot 5^{k_3})^3$, так что $n_1,n_2,n_3,k_1,k_2,k_3 \geq 0$

$2n_1+3k_1=15 \quad 2n_2+3k_2=40 \quad 2n_3+3k_3=45$

Рассмотрим различные возможные показатели ~~n~~ ~~отнимая~~ $n_1, n_2, n_3, k_1, k_2, k_3$, чтобы выяснить какими числами могут являться x и y

1) $2n_1+3k_1=15$

$2n_1$ - чет $\Rightarrow 3k_1$ - нечет $\Rightarrow k_1$ = нечет:

$k_1=1 \Rightarrow n_1=6$

$k_1=3 \Rightarrow n_1=3$

$k_1=5 \Rightarrow n_1=0$

3 случая (способов)

(если $k_1>5$, то $n_1<0$)

2) $2n_2+3k_2=40$

$2n_2$ - чет $\Rightarrow 3k_2$ - чет $\Rightarrow k_2$ - чет $\Rightarrow$

$k_2=0 \Rightarrow n_2=20$

$k_2=2 \Rightarrow n_2=18$

. . . . . .

$k_2=12 \Rightarrow n_2=2$

всего 7 случаев

(если $k_2>12$, то $n_2<0$)

3) $2n_3+3k_3=35$

k_3 - нечетное

$k_3=1 \Rightarrow n_3=21$

$k_3=3 \Rightarrow n_3=18$

. . . . . .

$k_3=15 \Rightarrow n_3=0$

8 случаев

Тогда всего возможных решений:

$(3^{n_1}\cdot 2^{n_2}\cdot 5^{n_3})^2\cdot(3^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot 5^{k_3})^3$

Кол-во случаев: $(3\cdot 7\cdot 8)\cdot(1\cdot 1\cdot 1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 3 2 6 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~при 3k+1n=21~~
~~k=1 то n=18 (k+n=8)~~
~~k=2 то n=15 (k+n>8)~~

Т.к. ~~если~~ мы выбираем чему равны степени во множителях образуемых от x то автоматически получает значение y

Тогда число 6 возможных решений

$3\times7\times\cancel{8}=168$

Ответ: 168

Задача 2

Пусть столбцы сост. из 5кл
строки сост из 8кл

как Васе необходимо будет расставлять клетки в столбцах:

$3k+1n \vdots 7$ $(k+n=5)$

При $3k+1n=7$

$2k+k+n=7$

$2k=2$

$k=1 \Rightarrow n=4$

Т.е ~~для~~ в 1 столбце 1 тройку и 4 единицы

При $3k+1n=14$

$2k+k+n=14$

$2k=7$

$k=3{,}5$ – X, т.к. нецелое

При $3k+1n\geq21$

$2k+k+n\geq21$

$2k\geq16$, т.к. $k\leq5$, то – неверно X

$\Downarrow$

$k=1$ и $n=4$

В строках:

~~при~~ $3k+1n\vdots7$ $(k+n=8)$

при $3k+n=7$

$2k<0$ – невозможно

при $3k+n=14$
$2k=6$
$k=3 \Rightarrow n=5$

при $3k+n\geq21$
$2k\geq16 \Rightarrow k\geq8$ (но $k<8$)

$\Big\} \Rightarrow k=3,\ n=5$

Заметим, что тогда во всех строчках в сумме троек будет $(3\times5=15)$ а во всех столбцах в сумме $(2\times8=16)$

но т.к. во всех строчках = во всех ~~во~~ столбцах, а $16\neq15$, то

Ответ: нет

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	1	7	7	3	2	1

Шифр

Горный Университет

Адрес площадки проведения

Вариант № 3

Фамилия РЫБИН

Имя МАКСИМ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 17.01.2005

Класс 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 листах

Дата выполнения работы 13.03.2021

Номер телефона 8909 249 48 00

Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 7 | 3 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

3…

N.1.

Распишем наши равенства

$z^2+z=x^2+x$ (1)

$x^2+x=y^2+y$ (2)

$z^2+z=y^2+y$ (3)

Из (1) получаем $(z-x)(z+x+1)=0$

Если $z=x$ $(z-x=0)$, то задача решена, если $z-x\neq 0$, то $z+x+1=0 \Rightarrow z=-(x+1)$

Подставим это значение в (3)

$x^2+2x+1-x-1=y^2+y$

$x^2+x=y^2+y \Rightarrow (x-y)(x+y+1)=0$, Если $x-y=0$, то задача решена, если $x-y\neq 0$, то $x+y+1=0$, получается, что

$\left.\begin{matrix} x+y+1=0 \\ z+x+1=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow z-y=0$, что и требовалось доказать.

$y-z=0 \Rightarrow (x-y)(y-z)(z-x)=0$

N.2

Предположим, что Васе удалось это сделать и найдем возможное количество троек и единиц в столбце и строке (столбец 7 клеток, строка 10 клеток).

Сначала найдем в столбце (7 клеток). Пусть кол-во троек $=x$, а кол-во единиц $=y$, при этом сумма чисел в столбце $=9z$, где z - натуральное, тогда

$\begin{cases} 3x+y=9z & (1) \\ x+y=7 & (2) \end{cases}$ Вычитая из (1), (2), получим, что $2x=9z-7$.

Максимально возможная сумма чисел в столбце $=3\cdot 7=21 \Rightarrow$ $z=1$ или $z=2$, при том, в силу натуральности x, подходит только $z=1$ тогда $x=1$, а $y=6$ (В любом столбце 1 тройка и 6 единиц).

Теперь найдем количество единиц и троек в строке (10 клеток). Пусть кол-во троек $=x'$, а кол-во единиц y', при том, сумма чисел в столбце $=9z'$ где z' - натуральное, тогда

$\begin{cases} 3x'+y'=9z' & (3) \\ x'+y'=10 & (4) \end{cases}$ Вычитая из (3), (4), получаем $2x'=9z'-10$.

Максимально возможная сумма $=3\cdot 10=30 \Rightarrow z'=1$ или $z'=2$ или $z'=3$, однако в силу натуральности x', $z'=2$, а $x'=4$ (4 тройки и 6 единиц $y'=6$ в любой строке.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 7 | 3 | 2 | 1 |

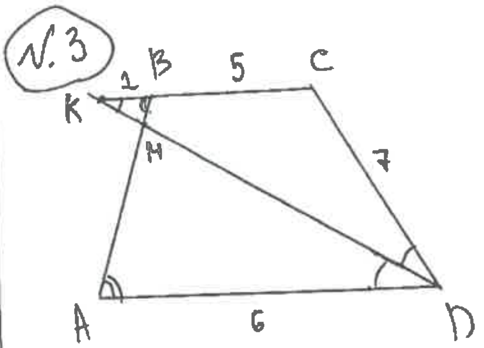
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Так как в любом столбце есть только 1 тройка, то при заполнении числами какой-либо строки мы „кладем", ставим, в какой-либо столбец по 1 тройке. Этот столбец будет „занят" тройкой и больше в этом столбце троек поставить не получится. И так как столбцов всего 10, то можно поставить только 10 троек, однако в каждой строке троек 4, а строк всего 7, а значит троек нужно будет поставить 28 штук! А значит мы поставить только 10 => Вася не сможет это сделать.

Ответ: нет.

№3



Дано: ABCD - трапец.; BC=5; DC=7; AD=6; DM - бис.

Найти: AM : MB

Решение:

1) Продлим DM до пересечения с BC, пусть DM пересекается с BC в точке K.

2) $BC \parallel AD$ (т.к. ABCD - трап.) $\Rightarrow \angle MDA = \angle BKM \Rightarrow \Delta KCD$ - р/б $\Rightarrow KC = CD \Rightarrow KB = CD - BC = 2$; $\Rightarrow \angle KBM = \angle MAD \Rightarrow \Delta MKB \sim \Delta MDA$ (по 2 углам).

3) $\Delta MKB \sim \Delta MDA \Rightarrow \frac{AD}{KB} = \frac{AM}{MB} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow$ точка M делит AB 3 к 1.

Ответ: 3 к 1.

№4 Заметим, что если мы дали/нашли значение одной переменной, то вторая определяется (то есть мы точно знаем ее значение), вплоть до знака, так как степени у x и y нечетные. Так же разложим на простые множители 6 и 10 (3 и так простое). $6^{50}=2^{50}\cdot 3^{50}$; $10^{33}=2^{33}\cdot 5^{33}$, тогда $x^3y^5=3^{50}\cdot 2^{50}\cdot 3^{50}\cdot 2^{33}\cdot 5^{33}$; $x^3y^5=3^{100}\cdot 2^{83}\cdot 5^{33}$. Будем определять значение y такое, что и y и x - натуральные. y „забирает" у каждого множителя число степеней кратное 5 (при натуральном y и если забирает), чтоб x был натуральным нужно, чтобы чтобы у всех множителей осталась степень, кратная 3. Для каждого множителя (3^{100}, 2^{83}, 5^{33}) найдем возможные варианты вышеописанного.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 7 7 3 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Для 3^{100} также 5 степени это (то есть $(y^5)^n$, сейчас я нахожу возможные n), 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. – 7 вариантов

Для 2^{83} также 5 степени (аналогично находим некоторое k, $(y^5)^k$), 1, 4, 7, 10, 13, 16. – 6 вариантов.

Для 5^{33} также 5 степени (т.е. $(y^5)^h$, находим возможные h), 0, 3, 6 – 3 варианта.

Сейчас я нахожу также ~~...~~ y при которых x – целый (означает кратность 3 степени у любого множителя).

И так как эти варианты не пересекаются, то перемножаем их и находим кол-во решений, а именно:

$3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$ вариантов/решений.

Ответ: 126 решений.

№ 5 $\quad x_{n-1} \cdot x_n + x_{n-1} \cdot x_{n-2} = 2x_n \cdot x_{n-2}$

$$x_n(2x_{n-2} - x_{n-1}) = x_{n-1} \cdot x_{n-2}$$

$$x_n = \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$$, найдя x_n в общем виде, найдем x_{n+1}

$$x_{n+1} = \frac{x_n \cdot x_{n-1}}{2x_{n-1} - x_n} = \frac{\frac{(x_{n-1})^2 \cdot x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}}{2x_{n-1} - \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}} = \frac{\frac{(x_{n-1})^2 \cdot x_{n-2}}{\cancel{(2x_{n-2} - x_{n-1})}}}{\frac{4x_{n-1} \cdot x_{n-2} - 2(x_{n-1})^2 - x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{\cancel{(2x_{n-2} - x_{n-1})}}},$$

$$\frac{(x_{n-1})^{\cancel{2}} \cdot x_{n-2}}{3\cancel{x_{n-1}} \cdot x_{n-2} - 2(x_{n-1})^{\cancel{2}}} = \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{3x_{n-2} - 2x_{n-1}}$$. Сравним x_n и x_{n+1}.

$\leftarrow x_{n-1} \neq 0$, т.к. его можно вынести за скобку в знаменателе.

$$x_n = \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{3x_{n-2} - 2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{(2x_{n-2} - x_{n-1}) + (x_{n-2} - x_{n-1})}$$. Мы доказали это в общем виде =>

$$x_3 = \frac{x_1 \cdot x_2}{2x_1 - x_2} = \frac{\frac{5}{8}}{2 - \frac{5}{8}} = \frac{5}{11}$$ Следовательно $$x_{101} = \frac{x_1 \cdot x_2}{100x_1 - 99x_2} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{100}{20} - \frac{99 \cdot 5}{8}}$$,

$$x_4 = \frac{x_1 \cdot x_2}{3x_1 - 2x_2} = \frac{\frac{5}{8}}{3 - \frac{10}{8}} = \frac{5}{14} \; \ldots \; \frac{1}{160 - 99} = \frac{1}{61}$$

Ответ: $\frac{1}{61}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный университет | М А 0 0 0 1 1 7 5 2 2 1

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 2

Фамилия Тимофеев

Имя Григорий

Отчество Михайлович

Дата рождения 18.08.2004 **Класс** 9

Предмет математика

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7980 6847581 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	1	7	5	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	–	60

№1 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ доказать $\Leftarrow\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ b=c \\ c=a \end{array}\right.$

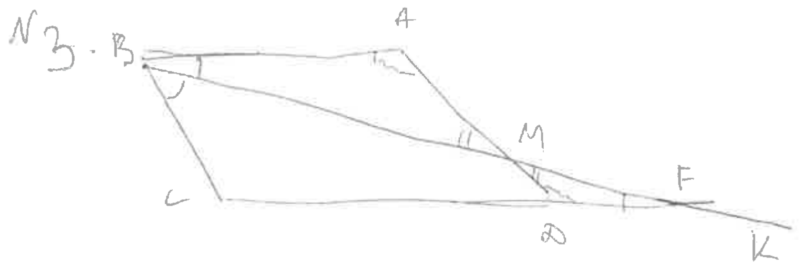
$a(a+1)=b(b+1)=c(c+1)$

$\begin{cases} a(a+1)=b(b+1) \\ b(b+1)=c(c+1) \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+a+b^2+b \\ b^2+b=c^2+c \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-b^2+a-b=0 \\ b^2-c^2+b-c=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a-b)(a+b)+(a-b)=0 \\ (b-c)(b+c)+(b-c)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a-b)(a+b+1)=0 \\ (b-c)(b+c+1)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b+1=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=c \\ b+c+1=0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b=c \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ b+c+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b+1=0 \\ b=c \end{cases} \\ \begin{cases} a+b+1=0 \\ b+c+1=0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=b=c \\ \begin{cases} a=b \\ b+c=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=c \\ a+b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-1 \\ b+c=-1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b \\ b=c \\ a=c \end{array}\right.$

ч.т.д.

№3.



Дано:
$ABCD$ – трапеция; $AB \parallel CD$
BK – биссектриса $\angle B$
$BK \cap AD = M$
$AB=4$; $BC=9$; $CD=3$
Найти: $\frac{AM}{MD}$

Решение:

1) $BK \cap CD = F$

2) $\triangle ABM$ и $\triangle DFM$
$\angle BAM = \angle MDF$ как накрест лежащие при $BA \parallel DK$ и секущей AD
$\angle AMB = \angle DMF$ как вертикальные

Значит, $\triangle ABM \sim \triangle DFM$ по 2м углам

В них $\frac{AM}{MD} = \frac{AB}{DF}$

3) $\angle BFC = \angle ABM$ как накрест лежащие при $AB \parallel CK$ и секущей BF

Значит, $\angle CBF = \angle BFC$, т.к. BF – биссектриса

Значит, $\triangle BCF$ – равнобедренный с основанием $BF \Rightarrow$
$BC = CF$
$DF = CF - CD = BC - CD = 9 - 3 = 6$

4) Из (2) и (3) $\frac{AM}{MD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Ответ: точка M делит AD в отношении $2:3$ считая от вершины A.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2   М А 0 0 0 1 1 7 5 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 $x^2y^3 = 3^{15}\cdot 2^{20}\cdot 5^{15}$; $xy = 3^5\cdot 5^5\cdot 2^{10}$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2}{2^{20}} = \frac{3^{15}\cdot 5^{15}}{y^3}$$

$$\frac{x}{2^{10}} = \frac{(3\cdot 5)^5}{y}$$

$$xy = 3^5\cdot 5^5\cdot 2^{10}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3^4\cdot 5^5\cdot 2^{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3^2 \\ y = 3^3\cdot 5^5\cdot 2^{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3^3 \\ y = 3^2\cdot 5^5\cdot 2^{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3^4 \\ y = 3\cdot 5^5\cdot 2^{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3^5 \\ y = 5^5\cdot 2^{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

- - -

(Аналогично 10 систем с "изменением" степени двойки)

- - -

(Аналогично 5 систем с пятеркой)

~~...~~ - - .

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3^5\cdot 5^5\cdot 2^{10} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x = 3^5\cdot 5^5\cdot 2^{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

Итого $2+5+5+10=22$ случаев

Ответ: уравнение имеет 22 решения в натуральных числах.

№2.

Чтобы узнать возможно ли в таблице 5×8 в клетки вписать числа 3 и 1, чтобы сумма по столбцам и строкам делилась на 7, рассмотрим сколькими способами можно получить эту сумму. Для столбца это комбинация $3+1+1+1+1$, для строки: $3+3+3+1+1+1+1+1$, и они единственные, удовлетворяющие условию.

Однако, ~~что~~ если мы все же заполним таблицу такими комбинациями, общая сумма по столбцам (т.е. во всей таблице) будет равна $8\cdot(3+1+1+1+1)=56$, а по строкам $5\cdot(3+3+3+1+1+1+1+1)=70$, чего быть не может, значит в таблице 5×8 невозможно расположить 3 и 1 описанным образом.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

университет Горный

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	1	3	6	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Абаянцева

Имя Евгения

Отчество Юрьевна

Дата рождения 28.05.2006 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 13 03 2021

Номер телефона +79112665192 **Подпись** [подпись]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 0 1 3 6 2 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 раскроем скобки в $(a-b)(b-c)(c-a)$:
$\Leftrightarrow$ получим:

$\Leftrightarrow abc-ac^2-b^2c+bc^2-a^2b+a^2c+ab^2-abc=0$

$ab^2+a^2c+bc^2-ac^2-a^2b-b^2c=0$

$\Leftrightarrow a\cdot(b^2-c^2)+c\cdot(a^2-b^2)+b\cdot(c^2-a^2)=0$

$\Leftrightarrow$ заменим разность квадратов на то, что написано справа:

$a\cdot(c-b)+c(b-a)+b\cdot(a-c)=0$

$\Leftrightarrow ac-ab+cb-ac+ba-bc=0$

$\Leftrightarrow 0=0.$

$a(a+1)=b(b+1)$
$\Leftrightarrow a^2+a=b^2+b$
$\Leftrightarrow a^2-b^2=b-a$

$b(b+1)=c\cdot(c+1)$
$\Leftrightarrow b^2+b=c^2+c$
$\Leftrightarrow b^2-c^2=c-b$

$a(a+1)=c(c+1)$
$\Leftrightarrow a^2+a=c^2+c$
$\Leftrightarrow c^2-a^2=a-c$

3-8

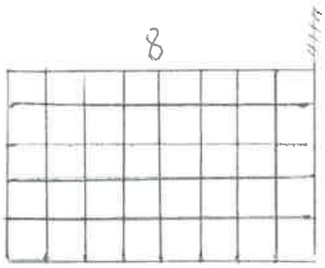
чтд

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	6	86

№2

8

5



max сумма в строке − $8\cdot3=24$

min сумма в строке − $8\cdot1=8$.

$\Rightarrow$ суммы, делящиеся на 7 − две: 14 и 21. Расклад на 14: $3\cdot3+5$

Расклада на 21 нет: $3\cdot8=24$, $3\cdot7+1=22$, $3\cdot6+2=20$

получаются только чётные суммы.

максимальная сумма в столбце − $5\cdot3=15$
минимальная сумма в столбце − $5\cdot1=5$.

$\Rightarrow$ ~~только три~~ сумма в столбце, равная 7 или 14. Для 7 расклад ~~такой~~ одна тройка и 4 единицы. Для 14 расклада нет, т.к. $3\cdot5=15$, а $3\cdot4+1=13$, $3\cdot3+2=11$, т.е. мы можем получить лишь нечётные суммы $\Rightarrow$ можем получить только 7 (и при этом, только одним раскладом − одной тройкой и 4 единицами)

$\Rightarrow$ с одной стороны троек у нас 8, если считать по столбцам, а с другой стороны троек у нас 15, если считать по строкам, −?!

$\Rightarrow$ Вася не может расположить так числа, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел делилась на 7.

Ответ: нет, не может.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	0	1	3	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N4 $x^2\cdot y^3 = 3^{15}\cdot 20^{20}\cdot 5^{15} = 3^{15}\cdot 4^{20}\cdot 5^{35} = 2^{40}\cdot 3^{15}\cdot 5^{35}$

так как если число возведено в квадрат, то все простые множители в нём находятся в степенях, делящихся на 2. ~~...~~ для кубов все степени делятся на 3. Значит, нужно разложить 40, 15 и 35 на степени, одна из которых $\vdots 2$, а другая $\vdots 3$. Для 15 это 3 варианта (15 и 0; 9 и 6; 3 и 12), для 35 – 6 (33 и 2; 27 и 8; 21 и 14; 15 и 20; 9 и 26; 3 и 32), для 40 – 7 (36 и 4, 30 и 10; 24 и 16; 18 и 22; 12 и 28; 6 и 34; 0 и 40). => всего вариантов распределения $7\cdot 3\cdot 6 = 126$ (для каждого из вариантов одного простого множителя релевантен ~~...~~ вариант другого множителя, поэтому перемножаем).

Ответ: 126 вариантов.

N5 Дано: $\{x_n\}$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{5}$; $\forall n \geq 3$ $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$

Найти: x_{100}.

$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-2}}{2x_{n-2}-x_{n-1}} \Leftrightarrow x_n = \frac{x_{n-2}\cdot x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$. $x_3 = \frac{x_1\cdot x_2}{2x_1 - x_2} = \frac{1\cdot\frac{3}{5}}{2-\frac{3}{5}} = \frac{3}{7}$.

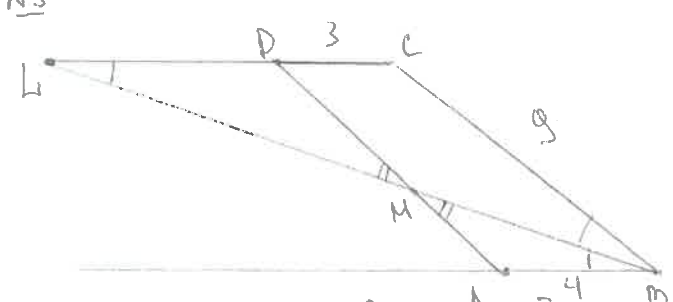
$x_4 = \frac{3}{9}$; $x_5 = \frac{3}{11}$ и т.д. => у x_{100} в числителе будет 3, а в знаменателе нечётное число, делящееся на 3 (для ~~числа с номером~~ x_n, при котором n при делении на 3 даёт остаток 1, знаменатель числа делится на 3)

65

=> это число 201 (арифм. прогрессия, у которой первый член – 3, а шаг равен 2) => $x_{100} = \frac{3}{201}$ или $\frac{1}{67}$.

Ответ: $x_{100} = \frac{3}{201} = \frac{1}{67}$

N3



Дано: тр. ABCD; бис. ∠B – BM, (·)M ∈ [AD]

AB = 4; BC = 9; CD = 3

Найти: DM : MA

Ответ: 3 : 2 = DM : MA

Решение: продолжим биссектрису BM за точку M до пересечения со ~~стороной~~ продолжением стороны CD. По свойствам трапеции, получившийся ΔBCL ((·) L – пересечение) р/б с осн. BL.

Тогда ✗ ΔABM и ΔDLM. Они подобны по 2м углам (∠MBA = ∠DLB как накрест леж., ∠BMD... = ∠BMA т.к. являются вертикальными)

=> $\frac{DM}{MA} = \frac{DL}{BA}$. $DL = LC - DC = 9 - 3 = 6$

$LC = LB = 9$

=> $\frac{DM}{MA} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Анапа

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	3	6	2	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ПЕРФИЛЬЕВ

Имя Виктор

Отчество Анатольевич

Дата рождения 18.05.2005 **Класс** 9 "А"

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона 8(950) 133-99-00 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 6 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	0	60

3а6

№1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Для начала проверим, могут ли все 10 пар быть ⋮ 11, тогда сумма всех чисел ⋮ 11

$S_{чисел} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210 \not\vdots 11 \Rightarrow$ максимум можно сделать 9 пар, а на этот случай есть пример:

$(2+20) \vdots 11$ $(7+15) \vdots 11$

$(3+19) \vdots 11$ $(8+14) \vdots 11$

$(4+18) \vdots 11$ $(9+13) \vdots 11$

$(5+17) \vdots 11$ $(10+12) \vdots 11$

$(6+16) \vdots 11$ $(11+1) \not\vdots 11$

Ответ: 9 чисел

№2

Пусть x бельчат – в хвойном лесу без говорящего бельчонка, тогда y бельчат – в лиственном лесу без говорящего бельчонка, z бельчат – в еловом лесу без говорящего бельчонка,

По усл. задачи составл. ур-ия:

$$\begin{cases} x+y+z+2=2x & (1) \\ x+y+z+2=3y & (2) \\ x+y+z+2=4z & (3) \end{cases}$$

Вычтем из ур-ия (1) ур-ие (2):

$2x-3y=0$

$2x=3y$

$x=1{,}5y \ (4)$

Вычтем из ур-ия (2) ур-ие (3):

$3y-4z=0$

$3y=4z$

$z=\frac{3}{4}y=0{,}75y \ (5)$

Подставим (4) и (5) в (2):

$1{,}5y+y+0{,}75y+2=3y$

$3{,}25y+2=3y$

$-0{,}25y=2$

$y=-8$, что невозможно, значит кто-то из бельчат обсчитался.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	3	3	6	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

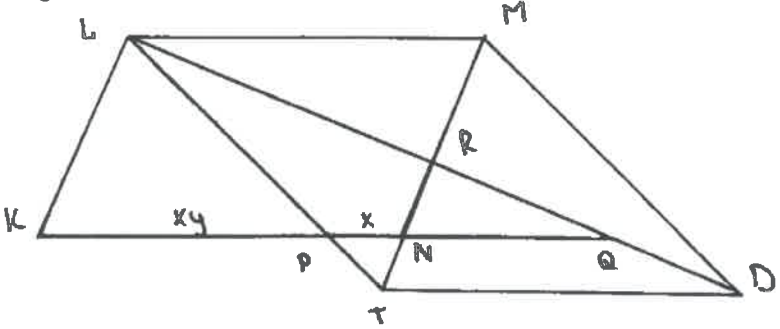
№5

Посчитаем общее кол-во делителей числа N

$N = 3^3 \cdot 2^8 \cdot 5^6$

$D(N) = 4 \cdot 9 \cdot 7 = 252$

№3



Дано:

$KLMN$ - параллелограмм

т. $P \in KN$; $KP = PQ$

$LP \cap MN =$ т. T ; $LQ \cap MN =$ т. R

Док-ть: $MR = RT$

Док-во:

Построим прямую TD до пересеч с LQ и $TD \parallel LM$

$KP : PN = \frac{xy}{x} = y$

Рассмотрим $\triangle KLP$ и $\triangle PTN$:

1) $\angle KPL = \angle NPT$ (как вертик.)

2) $\angle NTP = \angle KLP$ (как бы накрест леж) $\Big\} \Rightarrow \triangle KLP \sim \triangle PTN$ (по 2 ∠) $\Rightarrow \frac{KP}{PN} = \frac{LP}{PT} = X$

$LM = xy + x = X(y+1)$

$\frac{LM}{PQ} = \frac{x(y+1)}{xy} = \frac{y+1}{y}$

Рассмотрим $\triangle LPQ$ и $\triangle LTD$:

1) $\angle TLD$ - общий

2) $\angle LQP = \angle LDT$ (т.к. $KQ \parallel TD$) $\Big\} \Rightarrow \triangle LPQ \sim \triangle LTD$ (по 2 ∠) $\Rightarrow \frac{PQ}{TD} = \frac{LP}{LT} = \frac{y+1}{y}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{PQ}{TD} = \frac{y}{y+1} \\ \frac{LM}{PQ} = \frac{y+1}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow LM = TD \Rightarrow LMTD \text{ - параллелограмм} \Rightarrow \underline{TR = RM}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ростов-на-Дону

пер. Крепостной 139

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	8	9	4	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ЧЕРДАНЦЕВ

Имя ИВАН

Отчество ДЕНИСОВИЧ

Дата рождения 10.10.2005 Класс 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 06.03.21

Номер телефона +79525729718 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Посчитаем сумму всех чисел: $1+2+...+20 = \frac{20\cdot 21}{2} = 210$. $210 \not\vdots 11$ т.к $209 \vdots 11 = 19$. $\Rightarrow$ хоть одна из полученных S будет $\not\vdots 11$ (т.к если все $S \vdots 11$ то и их сумма $\vdots 11$, противоречие). Приведем пример когда все S кроме $1_{ой} \vdots 11$: $1+11$, $2+20$, $3+19$, $4+18$, $5+17$, $6+16$, $7+15$, $8+14$, $9+13$, $10+12$, здесь 9 сумм равных 22 а $22 \vdots 11$ и одна сумма $= 12$.

Ответ: 9 чисел. могут быть кратны 11.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	0	80

3

№2

Пусть в хвойном лесу живет x бельчат, в лиственном л, а в еловом е, тогда изначально бельчонок из хвойного леса знал $x-1$ бельчонка, из лиственного $л-1$, а из елового $e-1$. Тогда:

$$\begin{cases} (x-1) = л+e \\ (л-1) = (x+e):2 \\ (e-1) = (л+x):3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = л+e+1 \\ 2(л-1) = x+e \\ 3(e-1) = л+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = л+e+1 \\ 2л-2 = x+e \\ 3e-3 = л+x. \end{cases}$$

Подставим знач x из 1) во 2) получим $2л-2 = л+e+1+e$ $\Rightarrow$ $л = 2e+3$. Подставим в 1) получим: $x = 2e+3+e+1 = 3e+4$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 0 8 9 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

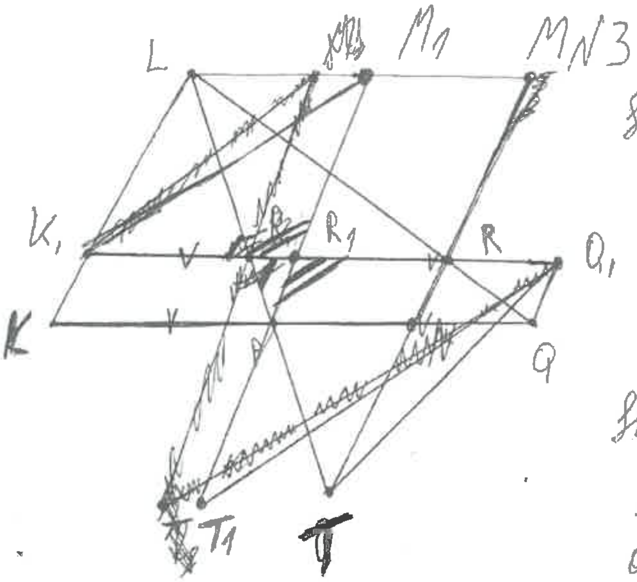
Подставим в 3) получим: $3e - 3 = (2e+3) + (3e+4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3e - 3 = 5e + 7 \Rightarrow -2e = 10 \Rightarrow e = -5. \Rightarrow$

$\Rightarrow Y = -5\cdot 3 + 4 = -11$ а $\lambda = -5\cdot 2 + 3 = -7$.

Проверим: $-11 - 1 = -7 - 5$, $-7 - 1 = (-11 - 5) : 2$ и $(-5 - 1) = (-7 - 11) : 3$. Верно но т.к в лесу может проживать только натур число ≥ 0. а у нас в лесу отрицательное число бельчат, то такого быть не могло $\Rightarrow$ какой-то бельчонок обсчитался.

№3



Найдем (·) K_1 такую что: $K_1R \parallel LM \parallel KQ$ и $K_1 \in KL$.

Найдем (·) Q_1 такую что. $K_1R_1 = R_1Q_1$ (где $R_1 \in LT$ и $R_1 \in K_1Q$) и $K_1R_1 = KP = PQ = R_1Q_1$

Найдем (·) M_1), такую что: $M_1R_1 \parallel MT$. и отложим за (·) R_1 отрезок M_1R_1 получим (·) $T_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1R_1 = MR$ и $R_1T_1 = RT$ (по построению) $\angle T_1R_1Q_1 = \angle K_1R_1M_1$ (как вертикальные) Очевидно что $K_1M_1 \parallel T_1Q_1 \Rightarrow \angle T_1Q_1R_1 =$
$= \angle R_1K_1M_1 \Rightarrow \Delta K_1M_1R_1 = \Delta R_1Q_1T_1$ (по углам и стороне между)

№3

$\Rightarrow T_1 R_1 = R_1 M_1$ и $M_1 R_1 = MR$ и $R_1 T_1 = RT \Rightarrow$

$\Rightarrow MR = RT.$ ч.т.д.

№4

если в последовательности есть последний член то при продолжении ряда возникнет :0. $\Rightarrow x_{n+1} = 0.$

$\Rightarrow x_{n-1} - \frac{1}{x_n} = 0 \Rightarrow x_{n-1} = \frac{1}{x_n} \Rightarrow x_n - \frac{1}{x_{n-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n-2} + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n-1}} \Rightarrow x_{n-2} = \frac{2}{x_{n-1}} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{2}{x_{n-2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n-Q} = \frac{Q+1}{x_{n-Q-1}}$

$\Rightarrow x_{n-(n-2)} = \frac{n-1}{x_{n-(n-2)-1}} \Rightarrow x_2 = \frac{n-1}{x_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 \cdot x_1 = n-1 \Rightarrow n-1 = 17\cdot 83 \Rightarrow n = 17\cdot 83+1 = 1412.$ $\Rightarrow$ Членов у нас $n+1$ (т.к при $n+2$ получаем противоречие). Ответ: 1413 +

№5

Вариантов выбрать натур делитель числа N всего $4\cdot 9\cdot 7$ (т.к тройки мы можем взять в любой из 4 степеней, 2ку в любой из 9, 5ку в любой из 7.) = 252 −

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Ангарск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	7	2	5	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Казаков

Имя Кирилл

Отчество Дмитриевич

Дата рождения 09.07.2005 Класс 9

Предмет математика

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 89501012039 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	–	60

30

№1

Рассмотрим число в паре с числом 11.
∃ x - число в паре с числом 11, для наибольшего количества сумм, число $x+11 \vdots 11$, тогда:

$x+11 \equiv_{11} 0$, $11 \equiv_{11} 0 \Rightarrow x \equiv_{11} 0$ - этого быть не может, т.к. все числа от 1 до 20 кроме 11 не дают в остатке 0. ⇒ чисел из $S_1; S_2 \dots S_{10}$ кратных 11 не больше 9

∃ $S_1 = 1+11 = 12 \not\vdots 11$ | $S_7 = 7+15 = 22 \vdots 11$
$S_2 = 2+20 = 22 \vdots 11$ | $S_8 = 8+14 = 22 \vdots 11$
$S_3 = 3+19 = 22 \vdots 11$ | $S_9 = 9+13 = 22 \vdots 11$
$S_4 = 4+18 = 22 \vdots 11$ | $S_{10} = 10+12 = 22 \vdots 11$
$S_5 = 5+17 = 22 \vdots 11$
$S_6 = 6+16 = 22 \vdots 11$

9 сумм кратных 11

Ответ: 9

№2

Пусть: x бельчат было из 1 леса; y бельчат было из 2 леса, z бельчат было из 3 леса

Тогда: 1 бельчонок знал сначала $(x-1)$ бельчат, 2 сначала (всех бельчат из своего леса кроме него)
2 сначала $(y-1)$ бельчат; 3 сначала $(z-1)$ бельчат;
После встречи: 1 бельчонок знал $(x-1+y+z)$ бельчат
2 бельчонок знал $(x+y+z-1)$ бельчат
3 бельчонок знал $(x+y+z-1)$ бельчат

По условию задачи:

1 бельчонок: $\frac{x+y+z-1}{x-1} = 2$ 2 бельчонок: $\frac{x+y+z-1}{y-1} = 3$ 3 бельчонок $\frac{x+y+z-1}{z-1} = 4$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 7 | 2 | 5 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

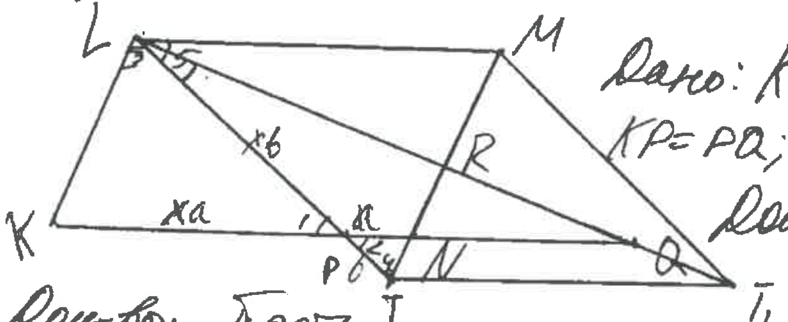
1) $x+y+z-1=2x-2$
2) $x+y+z-1=3y-3$
3) $x+y+z-1=4z-4$ $\Rightarrow$ $2x-2=3y-3=4z-4 \Rightarrow$ $y=\frac{2x+1}{3}$ $z=\frac{2x+2}{4}$

1) $\frac{2x+1}{3}+x+\frac{x+1}{2}-1=x$

~~$\frac{6x+3+12x+2+6}{6}=x$ $6x=8x+11$~~

$\frac{4x+2+3x+3+6}{6}=x$ $6x=7x+11$ $x=-11$ - такого быть не может

№3.



Дано: KLMN - параллелогр.
KP=PQ;
Доказать: MR=RT

Док-во: Построим прямую $TT_1 \parallel LM$ до пересечения с прямой LQ

Рассмотрим $\triangle KLP$ и $\triangle PNT$

1. $\angle 3=\angle 1$ (т.к. $KL \parallel TM$ (т.к. KLMN - парал.) LT - секущая)
2. $\angle 4=\angle 2$ (как вертикальные) $\Rightarrow$

$\triangle KLP \sim \triangle PNT$ (по дв. углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow KP:PN=x=LP:PT$

$LP=xb$ $PT=b \Rightarrow LT=(x+1)b \Rightarrow \frac{LP}{LT}=\frac{x}{x+1}$

~~Рассмотрим $\triangle PNT$ и $\triangle LMT$~~
~~1. $\angle 4$ - общий~~
~~2. $\angle 5=\angle 2$ (как соответственные углы $LM \parallel PN$) $\Rightarrow \triangle PNT \sim \triangle LMT$ (по двум углам)~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 3 7 2 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~ΔPKT ~ ΔLMT~~ =>

Рассмотрим ΔLTT_1 и ΔPLQ

1. ∠QLP - общий

2. ∠LQP=∠LT_1T (как соотв. при $PQ \parallel TT_1$) } =>

ΔLTT_1 ~ ΔPLQ (по ин. углам):

$$\frac{PQ}{TT_1}=\frac{LP}{LT}=\frac{x}{x+1}$$

$KLMN$ - параллелограмм =>

$LM=KN=(x+1)a$

$KP=PQ=xa$ } => $\frac{PQ}{LM}=\frac{x}{x+1}$

$\frac{PQ}{LM}=\frac{x}{x+1}$

$\frac{PQ}{TT_1}=\frac{x}{x+1}$ } => $LM=TT_1$

$LM=TT_1$ (по доказанному)

$LM \parallel TT_1$ (по построению) } => LMT_1T - параллелограм.

LT_1 и MT - диагонали

LMT_1T - параллелограмм } => $MR=RT$ ч.т.д.

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	3	4	5	5	2	1

СФУ

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия АИДЕНКО

Имя АЛИНА

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 06.01.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 89135778126 **Подпись** Аид/

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	3	4	5	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	15	10	0	10	55

5. $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}$

$A = f(0) + f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \ldots + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f(1)$

Разделим слагаемые на пары, так, чтобы сумма $x_0 = 1$.
(что есть $f\left(\frac{1}{2021}\right)$ и $f\left(\frac{2020}{2021}\right)$ т.к. $\frac{1}{2021} + \frac{2020}{2021} = 1$).

Заметим, что суммы функций таких пар также равны 1:

$$f\left(\tfrac{1}{2021}\right) + f\left(\tfrac{2020}{2021}\right) = \frac{\sqrt[2021]{9}}{\sqrt[2021]{9}+3}^{(\sqrt[2021]{9^{2020}}+3)} + \frac{\sqrt[2021]{9^{2020}}}{\sqrt[2021]{9^{2020}}+3}^{(\sqrt[2021]{9}+3)} = \frac{9 + 3\cdot\sqrt[2021]{9} + 9 + 3\cdot\sqrt[2021]{9^{2020}}}{9 + 3\sqrt[2021]{9^{2021}} + 3\sqrt[2021]{9} + 9} =$$

Нет д-ва в общем виде.

$= 1.$

$\left(\sqrt[2021]{9} \cdot \sqrt[2021]{9^{2020}} = \sqrt[2021]{9^{2021}} = 9\right)$

Так работает на всех парах, т.к. ~~степени~~ сумма степеней $= 2021$
Всего таких пар $\frac{2022}{2} = 1011$ (от 0 до 2021)

$\Rightarrow A = 1011 \cdot 1 = 1011$

Ответ: 1011.

1. a, b, c, d - положительны, $a < c$, $d < b$

$x^4 + ax + b = 0$
$x^4 + cx + d = 0$

Если есть решение, то: $x^4 + ax + b = x^4 + cx + d$
$ax - cx = d - b$
$x(a - c) = d - b$
$a < c \Rightarrow a - c < 0$
$d < b \Rightarrow d - b < 0$
$\Rightarrow x > 0$

но у уравнения $x^4 + ax + b = 0$ нет корней при $x > 0$ и a и $b > 0$. $\Rightarrow x^4 + ax + b = 0$ и $x^4 + cx + d = 0$ не имеют общих корней

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	3	4	5	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. кол-во тетрадей $= x$
кол-во книг $= y$

тогда: $64 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{5}y = \frac{6}{7}x + \frac{4}{5}y$

$$\frac{5}{7}x + \frac{3}{5}y = 64$$

$$25x + 21y = 64 \cdot 35$$

Мы знаем, что кол-во тетрадей $\vdots\ 2$ (т.к. можно было взять 2 тетрадь) и $\vdots\ 7$ (т.к. на столе не может лежать нецелое число тетрадей). По этой же ~~пот~~ причине кол-во книг $\vdots\ 3$ и 5.

пусть $x = 7 \cdot 2x_1$ и $y = 5 \cdot 3y_1$

$$64 + \frac{1}{\cancel{5}}\cancel{5} \cdot 3y_1 + \frac{1}{\cancel{7}}\cancel{7} \cdot 2x_1 = \frac{6}{\cancel{7}}\cancel{7} \cdot 2x_1 + \frac{4}{\cancel{5}}\cancel{5} \cdot 3y_1$$

$$64 + 3y_1 + 2x_1 = 12x_1 + 12y_1$$

$$64 + 3y_1 + 2x_1 = 12(x_1 + y_1)$$

$64 \vdots 4$ и $64 \not\vdots 3$ $\qquad 12 \vdots 3$ и 4

$\Rightarrow 3y_1 + 2x_1 \vdots 4$

$3y_1 \vdots 3$, то $64 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2x_1 \equiv 2 \pmod 3$

Тогда x может равняться 14, 56, 98 ...

y: 15, 30, 45, 60, 75, 90 ...

Перебор не приведен

Подставляя x и y в первое уравнение, недолишим перебором получаем, что $x = 14$. $y = 90$, для большего x правая часть уравнения будет много больше левой (64 фиксировано), к тому же уравнение первой степени имеет только одно (или 0) решений.

$$64 + 2 + 18 = 12 + 72$$

кол-во ~~учеников~~ участников $= 64 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 64 + 7 + 30 = 101$

Ответ: 101 ~~ученик~~. участник.

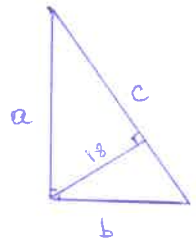
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. $10 = 2 \cdot 5$

Среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 есть только одно число кратное пяти (5) и четыре числа кратных двум (2, 4, 6, 8). Вероятность выбрать $5 = \frac{1}{8}$, вероятность выбрать $(2,4,6,8) = \frac{1}{2}$. Так как нам нужны оба этих числа вероятности перемножаются. От кол-ва выбираемых чисел вероятности не зависят

$\Rightarrow$ вероятность $= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ −

Ответ: $\frac{1}{16}$.

3. 

$2r = a + b - c$

$pr = S$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{18 \cdot c}{2} = 9c$

~~предположим, что r = 6, тогда~~

$r = \frac{S}{p} = \frac{9c}{a+b+c} \cdot 2 = \frac{18c}{a+b+c}$

предположим, что $r = 6$, тогда:

$\frac{18c}{a+b+c} = 6$ $18c = 6a + 6b + 6c$

$12c = 6a + 6b$

но тогда $a + b = c$, а это невозможно

$\Rightarrow r > 6$.

Возьмем $r = 7$.   r не обяз. целое!

$\frac{18c}{a+b+c} = 7$ $11c = 7a + 7b$

$a^2 + b^2 = c^2$

$72c^2 = 28ab$ $\frac{ab}{2} = 9c$

$\Rightarrow 72c^2 = 28 \cdot 18c$

~~вычисл~~

$c = 7$

тогда $a^2 + b^2 = 49$ $(a+b)^2 = 49 + 18 \cdot 7 \cdot 2$

$2ab = 18 \cdot 7 \cdot 2$ $a + b = \sqrt{301}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 5 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

из уравнения $2r = a+b-c$

$a+b = 14+7 = 21$

но $21 \neq \sqrt{301}$

$441 \neq 301$

$\Rightarrow r > 7$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	5	9	5	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ДОЛЖЕНКОВА

Имя Софья

Отчество АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения 02.12.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 89029818385 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	5	0	63

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	0	5	9	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Допустим, что уравнения $x^6+ax+b=0$ и $x^6+cx+d=0$ имеют общие корни, то можно их приравнять (т.к. корни равны) и выражения равны 0.

$$x^6+ax+b=x^6+cx+d$$
$$\cancel{x^6}-\cancel{x^6}+ax-cx=d-b$$
$$x(\underbrace{a-c}_{-})=\underbrace{d-b}_{-}.$$

Т.к. по условию $a<c$ и $d<b$, то (т.к. а b, c, d положительные)

$a-c$ = будет число отрицательное

$d-b$ = число отрицательное

В этом случае при умножении x на отрицательное значение может получиться отрицательное значение, если x будет положительным числом.

Рассмотрим уравнение:

$\underset{+}{x^6}+\underset{+}{a}x+\underset{+}{b}=0$ и $\underset{+}{x^6}+\underset{+}{c}x+\underset{+}{d}=0$

По условию a, b, c, d - положительные; x^6 - положительное (т.к. степень чётная). Выражения могут равняться 0, если только x - отрицательное число.

Мы получили противоречие. Т.к. x должен быть отрицательным числом, а при условии, что ур-ния имеют общие корни, x должен быть положительным. Значит такого условия не может быть, и уравнения не имеют общих корней.

Ответ: уравнения не имеют общих корней.

№2.

По условию телефонов было 58, а ученик мог принести только один телефон и только его, то 58 учеников принесли телефоны.

Пусть k - количество учеников, которые принесли тетради. Т.к. тетради приносили по 3, то кол-во тетрадей - $3k$. Заметим, что кол-во тетрадей кратно и 3, и 5, потому что в условии используется $\frac{1}{5}$ часть от всех тетрадей. Тетради - целое число.

Пусть m - количество учеников, которые принесли книжки. Т.к. книжек приносили по 4, то всего книжек $4m$. Кол-во кратно 4 и 7 (из дано)

I стол: $58+\underbrace{\frac{1}{5}\cdot 3k}_{\substack{\text{5-тая часть} \\ \text{всех тетрадей}}}+\underbrace{\frac{1}{7}\cdot 4m}_{\substack{\text{7-ая часть} \\ \text{всех книг.}}}$

II стол: $\underbrace{3k-\frac{1}{5}3k}_{\substack{\text{оставшаяся часть} \\ \text{тетрадей}}}+\underbrace{4m-\frac{1}{7}4m}_{\substack{\text{оставшаяся} \\ \text{часть книг.}}}=\frac{4}{5}\cdot 3k+\frac{6}{7}\cdot 4m$

Т.к. кол-во предметов на столах равно, то

$$58+\frac{1}{5}3k+\frac{1}{7}4m=\frac{4}{5}3k+\frac{6}{7}4m$$
$$58=\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right)3k+\left(\frac{6}{7}-\frac{1}{7}\right)4m$$
$$58=\frac{3}{5}\cdot 3k+\frac{5}{7}\cdot 4m \quad |\cdot 35$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 0 5 9 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$58 \cdot 35 = 9k \cdot 7 + 20m \cdot 5$

$2030 = 63k + 100m$.

Т.к. кол-во учеников - это целое число, то в числе 2030, 30 мы можем получить только от числа 63k, (потому что в числе 100m будет 0 десятков)

Т.к. конечное число заканчивается на 0, то в числе 63k $k \vdots 10$.

Получается, что число k кратно 10 и оканчивается на 10 (потому что 30 можно получить при умножении $3 \cdot 10$ и только в этом случае)

Минимальное $k = 10$, докажем, что это единственное возможное k: следующее $k = 110$, тогда кол-во тетрадей $= 63 \cdot 110 = 6930$, а это число больше общего кол-ва предметов, то $k \geq 110$ не может быть.

Единственное $k = 10$, подставляем:

$2030 = 63 \cdot 10 + 100m$

$2030 - 630 = 100m$

$1400 = 100m$

$m = 14$.

Число k и m получились целыми и положительными

Проверим: число 3k должно быть $\vdots$ 3 и 5 ; $10 \vdots 5$.

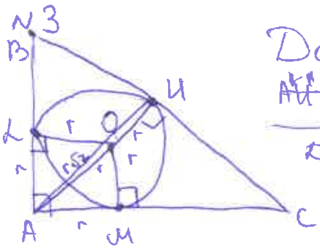
число m кратно 7 ; $14 \vdots 7$.

Общее число учеников = ученики с телефонами + с тетрадями + с книжками т.к. ученики могут брать или одно, или другое, или третье.

$58 + 10 + 14 = 82$ человека.

Ответ: 82 человека пришло на экзамен.

№3



Дано:
~~высота = 30~~
~~AU = 30~~ AU = 30

Док-ть, что $r > 12$

Предположим, что $r = 12$, тогда ($O \in AU$ т.к. прямоугольный треугольник.)

Рассмотрим четырёхугольник ALOM:

$\angle ALO = 90° = \angle AMO = 90°$ (т.к. радиус и касательной 90°)

$\angle A = 90°$ (т.к. ABC - прямоугольный треугольник) =>

=> т.к. $\angle ALO + \angle AMO + \angle A + \angle LOM = 360°$ (т.к. четырёхуг.)

то $\angle LOM = 90°$ => ALOM - квадрат => по свойству

$AL = LO = OM = AM = r$.

Рассмотрим $\triangle ALO$: по теореме Пифагора: $AO^2 = AL^2 + LO^2$ => $AO = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$. $A'U' = AO + OU = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2}+1)$. Пусть $r = 12$, то $A'U' = 12(\sqrt{2}+1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | MA0001059521

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

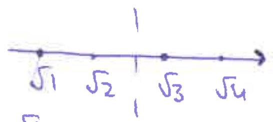
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Сделаем оценку $A'U'$. $A'U' = 12(\sqrt{2}+1)$

$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$

$2 < \sqrt{2}+1 < 3$

$24 < (\sqrt{2}+1)\cdot 12 < 36$



т.к. $\sqrt{2}$ лежит ближе к $\sqrt{1}$ и меньше, чем половина, то можно сказать, что

$24 < (\sqrt{2}+1)\cdot 12 < 30$

$24 < A'U' < 30$

Странный метод д-ва. Если $r \neq 12$, то м.б. и $r > 12$, и $r < 12$.

Получилось, что $A'U' < 30$, а такого не может быть, потому что высота – это самое короткое расстояние от угла до противоположной стороны. Значит $A'U' \geq$ высоте, т.к. $A'U'$ складывалось из AO и r, а значение меньше $AU \in (24; 30) \geq 30$
30 не может быть $\geq$ высоте 30.

Поэтому $r > 12$ (т.к. при значении $r < 12$ AU будет ещё меньше).

~~Ответ: $r > 12$.~~

Проверка: рассмотрим $\triangle AUO$: по ур-нию треугольников

$\underset{(24;30)}{AO + OU} \not> \underset{30}{AU}$, значит такого $\triangle$ существовать не может. Значит $AO + OU$ должно быть больше 30, а значит $r > 12$.

Ответ: $r > 12$.

№4

Нахождение вероятности: $\dfrac{\text{кол-во благоприятных вариантов}}{\text{кол-во всех вариантов}}$.

Кол-во всех вариантов: 9^{15} т.к. существует 15 мест, на которых могут стоять любое из 9 однозначных натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), поэтому т.к. варианты случайные и зависят друг от друга мы их перемножаем

$\underbrace{9\times 9\times 9\times 9 \ldots \times 9}_{15} = 9^{15}$.

Кол-во благоприятных вариантов: надо, чтобы произведение чисел делилось на 14, это может быть, если в произведении обязательно присутствует 7 и хотя бы

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 0 5 9 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

одно число, которое кратно 2. (это числа 2, 4, 8, 6)

Значит из 15 чисел два числа будут фиксированными => кол-во:

$\underbrace{1\times1\times9\times9\ldots\times9}_{13}$ – таких вариантов 4 (т.к. есть 2, 4, 6, 8)

Благоприятных вариантов: $9^{13}\cdot 4$.

Вероятность: $\frac{\cancel{9^{13}}\cdot 4}{\cancel{9^{15}}\,9^2} = \frac{4}{9^2} = \frac{4}{81}$.

Проверим: вероятность того, что в произведении будет 7 – это $\frac{1}{9}$ – т.к. 9 различных чисел.

Вероятность того, что в произведении будут чётные цифры:

$\frac{4}{9}$ – 4 чётных числа. – 9 разн. чисел

Т.к. действия должны выполняться одновременно, то вероятность:

$\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{81}$.

Ответ: $\frac{4}{81}$.

№5.

$A = f(0) + f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \ldots + f\left(\frac{50}{100}\right) + \ldots + f\left(\frac{99}{100}\right) + f(1)$

Заметим, что $f(0) = \frac{1}{4^0+2} = \frac{1}{3}$

$f(1) = \frac{1}{4^1+2} = \frac{1}{6}$

Значит остальные числа будут в этом диапазоне.

$f\left(\frac{50}{100}\right) = \frac{1}{\sqrt[100]{4^{50}}+2} = \frac{1}{\sqrt[2]{4}+2} = \frac{1}{4}$.

?

Значит сумма оставшихся чисел равна $\frac{1}{4} < \cdot < \frac{1}{6}$ => $\frac{1}{5}$.

Сумма $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+15+12+10}{120} = \frac{\cancel{57}\,19}{\cancel{120}\,40} = \frac{19}{40}$.

Ответ: $A = \frac{19}{40}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	1	1	4	4	2	1

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ШТАТСКИЙ

Имя СЕМЁН

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 23.09.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.09.2021

Номер телефона 8-950-426-97-15 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$. $a<c$, $d<b$.

$x^4+ax+b=0$.

$x^4+cx+d=0$.

x^4 – положительное число.

$b;d$ положительны по условию.

Очевидно, что ax и cx отрицательны.

$a>0$ и $c>0$ по условию $\Rightarrow x<0$.

Предположим, что $x_1=x_2=x$.

$x_1^4+ax_1+b=0$, $x_2^4+cx_2+d=0$ $\Rightarrow$ $x^4+ax+b=0$, $x^4+cx+d=0$. $\Rightarrow x^4+ax+b=x^4+cx+d$.

$x^4-x^4+ax-cx=d-b$.

$ax-cx=d-b$.

Предположим, что $|x(a-c)|=|d-b|=n$.

$x(a-c)=d-b$.

x – отрицательное.

$a-c<0$, т.к. $a<c$ по условию.

$d-b<0$, т.к. $d<b$ по условию.

$\Rightarrow$ $\underbrace{x \cdot (a-c)}_{(+)} = d-b$, $(-)\cdot(-)$, $(-)$.

$(-)$.

$+n \neq -n$.

Мы пришли к противоречию, а значит уравнения не могут иметь общие корни.

2. Пусть x участников принесли калькулятор. y участников принесли две тетради. z участников принесли три книги. $\Rightarrow$ x калькуляторов. $2y$ тетрадей. $3z$ книг.

n – количество вещей на одном столе. $x+y+z$ – ?

$x+2y+3z=2n$.

$n=n$.

I $n=x+\frac{1}{7}\cdot 2y+\frac{1}{5}\cdot 3z$.

II $n=\frac{6}{7}\cdot 2y+\frac{4}{5}\cdot 3z$.

$\Rightarrow$ $x+\frac{2y}{7}+\frac{3z}{5}=\frac{12y}{7}+\frac{12z}{5}$

$x=\frac{10y}{7}+\frac{9z}{5}$

$x=64$, по условию. Очевидно, что $y \vdots 7$ и $z \vdots 5$, т.к. на столе лежат целые предметы

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000111442 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$64 = \frac{10y}{7} + \frac{9z}{5}$.

$\frac{10y}{7} = 10a + 1\cdot 0 = 10a$, то есть $\frac{10y}{7}$ будет кончаться нулём.

$\Rightarrow \frac{9z}{5}$ будет кончаться четвёркой.

$\frac{9z}{5} = \overline{b4}$ $\quad z = 5k_1$ либо $10\cdot k_2$. чтобы $9z \vdots 5$.

~~$9z = \overline{10b4}$~~

$z=5 \quad \frac{45}{5}=9. \quad 9 \neq \overline{b4}$

$z=10 \quad \frac{90}{5}=18 \quad 18 \neq \overline{b4}$

$z=15 \quad \frac{135}{5}=27 \quad 27 \neq \overline{b4}$

$z=20 \quad \frac{180}{5}=36 \quad 36 \neq \overline{b4}$

$z=25 \quad \frac{225}{5}=45. \quad 45 \neq \overline{b4}$

$z=30 \quad \frac{270}{5}=54 \quad 54 = \overline{b4} \Rightarrow 64 = \frac{10y}{7} + \frac{9\cdot 30}{5}$

Нам подходит только $z=30$, потому что $64 = \frac{10y}{7} + 54$.

Следующие z при котором $\frac{9z}{5} = \overline{b4}$ это $z=60$. $\frac{10y}{7} = 10$.

$\frac{9z}{5} = 108$ $\quad y = 7$.

$64 \neq \frac{10y}{7} + 108$; при $y>0$ невозможно.

$x+y+z = 64+30+7 = 101$.

Ответ: $x+y+z = 101$

4: Чтобы произведение из 11 чисел было кратно 10, нужно иметь хотябы одну 5 и одно чётное число.

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Из данного ряда цифр чётных 4 и

Вероятность того, что среди ~~одного~~. 11 цифр будет одна 5 = $\frac{1}{8}\cdot 11$. | Вероятность того, что среди 11 цифр будет одно чётное $\frac{4}{8}\cdot 11$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Тогда общая вероятность в~~ $\cancel{\% = \frac{1}{11}\cdot\frac{4}{10}\cdot 100\% = \frac{400}{110}\% \approx 3{,}6\%}$

~~Ответ: Вероятность того, что произведение 11 случайных цифр от 1 до 8 кратно 10 составляет 3,6%~~

Тогда общая вероятность в $\% = \frac{11}{8}\cdot\frac{4\cdot 11}{8}\cdot\frac{5}{}\cdot 100\% = \frac{55}{64}\cdot 100\% \approx 87\%$

Ответ: Вероятность того, что произведение 11 случайных цифр от 1 до 8 кратно 10 составляет 87%

5. $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$ $\quad A - ?$

$$A = f(0) + f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \ldots + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f(1)$$

Проверим чему будет равняться $f(0)+f(1)$

$$f(0) + f(1) = \frac{9^0}{9^0+3} + \frac{9^1}{9^1+3} = \frac{1}{1+3} + \frac{9}{9+3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Давайте проверим сумму $f\left(\frac{1}{2021}\right)$ и $f\left(\frac{2020}{2021}\right)$, только обозначим как $f\left(\frac{n}{2021}\right) + f\left(\frac{2021-n}{2021}\right)$

$f(0)$; $x = \frac{0}{2021}$; $n = 0$.

$f\left(\frac{1}{2021}\right)$; $x = \frac{1}{2021}$; $n = 1$.

$f(1)$; $x = \frac{2021}{2021}$; $n = 2021$.

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$$\frac{9^{\frac{n}{2021}}}{9^{\frac{n}{2021}}+3} + \frac{9^{\frac{2021-n}{2021}}}{9^{\frac{2021-n}{2021}}+3} = \frac{9^{\frac{n}{2021}}\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{n}{2021}} + 9^{\frac{n}{2021}}\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}}}{9^{\frac{n}{2021}}\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}} + 9} =$$

$$= \frac{9^{\frac{2021+n-n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{n}{2021}} + 9^{\frac{2021+n-n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}}}{9^{\frac{2021+n-n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}} + 9} = \frac{9^1 + 3\cdot 9^{\frac{n}{2021}} + 9^1 + 3\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}}}{9^1 + 3\cdot 9^{\frac{n}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2021-n}{2021}} + 9} = 1.$$

Сложим всё в суммы по 2 члена

$$\left(f(0)+f(1)\right) + \left(f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right)\right) + \ldots$$

Таких пар получится $\frac{2022}{2} = 1011$, а сумма каждой пары 1

$\Rightarrow A = 1011 \cdot 1$ Ответ: $A = 1011$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

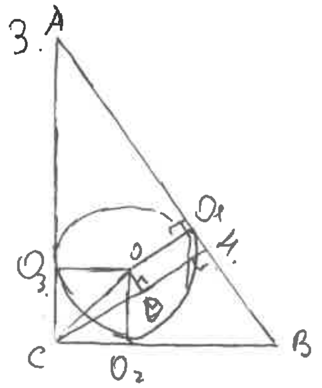
Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	1	1	4	4	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3.



Дано: $\triangle ABC$; O - вписанная окружность

CH - высота $\angle C = 90^\circ$

$CH = 18$

Доказать: $r > 7$.

Доказательство:

Доп. построение OO_1; OO_2; $OO_3 = r$ - радиусы,

Рассмотрим COO_2O_3.

Данная фигура квадрат, т.к. OO_3 и OO_2 - радиусы; CO_3 и CO_2 - касательн. $\angle C = 90^\circ$

~~$\angle C = 90^\circ$~~

$CO = r\sqrt{2}$.

$OO_1 \perp AB$ по свойству радиуса и касательной

$CH \perp AB$ по условию

$\Rightarrow OO_1 \parallel CH$. ~~и $AB \perp$~~

Доп. построение $OD \perp CH$.

OO_1HD — прямоугольник.

$DH = OO_1 = r$

Рассмотрим $\triangle COD$.

$\angle CDO = 90^\circ$.

$CO = r\sqrt{2}$

$CD = 18 - r$

$\Rightarrow OD = \sqrt{2r^2 - (18-r)^2}$

$2r^2 -$

$r = 7$

$OD = \sqrt{96 - 121}$

$96 - 121 = -25$.

$-25 < 0$. Такое невозможно.

$\Rightarrow r > 7$. ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	2	4	1	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ДУДКИНА

Имя АНАСТАСИЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 03.10.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.21

Номер телефона +7(950)986-84-37 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	0	2	4	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	2	20	82

№2. Пусть x участников принесли ~~книги~~ тетради, а y участников – книги. Тогда всего участников $x+y+58$, книг – $4y$, тетрадей – $3x$. По условию:

$$58+\frac{3x}{5}+\frac{1}{7}\cdot 4y=\frac{4}{5}\cdot 3x+\frac{6}{7}\cdot 4y$$

Из уравнения очевидно, что $x \vdots 5$, а $y \vdots 7$. Тогда $x=5n$, а $y=7k$, где n и k – натуральные числа. Т.е.:

$$58+3n+4k=12n+24k$$

$$9n+20k=58$$ (Заметим, что 58 не кратно ни 9, ни 20, значит, n и k ~~действительно~~ натуральные числа, ведь ни одно из них не может равняться 0)

Далее решим подбором: Подбор пол[н]ым перебором (+)

$k=1$ или $k=2$ (при $k \geq 3$, $20k > 58$, что противоречит натуральности n)

$9n=38$ $\quad$ $9n=18$

$n \notin N$ $\quad$ $n=3$? Описка, из-за нее неверный ответ

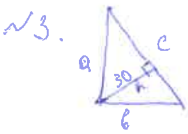
$\Downarrow$ $\quad$ $3 \in N$

$k \neq 1$

Т.о., $x=5n=15$, $y=7k=14$

$x+y+58=15+14+58=87$ участников

Ответ: 87 человек пришло на экзамен.

№3. 

$$r=\frac{2S}{a+b+c}$$

Рассмотрим 2 прямоугольных Δ, на которые разбивает данный Δ высота. В этих Δ-х a и b – гипотенузы, а высота – один из катетов

$\Downarrow$

$a \geq 30$ и $b \geq 30$

$\Downarrow$

$c \geq 30\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$2S \overset{=}{>} ch$

$2S > 900\sqrt{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a+b+c > 60+30\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$\frac{2S}{a+b+c} > \frac{900\sqrt{2}}{60+30\sqrt{2}}$

Преобразуем правую часть неравенства: $\frac{900\sqrt{2}(60-30\sqrt{2})}{60^2-(30\sqrt{2})^2} = \frac{900\sqrt{2}(60-30\sqrt{2})}{1800}$

$= \frac{60\sqrt{2}-60}{2} = 30\sqrt{2}-30$

Таким образом, $\frac{2S}{a+b+c} > 30\sqrt{2}-30$, т.е. $r > 30\sqrt{2}-30$.

$30\sqrt{2}-30 = 30(\sqrt{2}-1)$.

$\sqrt{2} > 1,4$

$\Downarrow$

$30(\sqrt{2}-1) > 30\cdot(1,4-1) = 12$

Итак, $r > 30\sqrt{2}-30 > 12 \Rightarrow r > 12$, ч.т.д.

№4. Однозначных натуральных чисел всего 9 => произведений случайно выбранных 15-ти может быть всего 9^{15}.

$14 = 7\cdot 2$

$\Downarrow$

В подходящем произведении должно быть ~~число~~ множитель, кратное 7 (это только 7), и множитель, кратный 2 (это 2, 4, 6 и 8 – всего 4 варианта). Остальные множители могут быть любыми. Итак, подходящих произведений существует $1\cdot 4\cdot 9^{13} = 4\cdot 9^{13}$. Тогда вероятность равна $\frac{4\cdot 9^{13}}{9^{15}} = \frac{4}{9^2} = \frac{4}{81}$

Ответ: $\frac{4}{81}$.

№5. $A = f(0) + f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \ldots + f\left(\frac{99}{100}\right) + f(1)$

$f(0) = \frac{1}{3}$

$f(1) = \frac{1}{6}$

$f(0)+f(1) = \frac{1}{2}$

Найдём сумму двух одночленов, сумма числителей аргументов которых равна 100, т.е. знаменатель аргументов: Пусть это будут $f\left(\frac{2}{100}\right)$ и $f\left(\frac{98}{100}\right)$:

$\frac{1}{4^{0,02}+2} + \frac{1}{4^{0,98}+2} = \frac{(4^{0,01})^{98}+(4^{0,01})^2+2+2}{(4^{0,02}+2)(4^{0,98}+2)} =$

$= \frac{(4^{0,01})^{98}+(4^{0,01})^2+4}{4+4^{(0,02+0,98)}+2((4^{0,01})^{98}+(4^{0,01})^2)} = \frac{1}{2}$

Вариант № 2 | МА0001024121

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Предположим, что все такие суммы равны $\frac{1}{2}$. Докажем в общем виде:

$$\frac{1}{4^k+2}+\frac{1}{4^{(1-k)}+2}=\frac{4^{(1-k)}+4^k+4}{4+4^{(1-k+k)}+2\left(4^{(1-k)}+4^k\right)}=\frac{1}{2},\text{ где } 0\leq k<\cancel{<0{,}55}\ 1$$

Итак, предположение подтвердилось. Тогда A содержит 50 таких сумм и ещё одно слагаемое — $f\left(\frac{50}{100}\right)$ — „непарное".

$$A=50\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4^{0{,}50}+2}=\cancel{27{,}5}\ 25+\frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}}+2}=\cancel{27{,}5}\ 25+\frac{1}{4}=\cancel{27{,}75}\ 25{,}25$$

Ответ: ~~27,75~~. 25,25.

№1. Предположим, что у уравнений $x^6+ax+b=0$ и $x^6+cx+d=0$ есть какой-то общий корень n. Тогда:

$$n^6+an+b=n^6+cn+d$$

$$cn-an=b-d$$

$$n=\frac{b-d}{c-a}$$

По условию: $b>d\Rightarrow(b-d)>0$, $c>a\Rightarrow(c-a)>0$

$$\Downarrow$$

$$n>0$$

Подставим полученное значение в исходные уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{(b-d)^6}{(c-a)^6}+\dfrac{a(b-d)}{c-a}+b=0\\[2ex]\dfrac{(b-d)^6}{(c-a)^6}+\dfrac{c(b-d)}{c-a}+d=0\end{cases}$$

$$\cancel{a\frac{(b-d)}{c-a}-c\frac{(b-d)}{c-a}+b-d=0}$$

Каждый из одночленов в этих уравнениях положителен

$\Downarrow$

их сумма тоже положительна, однако их сумма равна 0, а 0 не относится к положительным числам. Противоречие.

$\Downarrow$

Предположение о наличии общего корня n неверно, т.е. общих корней нет, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Казань

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	1	7	0	1	2	1

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 1

Фамилия Шавалиева

Имя Алина

Отчество Рафаэлевна

Дата рождения 09.03.2005 **Класс** 10

ОУ, местоположение АГСПбГУ, Санк-Петербург

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона 89088874676 **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	—	20	78

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

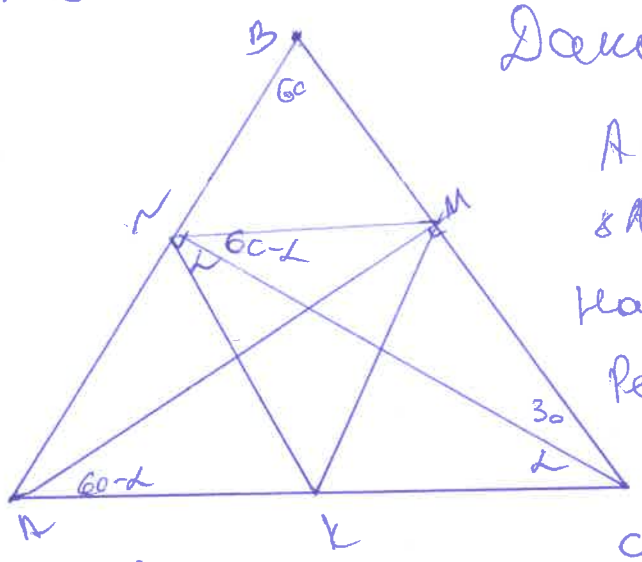
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	7	0	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2



Дано: $\triangle ABC$, $CN \perp AB$, $AM \perp BC$, $AK = KC$, $\angle ABC = 60$, $\triangle ABC$ остроугольный

Найти: $\angle MNK$.

Решение: Пусть $\angle KCN = \alpha$, тогда $\angle KNC = \angle KCN = \alpha$ (медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине в прямоуг. $\triangle$ => $NK = KC$) $\angle NCB = 180 - \angle NBC - \angle CNB = 180 - 60 - 90 = 30$ $\angle MAC = 180 - \angle AMC - \angle ACM = 180 - 90 - 30 - \alpha = 60 - \alpha$

ANMC вписанный ($\angle ANC = \angle AMC$, равные углы опираются на одну сторону) =>

$\angle CAM = \angle CNM = 60 - \alpha$ $\angle KNM = \angle KNC + \angle CNM = 60$

Ответ: 60.

№3 Пусть кол-во девятиклассников x, а кол-во десятиклассников y. Количество задач, которые решил девятиклассник $a+1$, а десятиклассник, тогда a. (Так как каждый девятиклассник решил на одну задачу больше, чем каждый десятиклассник, то

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 7 0 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

все учащиеся 9х классов решили одинаковое кол-во задач, так же все учащиеся 10-х классов решили равное кол-во задач)

Пусть во второй день девятиклассники решили по b_1 задач

$$\begin{cases} x(a_1+1)+ya_1=129 \\ x\,b_1+y(b_1+1)=190 \end{cases}$$

$$a_1(x+y)+x=129$$

$$b_1(x+y)+y=190$$

$$(a_1+b_1+1)(x+y)=319$$

$$\cancel{a_1(x+y)+b_1(x+y)+}$$

$$(a_1+b_1+1)(x+y)=11\cdot 29=1\cdot 319$$

$$x+y>1$$

$$a_1+b_1>1$$

① $\begin{cases} x+y=11 \\ a_1+b_1+1=29 \end{cases}$

$a_1+b_1=28$

$a_1\le 10$ $\Rightarrow$ это невозможно

$b_1\le 10$

② $\begin{cases} x+y=29 \\ a_1+b_1+1=11 \end{cases}$

пример: 13 девятиклассников, 16 десятиклассников,

каждый девятиклассник решил по 5 задач в первый день, а каждый десятиклассник по 7 задач во второй день

Ответ: 29

или 319

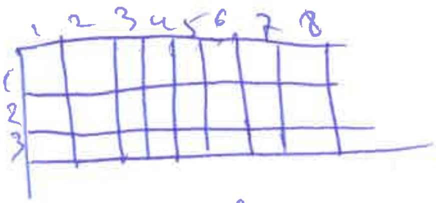
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 7 0 1 2 1

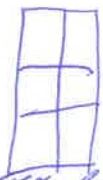
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1 Рассмотрим прямоугольник 3Х8



~~...~~ наибольший квадрат, который можно поставить, это 3Х3. Если первый игрок поставит квадрат 3Х3, то после хода (квадрат 3х3) второго на доске останется четное кол-во клеток

Если на доске будет фигура  перед ходом первого игрока, то он ~~...~~ выиграет => задача второго оставить на доске после себя четное кол-во клеток и только бы каких нельзя было поставить квадрат не изменив четность оставшихся клеток

Если первый игрок ставит квадрат с нечетным кол-вом клеток => не изменяет четность остав-шихся т.к. мы должны поставить такие квадрат с четным кол-вом клеток.

Если после каждой пары ходов (одного хода первого и одного хода второго) четность не будет изменяться, то первый проиграет => ставим квадрат как не четности, что и первый

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

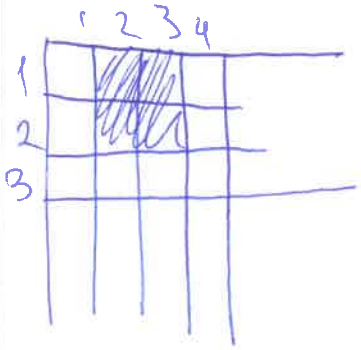
Вариант № 1 | МА0001170121

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим на примере 3х8

Так как у нас четное в столбцах делим нечетное в ширину Располагаем квадрат



так, как показано на картинке. Теперь квадратов 2х2 поместится не более 3х => мы можем изменить четность

В прямоугольнике 27х72 мы аналогично ставим квадрат 26х26, тем самым меняем четность

Так как теперь второй игрок не сможет всегда сохранить четность при правильной игре первого

Первый игрок своим ходом должен удерживать нечетное кол-во клеток, в которые невозможно поставить квадрат 2n×2n

$n \geq 1$

Ответ: первый

Лист 4 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

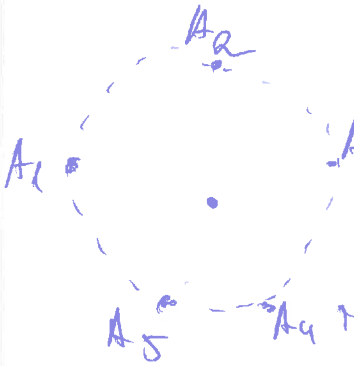
Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 7 0 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 Для $n = 1$ у правильного треугольника центр лежит внутри всегда

Для $n=2$ Рассмотрим правильный 5-ти угольник. Для того, чтобы центр окр. лежал внутри треугольника (центр многоугольника является центром описанной окружности треугольника) треугольник должен быть остроугольным.



Правильный 5-ти угольник делит окр на части $\frac{360}{5} = 72$ ~~угол~~ $\frac{72 \cdot x}{2} < 90$ x кол-во дуг в угле

$36 \cdot x < 90$

$x \le 2$

Рассмотрим точку A_1 и кол-во треугольников с ней, которые нам не подходят, это те, у которых угол $> 90 \Rightarrow x \geq 3$ $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_5$, $A_1A_5A_4$

$\frac{\left(\frac{4\cdot 3}{2} - 3\right)\cdot 5}{3} = 5$, 5 треугольников, которые содержат центр описанной окр.

Всего треугольников $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2} = 10$ $\frac{5}{10}$ 93

Лист 5 из 8

Для $n=3$ $\frac{360\cdot x}{2\cdot 7} < 90$

$2x < 7$

$x \le 3$

Рассмотрим кол-во Δ, где один из углов равен $\frac{360\cdot 4}{2\cdot 7}$. Способов выбрать дугу, на которую будет опираться наибольший угол 7 (1-5, 2-6, 3-7, 4-1, 5-2, 6-3, 7-4)

Треугольников с такими углами $7\cdot 2 = 14$

Рассмотрим кол-во Δ, где один из углов равен $\frac{360\cdot 5}{2\cdot 7}$. Способов выбрать дугу, на которую будет опираться наибольший угол 7 (1-6, 2-7, 3-1, 4-2, 5-3, 6-4, 7-5) Всего таких Δ 7.

Наименьший угол в треугольнике не более градусов.

Всего Δ $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$ $\frac{35-14}{35}$ 20,3

Для $n=4$. Наибольший градусной мерой в треугольнике содержащем

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	1	7	0	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

центр опи. окр будет $\frac{360 \cdot x}{9 \cdot 2} < 90$

Кол-во треугольников не содержащих центр равно

$\frac{4x}{9 \cdot 2} < 1$

$2x < 9$

$x \leq 4$

9 при $x = 7$

18 при $x = 6$

27 при $x = 5$

$9 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 9 \cdot 6$

Всего $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7$

Вероятность, что внутри треугольника лежит центр $1 - \frac{9 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 7} = 1 - \frac{9}{14} = \frac{14 - 9}{14} =$

$= \frac{5}{14} \geq 0{,}3$

Для $n = 5$ $1 - \frac{11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0{,}3$

Для $n = 6$ $1 - \frac{13 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 2}{13 \cdot 12 \cdot 11} = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11} > 0{,}3$

$1 - \frac{13 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 2}{13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{7}{22} > 0{,}3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	7	0	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Формула для нахождения вероятности

m – кол-во углов в многоугольнике

~~...x 360...~~

$\frac{360 \cdot x}{m \cdot 2} \geq 90$ x – градусная мера допустимого угла в $\triangle$

$x \leq \frac{m-1}{2}$

кол-во $\triangle$ внутри, которые не содержат центр

m = 2n + 1 ?

$\frac{1}{2}\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right) \cdot m$

Всего $\triangle$ $\frac{m \cdot (m-1)(m-2)}{6}$

Вероятность

$1 - \frac{6}{8}\frac{(m-3)(m-1) \cdot m}{m(m-1)(m-2)} = 1 - \frac{3}{4}\frac{(m-3)}{(m-2)} < 0{,}3$

+

$4(m-2) - 3(m-3) < 1{,}2$

$4m - 8 - 3m + 9 < 1{,}2(m-2)$

$m + 1 < 1{,}2m - 2{,}4$

$3{,}4 < 0{,}2m$

$17 < m$

Ответ: для $n \geq 9$

Лист 8 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	1	1	3	8	2	1

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ДАРМОГРАЙ

Имя МАКАР

Отчество ХАЁТУЛЛОВИЧ

Дата рождения 28.08.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 89607526504 **Подпись** Ма

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	1	1	3	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

1	2	3	4	5	Σ
20	20	10	2	20	72

Пусть x — общий корень двух уравнений из условия.

Тогда:

$$-\begin{cases} x^4+ax+b=0 \\ x^4+cx+d=0 \end{cases}$$

$$ax-cx+b-d=0$$

$(a-c)x=d-b$, $a-c\neq 0$, т.к. $a<c$

$x=\dfrac{d-b}{a-c}>0$ ($d-b<0$, $a-c<0$ $|\Rightarrow \dfrac{d-b}{a-c}>0$)

С другой стороны:

$$+\begin{cases} x^4+ax+b=0 \\ x^4+cx+d=0 \end{cases}$$

$$2x^4+ax+cx+b+d=0$$

$\underbrace{2x^4}_{>0}+\underbrace{(a+c)x}_{>0}+\underbrace{(b+d)}_{>0}=0$; $a,b,c,d>0$ (по усл.), $x>0$ (см. выше) $|\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4+(a+c)x+(b+d)>0$ — противоречие, т.к. $2x^4+(a+c)x+(b+d)$ должно равняться 0. Значит, у двух уравнений общего корня быть не может, т.е. эти уравнения не имеют общих корней — что и требовалось доказать.

Задача 2

Пусть x – общее кол-во тетрадей на двух столах ($x \vdots 2$ из условия). Также, пусть y – общее кол-во книжек на двух столах ($y \vdots 3$ из условия). Тогда:

На первом столе: $\underbrace{64}_{\text{калькуляторов}}$, $\underbrace{\frac{1}{7}x}_{\text{тетрадей}}$, $\frac{1}{5}y$ книжек

На втором столе: $\underbrace{\frac{6}{7}x}_{\text{тетрадей}}$, $\frac{4}{5}y$ книжек

По условию, на каждом столе лежало половину предметов. Значит:

$$64 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{5}y = \frac{6}{7}x + \frac{4}{5}y$$

$$\frac{5}{7}x + \frac{3}{5}y = 64 \quad | \cdot 35$$

$$\underbrace{25x}_{\vdots 5} + \underbrace{21}_{\not\vdots 5}y = \underbrace{2240}_{\vdots 5} \Rightarrow y \vdots 5 \Rightarrow y \vdots 15 \text{ (т.к. } y \vdots 3 \text{ и } y \vdots 5).$$

Понятно, что x, y – целые числа, которые ≥ 0. Заметим, что при $y = 120$ ($120 \vdots 15$), $21y = 21 \cdot 120 = 2520 > 2240$. Значит, y может принимать значения $0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105$. Рассмотрим каждое из значений:

1) $y = 0 \Rightarrow 21y = 0 \Rightarrow 25x = 2240 \ |:5 \Rightarrow \underbrace{5x}_{\vdots 5} = \underbrace{448}_{\not\vdots 5}$ – такой случай невозможен

2) $y = 15 \Rightarrow 21y = 21 \cdot 15 = 315 \Rightarrow 25x = 2240 - 315 = 1925 \ |:25 \Rightarrow x = 77$

3) $y = 30 \Rightarrow 21y = 21 \cdot 30 = 630 \Rightarrow 25x = 2240 - 630 = 1610 \ |:5 \Rightarrow \underbrace{5x}_{\vdots 5} = \underbrace{322}_{\not\vdots 5}$ – такой случай невозможен

4) $y = 45 \Rightarrow 21y = 21 \cdot 45 = 945 \Rightarrow \underbrace{25x}_{\vdots 25} = 2240 - 945 = \underbrace{1295}_{\not\vdots 25}$ – такой случай невозможен

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $y=60 \Rightarrow 21y=21\cdot 60=1260 \Rightarrow \underbrace{25x}_{\vdots 25}=2240-1260=\underbrace{980}_{\not\vdots 25}$ — такой случай невозможен

6) $y=75 \Rightarrow 21y=21\cdot 75=1575 \Rightarrow \underbrace{25x}_{\vdots 25}=2240-1575=\underbrace{665}_{\not\vdots 25}$ — такой случай невозможен

7) $y=90 \Rightarrow 21y=21\cdot 90=1890 \Rightarrow 25x=2240-1890=350 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=14$

8) $y=105 \Rightarrow 21y=21\cdot 105=2205 \Rightarrow \underbrace{25x}_{\vdots 25}=2240-2205=\underbrace{35}_{\not\vdots 25}$ — такой случай невозможен

Мы рассмотрели все возможные случаи и выяснили, что либо $x=77$, $y=15$; либо $x=14$, $y=90$. В первом случае, т.к. $x=77 \Rightarrow x \not\vdots\, 2$ (что противоречит условию задачи). Значит, возможен единственный случай: $x=14$, $y=90$.
Нас просят найти: сколько было участников олимпиады?
Это значение равно: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+64=\frac{14}{2}+\frac{90}{3}+64=$
$=7+30+64=101$ участник

Ответ: 101 участник

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 1 3 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4

Всего натуральных чисел от 1 до 8 — 8 штук. Значит, всего кол-во способов выбрать 11 чисел из ряда 1, 2, ..., 7, 8 равно 8^{11} (т.к. каждое число мы можем выбрать 8 способами). $10 = 2\cdot 5 \Rightarrow$ произведение 11 чисел будет кратно 10 тогда и только тогда, когда среди 11 чисел обязательно будет хотя бы одна 2, и хотя бы одна 5. Пусть выбранные 11 чисел образуют ряд: $\underset{1}{\cup}\ \underset{2}{\cup}\ \underset{3}{\cup}\ \underset{4}{\cup}\ \underset{5}{\cup}\ \underset{6}{\cup}\ \underset{7}{\cup}\ \underset{8}{\cup}\ \underset{9}{\cup}\ \underset{10}{\cup}\ \underset{11}{\cup}$ — места для чисел — номер выбора числа, т.е. 1 — первое выбранное число, 2 — второе выбранное и т.д. Всего кол-во способов расположения 2 и 5 в этом ряду равно C_{11}^2 (кол-во вариантов выбрать 2 числа из 11). При этом, на каждый такой способ есть ещё 8^9 способов выбрать оставшиеся 9 чисел. Значит, кол-во вариантов выбора 11 чисел с числами 2 и 5 равно $C_{11}^2\cdot 8^9$ — это и есть количество способов выбрать 11 чисел из ряда 1, 2, ..., 7, 8 так, чтобы произведение 11 чисел было кратно 10. $C_{11}^2 = \frac{11!}{(11-2)!\cdot 2!} = \frac{11!}{9!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 11}{2} = 55 \Rightarrow C_{11}^2\cdot 8^9 = 55\cdot 8^9$. Вероятность равна: кол-во вариантов, когда произведение 11 чисел кратно 10 разделить на общее кол-во вариантов, т.е. равна $\frac{C_{11}^2\cdot 8^9}{8^{11}} = \frac{55\cdot 8^9}{8^{11}} = \frac{55}{8^2} = \frac{55}{64}$

Ответ: $\frac{55}{64}$

Не обяз. этих множителей по одному. Сочетание тут неприменимо

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5

$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$

Заметим, что $\frac{9^{\frac{x}{2021}}}{9^{\frac{x}{2021}}+3}+\frac{9^{\frac{2021-x}{2021}}}{9^{\frac{2021-x}{2021}}+3}=$

$=\frac{9^{\frac{x}{2021}}\left(9^{\frac{2021-x}{2021}}+3\right)+9^{\frac{2021-x}{2021}}\left(9^{\frac{x}{2021}}+3\right)}{\left(9^{\frac{x}{2021}}+3\right)\left(9^{\frac{2021-x}{2021}}+3\right)}=$

$=\frac{9^1+3\cdot 9^{\frac{x}{2021}}+9^1+3\cdot 9^{\frac{2021-x}{2021}}}{9^1+3\cdot 9^{\frac{x}{2021}}+3\cdot 9^{\frac{2021-x}{2021}}+9}=1$ (числитель равен знаменателю),

$x\in[0;2021]$, $x\in\mathbb{Z}$, т.е. мы доказали, что $f(x)+f(2021-x)=1$

Разобьём сумму A на пары слагаемых:

$f(0)+f(1)$, $f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)$, ... $f\left(\frac{1010}{2021}\right)+f\left(\frac{1011}{2021}\right)$.

Из выше доказанного следует, что сумма в каждой такой паре равна 1. Таких пар всего 1011 (т.к. всего чисел от $\frac{0}{2021}$ до $\frac{2021}{2021}$ – 2022 штуки, а мы разбили числа на пары так, что каждое число встречается только в одной паре, значит, таких пар $\frac{2022}{2}=1011$). Значит, A – сумма 1011 единиц, т.е. $A=1011$

Ответ: $A=1011$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

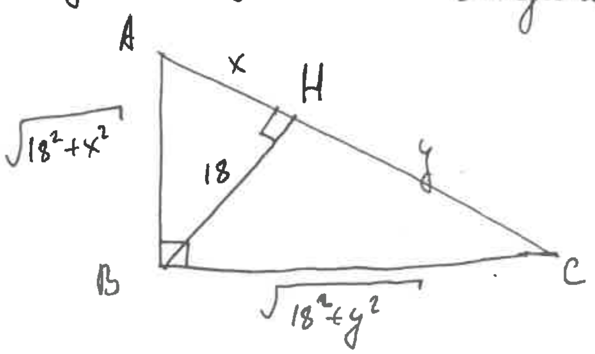
Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 1 3 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x, y > 0;\ x, y \in \mathbb{R}$

Задача 3



$\triangle ABC$ – прям., BH – выс.

Пусть $AH = x$, $HC = y$

В $\triangle BHA$ по Т Пифагора

$AB = \sqrt{18^2+x^2}$

В $\triangle BHC$ по Т Пифагора

$BC = \sqrt{18^2+y^2}$

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{18(x+y)}{2}$

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{\sqrt{18^2+x^2} \cdot \sqrt{18^2+y^2}}{2}$

3) $S_{ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} \cdot r = \frac{x+y+\sqrt{18^2+x^2}+\sqrt{18^2+y^2}}{2} \cdot r$

4) По Т Пифагора в $\triangle ABC$:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$18^2+x^2+18^2+y^2 = (x+y)^2$

$x^2+2\cdot 18^2+y^2 = x^2+2xy+y^2$

$xy = 18^2$

$(3) = (1) \Leftrightarrow r = \frac{18(x+y)}{x+y+\sqrt{x^2+18^2}+\sqrt{y^2+18^2}}$, заменим $\sqrt{x^2+18^2}$ на $\sqrt{x^2}$ и $\sqrt{y^2+18^2}$ на $\sqrt{y^2}$, тем самым увеличив значение r, т.е. $r < \frac{18(x+y)}{x+y+\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}} = \frac{18(x+y)}{2(x+y)} = 9$

Тогда заменим 18^2 на xy и далее заменим $\sqrt{x^2+xy}$ на $\sqrt{(x+y)^2}$ и $\sqrt{y^2+xy}$ на $\sqrt{(x+y)^2}$, тем самым уменьшив значение r, т.е. $r > \frac{18(x+y)}{x+y+\sqrt{(x+y)^2}+\sqrt{(x+y)^2}} = \frac{18(x+y)}{3(x+y)} = 6$

Мы доказали, что $6 < r < 9$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	1	3	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$(3) = (2) \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{18^2+x^2}\cdot\sqrt{18^2+y^2}}{x+y+\sqrt{18^2+x^2}+\sqrt{18^2+y^2}}$$

Заменим $\sqrt{x^2+18^2}$ на $\sqrt{(x+y)^2}$ и $\sqrt{18^2+y^2}$ на $\sqrt{(x+y)^2}$, тем ~~ж~~ самым, уменьшив значение r, т.е.

$$r > \frac{\sqrt{(18^2+x^2)(18^2+y^2)}}{x+y+\sqrt{(x+y)^2}+\sqrt{(x+y)^2}} = \frac{\sqrt{(18^2+x^2)(18^2+y^2)}}{3(x+y)} > 7 \quad \#$$

Почему >7?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный университет

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	0	9	4	2	1

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ИВАНОВА

Имя АНАСТАСИЯ

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 04.01.2005 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7.921754-42-97 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	5	20	83

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	0	0	9	4	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Всего вариантов выбрать 11 чисел из ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 8^{11} (Выбрать первое число 8 вариантов, выбрать второе число 8 вариантов и т.д.)

Чтобы число делилось на 10 нужно чтобы в разложении на простые множители участвовала 2 и 5. Значит среди выбранных чисел точно должна быть хотя бы одна 5 (т.к. больше чисел кратных 5 нет) и хотя бы одно чётное число (таких четыре числа: 2, 4, 6, 8. Остальные ~~Итого~~ числа могут быть любыми. Итого вариантов: $1\cdot 4\cdot 8^9$

Вероятность: $\frac{1\cdot 4\cdot 8^9}{8^{11}} = \frac{4}{8^3} = \frac{2^2}{2^9} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

Ответ: $\frac{1}{128}$ – вероятность выбрать 11 чисел из ряда, так, чтобы их произведение было кратно 10.

№1

$a, b, c, d > 0$

$a < c$, $d < b$

Док-во

$\exists$ у ур-ия $x^4 + ax + b = 0$ и у ур-ия $x^4 + cx + d = 0$ есть общий корень – x_0. Тогда $x_0^4 + ax_0 + b = 0 = x_0^4 + cx_0 + d$

$\cancel{x_0^4} + ax_0 + b = \cancel{x_0^4} + cx_0 + d$

$x_0(a-c) + b - d = 0$

$x_0 = \frac{d-b}{a-c}$

Подставим x_0 в ур-ие $x^4 + ax + b = 0$

$\left(\frac{d-b}{a-c}\right)^4 + \frac{a(d-b)}{a-c} + b = 0$

$\frac{(d-b)^4 + a(d-b)(a-c)^3 + b(a-c)^4}{(a-c)^4} = 0$

$a - c > 0$ т.к. $a < c \Rightarrow (a-c)^4 > 0$

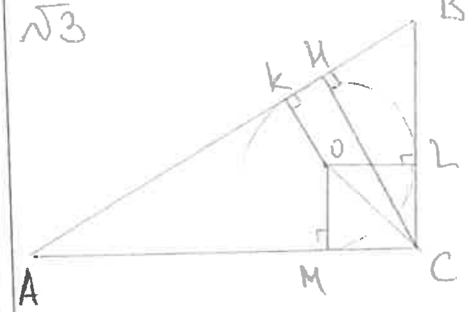
Значит $(d-b)^4 + a(d-b)(a-c)^3 + b(a-c)^4 = 0$

$(d-b)^4 > 0$ т.к. 4 степень

$b(a-c)^4 > 0$ т.к. 4 степень и $b > 0$ по условию

№1
$a(d-b)(a-c)^3>0$ т.к. $a>0$, $d-b<0$ т.к. $b>d$, $(a-c)^3<0$ т.к. $a<c$ и 3 степень. $(d-b)(a-c)^3>0$ ~~(Ab)~~ $\Rightarrow a(d-b)(a-c)^3>0$
$\Rightarrow (d-b)^4+a(d-b)(a-c)^3+b(a-c)^4>0$ Противоречие (должно равнятся нулю) $\Rightarrow x_0=\frac{d-b}{a-c}$ - не корень ур-ия x^4+ax+b $\Rightarrow x_0$ - не общий корень ур-ий $\Rightarrow$ общих корней не существует. Ч.т.д.

№3



Дано
$|CH|=18$
r - радус впис окр.

(!) $r>7$

Док-во
$\exists$ точки k, L, M — точки касания вписанной окружности сторон AB, BC, AC соотв.

Рассм 4-х угольник $OLCM$ — это квадрат т.к. $\angle OLC=\angle OMC=\angle LCM=90^\circ$ и $|MC|=|LC|$ - касательные из одной точки к окр.
Значит $|OC|=r\cdot\sqrt{2}$ - По теореме Пифагора
Заметим, что $|OC|+|Ok|>CH$ т.к. кратчайшее расстояние между ~~точкой и прямой это~~ ~~перпендикуляр.~~ ~~точками~~ ~~это перп~~ точкой и прямой это перпендикуляр

$r+r\sqrt{2}>18$
$r(1+\sqrt{2})>18$
$r>\frac{18}{1+\sqrt{2}}$. Сравним $\frac{18}{1+\sqrt{2}}$ с 7

$\frac{18}{1+\sqrt{2}} \gtrless 7$; $18 \gtrless 7+7\sqrt{2}$; $11 \gtrless 7\sqrt{2}$
$\sqrt{2}<1{,}5$ $\quad 7\cdot 1{,}5<11 \Rightarrow 7\sqrt{2}<11$
Значит т.к. $r>\frac{18}{1+\sqrt{2}}>7$ то $r>7$
Ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА000100 9421

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$$f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$$

$$A = f(0) + f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \ldots + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f(1)$$

$A - ?$

Докажем факт $f(x) + f(1-x) = 1$

Док-во:

$$\frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \frac{9^x(9^{1-x}+3) + 9^{1-x}(9^x+3)}{(9^x+3)(9^{1-x}+3)} =$$

$$= \frac{9^1 + 3\cdot 9^x + 9^1 + 3\cdot 9^{1-x}}{9^1 + 3\cdot 9^x + 3\cdot 9^{1-x} + 9^1} = 1 \quad \text{ч.т.д.}$$

Воспользуемся этим фактом, чтобы найти A

т.е. $f(0) + f(1) = 1$

$$f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right) = 1$$

$$\ldots$$

$$f\left(\frac{1010}{2021}\right) + f\left(\frac{1011}{2021}\right) = 1$$

$$A = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{1011 \text{ раз}} = 1 \cdot 1011 = 1011$$

Ответ: 1011

№2

Пусть x – кол-во участников, принёсших тетради

y – кол-во участников, принёсших книги

Из условия $\Rightarrow$ 64 участника принесли калькуляторы

Предметов на первом столе $64 + \frac{1}{7}\cdot 2\cdot x + \frac{1}{5}3y$ (т.к. тетради приносили по-две, книги – по-три)

По условию $64 + \frac{1}{7}\cdot 2\cdot x + \frac{1}{5}\cdot 3\cdot y = \frac{6}{7}\cdot 2\cdot x + \frac{4}{5}\cdot 3\cdot y$ (одинаковое кол-во предметов на первом и втором столе)

$$64 = \frac{10}{7}x + \frac{9}{5}y$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 0 9 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2
$x=7$, а $y=30$ других ответов нет т.к.
из $64=\frac{10}{7}x+\frac{9}{5}y \Rightarrow$ что $x \vdots 7$ и $y \vdots 5$ (т.к. предметов целое кол-во)
$\frac{10}{7}x$ - будет заканчиваться на 0
значит $\frac{9}{5}y$ должно заканчиваться на 4 и быть ~~меньше~~ не больше 64. Пара подходящих чисел только одна потому что только при $9 \cdot 6 = 54$ число заканчивается на 4 и ~~меньше~~ не больше 64.
Итого 64 - человека принесли калькулятор — они все
7 - человек принесли тетради участники.
30 - человек принесли книги 64+7+30
Из этого следует, что участников олимпиады ~~мину~~ ~~миниму~~ минимум 64, а максимум 97.

Откуда 97 ??

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Уфа

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	4	5	0	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ХАТЫМОВ

Имя РЕНАТ

Отчество РУСТЕМОВИЧ

Дата рождения 26.01.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.21

Номер телефона +7 996 579 8909 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 5 | 0 | 2 | 1 |

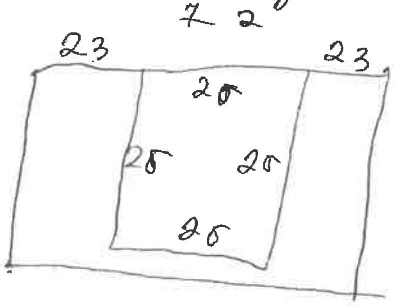
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

Ответ: I выиграет.

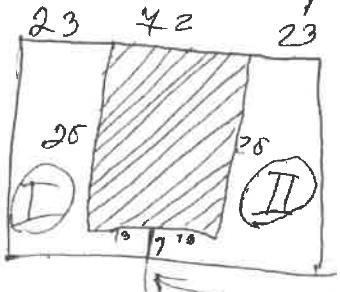
I ~~ход~~: ~~...~~ закрасить квадрат 26×26 где-то в центре, ~~вот~~ так в итоге:



(23+26+23=72)

27

~~дальше~~:
Стратегия: Далее разобьём незакрашенную фигуру на 2 части:



На каждый ~~ход~~ II, I отвечает симметричным (зеркально отр. относительно вертикали) ходом ~~в~~ в противоположной части поля (т.е. I => ходит в II и наоборот)

Важно заметить, что никто из игроков не может сходить в части I и II одновременно, ведь они соприкасаются только по 7 верт. клеткам длины 7, т.е. там м.б. только кв. 7×7, а он очевидно задевает только одну из частей.

Таким образом, у I игрока всегда будет ход, так как до этого в симметричной части ту же ситуацию II игрок смог его сделать, иначе II бы уже проиграл.

Лист 1 из 8

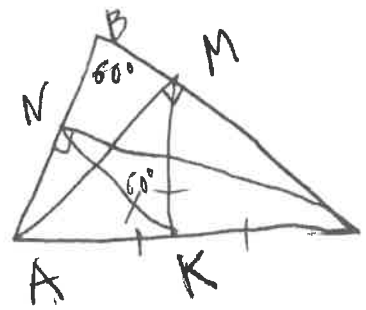
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 0 4 5 0 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 2



Т.к., что $\angle ANC = \angle AMC = 90°$, тогда $ANMC$ – вписанный четырёхугольник. Причём центр окр. (ANC) находится в середине диаметра, а AC – диаметр из-за прямого угла, т.е. K – центр $\Rightarrow KN = KM = KC = KA$.

ΔABC – остроугольный, поэтому $N \in [AB]$, $M \in [BC]$.

Также из-за того, что K – центр. окр. $(ANMC)$, то центр. угол $\angle NKM = 2\angle NCM$ – вписанный угол.

$\angle NCM = \angle NCB = 180° - \angle BNC - \angle NBC = 180° - 90° - 60° = 30°$.
из ΔNBC

Т.е. $\angle NKM = 2 \cdot 30° = 60°$ и $KN = KM$.

Тогда ΔNKM: р/б $\angle MNK = NMK = \frac{180° - \angle NKM}{2} = 60°$.

Ответ: $\angle NKM = \angle MNK = \angle NMK = 60°$.

N 3

∃ x – „9-классников"; ∃ y – „10-классников";

∃ a – задач в I день решил каждый 10 кл.;

∃ b – задач во II день решил каждый 9 кл.;

Тогда 9 кл. в I день решил a+1 задачу;

Тогда 10 кл. во II день решил b+1 задачу.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0001045021

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Теперь посчитаем сколько задач всего решили участники олимпиады в I и в II день соотв.

$$\cancel{\begin{cases} x(a+7)+y\,\theta = 729 \\ x\,a+y(b+7)=790 \end{cases}}$$

$$+\begin{cases} x(a+7)+y\,a=729, \\ x\,b+y(b+7)=790; \end{cases}$$

$x(a+b+7)+y(a+b+7)=379;$

$(x+y)(a+b+7)=379;$

$\le 10+10+7=27$

$379=17\cdot 29$. простые

Тогда т.к. $a,b,x,y\in N$ или $a=0$ или $b=0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cancel{x+y=29} \\ a+b+7=17; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=379, \\ a+b+7=7; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=29, \\ a+b=10; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x+y=379 \\ a+b=0; \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Покажем, что оба варианта значения $x+y$ возможны:

1) $a=4$, $b=6$, $x=13$, $y=16$ подх.

причём $0\le a, a+7, b, b+7\le 10$, т.е. такое кол-во реш. задач возможно $\in N$ или $=0$

$$\begin{cases} 13(4+7)+16\cdot 4=729, \\ 13\cdot 6+16\cdot(6+7)=790; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 65+64=729, \\ 78+112=790. \end{cases}$$ — верно

2) $a=0$, $b=0$, $x=729$, $y=790$ подх.

Проверяем аналогично:

$0\le a, a+7, b, b+7\le 10$

$$\begin{cases} 729(0+7)+0=729, \\ 790(0+7)+0=790; \end{cases}$$ — верно

Т.е. оба варианты возможны.

Ответ: 29 или 379.

~~N 4~~

$$\cancel{\sum_{k=1}^{100} f(k) = \sum_{k=1}^{100}\frac{3^x(2x-1)}{x(x+1)} = \sum_{k=1}^{100}\frac{2\cdot 3^x}{x+1} + \sum_{k=1}^{100}\frac{3^x}{x(x+1)} = \sum_{k=1}^{100}\frac{2\cdot 3^x}{x+1}}$$

N 4

$$\sum_{k=1}^{100} f(k) = \sum_{k=1}^{100}\frac{3^k(2k-1)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100}\frac{3^k\cdot 2}{k+1} - \sum_{k=1}^{100}\frac{3^k}{k(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{100}\frac{2\cdot 3^k}{k+1} - 3^k\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{100}\frac{2\cdot 3^k}{k+1} + \sum_{k=1}^{100}\frac{3^k}{k+1} -$$

$$- \sum_{k=1}^{100}\frac{3^k}{k} = \sum_{k=1}^{100}\frac{3^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=1}^{100}\frac{3^k}{k} =$$

$$= \frac{3^{100+1}}{100+1} - \frac{3^1}{1} = \frac{3^{101}}{101} - 3 = \frac{3^{101}-303}{101}.$$

Ответ: $\dfrac{3^{101}-303}{101}$.

N5

Я буду пользоваться такими фактами:

1) центр описанной окр. Δ лежит внутри т.и т., к. он остроугольный; 2) снаружи т.и т., к. он тупоугольный; 3) на границе т. и т., к. он прямоугольный. (это док-ся через расс. случаев его центрального угла относ. разных сторон)

2) Любой правильный $2n+1$-угольник вписан в окружность и никакие 2 его вершины не являются его диаметром (это правда, потому что правильный многоугольник симм. фигура относительно серперов к его сторонам; а также ⊡: 2 вершины составляют диаметр, тогда по разные стороны от диаметра должно находиться равное число сторон, а соотв и вершин, тогда их всего четное число $+2$ и одновременно $2n+1$. :( )

Посчитаем кол-во благоприятных случаев.
Будем выбирать пару точек вершинок многоугольника, а потом выбирать III в. для его остроугольности

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00010450 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

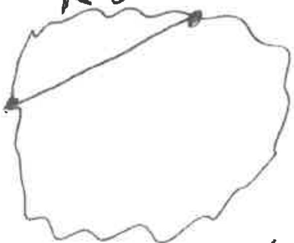
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

выбрать пару вершин ~~вершин~~ можно $\frac{2n(2n+1)}{2}$ сп.
(пусть 1 из сторон искомого Δ выбрали)

для каждой выбранной такой хорды с 1 стороны находятся вершины ..., опир. на хорду тупым углом, с другой – острым.

n=8)

x в.



$1+(15-x) = a+b$

пусть для сторон в двух ..., соответственно стороны

$\le x \le 7$, итак

15 − x в.

сумм.

для остроугольности

$1 \le a, b \le 8$

1) $a+b=8$ — 7 вар.

2) $a+b=9$ — 8 вар.

3) $a+b=10$ — 7 вар.

...

9) $a+b=16$ — 1 вар.

Итого $7+(8+\ldots+1) = 7+4\cdot9 = 43$

всего ΔΔ можно выбрать $C_{17}^3 = \frac{17\cdot16\cdot15}{6} = 17\cdot40$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7 МА0001045021

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{2\cdot 43\cdot [illegible]}{31\cdot 74\cdot 40} < 0,3$; т.к. ~~[illegible]~~

~~[illegible] · 14 · 4 [illegible]~~

$43 < 120 \cdot 0,3$? ~~[illegible]~~ 0,3

т.к. $600 + \leq 7$ каждый Δ относ. его старт и не выбирать I-в.

n=7) аналогично $1 \leq a, b \leq 7$; $0 \leq x \leq 6$

$14 - x = a + b$

1) $a+b = 8$ — 7 вар.

2) $a+b = 9$ — 6 вар.

3) $a+b = 10$ — 5 вар.

⋮

7) $a+b = 14$ — 1 вар.

Итого $\frac{8\cdot 7\cdot 15}{31\cdot\frac{15\cdot 14\cdot 13}{6}} =$ ~~[illegible]~~ $\frac{4}{13} < 0,3$?.

n=6) аналогично $1 \leq a, b \leq 6$; $0 \leq x \leq 5$

$12 - x = a + b$

1) $a+b = 7$ — 6 вар.

2) $a+b = 8$ — 5 вар.

⋮

6) $a+b = 2$ — 1 вар

$\frac{6\cdot 7\cdot [illegible]}{31\cdot\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3!}} < 0,3$

$7 < 0,3\cdot [illegible]$

n=5) аналогично

n=4) аналогично

n=3) аналогично

n=2) 0,3

n=1) ~~[illegible]~~ 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	4	5	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

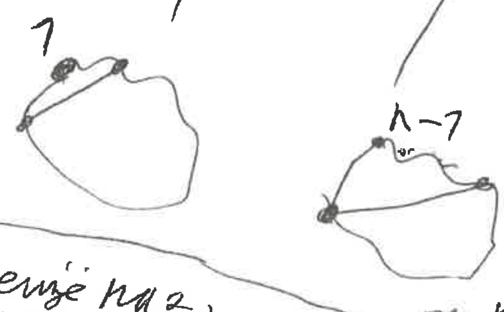
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Давайте научимся доказывать для $n \geq 8$.
для этого будет искать много тупоугольных Δ.
Для каждой вершины просто будет брать не с той стороны, где будут получаться острые углы, где ~~разу~~ тупые, а с той.

$(2n+1)$

$(1+\dots+n-1)\,2$

тупл. случаи



И делим ещё на 2, т.к. считаем тупл. Δ относительно 2 концов его большой стороны.

Итого вероятность невыг. исходов $>$

$$\frac{(2n+1)\,\frac{n(n-1)}{2}}{(2n+1)\,2n(2n-1)} > 0{,}7\ ;\quad \frac{3n-1}{2(2n-1)} > 0{,}7\ ;$$

3!

$30n-30 > 28n-14.$

$2n > 16;$

$n > 8$ — верно.

Ответ: $n \geq 9$ и $n = 3, 4, 5, 6.$

Лист 8 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КАЛИНИНГРАД

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	2	8	4	8	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия СВЕТСКИЙ

Имя ФЁДОР

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 7.05 2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7 906 21 308 51 **Подпись** Светский

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	–	60

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	8	4	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

~~Пусть x_0 - общий корень~~

$x^6 + ax + b = 0$

$x^6 + cx + d = 0$

Пусть x_0 - общим корень двух уравнений, тогда.

$x_0^6 + ax_0 + b = 0$

$x_0^6 + cx_0 + d = 0$

$$-\begin{array}{l} x_0^6 + ax_0 + b = 0 \\ x_0^6 + cx_0 + d = 0 \end{array}$$
$$\overline{(a-c)x_0 + (b-d) = 0}$$

Имеем: $(a-c)x_0 + (b-d) = 0$

Докажем что все корни обоих первоначальных уравнений меньше нуля:

$x^6 + b = -ax$

$$\left.\begin{array}{l} x^6 \geq 0 \text{ при } \forall x \\ b > 0 \text{ - по условию} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x^6+b) > 0 \\ x^6+b = -ax\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -ax > 0 \\ a > 0 \text{ - по условию} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -x > 0 \\ x < 0 \end{array}$$

Аналогично все корни ур-я $x^6 + cx + d$ также меньше нуля

Таким образом, $x_0 < 0$

$a < c \Rightarrow a - c < 0$

$b > d \Rightarrow b - d > 0 \Rightarrow -(b-d) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} a - c < 0 \\ -(b-d) < 0 \\ (a-c)x_0 = -(b-d) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 > 0 \\ x_0 < 0 \end{array}\right\} \text{ - противоречие} \Rightarrow x_0 \text{ - не существует}$$

$\Downarrow$

ур-я $x^6 + ax + b = 0$ и $x^6 + cx + d = 0$ не имеют общих корней - что и требовалось доказать

Лист 1 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	8	4	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2.

Пусть a - кол-во тетрадей, b - кол-во книжек

Согласно условию:

$a \vdots 3$, $a \vdots 5$, $b \vdots 4$, $b \vdots 7$

Пусть $a = 15m$; $b = 28n$

Составим уравнение согласно условию:

$58 + 3m + 4n = 12m + 24n$

$9m + 20n = 58$

$$\left[\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow m = 6\frac{4}{9} \notin Z \\ n = 1 \Rightarrow m = 4\frac{2}{9} \notin Z \\ n = 2 \Rightarrow m = 2 \in Z \end{array}\right.$$

Подбор, но не полный перебор (границы не указаны)

$$\begin{cases} n = 2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Тогда кол-во всех тетрадей - 30; всех книжек - 56 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ тетради принесло 10 человек, книжки - 14 человек.

Таким образом, общее число человек, пришедших на экзамен - $58 + 10 + 14 = 82$ человека.

Ответ: на экзамен пришло 82 человека.

Но для всех допустимых значений приведены вычисления.

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 2 8 4 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

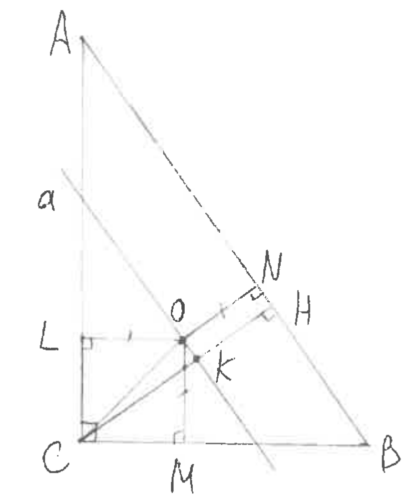
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3.

Дано:
$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle C = 90°$)
CH – высота $\triangle ABC$
$CH = 30$
r – радиус вписанной окр.

Док-ть:
$r > 12$

Док-во:



Поставим точки L, M и N на сторонах $\triangle ABC$ AC, BC и AB соотв так, чтобы:
$OL \perp AC$;
$OM \perp BC$;
$ON \perp AB$.

$OL = OM = ON = r$

Проведём прямую a через точку O так, чтобы: $a \parallel AB$

Пусть $CH \cap a = K$

~~$AB \parallel a$, $NO \perp a$ =>~~

$\left.\begin{matrix} AB \parallel a \\ NO \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow NO \perp a$

Аналогично $KH \perp a$

$\left.\begin{matrix} NO \perp a \\ NO \perp AB \\ KH \perp a \\ KH \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow NOKH$ – прямоугольник $\Rightarrow NO = KH = r$ – св-во прямоугольн

$\left.\begin{matrix} CH \perp AB \\ AB \parallel a \\ K \in a \end{matrix}\right\} \Rightarrow CK \perp a \Rightarrow CK$ – расстояние от C до a =>

$\Rightarrow CO \geq CK$

Х $\triangle CMO$:
$\angle M = 90° \Rightarrow \triangle CMO$ – прямоугольный ($\angle M = 90°$) $\Rightarrow CM^2 + MO^2 = CO^2$ – по теореме Пифагора

$CO = \sqrt{CM^2 + MO^2} = \cancel{\sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r^2}$ $\cancel{\sqrt{2}r}$ $= \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$

$\left.\begin{matrix} CO \geq CK \\ ON = KH \end{matrix}\right\} \Rightarrow CO + ON \geq CH$ ~~$\sqrt{2}r + r \geq 30$~~

~~$CO + ON \geq 30$~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	8	4	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3 (продолжение)

$CO + ON \geq CH \Rightarrow CO + ON \geq 30$

$\sqrt{2} r + r \geq 30$

$2 < 2{,}25$

$\sqrt{2} < 1{,}5 \Rightarrow 1{,}5 r + r > \sqrt{2} r + r \geq 30$

$\cancel{2{,}5 r \geq 30}$ $2{,}5 r > 30$

$\cancel{r \geq}$ $r > 12$ – что и требовалось доказать

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Новороссийск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	0	9	9	5	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия КАЛИНИЧЕНКО

Имя АРТЁМ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 03.06.2004 Класс 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона +7(900)2481865 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	–	2	60

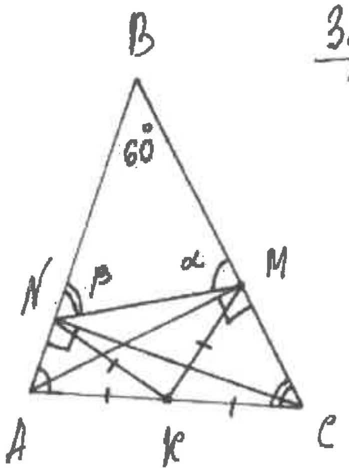
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	9	9	9	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Задача №2

1) По св-ву $\angle BNM = \angle ACB = \beta$;
$\angle BMN = \angle BAC = \alpha$
(линия, соединяющая основания 2 высот треугольника, отсекает от него подобный) 20 – 60?

2) Рассмотрим $\triangle ACN$ и $\triangle AMC$:
они прямоугольные (по условию), в них проведены медианы NK и MK. По св-ву медианы прямоугольного треугольника: $NK = MK = \frac{1}{2}AC$ (т.к гипотенуза общая)
Значит, $\triangle NKM$, $\triangle AKN$, $\triangle MKC$ - равнобедренные
$\Rightarrow \angle ANK = \angle BAC = \alpha$; $\angle MKC = \angle ACB = \beta$.

3) Т.к сумма углов любого треугольника равна 180°, то $\beta = 120° - \alpha$.

4) $\angle ANK + \angle MNK + \angle BNM = 180°$
$\Rightarrow \angle MNK = 180° - (\angle ANK + \angle BNM) = 180° - (\alpha + 120° - \alpha) = 60°$
точно также $\angle NMK = 60°$

5) $\triangle MNK$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle NKM = 60°$
Значит, $\triangle MNK$ - равносторонний

Ответ: 60°; 60°; 60°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 9 9 9 5 2 1

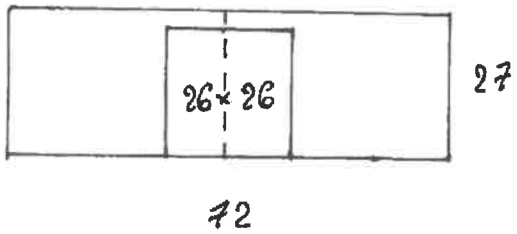
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1

При правильной игре всегда выигрывает первый; приведу одну из тактик:

1) Первым ходом первый игрок должен закрасить квадрат 26 × 26 ровно посередине изначального прямоугольника (это возможно, т.к. длина прямоугольника и сторона квадрата - числа чётные):



2) Таким образом, мы формально разделили оставшийся участок на 2 равные (зеркальные) половины.

3) Поэтому теперь задача первого игрока в точности "отражать" ходы противника с одной половины на другую. В таком случае он всегда будет завершать последовательности пар ходов (включая последнюю). Поэтому последний его ход, являющийся отражением хода соперника, будет последним всей игры.

Значит, выигрывает первый игрок.

(Заметим, что прямоугольник 26 × 1 над квадратом 26 × 26 этой стратегии не мешает, т.к. он также делится пополам; всю его площадь можно заполнять только клетками 1 × 1)

Вариант с квадратом 27 × 27 не подходит, т.к. его середина не совпадает с серединой прямоугольника

Ответ: выигрывает первый.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 9 0 9 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

Задача №3

1) Пусть x - кол-во 9-классников ; $a+1 \le 10$, $b+1 \le 10$ $\Rightarrow a+b \le 18$

y - кол-во 10-классников

a - кол-во реш. задач одним 10-классником в I день

b - кол-во реш. задач одним 9-классником во II день

$\Rightarrow \begin{cases} x(a+1)+ya=129 \\ xb+y(b+1)=190 \end{cases}$; т.к по условию каждый 9-классник решил одно и то же кол-во задач, каждый 10-классник решил одно и то же кол-во задач (только в разные дни - разное кол-ва)

$\Updownarrow$

$\begin{cases} xa+x+ya=129 \\ xb+yb+y=190 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$+\begin{cases} a(x+y)+x=129 \\ b(x+y)+y=190 \end{cases} \Leftrightarrow a(x+y)+b(x+y)+x+y=319$

$\Rightarrow (x+y)(a+b+1)=319$

2) число 319 раскладывается на произведение двух простых чисел - 11 и 29. Значит, $x+y=11$ либо 29. Но первый вариант отпадает, т.к получается, что $a+b=28$, но по условию $a+1 \le 10$, $b+1 \le 10$ $\Rightarrow a+b \le 18$

Значит, $a+b=10 \Rightarrow x+y=29$ человек

Ответ: 29

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000999521

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

1) Пусть $K = 2n+1$ - кол-во вершин многоугольника

2) Тогда нужно подсчитать кол-во всех треугольников этого многоугольника:

Из произвольной пары (соседних) точек многоугольника выходит $K-2$ треугольников. Из остальных пар (кроме последней) выходит уже $K-3$ треугольника (т.к 1 треугольник уже будет засчитан в предыдущей паре). Их кол-во будет равно $K-2$ (т.к первая и последняя не считаются). Последняя пара точек будет образовывать $K-4$ треугольников (т.к 1 треугольник уже засчитан в предыдущей и 1 треугольник засчитан в следующей (первой))

Значит, кол-во треугольников (всего) равно: ⊖

$K_1 = (K-2)+(K-3)\cdot(K-2)+(K-4) = (K-2)(K-2)+K-4 = K(K-3)$, для $K>3$.

3) Найдем кол-во треугольников (K_2), в которых лежит центр многоугольника:

K - число нечетное, поэтому в любом таком многоугольнике каждая пара точек (соседних) образует ровно 1 равнобедренный треугольник (на нем будет центр фигуры)

$\Rightarrow K_2 = K$

неверно.

4) $\Rightarrow P = \frac{K_2}{K_1} = \frac{K}{K(K-3)} = \frac{1}{K-3}$; для $K>3$

5) Вернемся к замене и выполним условие:

$\frac{1}{(2n+1)-3} < 0,3 \Rightarrow n > 2\frac{2}{3} \Rightarrow n \geq 3$

Ответ: при $n \geq 3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ | М А 0 0 0 1 1 0 7 6 2 1

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия СТРУГОВ

Имя АЛЕКСЕЙ

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 12.10.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 8-962-165-72-90 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$a>0$; $b>0$; $c>0$; $d>0$; $a<c$; $d<b$

① $x^4+ax+b=0$ ② $x^4+cx+d=0$

Рассмотрим ①

а) $x^4 \geq 0$

б) $a>0$

в) $b>0$

След-но: $x \leq 0$, причем если $x=0$, то $b=0$ – противоречие $\Rightarrow$ $x<0$

Рассмотрим ②

а) $x^4 \geq 0$

б) $c>0$

в) $d>0$

След-но: $x \leq 0$, причем если $x=0$, то $d=0$ – противоречие $\Rightarrow x<0$

Значит, если даже есть общие корни, то только меньше 0.

$x^4+ax+b=0$
$x^4+cx+d=0$ $\Rightarrow x^4+ax+b=x^4+cx+d$

$ax+b=cx+d$

$ax-cx=d-b$

$x(a-c)=d-b$

$a<c$ (по условию) $\Rightarrow a-c<0$
$d<b$ (по условию) $\Rightarrow d-b<0$

След-но в: $x(a-c)=d-b$: $x \geq 0$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	7	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

Но ранее мы доказали, что $x<0$, получаем противоречие. Значит данные уравнения не имеют общих корней. ЧТД

№2.

1 камк или 2 тет или 3 книж.

Пусть x - количество тетрадей, y - количество книжек.

① Сумма предметов первого стола:

$64+\frac{1}{7}x+\frac{1}{5}y$

② Сумма предметов второго стола:

$\frac{6}{7}x+\frac{4}{5}y$

~~По~~ Количество предметов на столах равно, поэтому мы можем приравнять

$64+\frac{1}{7}x+\frac{1}{5}y=\frac{6}{7}x+\frac{4}{5}y$

$\frac{5}{7}x+\frac{3}{5}y=64 \quad |\times 35$

$$\begin{array}{r} \times\ 64 \\ 35 \\ \hline 320 \\ 192 \\ \hline 2240 \end{array}$$

$25x+21y=2240$

$x=\frac{2240-21y}{25}$

$x\in\mathbb{Z}$, значит $(2240-21y)$ оканчивается на 25, 00, 50, 75

① Чтобы $(2240-21y)$ оканчивалась на 25, то $21y$ - оканчивается на 15.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	7	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2 (продолжение)

Чтобы $21y$ оканчивалась на 15.

$y=15$ и $y=115$ ($2240-21y$ – должна быть положительна)

а) При $y=15$

$$x=\frac{2240-21\cdot15}{25}=\frac{2240-315}{25}=\frac{1925}{25}=37$$

x должен нацело делиться на 2 (т.к каждый принес целое количество тетрадей). Значит этот вариант не подходит

б) При $y=115$

$$x=\frac{2240-21\cdot115}{25}=\frac{2240-2415}{25}=1$$

$x \not\vdots 2 \Rightarrow$ Вариант не подходит.

2) Чтобы $(2240-21y)$ оканчивалось на 50, нужно чтобы $21y$ оканчивалось на 90.

Чтобы $21y$ оканчивалось на 90, нужно ~~что~~ $y=90$ $(2240-21y>0)$

При $y=90$

$$x=\frac{2240-21\cdot90}{25}=\frac{2240-1890}{25}=\frac{350}{25}=14$$

$x\vdots2$; $y\vdots3 \Rightarrow x=14$, $y=90$

Проверка:

$64+\frac{1}{7}\cdot14+\frac{1}{5}\cdot90=\frac{6}{7}\cdot14+\frac{4}{5}\cdot90$

$84=84$ Значит вариант подходит.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 0 7 6 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(3) Чтобы $(2240-21y)$ оканчивалось на 00, $21y$ – оканчивается на 40:

$y=40$ $(2240-21y>0)$

$$x=\frac{2240-21\cdot40}{25}=\frac{2240-840}{25}=\frac{1400}{25}=56$$

$y \not\vdots 3$ (значит ~~принесено не цело~~ кто-то принес не целое количество книжек) противоречие. Этот вариант не подходит.

(4) Чтобы $(2240-21y)$ оканчивалось на 75, то $21y$ – оканчивается на 65:

$y=65$ $(2240-21y>0)$

$$x=\frac{2240-21\cdot65}{25}=\frac{2240-1365}{25}=\frac{875}{25}=35$$

$x \not\vdots 2$ (значит кто-то принес не целое количество книжек) противоречие. Этот вариант не подходит.

⇓

В итоге мы получили 1 вариант.

$x=14$, $y=90$

Значит: 64 – калькулятора; 14 – тетрадей; 90 – книжек.

64 кальк – 64 чел
14 тет – 7 чел
90 книж – 30 чел

$\Rightarrow 64+7+30=101$ – человек

Ответ: 101 участник

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

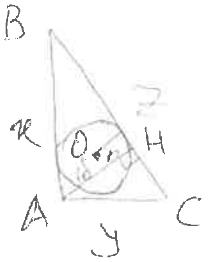
Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	7	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

AH = 18



№3

$S_\Delta = \frac{xy}{2} = \frac{18z}{2} = pr$. Пусть $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$

$xy = 18z = (x+y+z)r$. Также $x^2 + y^2 = z^2$

Предположим, что $r < 7$, тогда

$(x+y+z)r = 18z$

$(x+y+z) = \frac{18z}{r}$

$x + y = \frac{(18-r)z}{r}$ | возв. в квад.

$\overbrace{x^2 + 2\underbrace{xy}_{18z} + y^2}^{z^2} = \frac{(18-r)^2 z^2}{r^2}$

$36z + z^2 = \frac{(18-r)^2 z^2}{r^2}$ $|: z \ (z > 0)$

$36 + z = \frac{(18-r)^2 z}{r^2}$

$r^2(z + 36) = 324z - 36zr + r^2 z$

$\cancel{zr^2} + 36r^2 = 324z - 36zr + \cancel{r^2 z}$

$324z - 36zr - 36r^2 = 0$ $|:36$

$9z - zr - r^2 = 0$

$(9-r)z - r^2 = 0$

При $r = 7$

$2z = 49$

Конец д-ва записан нечетко.

? Сл-но: при $r = 7 \Rightarrow z = \frac{49}{2}$ нер-во не решалось

След-но при $r < 7$; $z < 25$

А если $\frac{49}{2} < z < 25$?

Если $z = 25$, то: $\begin{cases} xy = 450 \\ x^2 + y^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow \frac{450^2}{y^2} + y^2 = 625 \Rightarrow$

$450^2 + y^4 = 25^2 \cdot y^2$

$450 + y^2 = 25y^2$

$y^2 - 25y + 450 = 0$

$D = 625 - 1800 < 0$

не

При уменьшение $r \Rightarrow$ уменьшается z, но $D < 0$

След-но при $z < 25$ и $r < 7$ ~~Нет~~ стороны треугольника не определены. Противоречие $\Rightarrow r > 7$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000110762 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$$

$$A=f(0)+f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\ldots f\left(\frac{2020}{2021}\right)+f(1)$$

$$f(0)=\frac{9^0}{9^0+3}=\frac{1}{4}$$

$$f(1)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Рассмотрим: $f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)$:

$$\frac{\sqrt[2021]{9^{\cancel{2021}}}}{\sqrt[2021]{9}+3}+\frac{\sqrt[2021]{9^{2020}}}{\sqrt[2021]{9^{2020}}+3}$$

Пусть $\sqrt[2021]{9}=x$; $\sqrt[2021]{9^{2020}}=y$. ~~Причем,~~

$\cancel{x\cdot y=9}$

$$\frac{x}{x+3}+\frac{y}{y+3}=\frac{xy+3x+xy+3y}{(x+3)(y+3)}=\cancel{(18+3(x+y))}$$

$$\frac{2xy+3(x+y)}{xy+3x+3y+9}=\frac{2xy+3(x+y)}{xy+9+3(x+y)}\ (=)$$

$$x\cdot y=9\ \left(\sqrt[2021]{9}\cdot\sqrt[2021]{9^{2021}}=\sqrt[2021]{9^{2021}}=9\right)$$

$$(=)\ \frac{18+3(x+y)}{18+3(x+y)}=1.$$

Сумма крайних членов = 1, отсюда не следует, что это ф прогрессия

След-но сумма прогрессии равна

$$S=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n)=\frac{2020}{2}\cdot 1=1010$$

Тут неверно.

также мы не учли $f(0)$ и $f(1)$

$$S_n=S+f(0)+f(1)=1011$$

~~Ответ: 1011~~ (Указание пометку на сле.далее)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	7	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (≈4) 11 чисел.

Чтобы произведение этих чисел ~~было~~ кратно 10, то последняя цифра произведения – 0. Рас~~см~~смотрим двойки ~~цифр~~ чисел, которые дают окончание ноль:

2 5
4 5
6 5
8 5

Очевидно, что из 11 случайных чисел должна быть 5. ~~Вероятность~~ шанс выбрать 5 за 1 взятие – $\frac{1}{8}$. Далее, т.к мы можем выбирать ~~их~~ повторные числа, вероятность взятия 5 за 2 ход не изменится и т.д. Получим, что до ~~вероятность~~ шанс достать 5 за 11 ходов – $\frac{1}{8}$, ~~Вероятность~~ шанс достать 2, 4, 6, 8 за 1 ход равна $\frac{1}{2}$, как и за 11 ходов.

~~Ш~~ Вероятность достать 5: 0,125

Вероятность достать 2 или 4 или 6 или 8: 0,5

Итоговая вероятность составляет $0,125 \cdot 0,5 =$

$= 0,0625$

Ответ: 0,0625

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	7	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5 (пометка)

Значит нужно доказать, что для каждого такого ~~члена~~ слагаемого найдется другое, такое что в сумме они дают 1.

Возьмем слагаемое $f\left(\frac{a}{2021}\right)$ и $f\left(\frac{2021-a}{2021}\right)$

тогда, $f\left(\frac{a}{2021}\right)+f\left(\frac{2021-a}{2021}\right)$:

$$\frac{\sqrt[2021]{9^a}}{\sqrt[2021]{9^a}+3}+\frac{\sqrt[2021]{9^{2021-a}}}{\sqrt[2021]{9^{2021-a}}+3}=\frac{\sqrt[2021]{9^a\cdot 9^{2021-a}}+3\cdot\sqrt[2021]{9^a}+}{}$$

$$\frac{+\sqrt[2021]{9^a\cdot 9^{2021-a}}+3\cdot\sqrt[2021]{9^{2021-a}}}{\left(\sqrt[2021]{9^a}+3\right)\cdot\left(\sqrt[2021]{9^{2021-a}}+3\right)}=\frac{18+3\left(\sqrt[2021]{9^a}+\sqrt[2021]{9^{2021-a}}\right)}{18+3\left(\sqrt[2021]{9^a}+\sqrt[2021]{9^{2021-a}}\right)}$$

Тут верно

$=1$

ЧТД

Всего слагаемых четное количество, значит для каждого из них найдется ~~пара~~ другое, с которым будет сумма 1.

Ответ: 1011.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Город Братск ЦРО

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	1	0	8	2

1

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Занько

Имя Михаил

Отчество Васильевич

Дата рождения 05.11.2003 Класс 10

Предмет Математика

Лицей №2 г. Братск

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 13.03.21

Номер телефона [redacted] Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	2	62

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	3	1	0	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

$a<c$, $d<b$, $a,b,c,d>0$

$x^4+ax+b=0$
$x^4+cx+d=0$ $\Rightarrow$ $x^4+ax+b=x^4+cx+d$

$(b-d)=x(c-a)$

$x=\frac{b-d}{c-a}$, число положительное, исходя из неравенств

Можем подставить x в уравнения и у нас получится число >0, т.е равенства нет из этого следует, что уравнения общих корней не имеют.

Ответ: нет

№ 2

Пусть x - число тетрадей, а y - число книжек. тогда нам нужно найти: $64+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$, при этом $64+\frac{x}{7}+\frac{y}{5}=\frac{6x}{7}+\frac{4y}{5}\Rightarrow 64=\frac{5x}{7}+\frac{3y}{5}$

У нас имеется, что $\begin{matrix}x:2\\x:7\end{matrix}\Rightarrow x:14$, а также

$\begin{matrix}y:3\\y:5\end{matrix}\Rightarrow y:15$. Сделаем таблицу, куда пойдут знач. выражений, $\frac{5x}{7}$ и $\frac{3y}{5}$, где $x:14$, а $y:15$

x	$\frac{5x}{7}$	y	$\frac{3y}{5}$
14	10	15	9
28	20	30	18
42	30	45	27
56	40	60	36
70	50	75	45
84	60	90	54
		105	63

При этом сумма 2 и 4 столбика должна быть равна 64.

Во 2 столбце все оканчивается на 0, а в 4 - единственное число - 54, а в первом столбце берем 10

$54+10=64$

(Дальше значений 63 и 60 нет смысла считать, т.к они будут >64) $\Rightarrow$

$\frac{5x}{7}=10$, $x=14$, а $\frac{3y}{5}=54$, $y=90$, тогда участников - $64+\frac{14}{2}+\frac{90}{3}=64+7+30=101$

Ответ: 101

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 3 1 0 8 2 1 |

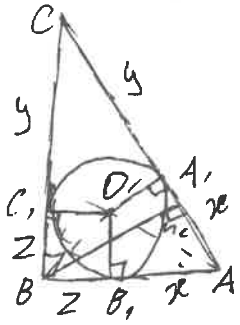
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Дано:
$\triangle ABC$, где $\angle B = 90^\circ$
$h_c = 18$
Док-ть:
$r > 7$

Решение



1) Центр O лежит на пересеч. биссектрис.
$OC_1 = OB_1 = r$, При этом в $\triangle OC_1B$ и $\triangle OB_1B$, $\angle OBB_1 = \angle OBC_1 = 45^\circ$, а т.к. $\triangle OC_1B = \triangle OB_1B$ (по гипот. и катету) $\Rightarrow$ $\angle BOB_1 = \angle BOC_1 = 45^\circ$, $\triangle OC_1B$ - равноб. ($OB_1 = BB_1 = r$)

2) $AA_1 = AB_1$, $BB_1 = BC_1$, $CC_1 = CA_1$ (по свойству касат. к окружности.
Пусть $AA_1 = x$, $CA_1 = y$, $BB_1 = z$

3) Запишем различные формулы $S_{\triangle ABC}$

$S = \frac{h\cdot(x+y)}{2}$ и $S = \frac{(2x+2y+2z)r}{2}$ $\Rightarrow$

$9(x+y) = (x+y+z)r$, т.к. $z = r \Rightarrow$

$9(x+y) = rx + r\cancel{y} + r^2$

$(x+y)(9-r) = r^2$

Запишем т. Пифагора для $\triangle ABC$

$(x+y)^2 = (x+z)^2 + (z+y)^2$, т.к. $z = r$

$\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + 2xr + r^2 + r^2 + 2ry + \cancel{y^2}$

$2xy = 2r(x+y) + 2r^2 \Rightarrow xy = r(x+y) + r^2$

При этом $h_c = \sqrt{xy} \Rightarrow xy = 18^2$, $xy = 324$

$x + y = \frac{324 - r^2}{r}$

$(324 - r^2)(9-r) = r^3$

$2916 - 324r - 9r^2 = 0 \quad | : (-9)$

$r^2 + 36r - 324 = 0$

$D = 36^2 + 4\cdot 324 = 2592 \qquad 50 < \sqrt{2592} < 51$
Берем за 50

$r = \frac{-36 \pm \sqrt{2592}}{2}$

$r = \frac{14}{2} = 7$, но r все равно > 7

Ответ: ЧТД

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000131082 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

У нас имеется порядок:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Перемножают 2 чисел из этого ряда, и это число должно быть кратно 10. Если число кратно 10, то оно оканчивается на 0. Посмотрев какие цифры в ряду, у нас единственный случай, чтобы получить число, которое оканчивается на 0 - перемножение 5 и любого четного числа. При этом достаточно обязательно иметь во множителях 5 и любое четное число, а остальные будут неважны. Тогда вероятность выпадения пятерки $\frac{1}{8}$, а любого четно $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Перемножаем вероятности

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\cancel{\frac{4}{32}}\ \frac{1}{16}$$

Ответ: $\frac{1}{16}$

№5

$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$, Найти $S=f(0)+f\left(\frac{1}{2021}\right)+\ldots+f\left(\frac{2020}{2021}\right)+f(1)$

Сумма $f(0)+f(1)=\frac{1}{4}+\frac{9}{12}=1$

Поэтому сумма между $f(0)$ и $f(1)$ будет также равна 1 $\Rightarrow S=2$

Ответ: 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный Университет

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	0	3	5	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия СПЕСИВЦЕВА

Имя Полина

Отчество ЭДУАРДОВНА

Дата рождения 25.06.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 1 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7-963-225-2650 **Подпись** [подпись]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	15	10	2	15	62

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	3	0	3	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть кол-во участников, принёсших тетради будет n, а принёсших учебники — m. Тогда всего участников $58+n+m$. Заметим, что тк $n,m\in\mathbb{Z}$ (не может быть не целого количества учеников), то $n\vdots 5$ тк на 1м столе лежала $\frac{1}{5}$ часть всех тетрадей и $m\vdots 7$, тк на 1м столе лежала $\frac{1}{7}$ часть всех тетрадей ~~книг~~ (общее кол-во тетрадей $3n$, а книг — $4m$). Тк на каждом столе лежало поровну предметов, то $58+3n+4m\ \vdots\ 2$, т.е тк $58\vdots 2$ и $4\vdots 2$, а $3\not\vdots\, 2$, то $n\vdots 2$.

Составим ур-е.

$$\begin{cases}\frac{4}{5}\cdot 3n+\frac{6}{7}\cdot 4m=29+1{,}5n+2m\\ 58+\frac{1}{5}\cdot 3n+\frac{1}{7}\cdot 4m=29+1{,}5n+2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{12n}{5}+\frac{24m}{7}=29+1{,}5n+2m\\ 29+\frac{3}{5}n+\frac{4}{7}m=1{,}5n+2m\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}12{,}4n-1{,}5n+\frac{24}{7}m-\frac{14}{7}m=29\\ 1{,}5n-0{,}6n+\frac{14}{7}n-\frac{4}{7}m=29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0{,}9n+\frac{10}{7}m=29\\ 0{,}9n+\frac{10}{7}m=29\end{cases}$$

Получим $\frac{9}{10}n+\frac{10}{7}m=29$

Известно: $\left.\begin{matrix}n\vdots 2\\ n\vdots 5\end{matrix}\right\}\Rightarrow n\vdots 10$

$m\vdots 7$

$\frac{9}{10}n+\frac{10}{7}m=29$ Подбором найдём корни ур-е

Если $n=10$ $m=7$ $\frac{9}{10}\cdot 10+\frac{10}{7}\cdot 7=9+10=19$

$19\neq 29$ — не подходит

$n=20$ $m=7$ $\frac{9}{10}\cdot 20+\frac{10}{7}\cdot 7=18+10=28$

$28\neq 29$ — не подходит

$n=10$ $m=14$ $\frac{9}{10}\cdot 10+\frac{10}{7}\cdot 14=9+20=29$

$29=29$ — подходит,

значит, $n=10$, $m=14$.

Т.об $58+n+m=58+10+14=82$ человека писало экзамен.

Неполный перебор.

Ответ: 82 человека

№1

$x^6+ax+b=0$ $\quad x^6+cx+d=0$ $\quad a<c$; $d<b$; $a,b,c,d>0$

тк x^6 ~~всегда~~ ≥ 0 при $\forall x$, и $b,d>0$ по усл, то для выполнения условия (ур-я равны 0) нужно, чтобы $ax<0$ и $cx<0$, но по усл $a,c>0\Rightarrow$ $\Rightarrow x<0$

Допустим, что ур-е имеют общий корень $x_1=-n$; $x_1<0$ (т.е $n>0$)

Тогда получим: ~~$(-n)^6+a(-n)+b=0$~~ ~~$(-n)^6+\ldots$~~ $(n)^6-cn+b=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 3 0 3 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Тк a<c~~, ~~и $x_1 = n$ ($x_1 < 0$), то~~

$x_1^6 + ax_1 + b = 0$ $\quad$ $x_1^6 + cx_1 + d = 0$

$(-n)^6 + (-n \cdot a) + b = 0$ $\quad$ $(-n)^6 + (-n \cdot c) + d = 0$

$n^6 - an + b = 0$ $\quad$ $n^6 - cn + d = 0$

Тк $a < c$, то $an < cn$

$-an > -cn$

$n^6 - an > n^6 - cn$ но, по усл $b > d$, значит

$n^6 - an + b > n^6 - cn + b$ $\quad$ $n^6 - an + b > n^6 - cn + d$,

Однако по условию $x^6 + ax + b = x^6 + cx + d = 0$. Противоречие!
Значит данные уравнение не могут иметь общих корней.

ч.т.д.

N4

Тк однозначные натуральные числа это 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (их 9), ~~нам~~ ~~будут обязательно~~
то ~~они~~ ~~могут~~ повторяются если выбрать 15 чисел (принцип Дирихле)
Тогда всего вариантов случайно выбрать 15 чисел:

$\underset{1}{9} \cdot \underset{2}{9} \cdot \underset{3}{9} \cdot \underset{4}{9} \cdot \underset{5}{9} \cdot \underset{6}{9} \cdot \underset{7}{9} \cdot \underset{8}{9} \cdot \underset{9}{9} \cdot \underset{10}{9} \cdot \underset{11}{9} \cdot \underset{12}{9} \cdot \underset{13}{9} \cdot \underset{14}{9} \cdot \underset{15}{9} = 9^{15}$ ~~вариантов (т.к. порядок не важен)~~ вариантов (случайно выбрать 15 чисел)

~~Т.к. порядок не важен 9^{15}~~

Но для того, чтобы произведение этих 15ти чисел было кратно 14, нужно выбрать хотя бы одну 2 и хотя бы одну 7
Тогда вариантов выбрать такой набор 9^{13}. Тогда $\frac{9^{13}}{9^{15}} = \frac{1}{9^2} =$

$= \frac{1}{81} = \frac{\frac{100}{81}}{81 \cdot \frac{100}{81}} = \frac{\frac{100}{81}}{100} = \frac{1{,}2345}{100}$ – вероятность того, что произведение выбранных чисел : 15

$100 : 81 = 1{,}23456\ldots$

100
81
190
162
280
243
370
324
460
405
55…

т.е. 1,2345% – вероятность того, что произведение выбранных чисел : 15

Ответ: 1,2345%

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	3	0	3	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$f(x)=\frac{1}{4^{x}+2}$

$A = f(0)+f(\frac{1}{100})+f(\frac{2}{100})+\dots+f(\frac{99}{100})+f(1) = \frac{1}{4^0+2}+\frac{1}{4^{\frac{1}{100}}+2}+\frac{1}{4^{\frac{2}{100}}+2}+\dots+\frac{1}{4^{\frac{99}{100}}+2}+\frac{1}{4^1+2}=$

$=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^1}+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^2}+2}+\dots+\frac{1}{\sqrt[100]{4^{99}}+2}+\frac{1}{4+2}=\frac13+\frac{1}{\sqrt[100]{4^1}+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^2}+2}+\dots+\frac{1}{\sqrt[100]{4^{99}}+2}+\frac16$

Заметим, что всего в сумме A 101 слагаемое. Разобьем все слагаемые на 50 пар, и одно слагаемое таким образом, что суммы показателей степеней будут равны 1 (лишним будет слагаемое $\frac{1}{\sqrt[100]{4^{50}}+2}$). Например $\frac{1}{4^0+2}+\frac{1}{4^1+2}$; $\frac{1}{4^{\frac{1}{100}}+2}+\frac{1}{4^{\frac{99}{100}}+2}$ и т.д.

$\frac{1}{4^0+2}+\frac{1}{4^1+2}=\frac13+\frac16=\frac26+\frac16=\frac36=\frac12$

$\frac{1}{\sqrt[100]{4^1}+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^{99}}+2}=\frac{\sqrt[100]{4^{99}}+2+\sqrt[100]{4^1}+2}{\sqrt[100]{4^1}\cdot\sqrt[100]{4^{99}}+2\sqrt[100]{4^1}+2\sqrt[100]{4^{99}}+4}=\frac{\sqrt[100]{4^1}+\sqrt[100]{4^{99}}+2+2}{4+4+2\sqrt[100]{4^1}+2\sqrt[100]{4^{99}}}=$

$=\frac{\cancel{\sqrt[100]{4^1}+\sqrt[100]{4^{99}}+4}}{2(\cancel{\sqrt[100]{4^1}+\sqrt[100]{4^{99}}+4})}=\frac12$

Не доказано в общем виде.

$\frac{1}{\sqrt[100]{4^2}+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^{98}}+2}=\frac{\sqrt[100]{4^2}+\sqrt[100]{4^{98}}+4}{4+2\sqrt[100]{4^2}+2\sqrt[100]{4^{98}}+4}=\frac{\sqrt[100]{4^2}+\sqrt[100]{4^{98}}+4}{2(\sqrt[100]{4^2}+\sqrt[100]{4^{98}}+4)}=\frac12$

$\cdots$

$\frac{1}{\sqrt[100]{4^{49}}+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^{51}}+2}=\frac{\sqrt[100]{4^{49}}+\sqrt[100]{4^{51}}+4}{4+2\sqrt[100]{4^{49}}+2\sqrt{4^{51}}+4}=\frac{\cancel{100}\sqrt[100]{4^{49}}+\sqrt[100]{4^{51}}+4}{2(4+\sqrt[100]{4^{49}}+\sqrt[100]{4^{51}})}=\frac12$

Т.об. получим общий вид таких сумм $\frac{1}{\sqrt[100]{4^{100-n}}+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^{n}}+2}=\frac{2+\sqrt[100]{4^{100-n}}+2+\sqrt[100]{4^n}}{\sqrt[100]{4^{100-n}\cdot4^n}+2\sqrt[100]{4^{100-n}}+2\sqrt[100]{4^n}+4}=$

$=\frac{4+\sqrt[100]{4^{100-n}}+\sqrt[100]{4^{n}}}{\sqrt[100]{4^{100}}+2\sqrt[100]{4^{100-n}}+2\sqrt[100]{4^n}+4}=\frac{4+\sqrt[100]{4^{100-n}}+\sqrt[100]{4^n}}{4+2\sqrt[100]{4^{100-n}}+2\sqrt[100]{4^n}+4}=\frac12$ т.е. все такие суммы $n\in[0;100]$ дробей будут равны $\frac12$.

Лишняя дробь $\frac{1}{\sqrt[100]{4^{50}}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac14$, т.е. $A=50\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[100]{4^{100-n}}+2}+\frac{1}{\sqrt[100]{4^n}+2}\right)+\frac14$

$A=50\cdot\frac12+\frac14=25+\frac14=25\frac14$

Ответ: $25\frac14$

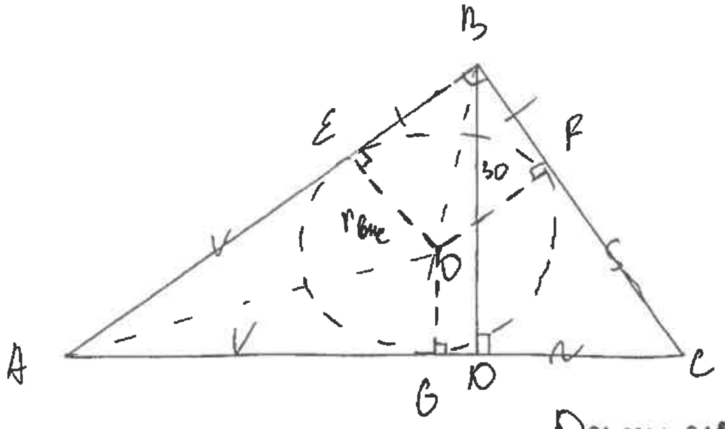
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 3 | 5 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Дано:
$\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$)
BD - высота
$\omega_1 = (O; r_{\text{впис}})$ - вписанная в ABC
$BD = 30$

Доказать:
$r_{\text{впис}} > 12$

Доказательство

1) Из т O - центра ω_1 опустим $\perp$ры OE, OF и OG в точки касания к сторонам AB; BC и AC соответственно.
Рассм. чет-ник $OEBF$ $\angle B = \angle E = \angle F = 90^\circ$ по постр и условию; ~~EB=~~ $\Rightarrow \angle O = 90^\circ$
Значит $EBFO$ - прямоугольник. $EB = BF$ как отрезки касательных, проведённых из 1й точки, то $BF = EO$ т.к. $EBFO$ - прямоугольник. Значит $EB = BF = EO = OF \Rightarrow EBFO$ - квадрат и $EB = BF = r_{\text{впис}}$

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} r_{\text{впис}} \cdot P_{ABC}$; $P_{ABC} = AB + BC + AC = AE + AG + GC + CF + BE + EF$ ($AE = AG$; $GC = CF$ как отрезки касательных, проведённых из 1й точки) $\Rightarrow$
$P_{ABC} = 2AG + 2GC + 2BF = 2(AG + GC + BF) = 2(AC + r_{\text{впис}})$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} r_{\text{впис}} \cdot 2(AC + r_{\text{впис}}) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ Заметим, что $r_{\text{впис}} \le 15$ ($15 = \frac{1}{2} BD$)

$2 \cdot r_{\text{впис}}(AC + r_{\text{впис}}) = AC \cdot 30$

$2r_{\text{впис}}^2 + 2AC \cdot r_{\text{впис}} - 30AC = 0$

$D = 4AC^2 + 8 \cdot 30AC = 4AC^2 + 240AC$ $r_{\text{впис}\,1,2} = \frac{-2AC \pm \sqrt{4AC^2 + 240AC}}{4} =$

$= \frac{-2AC \pm 2\sqrt{AC^2 + 60AC}}{4} = \frac{-AC \pm \sqrt{AC^2 + 60AC}}{2}$ корень $\frac{-AC - \sqrt{AC^2 + 60AC}}{2}$ не удовл усл $r_{\text{впис}} > 0$

Получим $r_{\text{впис}} = \frac{-AC + \sqrt{AC^2 + 60AC}}{2}$

Заметим, что $BD^2 = AD \cdot DC$ $30^2 = AD \cdot DC$; $AC = AD + DC$; $AD = AC - DC$
$900 = AC \cdot DC - DC^2$

Из $\triangle BDC$ ($\angle D = 90^\circ$) $30^2 + DC^2 = (r_{\text{впис}} + DC)^2$
$900 + DC^2 = (r_{\text{впис}} + DC)^2$ $900 + DC^2 = AC \cdot DC$ $\Rightarrow (r_{\text{впис}} + DC)^2 = AC \cdot DC$

Не засчитано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	0	3	5	2	2	1

Горный Университет

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ШПИНЕВА

Имя Ульяна

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 06.08.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7 (911) 715-21-88 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	10	5	20	7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

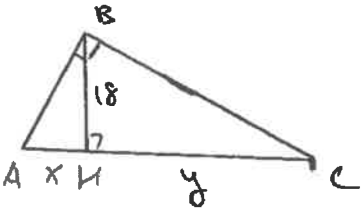
Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	0	3	5	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3.



в △ABC BH-высота, $\hat{B} = 90°$

$BH = 18$

(!) $r > 7$

Нам известно, что $BH = \sqrt{AH \cdot CH}$, т.к BH- высота на гипотенузу обозначим длину AH за x, длину CH за y, тогда $\sqrt{xy} = 18$.

$S = p \cdot r$, где S-площадь, p-полупериметр, r- радиус впис. окружности

$$r = \frac{S}{p}$$

$$S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{18^2 + x^2} \cdot \sqrt{18^2 + y^2}}{2}$$

$$p = \frac{\sqrt{18^2 + x^2} + \sqrt{18^2 + y^2} + x + y}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{xy} = 18 \\ &x > 0 \\ &y > 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow x = \frac{18^2}{y}$$

$$r = \frac{\sqrt{(18^2 + x^2)(18^2 + y^2)}}{\sqrt{18^2 + x^2} + \sqrt{18^2 + y^2} + x + y} = \frac{\sqrt{\left(18^2 + \frac{18^4}{y^2}\right)(18^2 + y^2)}}{\sqrt{18^2 + \frac{18^4}{y^2}} + \sqrt{18^2 + y^2} + \frac{18^2}{y} + y} =$$

$$= \frac{\frac{18}{y}\sqrt{(18^2 + y^2)(18^2 + y^2)}}{\frac{18}{y}\sqrt{18^2 + y^2} + \sqrt{18^2 + y^2} + \frac{18^2}{y} + y} = \frac{18 \cdot (18^2 + y^2)}{\sqrt{18^2 + y^2} \cdot (18 + y) + 18^2 + y^2} =$$

$$= \frac{18 \cdot \cancel{8}\sqrt{18^2 + y^2}}{(18 + y) + \sqrt{18^2 + y^2}} \overset{y>0}{>} \frac{18 \cdot 18}{18 + 18} = \frac{324}{36} > \frac{252}{36} = \cancel{6}\ 7$$

числитель >, знамен. >

т.о. мы получили, что $r > 7$, что и требовалось доказать

Надо: знамен. ≤

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2.

обозначим кол-во тетрадей за $2x$, а книжки за $3y$

тогда $x+y+64$ – кол-во всех участников

$$64+\frac{2\cdot x}{7}+\frac{3y}{5}\cdot 4=\frac{6\cdot 2x}{7}+\frac{4\cdot 3\cdot y}{5} \Leftrightarrow$$

$$64\cdot 35+10x+21y=60x+84y \Leftrightarrow$$

$$64\cdot 35=50x+63y \quad (*)$$

x, y - целые числа, при этом $\frac{2x}{7}$ и $\frac{3y}{5}$ тоже целые, т.е.

$x \vdots 7$, а $y \vdots 5$ обозначим $\frac{x}{7}=a$, $\frac{y}{5}=b$, тогда поделим $(*)$ на 35:

$64=10\cdot a+9\cdot b$, где a, b - целые

подберём значения a и b, $\begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases}$, тк только при произведении 9 на 6 получаем 4 на конце.

итак, $\begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=30 \end{cases}$

Значит всего участников $7+30+64=101$

Ответ: всего 101 участник.

№ 5.

$$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$$

$$A=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt[2021]{9}}{\sqrt[2021]{9}+3}+\frac{\sqrt[2021]{9^2}}{\sqrt[2021]{9^2}+3}+\ldots+\frac{\sqrt[2021]{9^{2020}}}{\sqrt[2021]{9^{2020}}+3}+\frac{3}{4}$$

обозначим $\sqrt[2021]{9}$ за a, тогда:

$$A=\frac{1}{4}+\frac{a}{a+3}+\frac{a^2}{a^2+3}+\ldots+\frac{a^{2020}}{a^{2020}+3}+\frac{3}{4}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M A 0 0 0 1 0 3 5 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Докажем, что:

$$\frac{a^b}{a^b+3}+\frac{a^{2021-b}}{a^{2021-b}+3}=1, \text{ где } \begin{cases} b<2021 \\ a=\sqrt[2021]{9} \end{cases}$$

$$\frac{a^b}{a^b+3}+\frac{a^{2021-b}}{a^{2021-b}+3}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^{2021-b}}{a^{2021-b}+3}=\frac{a^b+3-a^b}{a^b+3} \Leftrightarrow$$

$$a^{2021-b}\cdot(a^b+3)=3\cdot(a^{2021-b}+3) \Leftrightarrow$$

$$a^{2021}+3\cdot a^{2021-b}=3\cdot a^{2021-b}+9 \Leftrightarrow$$

$$a^{2021}=9 \Leftrightarrow a=\sqrt[2021]{9} \text{ – ист.}$$

т.о. $f(x)+f(1-x)=1$

т.е. $f(0)+f(1)=1$

$f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)=1$

...

$f\left(\frac{1010}{2021}\right)+f\left(\frac{1011}{2021}\right)=1$

$\Rightarrow$

всего таких пар у нас 1011, т.е. $A=1011\cdot 1=1011$

Ответ: $A=1011$

№ 1.

$\begin{cases} a<c \\ d<b \end{cases}$, пусть уравнения имеют хотя бы один общий корень, обозначим его за A, тогда:

$$\begin{cases} A^4+a\cdot A+b=0 \\ A^4+c\cdot A+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^4+a\cdot A+b=0 \\ a\cdot A+b=c\cdot A+d \end{cases} \Leftrightarrow$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Leftrightarrow \begin{cases} A^4 + a\cdot A + b = 0 \\ A\cdot(c-a) = (b-d) \end{cases}$

$\begin{cases} c > a \\ b > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-a>0 \\ b-d>0 \end{cases}$

$A = \dfrac{b-d}{c-a}$ $\Rightarrow A > 0$

~~если A - корень уравнения $x^4+ax+b=0$, ~~ ~~представим уравнение в виде $(x-A)\cdot B = 0$~~

~~найдём B по схеме Горнера:~~

~~$A \,|\, 1$~~

заметим, что $A>0 \Rightarrow A^4>0$, а также $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$

т.о., если A - корень обоих уравнений, то $A^4+a\cdot A+b=0$,

но $\begin{cases} A^4>0 \\ a>0 \\ A>0 \\ b>0 \end{cases}$, $\Rightarrow$ их сумма строго больше 0

Т.о. мы получили противоречие с предположением, что уравнение имеют общий корень A

Т.о. у уравнений нет общих корней, что и требовалось доказать.

№ 4.

найдём кол-во значений, которые ~~мы~~ получить, выбирая и перемножая 11 чисел из ряда $1, 2, 3, .., 8$:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 3 5 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(№ 4)
заметим, что всего возможных комбинаций 8^{11}, но среди них есть одинаковые результаты, т.к. взято одинаковые наборы чисел, но в разном порядке. ~~[illegible]~~ кол-во повторений комбинаций для одного набора чисел равно $k! \cdot k^{n-k}$, где k - кол-во различных чисел в наборе, а n - всего чисел в наборе.

8^{11} - это кол-во наборов, которые можно собрать из этих восьми чисел, умноженное на кол-во повторений комбинаций. Т.о. мы можем найти кол-во различных наборов, а следовательно и кол-во всех возможных полученных значений:

$$8^{11} = x \cdot 8! \cdot 8^{11-8} \iff 8^7 = x \cdot 7! \iff x = \frac{8^7}{7!}$$

если число делится на 10, то в наборе обязательно должны быть 5 и 2, или 5 и 4, или 5 и 6, или 5 и 8. Кол-во таких наборов:

$$8^9 = x \cdot 8! \cdot 8^{11-8} \iff x = \frac{8^5}{7!}$$, где x - это кол-во наборов с двумя фиксированными значениями

а всего подходящих наборов

$$4x - \cancel{4}(4-1)! = \frac{4 \cdot 8^5}{7!} - 6$$

Найдём вероятность

Лист 5 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 3 5 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(Зоч)

Вероятность равна:

$$\frac{\frac{4\cdot 8^5}{7!}-6}{\left(\frac{8^7}{7!}\right)} = \frac{4\cdot 8^5-6\cdot 7!}{8^7} = \frac{3151}{131072}$$

Ответ: вероятность кратности 10 равна $\frac{3151}{131072}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный университет	М	А	0	0	0	1	0	2	1	5	2	1

Адрес площадки проведения — Шифр

Вариант № 2

Фамилия Филимонов

Имя Дмитрий

Отчество Эдуардович

Дата рождения 21.05.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7-951-706-23-51 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	0	2	1	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6
–	20	–	20	20	6

№2

58 - человек пришли с телефонами

x - человек пришли с тетрадями

y - человек пришли с книгами

58+x+y - всего человек пришло на экзамен

58 - телефонов было принесено

3x - тетрадей было принесено

4y - книг было принесено

Т.к. на обоих столах одинаковое количество предметов:

$$58 + 3x\cdot\frac{1}{5} + 4y\cdot\frac{1}{7} = 3x\cdot\frac{4}{5} + 4y\cdot\frac{6}{7}$$

$$3x\cdot\frac{3}{5} + 4y\cdot\frac{5}{7} = 58$$

$$\frac{9x}{5} + \frac{20y}{7} = 58$$

x и y - натуральные числа ($x \neq 0$ и $y \neq 0$, т.к. тогда результат суммы $\frac{9x}{5} + \frac{20y}{7}$ никогда не будет равен 58), т.к. кол-во человек не может быть дробным или отрицательным ~~они тоже~~

Количества книг и тетрадей тоже ~~числа~~ натуральные числа, значит $9x ⋮ 5$, значит $x ⋮ 5$, и $20y ⋮ 7$, значит $y ⋮ 7$.

Найдем корни методом подбора

1) $x=5, y=7$: $9+20<58$

2) $x=5, y=14$: $9+40<58$

3) $x=5, y=21$: $9+60>58$

4) $x=10, y=7$: $18+20<58$

5) $x=10, y=14$: $18+40=58$

6) $x=15, y=7$: $27+20<58$

7) $x=15, y=14$: $27+40>58$

8) $x=20, y=7$: $\underbrace{36+20}_{56} \overset{?}{>} 58$

Подходит только пара чисел $x=10$ и $y=14$, значит $58+10+14=82$ (чел) - пришли на экзамен

Ответ: 82

Почему дальше перебор не ведется? Границ значений не указано

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 0 2 1 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Сгруппируем сумму A:

$$A = (f(0)+f(1)) + \left(f\left(\tfrac{1}{100}\right)+f\left(\tfrac{99}{100}\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\tfrac{49}{100}\right)+f\left(\tfrac{51}{100}\right)\right)+f\left(\tfrac{50}{100}\right)$$

Посчитаем значения ~~в~~ сумм в первых двух скобках

$$f(0)+f(1) = \frac{1}{4^0+2} + \frac{1}{4^1+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\tfrac{1}{100}\right)+f\left(\tfrac{99}{100}\right) = \frac{1}{4^{\frac{1}{100}}+2} + \frac{1}{4^{\frac{99}{100}}+2} = \frac{4^{\frac{99}{100}}+2+4^{\frac{1}{100}}+2}{4^{\frac{1}{100}}\cdot 4^{\frac{99}{100}}+2\cdot 4^{\frac{1}{100}}+2\cdot 4^{\frac{99}{100}}+4} =$$

$$= \frac{4^{\frac{1}{100}}+4^{\frac{99}{100}}+4}{4+2\cdot 4^{\frac{1}{100}}+2\cdot 4^{\frac{99}{100}}+4} = \frac{4^{\frac{1}{100}}+4^{\frac{99}{100}}+4}{2\cdot 4^{\frac{1}{100}}+2\cdot 4^{\frac{99}{100}}+8} = \frac{4^{\frac{1}{100}}+4^{\frac{99}{100}}+4}{2(4^{\frac{1}{100}}+4^{\frac{99}{100}}+4)} = \frac{1}{2}$$

Надо доказать.

Не трудно заметить, что в остальных скобках будет тоже получаться $\frac{1}{2}$, т. к. числа, стоящие в числителе, в сумме дают 100, значит A приобретает следующий вид:

$$A = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+f\left(\tfrac{50}{100}\right)$$

Всего таких скобок 50, значит:

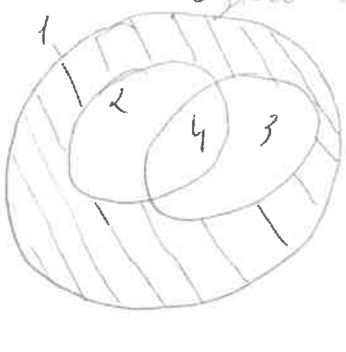
$$A = 50\cdot\frac{1}{2}+f\left(\tfrac{50}{100}\right) = 25+f\left(\tfrac{50}{100}\right) = 25+\frac{1}{4^{\frac{50}{100}}+2} = 25+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+2} =$$

$$= 25+\frac{1}{\sqrt{4}+2} = 25+\frac{1}{2+2} = 25+\frac{1}{4} = 25{,}25$$

Ответ: 25,25

№4

$14 = 7\cdot 2$; 7 и 2 – простые числа, значит произведение 15 однозначных натуральных чисел кратно 14, когда среди них есть хотя бы одно кратное 7 (т.е. 7) и хотя бы одно кратное 2 (т.е. 2, 4, 6, 8).



1 – каждое число в произведении от 1 до 9

2 – подмножество множества 1, но среди чисел нет 7;

3 – подмножество множества 1, но среди чисел нет кратных 2 (т.е. 2, 4, 6, 8),

4 – пересечение множеств 2 и 3, в данном множестве все числа в произведении ~~1, 3, 5 или 9~~ 1, 3, 5 или 9.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	0	2	1	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Искомым множеством будет закрашенная часть множества 1, назовём его буквой x.
~~Под~~Множество 1 будет равно 9^{15}
Множество 2 будет равно 8^{15}
Множество 3 будет равно 5^{15}
Множество 4 будет равно 4^{15}
Значит $x = 9^{15} - 8^{15} - 5^{15}$
Но посмотрев на рисунок можно заметить, что мы вычли два раза множество 4, т. к. оно является подмножеством и множества 2, и множества 3, значит:

$x = 9^{15} - 8^{15} - 5^{15} + 4^{15}$

Чтобы найти вероятность попадания в данное множество нужно количество ~~чисел~~ комбинаций в нём разделить на количество ~~чисел~~ комбинаций в 1 множестве, т. е. на количество комбинаций всего.

$$\frac{x}{мн\,1} = \frac{9^{15} - 8^{15} - 5^{15} + 4^{15}}{9^{15}} = 1 + \frac{4^{15}}{9^{15}} - \frac{8^{15}}{9^{15}} - \frac{5^{15}}{9^{15}}$$

Отв.: С вероятностью $1 + \frac{4^{15}}{9^{15}} - \frac{8^{15}}{9^{15}} - \frac{5^{15}}{9^{15}}$ произведение 15 случайно выбранных однозначных натуральных чисел будет кратно 14.

Отлично!

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный университет

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	8	9	8	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Шайтор

Имя Илья

Отчество Константинович

Дата рождения 15.10.2004 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7(921)556-83-99 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5

$A = f(0)+f(0{,}01)+f(0{,}02)+\ldots+f(0{,}99)+f(1)$

1) Посчитаем некоторые числа и суммы

$f(0)+f(1)=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{4+2}=\frac{1}{2}$

$f(0{,}5)=\frac{1}{4^{0{,}5}+2}=\frac{1}{4}$

2) Док-ем, что $f(x)+f(y)=\frac{1}{2}$, где $x+y=1$

$f(x)+f(y)=\frac{1}{4^x+2}+\frac{1}{4^y+2}=\frac{4^y+2+4^x+2}{(4^x+2)(4^y+2)}=$

$=\frac{4+4^y+4^x}{4^{x+y}+4+2\cdot 4^y+2\cdot 4^x}=\frac{4+(4^y+4^x)}{2(4+(4^y+4^x))}=\frac{1}{2}$

3) Следовательно $A=(f(0)+f(1))+(f(0{,}01)+f(0{,}99))+\ldots+(f(0{,}49)+f(0{,}51))+f(0{,}5)=$

$=50\cdot 0{,}5+0{,}25=25{,}25$

Ответ: 25,25

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 9 8 9 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(2) Пусть x - сколько принесли тетрадок, а y - сколько принесли книжек. Известно что ~~тр~~ участник принесли либо телефон, либо 3 тетради, либо 4 книжки. Телефонов было 58. На каждом из 2-ух столов лежало поровну вещей. На 1-ом столе было 58 телеф. $\frac{1}{5}$ всех тетр. и $\frac{1}{7}$ всех книг. По условию сост. и решим уравн.

$58+\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{7}y$

$58=\frac{3}{5}x+\frac{5}{7}y$

Заметим что x кратно 5 и 3, то есть кратно 15, а y кратно 7 и 4, то есть кратно 28

Заметим также, что чтобы $\frac{3}{5}x+\frac{5}{7}y=58$, то $\cancel{3}x+\cancel{5}y$ 75...

Предполож. из выше сказ. что $x=15$; $y=56$

$\frac{3}{5}\cdot15+\frac{5}{7}\cdot56=40+9=\cancel{49}$. Тогда предп. $x=30$ $y=56$

Граница для x?

$\frac{3}{5}\cdot30+\frac{5}{7}\cdot56=18+40=58 \Rightarrow x=30;\ y=56$

Тогда участн. пришло $\frac{30}{3}+\frac{56}{4}+58=10+14+58=82$

Ответ: 82

Почему не может быть других ответов?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 9 8 9 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Дано:
$a>0$ $c>a$
$b>0$ $b>d$
$c>0$
$d>0$

Д-ть
Ур-я
$x^6+ax+b=0$
$x^6+cx+d=0$
имеют разл. корни

Решение:

1) Заметим, что в этих уравнениях все корни отриц., т.к. в противн. случ. будет такая ситуа

$x^6+ax+b=0 \Rightarrow x^6+ax+b>0$ ($x^6>0$, $ax>0$, $b>0$)

Аналогично со вторым уравнением.

2) Пусть уравнения имеют один общ. корень x_1, где $x_1<0$

3) Тогда можно приравнять уравн. если они имеют общий корень, то их разн. равна 0 (1)

(1) $x_1^6+ax_1+b=x_1^6+cx_1+d$

$(ax_1-cx_1)+(b-d)=0$

Но это не так, т.к. $ax_1-cx_1>0$, т.к. $x_1<0$; $(a-c)<0$

$b-d>0$, т.к. $b>d \Rightarrow (ax_1-cx_1)+(b-d)\neq 0$

След. данные уравнения не могут иметь общий корень

Ч.Т.Д.

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	9	8	9	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(4) Для начала надо посчитать, сколько всего чисел (произведений) мы можем получить. Очевидно что всего у нас 15 множителей и на их месте могут стоять числа от 1 до 9. Значит, что всего чисел у нас 9^{15}. Нам подходят числа где есть 7 множитель и множитель четный (2;4;6;8) - всего их 4. Тогда чисел что нам подходят $4\cdot 9^{13}$. Вероятность равна

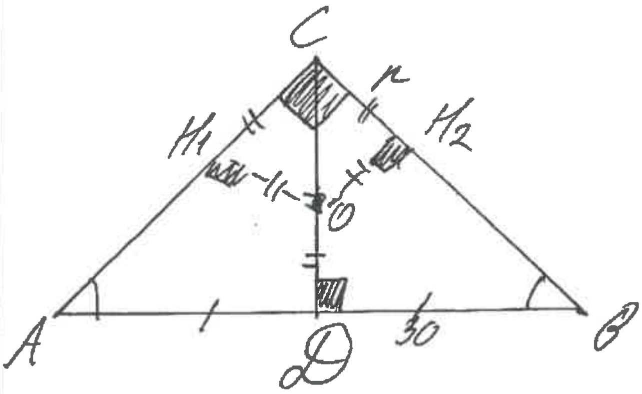
$$\frac{4\cdot 9^{13}}{9^{15}}=\frac{4}{81}$$

с множитель 7 или чётен?

Ответ: $\frac{4}{81}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

③ Всего у нас возможны 2 варианта — высота треуг. явл. сред. перпендикуляром или не явл. Рассмотрим вариант где ~~[illegible]~~ высота явл. сред. перпенд.



Тогда
На CD отмечаем точку O и
От точки C к D ведём, пока OD
не будет равна H_1O
Заметим что $H_1O = H_2O$

След. O — серед. впис. окр. пусть радиус впис. окр. равен r
Очевидно что $\triangle CH_2O \sim \triangle CDB$. Известно, что $CD = 30 = BD$
$BC = 30\sqrt{2}$

Составим отношение

$$\frac{CH_2}{CD} = \frac{CO}{BC} \Rightarrow \frac{r}{30} = \frac{30-r}{30\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{30\sqrt{2} - \sqrt{2}r}{2}$$

$$2r + \sqrt{2}r = 30\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}r(1+\sqrt{2}) = 30\sqrt{2}$$
$$r = \frac{30}{1+\sqrt{2}}$$

Частный случай

Очевидно что $\frac{30}{1+\sqrt{2}} > 12$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный университет

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	0	4	9	6	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Козлов

Имя Дмитрий

Отчество Андреевич

Дата рождения 16.01.2004 Класс 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 13.03.2021

Номер телефона 8 911 4832 805 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 9 | 6 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	–	15	20	75

Задача 1.

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$

$a<c,\ d<b$

Пусть у уравнений есть общий корень, тогда подставим его в них и уравняем (пусть это корень t).

$t^6+at+b=t^6+ct+d$; $t(a-c)=d-b$; $a-c<0, d-b<0$ - по условию.

Тогда и $b\neq d$, тогда t – положительное число.

Но $x^6+ax+b=0$ при положительном x не может равняться нулю, т.к. все члены многочлена больше нуля.

Значит, противоречие, и общих корней нет. Что и тр. д-ть.

Задача 2.

Пусть тетрадей – x, а книжек y.

Тогда: $58+\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=\frac{6y}{7}+\frac{4x}{5}$, где левая часть уравнения вещи на первом столе, а правая – на втором.

По условию: $x \vdots 3$; $y \vdots 4$, а из уравнения: $x \vdots 5$; $y \vdots 7$, т.к. на столах не может быть дробное число вещей.

Тогда: $58=\cancel{\frac{3y}{5}+\frac{5x}{7}}\ \frac{3x}{5}+\frac{5y}{7}$

x может принимать значения: 15 30 45 ...

y может принимать значения: 28 56 84 ...

Непосредственно проверим несколько пар чисел:

$(15-28)$: $58\neq 9+20$; $(15-56)$: $58\neq 9+40$;

$(15-84)$: $58\neq 9+60$ – $69>58$, значит таких пар с $x=15$ нет.

$(30-28)$ $58\neq 18+20$; $(30-56)$: $58=18+40=58$ - значит пара $x=30$ и $y=56$ подходит.

Но проверим ещё значения. При $x=30$ больше равенства с другими y не будет, т.к. y увеличивается.

~~При x~~ $(45-28)$: $58\neq 27+20$; $(45-56)$ – не подходит, т.к. $30<45$, а при $x=30$ и $y=56$ равенство достигается. Значит, больше вариантов нет.

А также $58=2\cdot 29$, ~~где 29 – пр~~ значит, не может быть такого, чтобы не взяли вообще ни тетрадок, ни книжек.

Телефонов: 58; тетрадей: 30; книжек: 56;

число человек: $58+\frac{30}{3}+\frac{56}{4}=58+10+14=82$

Ответ: 82

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 9 | 6 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4.

Посчитаю сколько вообще вариантов набрать ~~Эти~~ 15 чисел среди 9 (от 1 до 9). Это 9^{15} (в каждом выборе можно выбрать 1 из 9 C_9^1, а таких выборов 15).

~~Кол-во ситуаций, когда выбрали все числа~~

Что-бы произведение делилось на 14, в его разложении должны быть хотя бы одна 7 и хотя бы одна 2 (точнее нужно выбрать среди чисел любое чётное число).

Кол-во ситуаций, когда выбрали все числа кроме 7 - это 8^{15} (в каждом выборе можно взять 1 из 8 чисел).

$9^{15}-8^{15}$ - число выборов, когда выбрана хотя бы одна 7.

Среди ~~выборо~~ ситуаций где выбрали хотя бы одну 7, посчитаем кол-во, где вы не выбрали ни одного чётного числа. Это 5^{14} (один из выборов будет однозначным, а именно выбор числа 7, т.к. оно как минимум одно, остальные 14 выборов будут среди 5 нечётных чисел (1, 3, 5, 7, 9)).

$9^{15}-8^{15}-5^{14}$ - интересующие нас в задаче случаи, когда есть и ~~это~~ чётные и 7.

Значит, ответом будет выражение: $\dfrac{9^{15}-8^{15}-5^{14}}{9^{15}} = 1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^{15}-\dfrac{5^{14}}{9^{15}}$

Ответ: $1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^{15}-\dfrac{5^{14}}{9^{15}}$

Не учтено, что может быть одновременно 2 нужных множителя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 9 | 6 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5.

Заметим, что $f(0)+f(1) = \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{4+2} = \frac{1}{2}$; $\left(2 = 4^{\frac{1}{2}}\right)$

Посчитаем разность: $\frac{1}{2} - f\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^{\frac{1}{100}}+2} = \frac{4^{\frac{1}{100}}}{\cancel{2+4}(4^{\frac{1}{100}}+2)2} = \frac{4^{\frac{1}{100}}}{(4^{\frac{1}{100}}+2)4^{\frac{1}{2}}} =$

$= \frac{4^{-\frac{49}{100}}}{4^{\frac{1}{100}}+2\,4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4^{\frac{50}{100}}+4^{\frac{99}{100}}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{99}{100}}} = \frac{1}{4^{\frac{99}{100}}+2} = f\left(\frac{99}{100}\right).$

Распишем это в общем случае: $f(t)$ и $f(1-t)$

$\frac{1}{2} - f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^t+2} = \frac{4^t}{(4^t+2)2} = \frac{4^{t-\frac{1}{2}}}{4^t+4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+4^{1-t}} = \frac{1}{4^{1-t}+2}$

Значит, ~~всего пар от f(0) до~~ разобьём числа на пары:

$\underbrace{\left(f(0)+f(1)\right) + \left(f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)\right) + \ldots + \left(f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)\right)}_{50\text{ пар}} + f\left(\frac{50}{100}\right)$; у числа $f\left(\frac{50}{100}\right)$ нет пары, но его легко посчитать: $f\left(\frac{60}{100}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+2} = \frac{1}{4}$

Посчитаем всю сумму: $50 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 25 + \frac{1}{4} = 25{,}25$

Ответ: 25,25

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный университет

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	1	0	6	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Абоимов

Имя Артём

Отчество Андреевич

Дата рождения 20.09.2004 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 89117427401 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	15	20	–	20	75

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 3 1 0 6 2 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть эти уравнения имеют хотя бы один общий корень x_1. Тогда $x_1^6+ax_1+b=0$ (1)

(2) $x_1^6+cx_1+d=0$

Вычтем из (1) (2): $ax_1-cx_1+b-d=0$

$b-d=(c-a)x_1$

$x_1=\frac{b-d}{c-a}>0$, т.к $a<c$ и $d<b$ (по усл.)

Т.е их общий корень больше 0. Но тогда $x_1^6+ax_1+b>0$, что противоречит тому, что x_1 – их общий корень ($a>0$ и $b>0$ по усл.)

С.и. эти ур-ния не имеют общих корней.

№2.

Если каждый участник принес или телефон, или 3 тетради, или 4 книжки, то число всех тетрадей делится на 3, а число всех книжек делится на 4. Пусть принесли x тетрадей и y книжек. Тогда, исходя из условия, мы можем составить вот такое выражение: $58+\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{7}y$

$58=\frac{3}{5}x+\frac{5}{7}y$

Т.к x и y – целые числа, то x делится на 5 и y делится на 7, т.е x делится на 15 и y делится на 28. (С помощью перебора) находим, что $x=30$ и $y=56$. Тогда кол-во участников равно: $58+\frac{30}{3}+\frac{56}{4}=82$

Перебор не приведен.

Ответ: 82

№5

НА ДРУГОМ ЛИСТЕ продолжение задания 5

~~Докажем, что $f(a)+f(1-a)=\frac{1}{2}$:~~

~~$\frac{1}{4^a+2}+\frac{1}{4^{1-a}+2}=\frac{4^{1-a}+2+4^a+2}{(4^a+2)(4^{1-a}+2)}=\frac{2^{2-2a}+2^{2a}+4}{4+2\cdot4^a+2\cdot4^{1-a}+4}=\frac{2^{2-2a}+2^{2a}+4}{2^{2a+1}+2^{3-2a}+8}=\frac{2^{2-2a}+2^{2a}+4}{2(2^{2a}+2^{2-2a}+4)}=\frac{1}{2}$. Т.е~~

~~$f(0)+f(1)=f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)=\ldots=f(a)+f(1-a)=$ ... У нас пар, сумма которых равна 1, 50. Но у нас есть $\frac{50}{100}$, у которой нет пара.~~

~~$f\left(\frac{50}{100}\right)=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{1}{4}$. Тогда $A=f(0)+f\left(\frac{1}{100}\right)+\ldots+f\left(\frac{99}{100}\right)+f(1)=50\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boxed{25\frac{1}{4}}$ Ответ: $\boxed{25\frac{1}{4}}$~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	3	1	0	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Докажем, что $f(a)+f(1-a)=\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4^a+2}+\frac{1}{4^{1-a}+2}=\frac{2^{2-2a}+2+2^{2a}+2}{(2^{2a}+2)(2^{2-2a}+2)}=\frac{2^{2a}+2^{2-2a}+4}{2^2+2^{2a+1}+2^{3-2a}+2^2}=\frac{\cancel{2^{2a}+2^{2-2a}+4}}{2(\cancel{2^{2a}+2^{2-2a}+4})}=$$

$$=\frac{1}{2}.$$

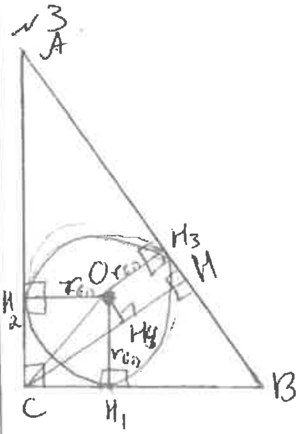
Т.е. $f(0)+f(1)=f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)=f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)=\ldots=f(a)+f(1-a)=\frac{1}{2}$

У нас таких пар чисел (a и 1-a), сумма которых равна 1, 50. Но у нас есть $\frac{50}{100}$, у которой нет пары. $f\left(\frac{50}{100}\right)=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{1}{4}$. Тогда

$$A=f(0)+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+\ldots+f\left(\frac{98}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)+f(1)=50\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=25\frac{1}{4}$$

Ответ: $A=25\frac{1}{4}$

№3



Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг $\triangle$, $\angle C=90°$

$CH=30$

Док-ть: $r_{вп}>12$

Док-во:

H_2OH_1C – квадрат, т.к. $\angle C=90°$ (по усл), $\angle OH_2C=90°$ и $\angle CH_1O=90°$, а также $H_2O=OH_1=r_{вп}$

Тогда, по теореме Пифагора $CO=\sqrt{CH_1^2+OH_1^2}=r_{вп}\sqrt{2}$

~~Т.к.~~ $CH=30$ (по усл.) ~~то~~ Проведем $OH_4\perp CH$.

Т.к. $OH_3\perp AB$ и $CH\perp AB$, то OH_4HH_3 – прямоугольник, т.е. $H_4H=OH_3=r_{вп}$. Значит, $CH_4=30-r_{вп}$.

По теореме Пифагора, $OH_4=\sqrt{CO^2-CH_4^2}=\sqrt{2r_{вп}^2-(30-r_{вп})^2}=\sqrt{r_{вп}^2+60r_{вп}-900}$

~~Т.к. $OH_4\geq 0$ (OH_4 – отрезок $\triangle ABC$ – р/б $\triangle$) то~~ ~~то~~ Т.е. $r_{вп}^2+60r_{вп}-900>0$

$D=60^2+4\cdot900=7200$

$r_{вп}=\frac{-60+60\sqrt{2}}{2}=30(\sqrt{2}-1)$

Т.е. $r_{вп}>30(\sqrt{2}-1)$

~~$A\ 30(\sqrt{2}-1) \vee 12$~~
~~$30\sqrt{2}\vee 42$~~
~~$5\sqrt{2}\vee 7$~~

$A\ 30(\sqrt{2}-1)>12$
$30\sqrt{2}>42$
$5\sqrt{2}>7$
$50>49$

С.л. $r_{вп}>12$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный Университет | МА0001109021
Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия Костров

Имя Роман

Отчество Алексеевич

Дата рождения 26.07.2004 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.21

Номер телефона 89016910609 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	2	20	80

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

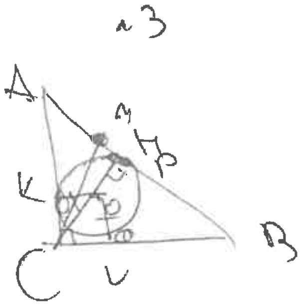
Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	9	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



1. $CH \perp AB$; $CH = 18$ (т.к. $CH \perp AB$), то CH = значит $\rho(C; AB)$), то если мы проведём CM — медиану к AB ($CM = \frac{AB}{2}$ (по св-ву)), то ~~...~~ AB

$CM \geq CH$

$\boxed{CM \geq 18}$

$AB \geq 36$

2. Построим Окр$(O; r)$ — впис. в $\triangle ABC$.

Окр$(O; r)$ касается $AC = K$; $CB = L$; $AB = P$, вм при этом

$OK \perp AC$; $OK = r$

$OL \perp BC$ $OL = r$

$OP \perp AB$ $OP = r$

3. По св-ву отрезков касательных:

$KC = CL$

$AK = AP$

$PB = LB$

4. Пусть $AC = a$; $BC = b$; $AB = c$, то

$a = AK + KC$

$b = CL + BL$ (1)

$c = AP + PB$

5. $KOLC$ — кв (по признаку), то $KC = CL = r$, то

Из (1) $a + b - c = KC + CL = 2r$ (2)

~~a+b Т.е. как нужно доказать, что $a+b-c \geq 14$ (I·3) (2)~~

6. $S(\triangle ABC) = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{CH \cdot c}{2} \Rightarrow ab = c \cdot 18$.

$a + b = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2}_{c^2 \text{ (по теор. Пифагора)}} + 2ab} = \sqrt{c^2 + 2 \cdot 18c} = \sqrt{c^2 + 36c}$.

Т.к. $c \geq 36$, то возьмём минимальное $c = 36$, то

$a + b = \sqrt{36^2 + 36^2} = 36\sqrt{2}$

(2): $36\sqrt{2} - 36 = 36(\sqrt{2} - 1) = 2r$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	9	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1

$36(\sqrt{2}-1)=2r$

$r=18(\sqrt{2}-1)$

$\sqrt{2}\approx 1{,}4$

$r\approx 18\cdot 0{,}4$

$r\approx 7{,}2$, т.е.

$r>7$.

$\times\frac{0{,}4}{18}$; $+\frac{32}{4}$; $7{,}2$

При увеличении c будет увеличиваться и r (т.к. $r=\frac{\sqrt{c^2+36c}-c}{2}\to+\infty$ при $c\to+\infty$.

Не доказано, что функция монотонно возрастает.

$c<\sqrt{c^2+36c}$

$c^2<c^2+36c$

№2

a – ученики, которые принесли тетради

b – ученики, которые принесли книги, т.е.

$2a$ – всего тетрадей

$3b$ – всего книг, т.е. на 1 столе

$64+\frac{2a}{7}+\frac{3b}{5}$, т.е. на 2 столе лежит всё остальное, т.е.

64 копьё(?); седьмая часть тетр; 5 часть книг

$\frac{6}{7}\cdot 2a+\frac{4}{5}\cdot 3b$, т.е.

т.к. вещи 1 ст. = вещи 2 ст

$64+\frac{2a}{7}+\frac{3b}{5}=\frac{12a}{7}+\frac{12b}{5}\quad|\cdot 35$

$64\cdot 35+10a+21b=60a+84b$

$\times\frac{64}{35}$; $+\frac{320}{192}$; 2240

$\underbrace{2240}_{\text{кончается на 0}}=\underbrace{60a}_{\text{всегда кончается на 0}}+63b\quad ;a;b\in N$, т.е.

$63b$ – кончается на 0 т.е. $b=10, 20\ \ldots$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 0 9 0 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$b=10$ $\quad 50a=\frac{2240}{6}-630=1610$; $a\notin N$

$63b=630$

$b=20$:

$63b=1260$ $\quad 50a=2240-1260=980$; $a\notin N$

$b=30$:

$63b=1890$ $\quad 50a=2240-1890=350$, то $a=7$

Если $b=40$, то

$63b>2240$, то

$b=30$

$a=7$

Ответ $30+7+64=101$

$a,b,c,d \in N$; $a<c$; $d<b$; $a,b,c,d>0$.

I $\begin{cases} x^4+ax+b=0 \\ x^4+cx+d=0 \end{cases}$

Т.к. $a,b,c,d>0$, то (и $x^4\geq 0$)

$\underbrace{x^4}_{\geq 0}+\underbrace{ax}_{\geq 0}+\underbrace{b}_{\geq 0}$ т.е. $\underbrace{x^4+b}_{\geq 0}+\underbrace{ax}_{\leq 0}=0$.

≤ 0; ~~ххх~~

Пусть $c=ka$; $k\in R$; $k>0$ (т.к $c>a$), то

$\begin{cases} x^4+d+kax=0. \\ x^4+b+ax=0. \end{cases}$ | Обозначим $x=-k$ для удобства

$\begin{cases} (-k)^4+d-kak=0 \\ (-k)^4+b-ak=0 \end{cases}$

$\begin{cases} k^4+d=kak \\ k^4+b=ak. \end{cases}$ | В таком обозначении $x\geq 0$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	1	0	9	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При ~~уравнении x^4; $ax \to \infty$~~

при $k \to \pm\infty$; $ak \to \pm\infty$ => $b \to \pm\infty$

$kak \to \pm\infty$ $\quad d \to \pm\infty$

Пусть уравнения имеют какой нибудь общий корень k_0, то,

$$\begin{cases} k_0^4 + d = kak_0 & (1) \\ k_0^4 + b = ak_0 & (2) \end{cases}$$

(1)-(2): $kak_0 - ak_0 = d - b$

$k_0(ka - a) = d - b$ ⚡

≥ 0 $\quad > 0$ $\quad < 0$

(по опред) (по усл.), то

k_0 – не сущ => т.к. $k_0 = x_0$ (не сущ)

II Если x (не в нашем обознач) $x \to +\infty$, то

$x^4 + ax + b = 0$ | Вообще не будут иметь
$x^4 + cx + d = 0$ | корней.

III $x = 0$, то

$b = 0$

$d = 0$, то $b = d$ ⚡

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА0001109021

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 6

$$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$$

Рассмотрим 2 таких $f(x_1)$ и $f(x_2)$, что ~~$f(x_1+x_2)$~~ $x_1+x_2=1$ (те. например $(0;1)$ $\left(\frac{1}{2021};\frac{2020}{2021}\right)$ и т.д., тогда

$$f(x_1)=\frac{9^{x_1}}{9^{x_1}+3}$$

$$f(x_2)=\frac{9^{x_2}}{9^{x_2}+3}$$

$$f(x_1)+f(x_2)=\frac{9^{x_1}}{9^{x_1}+3}+\frac{9^{x_2}}{9^{x_2}+3}=\frac{9^{x_1}(9^{x_2}+3)+9^{x_2}(9^{x_1}+3)}{(9^{x_1}+3)(9^{x_2}+3)}$$

$$=\frac{9^{x_1}\cdot 9^{x_2}+3\cdot 9^{x_1}+9^{x_2}\cdot 9^{x_1}+3\cdot 9^{x_2}}{9^{x_1}\cdot 9^{x_2}+3\cdot 9^{x_1}+3\cdot 9^{x_2}+9\cdot 3}=$$

т.к. $9^{x_1}\cdot 9^{x_2}=9^{x_1+x_2}=9^1=9$ (так $x_1+x_2=1$ (по усл)), то

$$=\frac{9+3\cdot 9^{x_1}+9+3\cdot 9^{x_2}}{9+3\cdot 9^{x_1}+3\cdot 9^{x_2}+9}=\frac{18+3\cdot 9^{x_1}+3\cdot 9^{x_2}}{18+3\cdot 9^{x_1}+3\cdot 9^{x_2}}=$$

$=1$, то т.к мы решали в общем случае, то это будет верно для всех x_1 и x_2: $x_1+x_2=1$, то

~~$f(0)+f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\dots+f\left(\frac{2019}{2021}\right)+f$~~

$$f(0)+f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+\dots+f\left(\frac{2019}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)+f(1)=$$

и т.д. 1

1 , то

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	1	0	9	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

всего пар. $\frac{2020+2}{2} = 1010+1 = 1011$, то

их сумма $1011 \cdot 1 = 1011$

Ответ: 1011.

№4

~~Ко~~ Произведение будет кратно 10, если в нём будет хоть 1 $\boxed{5}$ и хоть 1 число, делящееся на 2, (2, 4, 6, 8), то.

1 2 3 4 5 6 7 8.

вероятность выбрать 5 $\frac{1}{8}$, то

Вероятность выбрать 2, 4, 6, 8 $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

вероятность, что выбранная нами карто

$\frac{1}{2}$ что 5

$\frac{1}{2}$, что 2, 4, 6, 8

Разделим по 2.

~~То~~ ~~$x \frac{1}{8}$~~

~~То~~ Пусть $x = 5$, то $\frac{1}{2}$

$y = 2, 4, 6, 8 = \frac{1}{2}$.

Появление $xy = \frac{1}{16}$.

Таких $x:y$ — 5, то $\frac{5}{16}$

$\frac{25}{16}$ ~~Поэто~~ Вероятность, что

посмотрит элемент $5 / (2; 4, 6, 8) = \frac{5}{8}$, то

Ответ: ~~$\frac{25}{16}$~~ ~~$\frac{25}{256}$~~ $\frac{25}{128}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Калининград | МА000125 7221

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия Быков

Имя Александр

Отчество Олегович

Дата рождения 23.03.2004 Класс 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 13.03.2021

Номер телефона 791149524 63 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 2 5 7 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	0	2	20	62

N 1

Для нахождения точек пересечения функций $f(x)=x^4+ax+b$ и $g(x)=x^4+cx+d$ приравняем их:

$x^4+ax+b=x^4+cx+d.$

$ax+b=cx+d$

$(a-c)x+b-d=0$

$b-d>0$, т.к. $b>d$ по условию.

$a-c<0$, т.к $c>a$ по условию

$\Rightarrow x>0.$ $(a;b;c;d>0)$

$x^4+ax+b>0$ при $x>0$, т.к $x^4>0$, $ax>0$, $b>0$.

$x^4+cx+d>0$ при $x>0$, т.к $x^4>0$, $cx>0$, $d>0$.

$\Rightarrow$ при $x>0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ не пересекают Ox $\Rightarrow$

$\begin{cases} x^4+ax+b\neq 0 \\ x^4+cx+d\neq 0 \end{cases}$ при $x>0$, а так как функции $g(x)$ и $f(x)$ пересекаются

при $x>0$ $\Rightarrow$ $x^4+ax+b=0$ и $x^4+cx+d=0$ не имеют общих корней. ч.т.д.

N 2

Пусть все тетради — y, а все книжки — z.

Из условия на первом столе: $64+\frac{1}{7}y+\frac{1}{5}z$, но тогда на втором: $\frac{6}{7}y+$

Так как кол-во предметов на обоих столах равное, то:

$64+\frac{1}{7}y+\frac{1}{5}z=\frac{6}{7}y+\frac{4}{5}z \Rightarrow 64=\frac{5}{7}y+\frac{3}{5}z.$ Так как кол-во тетрадей

книжек на каждом из столов натуральное или 0, то $\frac{5}{7}y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\frac{3}{5}z\in\mathbb{N}\cup$

~~Пусть~~ Из условия: каждый принес либо по 2 тетради, либо по 3 книжки $\Rightarrow y\,\vdots\,2;$ z

Из этого: $y\,\vdots\,7$, $z\,\vdots\,5$. Пусть $y=14n$; $z=15m$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 2 5 7 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Получим:

$64 = 10n + 9m$

$\begin{cases} n \geq 0 \\ 64 \geq 10n \end{cases} \Rightarrow n \in [0; 6]$, поскольку $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$n = 0 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$n = 1 \Rightarrow m = 6$

$n = 2 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$n = 3 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

$n = 4 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

$n = 5 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

$n = 6 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Получаем единственную пару $(1; 6)$.

$\begin{cases} y = 14n \\ z = 15m \end{cases}$ $\begin{cases} y = 14 \\ z = 90 \end{cases}$

Отсюда: учеников принесли тетради: $\frac{14}{2} = 7$, а учеников, принесли книги: $\frac{90}{3} = 30$.

Учеников, которые принесли калькуляторы: $\frac{64}{1} = 64$.

Тогда учеников в сумме: 101

Ответ: 101.

~~№3~~

~~Дано~~

~~△ (прямоуг.) ABC~~

~~△ABC — прямоуг. (∠C = 90°)~~

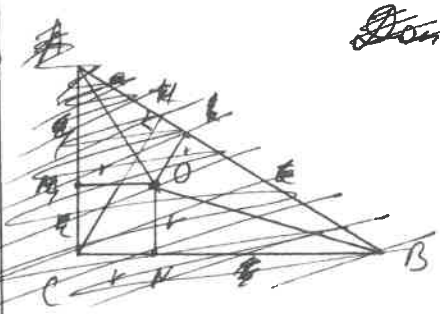
~~CH — высота.~~

~~CH = 18.~~

~~r — радиус вписанной окружности.~~

~~Док-ть~~ ~~r > 7.~~

~~Док-во~~



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 7 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Преобразуем $f(x)$:

$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}=1-\frac{3}{9^x+3}$; $f(x)>0$ при любых x.

Разобьём слагаемые суммы A на пары: $f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+f\left(\frac{2019}{2021}\right)\ldots$

$\ldots f(0)+f(1)$.

Рассмотрим $f\left(\frac{x}{2021}\right)+f\left(\frac{2021-x}{2021}\right)$:

$$1+1-3\left(\frac{1}{9^{\frac{x}{2021}}+3}+\frac{1}{9^{\frac{2021-x}{2021}}+3}\right)=2-3\left(\frac{6+9^{\frac{2021-x}{2021}}+9^{\frac{x}{2021}}}{18+3\cdot 9^{\frac{2021-x}{2021}}+3\cdot 9^{\frac{x}{2021}}}\right)$$

Заметим, что $\frac{6+9^{\frac{2021-x}{2021}}+9^{\frac{x}{2021}}}{18+3\cdot 9^{\frac{2021-x}{2021}}+3\cdot 9^{\frac{x}{2021}}}=\frac{1}{3}$.

Таким образом суммы всех пар $\frac{x}{2021}$ и $\frac{2021-x}{2021}$ будут равны 1.

Таких пар: 1011. $\Rightarrow A=1011$.

Ответ: 1011.

№4

Для того, чтобы произведение 11 чисел делилось на 10 среди них должно быть хотя бы 1 цифра 5 и цифра 2, т.е. $10=5\cdot 2$.

~~Следовательно~~ Вероятность, что пара двух чисел, что 5 и 2n, $n\in N$: $\frac{1\cdot 4}{8\cdot 8}=\frac{1}{16}$,

а так как имеет значение наличие хотя бы ~~одной~~ такой пары, то

Ответ: 0,0625.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КАЛИНИНГРАД | М А 0 0 0 1 2 6 9 1 2 1

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия ВЛАХОВИЧ

Имя СТЕПАН

Отчество СТЕФАНОВИЧ

Дата рождения 19.12.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 89097918196 **Подпись** SV

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	5	5	15	65

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 2 6 9 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

a, b, c, d положительны. $a<c$; $b>d$.

$x^4+ax+b=0$; $x^4+cx+d=0$ (док-ть, что не общ. корней)

$x^4+ax+b = x^4+cx+d=0$.

1) из того, что $x^4+ax+b=0$ следует, что $x^4+b=-$
значит x – отриц

2) из того, что $x^4+cx+d=0$ следует то же самое

получим:

$$\begin{cases} x^4+b=-ax \\ x^4+d=-cx \end{cases}$$

3) Сравним $-ax$ v $-cx$.
т.к. $|a|<|c|$; x – отриц, то $-a$
Тогда из системы следует, что
и $b<d$. Но по условию $b>d$. Противоречие
Значит ~~не~~ эти ур-я не имеют общих корней, ч

N2

на первом столе было: 64 калькулятора, $\frac{1}{7}$ всех тетр.; $\frac{1}{5}$ всех книг.
на втором столе было: 0 кальк, $\frac{6}{7}$ всех тетр., $\frac{4}{5}$ в кн

пусть x – кол-во всех тетр., y – кол-во всех кн

1) Заметим, что если все приносили только 2 тетр. или 3 ~~ручки~~ книги, то ~~кол~~ $x \vdots 2$; $y \vdots 3$. Также заме что если на столе лежала $\frac{1}{5}$ всех книг и $\frac{1}{7}$ вс тетр., то поскольку тетрадей и книг не может быть целое число, то $x \vdots 7$; $y \vdots 5$. Объединим эти 2 н блюдения и получим, что $x \vdots 14$; $y \vdots 15$

2) Запишем ур-е (составим), из условия равенс

$$64+\frac{x}{7}+\frac{y}{5}=\frac{6x}{7}+\frac{4y}{5} \quad | \cdot 35$$

$$64\cdot 35-25x-21y=0.$$

3) Сделаем замену $y=15n$; $x=14t$; где t и n –

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 9 | 1 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

целые, не отриц. числа

3) $64\cdot35-25\cdot14t-21\cdot15n=0 \mid :5$

$448-70t-63n=0.$ (*)

Заметим, что $n\le7$, т.к. если $n>7$, то $448-70t-63n<0$.

Также заметим, что $448-63n \vdots 10$, т.к.

$Z_1-105-Z_2=10u$ (Z_1 - число $\vdots 10$ - Z_2 = число $\vdots 10$)

Тогда это значит, что $63n$ оканч. на 8. существует только 1 значение n, которое выполняет это условие и лежит на промежутке от 0 до 7. Это $n=6$.

То есть если существует решение этого диафантового ур-я (*), то оно одно, причём при $n=6$.

подставим $n=6$:

$448-70t-378=0.$

$70=70t.$ ~~$t=1$~~. То есть решениями (*) будут

$t=1.$ $n=6;\ t=1.$

4) Сделаем обратную замену. $x=14;\ y=90.$

Значит было 14 тетр., 90 книг и 64 калк.

Значит было $7+30+64=101$ человек на олимпиаде.

Ответ: 101.

№4

~~случайное произв. 11 чисел от 1 до 8 (целых).~~

~~Сколько всего вариантов такого произв?~~

~~Очевидно, что 8^{11} (11 мест, 8 вариантов выбрать число)~~

~~Теперь поймём, что чтобы такое произв $\vdots 10$, нужно, чтобы присутствовала 5 и одно (хотя бы) чётное число~~

То есть, чтобы найти ответ, нужно кол-во

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 9 | 1 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~вариантов, где :10 поделить на 8¹¹.~~
~~Найдём кол-во вариантов, чтобы произв. :10.~~
~~пусть 5 будет на 1 месте. чётн. число может~~
~~быть на 2–11 месте, то есть вар-ов 1·4·8~~

есть произведение 11 чисел из ряда 1, 2, …, 8.
какова вероятность, что произв. :10 (если выбрать числа случайно)

1) всего вариантов выбрать числа 8^{11} (8 чисел в 11 местах)

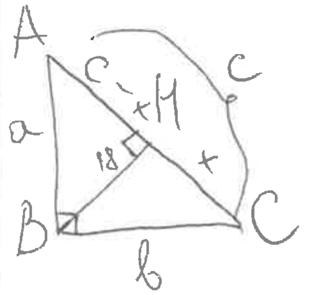
2) что значит, что произв. :10? Что в выбр. числах присутствует хотя бы 1 пятёрка и хотя бы 1 чёт. число.

3) посчитаем варианты, когда произв :10. 5 мы должны иметь, это 1 вар-х. А чётных в ряду 4, значит 4 варианта. получаем:

$$1\cdot4\cdot\underbrace{8\cdot8\ \ 8}_{9} = 4\cdot8^9$$ (остальные 9 клеток нам не важны.

4) посчитаем ответ: $\frac{4\cdot8^9}{8^{11}} = \frac{4}{8^2} = \frac{1}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{16}$.



№3

по формуле длины радиуса впис. окр. в прямоуг. треуг.

$$\frac{a+b-c}{2} = r.$$

Дано
ΔABC – п
моуг., B
высота, B
док-ть
r>7

Лист 3 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 2 6 9 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

теорема Пифагора в 3 Δ

$$\begin{cases} \text{в } \Delta ABC: c^2 = a^2 + b^2 \quad (1) \\ \text{в } \Delta AHB: a^2 = (c-x)^2 + 18^2 \quad (2) \\ \text{в } \Delta BHC: b^2 = x^2 + 18^2 \quad (3) \end{cases}$$

из этого следует, что

$$(2)\ a^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2} - x\right)^2 + 18^2; \quad (3)\ b^2 = x^2 + 18^2$$

$$\cancel{a^2} = \cancel{a^2} + b^2 + x^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\cdot x + 18^2.$$

подставим $b = \sqrt{x^2+18^2}$.

$$\cancel{a^2 = a^2}\ \cancel{b}\ x^2+18^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2+\sqrt{x^2+18^2}} + 18^2 = 0.$$

$$\cancel{2}(x^2+18^2) = \cancel{2}x\sqrt{a^2+\sqrt{x^2+18^2}}$$

$$x^2+18^2 = x\sqrt{a^2+\sqrt{x^2+18^2}} \quad \cancel{\text{пусть } x^2+18^2 = t}.$$

$\cancel{t = x\sqrt{a^2+\sqrt{t}}}$ отсюда x явно > 5.

предположим, что $r \le 7$. тогда $\frac{a+b-c}{2} \le 7$.

в итоге получим, что

$a + b - 14 \le \sqrt{a^2+b^2}$ возведём в квадрат.

$$a^2 + b^2 + 14^2 + 2ab - 28(a+b) \le a^2 + b^2$$

$14^2 + 2ab \le 28(a+b)$. Заметим, что a и b — гипотенузы соотв. ~~катетов~~ треуг., в которых есть катет — высота. Значит они ~~намного~~ больше чем высота $= 18$., ~~они~~

не знаю как дальше решать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 2 6 9 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$ $\quad A = f(0) + f\left(\frac{1}{2021}\right) + \ldots + f(1)$

A можно считать ~~как~~ за сумму 2022 членов возрастающей прогрессии. ?

$f(0) = \frac{9^0}{9^0+3} = \frac{1}{4}$; $f(1) = \frac{9}{9+3} = \frac{3}{4}$.

каждому значению функции можно найти такое из этих значений, что в сумме эти 2 дают 1.

Не доказано в общем виде.

$f(0) + f(1) = 1$. $f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right) = 1$

и т.д. в итоге получаем, что таких сумм будет 1011 => сумма всех сумм = 1011.

Ответ: 1011.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	1	0	2	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия АБОИМОВА

Имя АНАСТАСИЯ

Отчество АНДРЕЕВНА

Дата рождения 20.09.2004 Класс 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 2 листах Дата выполнения работы 13.03.2021

Номер телефона +79117427301 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	15	2	2	20	59

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	3	1	0	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. т.к. $a, b, c, d > 0$, то уравнения $x^6 + ax + b = 0$ (1) и $x^6 + cx + d = 0$ (2) имеют только отрицательные корни (<0, <0)

допустим k – корень уравнения (1)

$k^6 + ka + b = 0$; $k^6 = -ka - b$

если k – корень уравнения (2), то $k^6 + kc + d \overset{\text{из (1)}}{=} -ka - b + kc + d = k(c-a) + d - b \neq 0 \Rightarrow$ (т.к. $d<b$; 0, т.к. $a<c$)

возникает противоречие, значит k не корень уравнения (2) $\Rightarrow$ у (1) и (2) не может быть общих корней

ч.т.д.

2. пусть было k ~~книг~~ тетрадей и l книг

из условия следует, что $58 + \frac{k}{5} + \frac{l}{7} = \frac{4k}{5} + \frac{6l}{7}$; $\frac{3k}{5} + \frac{5l}{7} = 58$

т.к. $k \vdots 3$, то $3k \vdots 9$, но $\frac{3k}{5} \Rightarrow 3k \vdots 45 \Rightarrow k \vdots 15$

т.к. $l \vdots 4$, то $5l \vdots 20$, но $\frac{5l}{7} \Rightarrow 5l \vdots 140 \Rightarrow l \vdots 28$

Перебор неполный

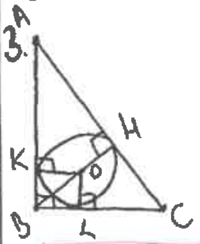
подходят значения $k = 30$, $l = 56$; проверим: $\frac{3 \cdot \cancel{30}^{6}}{\cancel{5}_1} + \frac{5 \cdot \cancel{56}^{8}}{\cancel{7}_1} = 18 + 40 = 58$ верно!

всего участников было $58 + \frac{k}{3} + \frac{l}{4} = 58 + \frac{30}{3} + \frac{56}{4} = 58 + 10 + 14 = 82$

т.к. каждому участнику принадлежит либо 1 телефон, либо 3 тетради, либо 4 книги

Ответ: 82 человека

3.



пусть O – центр вписанной в ABC окружности

$O \in BH$ (высоте, проведенной к гипотенузе)

~~пусть~~ $OK = OL = OH = r_{вп}$.

рассмотрим $KOLB$: $\angle KBL = 90°$ (по усл.), а $\angle OKB = \angle OLB = 90°$ (т.к. OK и OL – радиусы вписанной окр-ти, они по определению $\perp$ сторонам треугольника)

$\left.\begin{array}{l} OK = OL \\ \angle KBL = \angle OKB = \angle OLB = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow KBLO$ квадрат (по признаку)

рассмотрим $\triangle OLB$: $\angle OLB = 90° \Rightarrow$ по Т. ПИФАГОРА $OB = \sqrt{BL^2 + LO^2} = \sqrt{KO^2 + LO^2} = r_{вп}\sqrt{2}$

$BH = BO + OH = r_{вп}\sqrt{2} + r_{вп} = 30 \Rightarrow r_{вп}(1 + \sqrt{2}) = 30 \Rightarrow r_{вп} = \frac{30}{1+\sqrt{2}} \approx$ ($\approx 1{,}44$)

$\frac{30}{2{,}5} \approx 12$ и $\frac{30}{2{,}44} > 12$

значит ~~$r_{вп} > 12$~~

$r_{вп} > 12$

ч.т.д.

Почему центр впис. окр-и лежит на высоте?

Это частный случай

Лист 1 из 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	3	1	0	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ~~10~~

чтобы произведение было кратно 14 ~~нужно~~ нужно, чтобы одно из выбранных чисел было 7, а второе $\vdots\ 2$

т.е. необходимо, чтобы из 15 случайно выбранных чисел было число 7 и хотя бы одно чётное число. Вероятность, которую нужно найти, равна кол-ву случаев, когда найдётся 7 и чётное число, деленное на кол-во способов ~~разместить~~ выбрать 15 чисел из 9 (~~р~~ сочетание с повторением)

5. $A = f(0) + f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \ldots + f\left(\frac{99}{100}\right) + f(1)$

$f(0) = \frac{1}{3}$, $f\left(\frac{1}{100}\right) \approx \frac{1}{3}$, $f\left(\frac{2}{100}\right) \approx \frac{1}{3}$, $\wedge\ f\left(\frac{50}{100}\right) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{99}{100}\right) \approx \frac{1}{6}$, $f(1) = \frac{1}{6}$

т.к. x находится в знаменателе, то с увеличением x функция будет уменьшаться

$f(0) = \frac{1}{4^0+2} = \frac{1}{3}$, но $f\left(\frac{1}{100}\right) < f(0)$

$f\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{4^{0{,}01}+2} \approx \frac{1}{3}$

и так. далее

теперь с конца: $f(1) = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$, но $f\left(\frac{99}{100}\right) > f(1)$

$f\left(\frac{99}{100}\right) = \frac{1}{\frac{4}{4^{0{,}01}} + 2} \approx \frac{1}{6}$

заметим, что $f(0) + f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, т.к. то же самое будет происходить с парами $f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right)$

$f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right) = \frac{1}{4^{0{,}01}+2} + \frac{1}{4^{0{,}99}+2} = \frac{4^{0{,}99}+2+4^{0{,}01}+2}{4+4+4^{0{,}01}\cdot 2+4^{0{,}99}\cdot 2} = \frac{\frac{4+(4^{0{,}01})^2}{4^{0{,}01}}+4}{8+2\left(\frac{4+(4^{0{,}01})^2}{4^{0{,}01}}\right)} = \frac{1}{2}$

по аналогии сумма других пар тоже будет равна $\frac{1}{2}$

но количество слагаемых — нечётное

остаётся $f\left(\frac{50}{100}\right) = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+2} = \frac{1}{4}$

значит $A = \underbrace{50}_{\text{кол-во пар}} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{= f\left(\frac{50}{100}\right)} = 25 + \frac{1}{4} = 25{,}25$

Ответ: 25,25

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ | М А 0 0 0 1 2 1 0 9 2 1

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия КАНЕВА

Имя ЕЛЕНА

Отчество КОНСТАНТИНОВНА

Дата рождения 05.11.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +7921 863 2301 **Подпись** Канева

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	2	1	0	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
–	20	15	2	20	57

№2.

Пусть x – $\frac{1}{7}$ от общего количества тетрадей и y – $\frac{1}{5}$ от общего количества книжек.

Тогда на первом столе лежало

$64 + x + y$ предметов, значит на втором столе лежало $6x + 4y$ предметов

($7x$ – общее кол-во тетрадей => на втором столе $7x - x = 6x$ тетрадей и $5y - y = 4y$ тетрадей)

На двух столах лежало равное кол-во предметов =>

=> $64 + x + y = 6x + \cancel{4y}\ 4y$

$64 = 5x + 3y$.

Если участник мог принести 3 книжки, то $5y$ должно быть кратно 3 => y должен быть кра~~тен~~тек 3.

Если участник мог принести 2 тетради, то ~~[illegible]~~ $64 - 3y$ должно быть ~~[illegible]~~ чётным =>

=> $3y$ должно быть чётным => y должен быть чётным.

Кратные 3: 3; 6, 9, 12; 15; 18; 21; 24; 27.

Чётные кратные 3: 6, 12; 18; 24.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	2	1	0	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

при $y = 6$

$64 = 5 \cdot x + 3 \cdot 6$

$64 - 18 = 5x$

$46 = 5x$

$x = 9,2$ не подходит т.к. x должен быть целым числом

при $y = 12$

$64 = 5 \cdot x + 3 \cdot 12$

$64 - 36 = 5x$

$5x = 28$

$x = 5,6$ не подходит т.к. x должен быть целым

при $y = 18$

$64 = 5 \cdot x + 3 \cdot 18$

$64 - 54 = 5x$

$10 = 5x$

$x = 2$ подходит

при $y = 24$

$64 = 5 \cdot x + 3 \cdot 24$

$64 - 72 = 5x$

$-8 = 5x$

$x = -1,6$ не подходит т.к. x должен быть положительным

При $y \geq 24$ x будет отрицательным $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Единственное подходящее значение y равно $18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $y = 18 \Rightarrow$ общее кол-во книжек равно

$18 \cdot 5 = 90$ книжек

Если $x = 2 \Rightarrow$ общее кол-во тетрадей равно

$2 \cdot 7 = 14$ тетрадей

Если 1 участник мог принести 1 калькулятор $\Rightarrow$

$\Rightarrow 64 : 1 = 64$ участника, которые принесли калькулятор

Если 1 участник мог принести 2 тетради $\Rightarrow$

$\Rightarrow 14 : 2 = 7$ участников, которые принесли тетради

Если 1 участник мог принести 3 книжки $\Rightarrow$

$\Rightarrow 90 : 3 = 30$ участников, которые принесли книжки

$64 + 30 + 7 = 101$ участник

Ответ: 101 участник был на олимпиаде

№5.

Рассмотрим случай когда $x + y = 1$, тогда

$$F(x) + F(y) = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^y}{9^y+3} = \frac{9^x(9^y+3) + 9^y(9^x+3)}{(9^x+3)(9^y+3)} =$$

$$= \frac{9^{x+y} + 3 \cdot 9^x + 9^{x+y} + 9^y \cdot 3}{9^{x+y} + 3 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^y + 9} = \frac{9^1 + 3 \cdot 9^x + 9^1 + 3 \cdot 9^y}{9^1 + 3 \cdot 9^x + 9 + 3 \cdot 9^y} =$$

$$= \frac{18 + 3 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^y}{18 + 3 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^y} = 1 \Rightarrow$$ при $x + y = 1$ получается

что $F(x) + F(y) = 1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

От $\frac{1}{2021}$ до $\frac{2020}{2021}$ есть $\frac{2021-1}{2} = 1010$ ~~пар~~

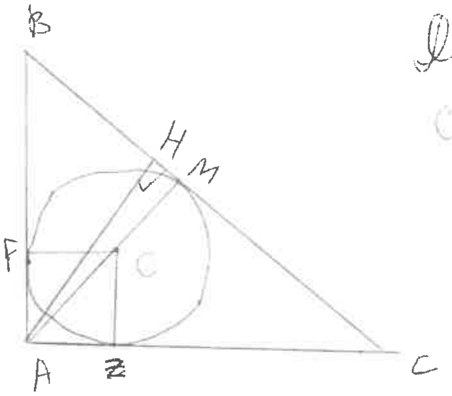
пар чисел, сумма которых равна 1.

$\Rightarrow f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2}{2021}) + \dots + f(\frac{2019}{2021}) + f(\frac{2020}{2021}) = 1010 \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \underbrace{f(0) + 1010 \cdot 1 + f(1)}_{0+1=1} = 1010 + 1 = 1011$

~~Отв~~ Ответ: сумма A равна 1011

№3.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$

O – центр вписанной окружности

r – радиус вписанной окружности

$AH \perp BC$, $AH = 18$

Доказать: $r > 7$

Решение:

1. AM – биссектриса (O – точка пересечения биссектрис и центр вписанной окружности) $\Rightarrow$ т. $O \in AM$

2. $OZ \perp AC$, $OF \perp AB$, $OZ = OF$ как радиусы $= r$

3. AM – биссектриса $\Rightarrow \angle OAZ = \frac{90°}{2} = 45° \Rightarrow$; $OZ \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OZ}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{AO}{OZ} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow AO = \frac{2 \cdot OZ}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot r}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = r\sqrt{2}$

4. $OM = r$ как радиус

5. По теореме Пифагора $AM^2 = AH^2 + HM^2$ ($AH \perp BC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM = \sqrt{AH^2 + HM^2}$ при $HM \to 0$ $AM \to \sqrt{18^2 + 0^2} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow AM \to 18$, $AM > 18$. (при $HM > 0$ получается, что $AM > 18$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	2	1	0	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

6. $AM = AO + OM \Rightarrow AM = r\sqrt{2} + r \Rightarrow AM = r(\sqrt{2}+1)$?

7. ~~Пусть~~ Допустим, $AM = 18 \Rightarrow$ AH=18!

$\Rightarrow 18 = r(\sqrt{2}+1) \Rightarrow r = \frac{18}{\sqrt{2}+1}$

$\sqrt{1,96} < \sqrt{2,00} < \sqrt{2,25}$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

Допустим, $\sqrt{2} = 1,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{18}{1,5+1} \Rightarrow r = \frac{18}{2,5} \Rightarrow r = 7,2.$

Если $AM > 18 \Rightarrow r > 7,2$
Если $\sqrt{2} < 1,5 \Rightarrow r > 7,2$ $\Big\}\; r > 7$

Ч. т. д. ▨

№4.

Ряд: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – всего 8 чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего вариантов $C_{11}^{8} = \frac{11!}{8!(11-8)!} =$

$= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 5 \cdot 3}{1} = 165$ вариантов

~~Все~~ Произведение кратно 10 если ~~все~~ один из его множителей равен 2, а другой равен 5 $\Rightarrow$ всего вариантов, где есть пара чисел 2 и 5

$C_{11}^{2} = \frac{11!}{2!(11-2!)} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 1 \cdot 9!} = \frac{11 \cdot 5}{1} = 55$ вариантов

$\frac{55}{165} = \cancel{\frac{11}{33}}\ \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, что ~~произв~~ произведение кратно 10

Ответ: вероятность равна ~~1/3~~ $\frac{1}{3}$

—

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ФГАОУ ВО СВФУ, г. Якутск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	2	5	9	2	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Уваровская

Имя Лена

Отчество Александровна

Дата рождения 29.05.2004 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 6.03.2021

Номер телефона +79248669270 **Подпись** Увар

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	2	-	62

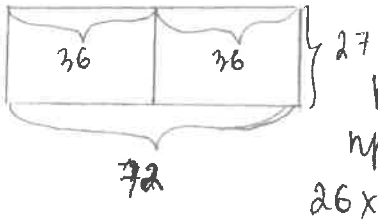
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000125922 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

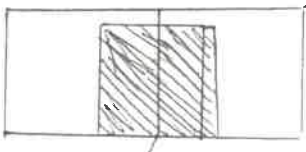
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1



Ответ: всегда сможет выиграть первый.

Тактика: он (первый) находит центр. верт. линию прямоугольника, и закрашивает квадрат 26x26 так, чтобы в левой половине прямоугольника было 13 клеток в длину и соответственно 13 кл. в длину в правой половине. Получается:

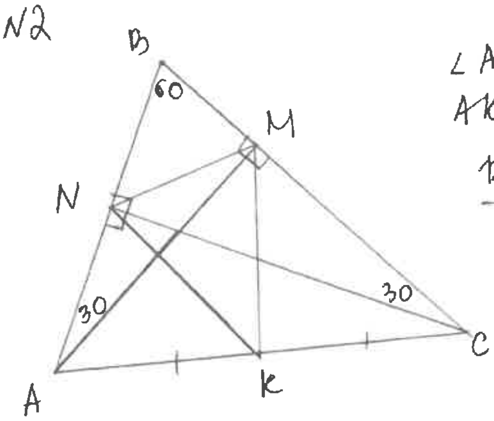


} 1 клетка т.к. ширина 27, а закрашенный квадрат 26x26

центральная верт. линия

Теперь получилось так, что поле симметрично относительно центр. верт. линии. Дальше первый симметрично повторяет ходы второго игрока (симметрично относительно центральной вертикальной линии).

N2



$\angle ABC = 60°$ $\angle AMB = \angle AMC = 90°$

$AK = KC$ $\angle CNB = \angle CNA = 90°$

В $\triangle BAM$: $\angle BAM = 180° - \angle ABM - \angle AMB =$

$= 180° - \angle ABC - \angle AMB = 30°$

$BM = \frac{AB}{2}$ (BM лежит напротив угла 30° в прямоуг. треугольнике)

В $\triangle BCN$: $\angle BCN = 180° - \angle BNC - \angle NBC =$

$= 180° - \angle BNC - \angle ABC = 30°$

$BN = \frac{BC}{2}$ (BN лежит напротив угла 30° в прямоуг. треугольнике)

$\triangle BNM \sim \triangle ABC$, т.к. $\angle B$ - общий,

$k = \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA000125922 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$k = \frac{NM}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow NM = \frac{1}{2}AC$

В $\triangle AMC$: Mk - медиана на гипотенузу

$Mk = Ak = kC = \frac{1}{2}AC$

В $\triangle ANC$: Nk - медиана на гипотенузу

$NK = AK = KC = \frac{1}{2}AC$

$NM = MK = NK = \frac{1}{2}AC$

$\Downarrow$

$\triangle MNK$ - равносторонний

$\Downarrow$

все углы равны 60°

$\angle MNK = 60^\circ$, $\angle MKN = 60^\circ$, $\angle KMN = 60^\circ$

Ответ $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$

N3

первый день:

x - ~~...~~ задач решил каждый 10-классник

x+1 - задач решил каждый 9-классник

n - кол-во 10-классников

m - кол-во 9-классников

} в оба дня

второй день:

y+1 - задач решил каждый 10-классник

y - задач решил каждый 9-классник

$xn + (x+1)m = 129$

$(y+1)n + ym = 190$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0001259221

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$xn + (x+1)m + (y+1)n + ym = 129 + 190$

$xn + xm + m + yn + n + ym = 319$

$n(x+y+1) + m(x+y+1) = 319$

$(x+y+1)\cdot(n+m) = 319$

1) 1 случай: $x+y+1=1$

$x+y=0 \quad x=0 \quad y=0$

$\Downarrow$

$n+m=319$ человек могло участвовать в олимпиаде.

Пример: 129 – девятиклассников решили в первый день по 1 задаче, и во второй день ничего не решили.

190 – десятиклассников решили во второй день по 1 задаче, и ~~во второй день~~ в первый день ничего не решили

2) 2 случай: $x+y+1=11$

$x+y=10$

$\Downarrow$

$n+m=29$ – человек могло участ. в олимп

Пример: $x=4 \quad y=6$

$n=16. \; m=13$

13 девятиклассников в первый день решили по 5 задач, а 16 десятиклассников в первый день по 4: $13\cdot5 + 16\cdot4 = 65+64 = 129$

13 девятики во 2 день решили по 6 задач, 16 10-классников во 2 день по 7 задач: $13\cdot6 + 16\cdot7 = 78+112 = 190$

Ответ: 319 или 29

$319 = 1\cdot319 = 11\cdot29$

1) $x+y+1 \neq 319$

т.к. в день давалось по 10 задач $x\le9$, $y\le9$

(т.к. $y+1\le10$, $x+1\le10$) $\Rightarrow x+y+1\le19$

2) $x+y+1\neq29$

т.к. в день давалось по 10 задач: $x\le9$, $y\le9$

(т.к. $y+1\le10$, $x+1\le10$) $\Rightarrow x+y+1\le19$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 5 9 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$$f(x)=\frac{3^x(2x-1)}{x(x+1)}$$

$$A=f(1)+f(2)+\ldots+f(100)$$ – сумма геом прогрессии

$$k=\frac{3^{x+1}(2(x+1)-1)}{(x+1)(x+2)}:\frac{3^x(2x-1)}{x(x+1)}=\frac{3^{x+1}\cdot(2x+1)\cdot x\cdot(x+1)}{(x+1)(x+2)\cdot 3^x\cdot(2x-1)}=$$

$$=\frac{3(2x+1)x}{(x+2)(2x-1)}$$

$$f(1)=\frac{3^1(2-1)}{1\cdot(1+1)}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$n=100$$

$$A=\frac{(k^n-1)f(1)}{k-1}=\frac{\left(\left(\frac{(2x+1)3x}{(x+2)(2x-1)}\right)^{100}-1\right)1{,}5}{99}=$$

$$=\frac{\left(\frac{(2x+1)3x}{(x+2)(2x-1)}\right)^{100}-1}{66}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М	А	0	0	0	1	0	2	7	4	2	1

Адрес площадки проведения — Шифр

Вариант № 3

Фамилия ШАТРОВ

Имя ИГОРЬ

Отчество ИВАНОВИЧ

Дата рождения 28.06.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.21

Номер телефона 89113514383 **Подпись** Ш

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

10274,10-ил

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

Математике

от (Ф.И.О.)

Шатрова Игоря Ивановича

Адрес площадки проведения

Санкт-Петербург, 21 линия В.О., д. 2

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 3, 2 (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

Приведённое решение отличается от авторского, но содержит все необходимые обоснования и рассматривает общий случай.

О себе сообщаю:

89113514383 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

Shtat60@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 07.04.21 18:50

Подпись участника Олимпиады: Ши

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 10:00

Комментарии членов апелляционной комиссии:

№3: в доказательстве неверно записано неравенство треугольника (a+b<c), и на нём основано всё дальнейшее.

Результат рассмотрения апелляции:

Оставить без изменения

Члены Апелляционной комиссии:

Мешкова Е.К. / [подпись] /

Шугаев А.В. / [подпись] /

Шалько Ю.В. / Юшка /

/ /

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	0	2	7	4	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	0	20	62

№1

$$\neg\exists t: \begin{cases} t^4+at+b=0 \\ t^4+ct+d=0 \end{cases}$$

$t^4+at+b=t^4+ct+d$

$t(a-c)=d-b$

$t=\dfrac{d-b}{a-c}$

$\left.\begin{matrix} d<b \Rightarrow d-b<0 \\ a<c \Rightarrow a-c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t>0.$

$a>0 \Rightarrow at>0;\quad b>0.\quad t^4>0$

$$\underbrace{t^4}_{>0}+\underbrace{at}_{>0}+\underbrace{b}_{>0}=0$$

Противоречие, следовательно, общих корней нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 2 7 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть всего было y тетрадей и z книжек.

Тогда $64+\frac{y}{7}+\frac{z}{5}=\frac{6y}{7}+\frac{4z}{5} \Rightarrow 64\cdot 7\cdot 5=25y+21z$.

$y \vdots 2$, т.к. каждый участник принёс 2 тетради.

$z \vdots 3$ аналогично. $z \vdots 5$, т.к. $(64\cdot 7\cdot 5) \vdots 5$ и $(25y) \vdots 5$.

$$y=\frac{7(320-3z)}{25} \qquad (320-3z)=A \quad y\in\mathbb{Z} \Rightarrow A \vdots 25$$

Возможные значения A:

305; 290; 275; 260; 245; 230; 215; 200; 185; 170; 155; 140; 125; 110; 95; 80; 65; 50; 35; 20; 5. На 25 делятся 275; 125; 50.

A	275	125	50
z	15	65	90
y	77	35	14

$y \vdots 2$ только при $A=50$.

Тогда было $64+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=$
$=64+\frac{14}{2}+\frac{90}{3}=101$ участник.

Ответ: 101 участников.

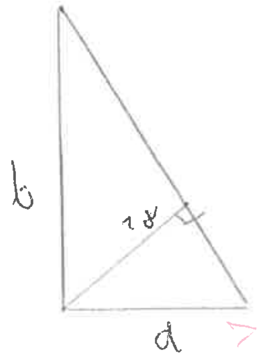
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 7 | 4 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



C

$S=\frac{1}{2}\cdot 18c=\frac{1}{2}ab \Rightarrow ab=18c$

$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+\frac{ab}{18}}=\frac{18ab}{18a+18b+ab}$

? $a+b<c$ (Нер-во Δ)

$\exists\ \frac{18ab}{18a+18b+ab}\le 7$ — предположение от противного

$18ab\le 7ab+126(a+b)$

$11ab\le 126(a+b)$

$198c\le 126(a+b)$

Но $126(a+b) < 126c$

Тогда $198c<126c$ - противоречие.

Следовательно, $r>7$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 2 7 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Произведение делится на 10, если хотя бы одно число в произведении 2 и хотя бы одно 5. Остальные могут быть любыми. Пусть x - кол-во способов выбрать 11 чисел из ряда; y - кол-во способов выбрать 9 чисел из ряда. Тогда вероятность равна $\frac{y}{x}$.

−

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 7 | 4 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$$\frac{9^{\frac{m}{k}}}{9^{\frac{m}{k}}+3}+\frac{9^{\frac{k-m}{k}}}{9^{\frac{k-m}{k}}+3}=$$

$$=\frac{9^{\frac{m}{k}}\left(9^{\frac{k-m}{k}}+3\right)+9^{\frac{k-m}{k}}\left(9^{\frac{m}{k}}+3\right)}{\left(9^{\frac{m}{k}}+3\right)\left(9^{\frac{k-m}{k}}+3\right)}=\frac{9+3\cdot 1+9}{9+3\cdot 1+9}=1$$

Сумму можно ~~разде~~ поделить на 1011 пар, дающих в сумме 1:

$f(0)+f(1)$; $f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)$; $f\left(\frac{2}{2021}\right)+f\left(\frac{2019}{2021}\right)$ и т.д.

Тогда $A=1\cdot 1011=1011$.

Ответ: $A=1011$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный Университет | МА000110 5821

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 2

Фамилия Горохов

Имя Илья

Отчество Романович

Дата рождения 20.10.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона +79605121344 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

11058, 10ил

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

математике

от (Ф.И.О.)

Горохова Ильи Романовича

Адрес площадки проведения

г. Санкт-Петербург, 21-ая линия В.О., д. 2

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 3, 10б. (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

Я выполнил метод оценки, "опустив" корни, часть выполнена в уме, ради экономии места.

О себе сообщаю:

+7 960 5121344 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

ilya_gorokhov_2004@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 7.04.2021, 21:00

Подпись участника Олимпиады:

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 9:50

Комментарии членов апелляционной комиссии: №3: допущена ошибка в д-ве неравенства.

Результат рассмотрения апелляции:

Оставить без изменения

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. / /

Шалько Ю.В. / Юша

Щуплев А.В. / /

/ /

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

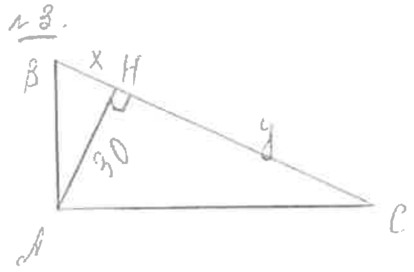
M	A	0	0	0	1	1	0	5	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	10	–	18	68

№3.



Дано:
$\triangle ABC$; $\angle A = 90^\circ$
AH – высота
$AH = 30$
Док-ать: $r_{вп.} > 12$

1. AH – ср. пропорциональное в $\triangle ABC$;
$\Rightarrow AH = \sqrt{BH \cdot HC}$; $AB = \sqrt{BH \cdot BC}$; $AC = \sqrt{HC \cdot BC}$

2. Пусть $BH = x$; $HC = y$
Тогда $AH = 30 = \cancel{\sqrt{x(x+y)}} = \sqrt{xy}$, откуда $xy = 900$

$AB = \sqrt{x(x+y)}$ или $x(x+y) = AB^2$

$x^2 + xy = AB^2$; т.е. $AB^2 = x^2 + 900$

3. $AC = \sqrt{y(x+y)}$; или $y(x+y) = AC^2$

$y^2 + xy = AC^2$; т.е. $AC^2 = y^2 + 900$

4. По т. Пифагора для $\triangle ABC$ ($\angle A = 90^\circ$):
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + y^2 + 1800$

~~$\frac{60}{4\sqrt{2}} - \frac{60(4-\sqrt{2})}{14} = \frac{120 - 30\sqrt{2}}{7}$; $\frac{120-30\sqrt{2}}{7} \vee 12$; $120 - 30\sqrt{2} \vee 84$; $-30\sqrt{2} \ldots$ $r > 12$~~

5. $r_{вп} = \frac{S}{p}$; $p = \frac{AB + BC + AC}{2}$ ~~$\Rightarrow \frac{BC \cdot \cos B + BC + BC \cdot \sin B}{2}$~~

$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(x^2+900)(y^2+900)} = \frac{\sqrt{900^2 + 900x^2 + 900y^2 + 900^2}}{2} =$

$= \frac{30\sqrt{x^2+y^2+1800}}{2} = 15\sqrt{x^2+y^2+1800} = 15\, BC$

~~$r = \frac{15 BC \cdot 2}{\cos B \cdot BC + \sin B \cdot BC + BC} = \frac{30}{\sin B + \cos B + 1}$~~

~~(1) если $\triangle ABC$ – равнобедр., то $r = \frac{30}{\frac{2\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{30}{\sqrt{2}+1} = \frac{30(\sqrt{2}-1)}{1} = 30\sqrt{2} - 30$~~

$30\sqrt{2} - 30 \vee 12$
$30\sqrt{2} \vee 42$
$\sqrt{1800} > \sqrt{1764}$, т.е. – верно, $r > 12$

~~(2) если $\triangle ABC$ не равнобедр., то $\frac{30}{\sin B + \cos B + 1}$~~

~~$\Rightarrow r > \frac{30 \cdot 2}{\sqrt{2}+1+1}$; $r > \frac{60}{4+\sqrt{2}}$; $r > \frac{120 - 30\sqrt{2}}{7}$, т.е. – верно~~ т.к. $\begin{cases} \sin B < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos B < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; $r > 12$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 5 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

6. $S = 15BC = 15\sqrt{x^2+y^2+1800}$

$p = \frac{1}{2}\cdot(AB+BC+AC) = \frac{\sqrt{x^2+900}+\sqrt{y^2+900}+\sqrt{x^2+y^2+1800}}{2}$

откуда $r = \frac{30\sqrt{x^2+y^2+1800}}{\sqrt{x^2+900}+\sqrt{y^2+900}+\sqrt{x^2+y^2+1800}}$

7. Оценим:

$\frac{30\sqrt{x^2+y^2+1800}}{\sqrt{x^2+900}+\sqrt{y^2+900}+\sqrt{x^2+y^2+1800}}$ $> 30\cdot 30\sqrt{2} = 900\sqrt{2}$

$2S > 900\sqrt{2}$

$\cancel{S>...}$

$S > 450\sqrt{2}$

Для $\frac{a}{b}>$ надо $a>$, $b<$ $\underline{\geq}$ $(a, b>0)$

$\geq$ $30+30+30\sqrt{2} = 60+30\sqrt{2}$;

$P \geq 60+30\sqrt{2}$

$P < 2S$,

У вас $a>$ и $b>$, дробь при этом м.б. $<$

Например, $2>1$, $5>2$. Но $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$.

тогда $r > \frac{900\sqrt{2}}{60+30\sqrt{2}}$

$r > \frac{30\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$\frac{30\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4-2} = 15\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$

$r > 15\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$

$r > 30\sqrt{2}-30$

$30\sqrt{2}-30 > 12$

$30\sqrt{2} > 42$

$\sqrt{1800} > \sqrt{1764}$

т.е. $\underline{r>12}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	1	0	5	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$f(x)=\frac{1}{4^x+2}$; $A=f(0)+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+\ldots+f\left(\frac{99}{100}\right)+f(1)$

Рассмотрим $f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)$: $\frac{1}{4^{0,01}+2}+\frac{1}{4^{0,99}+2}=\frac{4^{0,99}+4^{0,01}+4}{4^{0,01+0,99}+4+2\cdot4^{0,01}+2\cdot4^{0,99}}=$

$=\frac{4+4^{0,01}+4^{0,99}}{4+4+2\cdot4^{0,01}+2\cdot4^{0,99}}=\frac{4+4^{0,01}+4^{0,99}}{2\cdot(4+4^{0,01}+4^{0,99})}=\frac{1}{2}$

$\underbrace{\frac{1}{100}+\frac{99}{100};\ \frac{2}{100}+\frac{98}{100};\ \frac{3}{100}+\frac{97}{100};\ \ldots;\ до\ \frac{49}{100}+\frac{51}{100}}_{49\ сумм}$;

Надо было д-ть в общем виде

$f\left(\frac{50}{100}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

$f(0)=\frac{1}{4^0+2}=\frac{1}{3}$; $f(1)=\frac{1}{4+2}=\frac{1}{6}$

$A=\frac{1}{3}+49\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{49}{2}+\frac{1}{4}=\frac{50}{2}+\frac{1}{4}=25+0,25=25,25$

Ответ: $A=25,25$

№1. т.к. $a, b, c, d>0$, то корни уравнений $x^6+ax+b=0$ и $x^6+cx+d=0$ – отрицательны.

Пусть x_1 – их общий корень, $x_1<0$

тогда $x_1^6+ax_1+b=x_1^6+cx_1+d$,

$ax_1+b=cx_1+d$; $x_1(a-c)=d-b$

т.к. $a<c$; $d<b$; то $a-c<0$ и $d-b<0$

т.е. $x_1(\underbrace{a-c}_{<0})=\underbrace{d-b}_{<0}$, то $x_1>0$; что противоречит усл. $x_1<0$.

$\Rightarrow$ Общих корней нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00011058 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть n_1 уч. принесли телефоны,

т.е. $n_1=58$; всего телефонов: 58,

n_2 уч. принесли по 3 тетради;

всего тетрадей: $3n_2$;

n_3 уч. принесли по 4 книги;

всего книг: $4n_3$

I стол: $58+\frac{1}{5}\cdot 3n_2+\frac{1}{7}\cdot 4n_3$ (1)

II стол $\frac{4}{5}\cdot 3n_2+\frac{6}{7}\cdot 4n_3$ (2)

(1) = (2) по усл., тогда $58+\frac{3n_2}{5}+\frac{4n_3}{7}=\frac{12n_2}{5}+\frac{24n_3}{7}$

$\frac{2030+21n_2+20n_3}{35}=\frac{84n_2+120n_3}{35}$, или $2030=63n_2+100n_3$

$63n_2+100n_3=2030$, $n_2\in N$; $n_3\in N$ по усл.

$n_2=10$, $n_3=14$ - подх., т.е. $63n_2+100n_3=63\cdot 10+100\cdot 14$

~~Неполный~~ перебор с 9-м.

$63\underbrace{(n_2-10)}_{\vdots 100}=100\underbrace{(14-n_3)}_{\vdots 63}$, откуда $14-n_3=63k$

$n_2-10=100k$, $k\in Z$

$14-n_3=63k$, $\underline{n_3=14-63k}$ $\underline{n_2=100k+10}$

т.к. $n_3\in N$, то $14-63k>0$ $\underline{k<\frac{14}{63}}$ или $\underline{k<\frac{2}{9}}$

также т.к. $n_2\in N$, $100k+10>0$; $\underline{k>-\frac{10}{100}}$ или $\underline{k>-\frac{1}{10}}$

т.к. $k\in Z$; то $\underline{k=0}$

откуда $\underline{n_2=10;\ n_3=14}$ Итого учеников: $58+10+14=82$

Ответ: 82

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	1	0	5	9	2	1

Горный университет

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия КОРАБЛЁВ

Имя ДЕНИС

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 03.03.2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 13.03.2021

Номер телефона 8902 316 200 3 **Подпись** Кор

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

В Апелляционную комиссию

11059, 10кл

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

математика

от (Ф.И.О.)

Корабёв Денис Андреевич.

Адрес площадки проведения

г. Санкт-Петербург, 21-ая линия Васильевского острова, д 2.

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 2, 15 (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

Я выполнил перебор и дал правильный ответ, некот. вычисления были выполнены, но опущены для экономии места, т. эти вычисления были очень простыми.

О себе сообщаю:

+8902 316 2003 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

denis-Korablev2004@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 20:47, 7.04.2021.

Подпись участника Олимпиады: Кор

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 9:40

Комментарии членов апелляционной комиссии: №2: перебор ведётся до первого подходящего значения, но оставшееся довольно очевидно, можно считать неполное изложение решения недочётом

Результат рассмотрения апелляции:

Изменить оценку з. №2 с 15 на 19 баллов

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. / [подпись] /

Шалько Ю.В. / [подпись] /

Щуплев А.В. / Юща /

/ /

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 0 5 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	~~15~~ 19	15	0	20	~~70~~

74

№ 5

$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$

$f(0)=\frac{1}{4};\ f(1)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$f(\frac{1}{2021})+f(\frac{2020}{2021})=\frac{9^{\frac{1}{2021}}}{9^{\frac{1}{2021}}+3}+\frac{9^{\frac{2020}{2021}}}{9^{\frac{2020}{2021}}+3}=\frac{9^1+3\cdot 9^{\frac{1}{2021}}+9^1+9^{\frac{2020}{2021}}\cdot 3}{3\cdot 9^{\frac{1}{2021}}+3\cdot 9^{\frac{2020}{2021}}+9+9^1}$

$=1$

... 1010 раз

$A=1+\underbrace{1+\ldots+1}_{1010}=1011.$

В общем случае $\forall k\in R$

$f(\frac{k}{2021})+f(\frac{2021-k}{2021})=\frac{9^{\frac{k}{2021}}}{9^{\frac{k}{2021}}+3}+\frac{9^{\frac{2021-k}{2021}}}{9^{\frac{2021-k}{2021}}+3}=\frac{9^{\frac{k}{2021}}\cdot 9^{\frac{2021-k}{2021}}+3\cdot 9^{\frac{k}{2021}}+3\cdot 9^{\frac{2021-k}{2021}}+9^{\frac{k}{2021}}\cdot 9^{\frac{2021-k}{2021}}}{9^{\frac{k}{2021}}\cdot 9^{\frac{2021-k}{2021}}+3(9^{\frac{2021-k}{2021}}+9^{\frac{k}{2021}})+9}$

$= 1$

кол-во таких пар $\frac{2020}{2}=1010$ шт., т.е сумма

$1+1010=1011.$

Ответ: $A=1011$

№ 1.

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0,\ a<c,\ d<b$

$x^4+ax+b=0 \quad x^4+cx+d=0$, пусть они имеют общий корень, тогда

$\cancel{x^4}+ax+b=\cancel{x^4}+cx+d$

$x(\underbrace{a-c}_{<0})=\underbrace{d-b}_{<0}$ тогда $\boxed{x>0}$

$a<c$, т.о $d<b$, т.о

$\begin{cases} x(x^3+a)=-b \\ x(x^3+c)=-d \end{cases}$ т.к. $a,b,c,d\neq 0$, $x\neq 0$, то поделим

$\frac{\cancel{x}(x^3+a)}{\cancel{x}(x^3+c)}=\frac{b}{d}$

$x^3b+bc=x^3d+ad$ $\quad a<c,\ d<b$, то $ad<bc$

$\underbrace{x^3}_{>0}(\underbrace{b-d}_{>0})=\underbrace{ad-bc}_{<0}$ — противоречие, т.е они не имеют общ. корней ч.т.д.

Лист 1 из 3

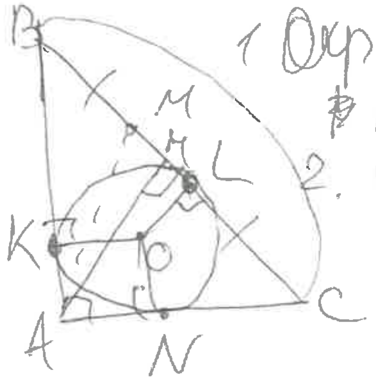
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 1 0 5 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



1. Окр $(O;r)$ касается AB, BC, AC в т. ~~т~~ K, L, N соответственно.

2. Д-п. AM – медиана по св-ву $AM = \frac{1}{2}BC$ в $\triangle AHM$, где $\angle AHM = 90°$, AH и.б.:

$AM \geq AH$

$\frac{1}{2}BC \geq 18$ $\boxed{BC \geq 36}$

I сл. $BC = 36$, те $M \equiv H$ $\triangle ABC$ – равнобедр. $BC = 3$

$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = h^2 = 324$; ~~AB~~ по т. Пифагора $36^2 = 2x^2$. ~~⊖~~

$S = p \cdot r = \frac{36\sqrt{2}+36}{2} = 18(\sqrt{2}+1)$ $r = \frac{324}{18(\sqrt{2}+1)} = \frac{18}{\sqrt{2}+1}$ $36 = x\sqrt{2}$ $x = \frac{36}{\sqrt{2}}$

II сл. $BC > 36$, по св-ву отр. касательных $\sqrt{2}+1 \approx 2{,}4$ $\frac{18}{2{,}4} > 7$.

$BK = BL = x$, $LC = CN = y$, $AK = AN = r$, т.к $OKAN$ – пар-м (по призн.)

$p = \frac{2x+2y+2r}{2} = x+y+r = BC+r$.

$BC > 36$, то $S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC > 324$

$(BC+r) \cdot r > 324$.

$r^2 + BC \cdot r - 324 > 0$

$D = BC^2 + 18^2 \cdot 4$

$r = \frac{-BC \pm \sqrt{BC^2+18^2 \cdot 4}}{2}$, т.к $BC \to +\infty$, то $-BC - \sqrt{BC^2+18^2 \cdot 4} \to -\infty$,

найдем крайнее знач. при $BC = 36$ $-36 - 18 \cdot 2\sqrt{2}$ < 0 ?

$-BC + \sqrt{BC^2+18^2 \cdot 4} > 14$, при $BC \to +\infty$ – что ?

$-36 + \sqrt{4 \cdot 18^2 + 18^2 \cdot 4} > 14$

Не показано, что при $BC > 36$ и $BC\uparrow$ r возрастает

$-36 + ~~2~~ \cdot 18\sqrt{2} > 14$

~~⊖~~ $36(\sqrt{2}-1) > 14$

Граница для r с пом. иррац. не вкл... саль.

$36 > 14\sqrt{2} - 14$, т.к $\boxed{r > 7 \text{ ч.т.д.}}$

$50 > 14\sqrt{2}$

$f(BC) = BC$, при $BC > 36$ ~~⊖~~ $\downarrow$ ~~⊖~~

$g(BC) = \sqrt{BC^2 + 18^2 \cdot 4}$, при $BC > 36$ $\uparrow$ в т. $x = 30$ $g(BC) > f(BC)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 1 0 5 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Чтобы пр-ие было кратно 10 необходимо наличие пятерки и чётного числа.
т.е 2, 4, 6, 8. – 4 числа.
Вариантов выбрать пятерку 4 шт.
остаётся 10 чисел

Сочетания не подходят, могут быть взяты одинаковые множители.

$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210;\ C_{10}^{3}=120;\ C_{10}^{2}=45;\ C_{10}^{1}=10$ Sum = 385

Если 2 пятерки
$C_9^4 = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = 126$ $C_9^3 = 84;\ C_9^2=36;\ C_9^1 = 9$ Sum = 255

3 пятерки
$C_8^4 = 70;\ C_8^3 = 56,\ C_8^2 = 28;\ C_8^1 = 8$ Sum = 162

и т.д. Sum = 98 – 4 пятерки Sum =
Sum = 56 – 5 пятерок
Sum = 30 – 6 пятерок

Ответ: $\frac{210\cdot 120\cdot 45\cdot 10}{11\cdot 8^{10}}\cdot\frac{??}{11^2}\cdot\frac{126\cdot 84\cdot 36\cdot 9}{8^9}\cdot$ $\cdot 70\cdot 56\cdot 28\cdot 8\cdot 35\cdot 35\cdot 21\cdot 7\cdot 15\cdot 20\cdot 15\cdot 6\cdot 5\cdot 10\cdot 5\cdot 10\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2$ ...

№2 $n, m \in \mathbb{N}$

n – кол-во тетр, m – кол-во книг, т.к. кол-во учеников $\in \mathbb{N}$ то $\boxed{n \vdots 2;\ m \vdots 3}$

I стол II стол
$64 + \frac{?}{7}n + \frac{?}{5}m = \frac{6}{7}n + \frac{4}{5}m$.

$64 = \frac{5}{7}n + \frac{3}{5}m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $\frac{5}{7}n + \frac{3}{5}m \in \mathbb{Z}$, то $n \vdots 7$, $m \vdots 5$

$n = 14k$, $m = 15l$

$64 = 10k + 9l$, $9\cdot 1 = 9$?$\cdot 2 = 12$ $\cdot 6 = 54$, $k, l \in \mathbb{Z}$, тогда
$l = 6$ $64 - 54 = 10k$ $k = 1$, тогда $\boxed{m = 90,\ n = 14}$

$\frac{m}{3}$ – кол-во, принесших книги = 30
$\frac{n}{2}$ – кол-во, принесших тетр = 7
Общее кол-во = 64 + 30 + 7 = 101 участник.

Подбор, перебор до первого подходящего значения.

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Горный университет

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	1	1	5	4	2	1

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Самсоненко

Имя Илья

Отчество Витальевич

Дата рождения 17.06.2004 Класс 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 листах Дата выполнения работы 13.03.2021

Номер телефона 89046347477 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

11154, 10кл

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

Математике

от (Ф.И.О.)

Самсоненко Ильи Витальевича

Адрес площадки проведения

г. СПб, 21-ая линия Васильевского острова, д. 2

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 4 (2Б) (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

Наличие верной схемы решения, однако способ подсчёта множителей с наличием „2" и „5" отличается от предложенного организаторами.

О себе сообщаю:

8 904 634 44 77 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

samsonenkoilia@bk.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 07.04.21 (21.00 мск)

Подпись участника Олимпиады:

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 9:10

Комментарии членов апелляционной комиссии: № 4: схема решения не является верной (число исходов – выбор без возвращения, число благопр. исх. – выбор с возвращением, в рез-те „вероятность" > 1). Пересечения не учитываются, формулы противоречат здравому смыслу

Результат рассмотрения апелляции:

Оставить без изменение

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. / /

Шашко Ю.В. / Юша

Щуплев А.В. / /

/ /

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 1 5 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	2	15	59

№5.

$$f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$$

Дано число вида:

$$A = f(0) + f(x_1) + \dots f(x_{2020}) + f(1)$$

1) Заметим, что каждая пара:

$x_1 + x_{2020}$

$x_2 + x_{2019}$

и т.д.

в сумме даёт „1"

Не доказано, только 1 пример в общем виде

2) Рассмотрим пару $f\left(\frac{1}{2021}\right)$; $f\left(\frac{2020}{2021}\right)$; (т.к. $\frac{1}{2021} + \frac{2020}{2021} = 1$)

$$f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{9^{\frac{1}{2021}}}{9^{\frac{1}{2021}}+3} + \frac{9^{\frac{2020}{2021}}}{9^{\frac{2020}{2021}}+3} =$$

$$= \frac{9 + 9 + 3\cdot 9^{\frac{1}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2020}{2021}}}{\left(9^{\frac{1}{2021}}+3\right)\left(9^{\frac{2020}{2021}}+3\right)} = \frac{9+9+3\cdot 9^{\frac{1}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2020}{2021}}}{18 + 3\cdot 9^{\frac{1}{2021}} + 3\cdot 9^{\frac{2020}{2021}}} =$$

$= 1$

3) Аналогично доказываем что: $f(x_n) + f(x_{2021-n}) = 1$ (все остальные пары)

$$\Rightarrow A = f(0) + f(1) + 1\cdot\frac{2020}{2} = 1010 + \frac{9^0}{9^0+3} + \frac{9}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1010 =$$

$= 1011.$

Ответ: $A = 1011.$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$$-\begin{cases} x^4+ax+b=0 \\ x^4+cx+d=0 \end{cases}$$

$$x(c-a)+(d-b)=0$$

$$x(c-a)=(b-d)$$

$$x=\frac{b-d}{c-a}$$

1) т.к $\begin{matrix} b>d \\ c>a \end{matrix} \Rightarrow \frac{b-d}{c-a}>0 \Rightarrow x>0$

2) т.к в уравнениях:

$$x^4+ax+b=0$$
$$x^4+cx+d=0$$

все коэффециенты $>0 \Rightarrow x<0$

3) из пунктам 1 и 2:

$$\begin{cases} x>0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА000111 54 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

1) Т.к. кол-во предметов на столах равно, то: $64+\frac{1}{7}x+\frac{1}{5}y=\frac{6}{7}x+\frac{4}{5}y$; где x – кол-во тетради, y – кол-во клея. $(x;y\in N)$

$64=\frac{5}{7}x+\frac{3}{5}y$

2) Т.к. на каждого человека либо по 2 тетр, либо по 3 кл., то кол-во тетр$_7$ кратно 2 и 7, кол-во кл. – 5 и 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=14\cdot n$, $y=15\cdot k$; где n и $k\in N$

3) $64=\frac{5}{7}x+\frac{3}{5}y$

а) $\exists x=14 \Rightarrow y=\frac{5}{3}\cdot\left(64-\frac{5\cdot14}{7}\right)=90$

$\begin{cases} y\,\vdots\,3 \\ y\,\vdots\,5 \end{cases} \Rightarrow$ такой вариант возможен

б) $\exists x=28 \Rightarrow y=\frac{44\cdot5}{3}$ $\quad y\not\vdots\,3 \Rightarrow \varnothing$

в) $\exists x=42 \Rightarrow y=\frac{34\cdot5}{3}$ $\quad y\not\vdots\,3 \Rightarrow \varnothing$

г) $\exists x=56 \Rightarrow y=40$ $\quad y\not\vdots\,3 \Rightarrow \varnothing$

д) $\exists x=70 \Rightarrow y=\frac{14\cdot5}{3}$ $\quad y\not\vdots\,3 \Rightarrow \varnothing$

е) $\exists x=84 \Rightarrow y=\frac{4\cdot5}{3}$ $\quad y\not\vdots\,3 \Rightarrow \varnothing$

ж) $\exists x\geq98 \Rightarrow y\leq-\frac{6\cdot5}{3}$ $\quad y\notin N \Rightarrow \varnothing$

4) Из пункт 3 $\Rightarrow$ $x=14$, $y=90$ $\Rightarrow$ кол-во человек $=7+30+64=101$

Ответ: всего 101 человек.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 1 1 5 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. Это не кол-во, (дробное число), и не вер-ть (>1)

1) Кол-во способов выбрать произведение 11-ти чисел из ряда (1-8), равна $\frac{8^{11}}{11!}$

2) Чтобы произведение чисел было кратно 10, в числе выбранных цифр должны находиться „5" и „2·n", где $n \in \{1\};\{2\};\{3\};\{4\}$

3) Т.к мин. одно из чисел обязательно „5" и одно „2·n" $\Rightarrow$ кол-во способов выбора произведения $= \frac{1 \cdot 4 \cdot 8^9}{11!}$ Имеете в виду вероятность?

В знаменателе числа не могут повторяться а в числителе могут

4) Вероятность кратности 10 тогда будет равна: $\frac{11! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 8^9}{11! \cdot 8^{11}} = \frac{1}{16}$ Вер-ть делите на вер-ть?

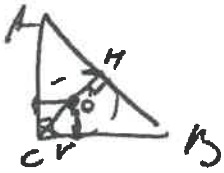
Ответ: вероятность $= \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

11! – означает, что первое число выбираем 11 способами. Но в ряду 1-8 всего 8 чисел.

№ 3.

Дано:
ΔABC - прям
CH - выс
$CH = 18$

Док-ть:
$r > 7$



Док-во:

1) Пусть ABC - р/б $\Rightarrow$ — частный случай

$\Rightarrow CH$ явл биссс. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (18-2r)\cdot 2r = r^2$ (по св кас и сек) $\Rightarrow$

$18 = r + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow r = \frac{36}{5} > 7$

2) при изменении углов Δ выс. будет изменять своё излож, как, и r будет относиться к отрезку секущей как $\frac{1}{\sin\alpha}$, где α - угол Δ, и острый т.к. $\sin\alpha < 1 \Rightarrow r > 7$. ?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	3	8	9	2	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Середа

Имя Андрей

Отчество Николаевич

Дата рождения 11.02.2003 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на ____ листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 89105000396 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М 1 0 0 0 1 3 8 9 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	–	20	62

5. Пусть $n \vdots 2$. тогда всю таблицу можно разбить на $\frac{n^2}{4}$ квадратов 2×2, в каждом из которых будет 2 фишки.

Тогда, всего фишек $k = \frac{n^2}{4} \cdot 2 = \frac{n^2}{2}$.

Пусть $n \not\vdots 2$. тогда:

1) ~~А~~ рассмотрим столбцы шириной 2 и длиной n. 30б

Если в столбце есть две горизонтальные закраш. клетки:  (закраш. клетки – клетки с фишками) или 2 незакрашенные, то ~~???~~ единственно возможная раскраска:

1-ый тип

Тогда в столбце будет либо $\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot 2$, либо $''n+1$. $\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot 2 = n-1$ закраш. клеток (в зависимости от того, закрашены ли нижние и верхние клетки)

2-ой тип

Если в столбце нет закрашенных клеток, стоящих горизонтально рядом, то каждые 2 горизонтально рядом стоящие клетки разных цветов, и всего закр. клеток: $2n$.

Тогда, можно оценить границы k:

Если все столбцы 1-ого типа, то клеток с фишками: $n\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n^2+n}{2}$ – максимум.

Если все столбцы 2-ого типа, то клеток с фишками: $\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ – минимум.

~~А~~ Докажем, что k может равняться любому числу в диапазоне $\left[\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}; \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right]$

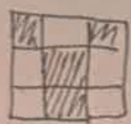
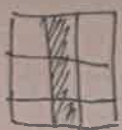
Вариант № 1 | MA0001389221

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пусть $n = 3$. максимум фишек: $k = \frac{n^2+n}{2} = 6$.

Для получения k меньшего на 1 будем „сдвигать" поочерёдно нижний слой:

 $k=5$  $k=4$  $k=3$ – минимум.

Аналогично действовать можно с любыми n - нечётными.

Ответ: $k = \frac{n^2}{2}$ при чётных n; $k \in \left[\frac{n^2-n}{2}; \frac{n^2+n}{2}\right]$ при нечётных n.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 3 8 9 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. $3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$

$4\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x + 2 = 0.$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

$2\sin x + \cos x = t.$

$(t-2)(t-1) = 0.$

1) $t = 2.$

$2\sin x + \cos x = 2.$

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}.$

$\cos x = 2(1-\sin x)$, $\sin x \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \geq 0;$ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$\cancel{\pm\sqrt{1-\sin^2 x} = 2-2\sin^2 x}.$

$\sqrt{1-\sin^2 x} = 2 - 2\sin^2 x.$

$1-\sin^2 x = 4 - 8\sin x + 4\sin^2 x$

$5\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0.$ $D = 4$

1) $\sin x = \frac{8+2}{10} = 1$ $(\cos x > 0)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$ $k \in Z$

2) $\sin x = \frac{8-2}{10} = 0{,}6.$ $(\cos x > 0) \Rightarrow$ $x = \arcsin(0{,}6) + 2\pi k.$ $k \in Z.$

2)

$2\sin x + \cos x = 1.$

$\cos x = 1 - 2\sin x.$

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}.$

$\pm\sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - 2\sin x.$

$1 - \sin^2 x = 1 - 4\sin x + 4\sin^2 x.$

$5\sin^2 x - 4\sin x = 0.$

$\sin x(5\sin x - 4) = 0.$

1) $\sin x = 0;$ $1 - 2\sin x > 0 \Rightarrow$ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = 1.$

$x = 2\pi k$ $k \in Z.$

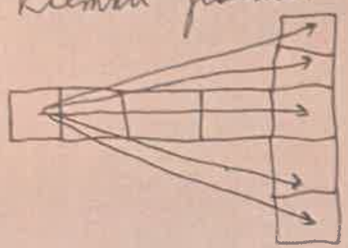
2) $\sin x = \frac{4}{5}$.

$\cos x = 1 - 2\sin x = -\frac{3}{5} \Rightarrow x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\arcsin(0{,}8) + 2\pi k$; ~~arcsin~~ $\pi - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$; $2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

1. Диаметрально противоположные векторы, отн. чёрной точки суммарно равны 0.

Тогда сумма векторов, проведенных во все клетки равна:



$4 + \cancel{8}\ 8 + 8 = 20$.

Логично, что избавиться необходимо от 2 из этих векторов (другие векторы, направленные вправо, „слабее" действуют на координату по x, так как расположены ближе к чёрной клетке).

Убрав любые 2 из этих векторов, значение по x станет равным 12.

Итоговая длина вектора равна $\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$ минимум при $y=0$.

Убрав верхний и нижний векторы, получим итоговый вектор с длиной $x=12$.

Ответ: 12.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 8 | 9 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3. Перебрав все трехзначные числа, получил, что подходят только:

121, 141, 171, 313, 666

Ответ: 121, 141, 171, 313, 666.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. КРАСНОЯРСК

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	3	8	9	0	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ~~[illegible]~~ БИРЮКОВ

Имя ЕГОР

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 23.07.2003 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на _____ листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона +79138307088 Подпись [illegible]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

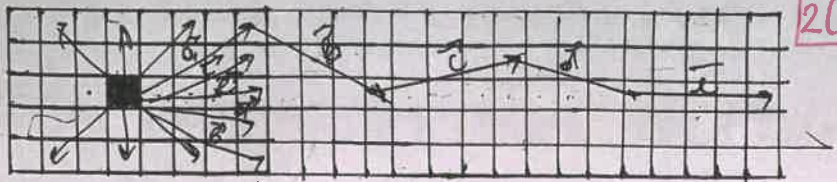
М	А	0	0	0	1	3	8	9	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	16	0	20	6	62

№1



← последний столбец

Заметим, что если вектор проведен из центра чёрной клетки в любую другую клетку, не принадлежащую последнему столбцу. То всегда будет вектор равный данному, но направленный в другую сторону. Соответственно, сумма всех векторов выходящих из чёрной клетки (кроме 5-ти векторов, идущих в последний столбец) равна 0.

Найдём сумму векторов, идущих в последний столбец

+

$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|+|\vec{e}|=20$

~~Но~~ Т.к. проведены все векторы, кроме двух, то два вектора можно не включать в сумму

$|\vec{e}|=4$

$|\vec{a}|+|\vec{b}|=8$ и $|\vec{c}|+|\vec{d}|=8$. Значит без двух векторов наименьшее значение суммы всех полученных векторов $|\vec{e}|+|\vec{a}|+|\vec{b}|=4+8=12$ Ответ: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 3 8 9 0 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N2

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cdot\cos x + 2\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + (2\sin x + \cos x)^2 + \sin^2 x + 2\cos^2 x = 0$

$2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 6\sin x + (2\sin x + \cos x)^2 = 0$

$2\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\cdot(2\sin x + \cos x) + (2\sin x + \cos x)^2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

Пусть $2\sin x + \cos x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$D = (-3)^2 - 4\cdot 2 = 9 - 8 = 1, \sqrt{1} = 1$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$t_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$t_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = 2 \\ 2\sin x + \cos x = 1 \end{array}\right.$

$2\sin x + \cos x = 1$ $\qquad c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right) = 1$ $\qquad \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 3 8 9 0 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\sin(x+t)=\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad\quad$ $\sin t=\frac{1}{\sqrt5}$

$x+t=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n;\ n\in Z$ $\quad\quad$ $t=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k;\ k\in Z$

$x+t=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n;\ n\in Z$ $\quad\quad$ $t=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k;\ k\in Z$

1 случай

$t=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k$

$x=2\pi(n-k);\ n\in Z;\ k\in Z$

$x=\pi-2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-k);\ n\in Z;\ k\in Z$

2 случай

$t=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k;\ k\in Z$

$x=-\pi+2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-k);\ n\in Z;\ k\in Z$

$x=2\pi(n-k);\ n\in Z;\ k\in Z$

$2\sin x+\cos x=2$

$\sqrt5\left(\frac{2}{\sqrt5}\sin x+\frac{1}{\sqrt5}\cos x\right)=2$ $\quad$ $C=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt5$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin x+\frac{1}{\sqrt5}\cos x=\frac{2}{\sqrt5}$ $\quad\quad$ $\sin t=\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos t=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(x+t)=\frac{2}{\sqrt5}$

$x+t=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi n;\ n\in Z$ $\quad\quad$ $\sin t=\frac{1}{\sqrt5}$

$x+t=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi n;\ n\in Z$ $\quad\quad$ $t=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k$

1 случай: $\quad\quad$ $t=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k;\ k\in Z$

$t=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k$

$x=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-k);\ n\in Z;\ k\in Z$

$x=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-k);\ n\in Z;\ k\in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA000138 9021 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2 случай:

$t = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k;\ k \in Z$

$x = -\pi + \arcsin\frac{2}{\sqrt5} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

$x = -\arcsin\frac{2}{\sqrt5} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z.$

Ответ: $2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

$\pi - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

$-\pi + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

$\arcsin\frac{2}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

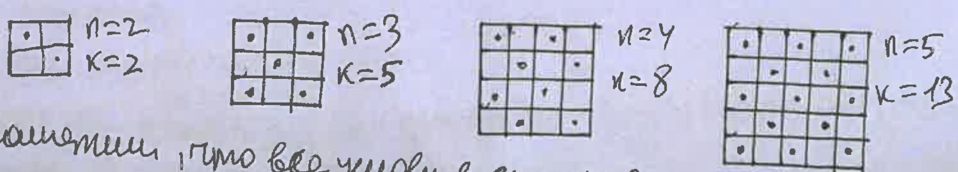
$\pi - \arcsin\frac{2}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

$-\pi + \arcsin\frac{2}{\sqrt5} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

$-\arcsin\frac{2}{\sqrt5} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi(n-k);\ n \in Z;\ k \in Z$

№5

Возьмём первые 4 n и посчитаем K при данном условии



Заметим, что все условия выполняются в том случае, когда фишки в клетках стоят в шахматном порядке (как показано на рисунке).

Также заметим, что при чётном n кол-во фишек равно половине кол-ва клеток значит для любого

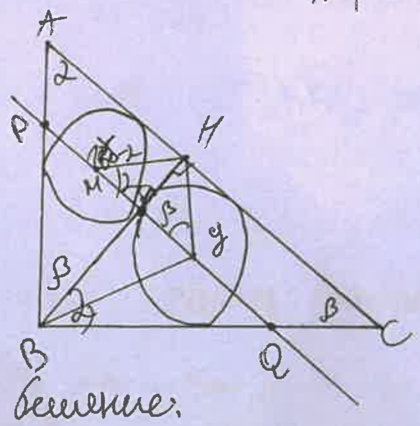
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

чётного n справедлива формула $K=\frac{n^2}{2}$.
Так же мы можем заметить, что для нечётных n справедлива формула $\frac{n^2+1}{2}$, т.к ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ кол-во фишек на доске при нечётном n равно ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ сумме ~~[illegible]~~ половине от суммы количества клеток, увеличенного на 1

Ответ: К при нечётном n: $K=\frac{n^2+1}{2}$

К при чётном n : $K=\frac{n^2}{2}$

№4



Дано:
△ABC - прямоугол.
BH - высота
BK = a
Найти:
S_{BPQ}

Решение:
Рассмотрим △XHy
XH и Hy - ~~[illegible]~~ биссектрисы (т.к проходят через центры окружностей, вписанных в углы).
т.к BH - высота (по усл) => ∠BHC = ∠BHA = 90° =>
=> т.к XH и Hy биссектрисы => ∠BHy = ∠CHy = ∠BHX = ∠AHX = $\frac{90}{2}$ = 45°.

$\angle XHY = \angle BHX + \angle BHY = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \Delta XHY$ - прямоугольный.

Пусть $\angle A = \alpha$, а $\angle C = \beta \Rightarrow$ ($\beta + \alpha = 90$) ΔBHA - прямоугольный (по усл BH - высота)

$\Rightarrow \angle ABH = 90 - \alpha = \beta$. ΔBHC - прямоугольный (HB - высота по усл)

$\angle HBC = 90 - \angle C = 90 - \beta = \alpha$.

$\Delta BHC \sim \Delta AHB$ (по 3-ем углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{HB} = \frac{XH}{YH}$ (как соответственные элементы)

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{XH}{YH} \Rightarrow AB \cdot YH = XH \cdot BC \Rightarrow \frac{YH}{BC} = \frac{XH}{BC}$ и $\angle XHY = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta XHY$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HXY = \alpha$; $\angle HYX = \beta$

$\angle HXY + \angle PXH = 180$ (как ~~соответственные~~ смежные углы)

$\angle PXH = 180 - \alpha$

Тогда четырёхугольник HPMH

$\angle PMH + \angle PXH = 180 - \alpha + \alpha = 180 \Rightarrow$ четырёхугольник можно вписать в окружность $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APM + \angle AMH = 180 \Rightarrow \angle APM = 180 - \angle AMH = 180 - 45^\circ = 135^\circ$ (по свойству вписанного четырёхугольника)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 3 8 9 0 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle APM + \angle BPM = 180$ (как ~~соответственные~~ смежные углы)

$\angle BPM = 180 - \angle APM = 180 - 135 = 45^\circ$

$\triangle BPQ$ – прямоугольный ($\angle B = 90^\circ$ по условию)

$\angle BPQ + \angle BQP = 90^\circ \Rightarrow \angle BQP = 90 - \angle BPQ =$

$= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle BPQ$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BPQ} = \frac{1}{2} BP \cdot BQ = \frac{1}{2} BQ^2$.

Рассм $\triangle BHY$ и $\triangle BYQ$

1) BY – общая

2) $\angle HBY = \angle QBY$ (т.к BY – биссектриса, т.к проходит через центр окружности, вписанной в угол.

3) $\angle BQP = \angle BHY = 45^\circ$, $\angle HBY = \angle QBY \Rightarrow \angle BYQ = \angle BYH$ (т.к сумма углов в треугольнике 180°

$\Downarrow$

$\triangle BYQ = \triangle BHY$ (по стороне и 2-ум прилежащим углам. У равных треугольников соотв. элементы равны $\Rightarrow BQ = BH = a \Rightarrow S_{BPQ} = \frac{1}{2}a^2$

Ответ: $\frac{1}{2}a^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МА000138 9021

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$\overline{abc} = (a+b+c+1)k+1$

$\overline{cba} = (a+b+c+1)k+1$

$100a+10b+c = (a+b+c+1)k+1$

$100c+10b+a = (a+b+c+1)k+1$

В

ВНИМАНИЕ: Проверяется только в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	0	8	2	5	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Кармазин

Имя Павел

Отчество Александрович

Дата рождения 13.07.2003 Класс 11

Предмет математика

Работа выполнена на 06 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона [redacted] Подпись [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

10825, 11кл

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

математике

от (Ф.И.О.)

Кармазина Павла Александровича

Адрес площадки проведения

онлайн (прокторинг)

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 2 (2б.) (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

В своем решении дошел до финальной совокупности из двух уравнений, ошибившись в их решении, т.е. практически пришел к верному ответу, что соответствует критерию на 12–16 баллов (решение может стать верным после дополнений).

О себе сообщаю:

8 985 042 6818 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

aleks-75_08@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 07.04.2021 20:00

Подпись участника Олимпиады: [подпись]

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 15:50

Комментарии членов апелляционной комиссии: В конце допущены грубые ошибки в решении тригоном. уравнения, поэтому вторая часть решения — решение ошибочное, рассмотрение частных случаев — 2 балла.

Результат рассмотрения апелляции:

Выставленные баллы за задачу №2 оставить без изменений.

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. / [подпись]

Шуплев А.В. / [подпись]

Шашко Ю.В. / [подпись]

10825, 11кл

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

математике

от (Ф.И.О.)

Кармазина Павла Александровича

Адрес площадки проведения

онлайн (прокторинг)

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 3 (4б.) (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

В решении рассмотрен один из существенных случаев ($a \neq c$), что соответствует критерию на 8-12 баллов (верно рассмотрен один из двух существенных случаев)

О себе сообщаю:

8 985 042 68 18 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

aleks-75_08@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 07.04.2021 20:00

Подпись участника Олимпиады:

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 15:50

Комментарии членов апелляционной комиссии: Нет строгого доказательства, почему в случае $a \neq c$ решений нет. Отсутствует полный разбор случая $a=c$. Частные случаи, решение отсутствует – 4 балла.

Результат рассмотрения апелляции:

Выставленные баллы оставить без изменений.

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. /

Шатько Ю.В. /

Шулев А.В. /

/ /

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	0	8	2	5	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос ~~Задача~~ 1.

Заметим, что черная клетка является центром прямоугольника 5 × 7:

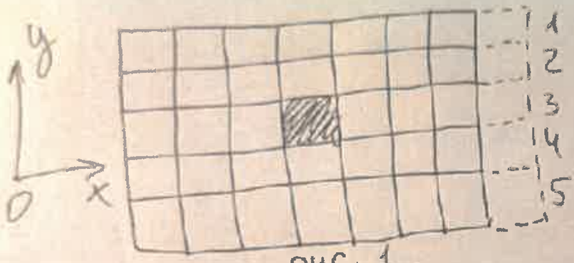
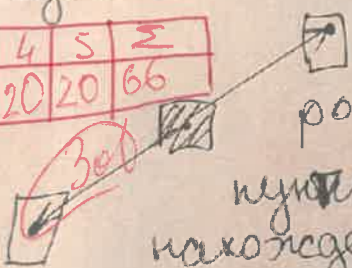


рис. 1

Поэтому каждый вектор, проведенный из центра черной клетки в центр одной из клеток прямоугольника 5 × 7, будет иметь пару, в сумме с которой он будет равен 0.

1	2	3	4	5	Σ
20	2	4	20	20	66



Остаются еще 5 векторов в клетки, нарисованные пунктиром на рис. 1. Для нахождения их суммы найдем проекции этих векторов на OX и OY ~~а затем вектор~~. Эти вектора можно разбить на пары с противоположными проекциями на OY: 1 и 5, 2 и 4. (у 3 проекция на OY = 0). А вот проекции на OX у всех одинаковы и по модулю равны 4 (модуль вектора 3). Поэтому для наименьшей суммы векторов нужно исключить любую из двух вышеуказанных пар „пунктирных" векторов. Все вектора пр-уг. 5x7 в сумме дадут 0, оставшиеся 3 вектора имеют нулевую проекцию на OY и проекцию в 3 длины 3-его вектора на OX, что равно 12. Это и будет наим. длина. Ответ: 12.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 0 8 2 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос 2.

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$$

$$3 = 3\cdot 1 = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$2\sin 2x = 4\sin x\cos x$$

$$6\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + \overset{4\sin x\cos x}{\cancel{2\sin 2x}} + 3\cos^2 x = 0$$

$$\underbrace{4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x}_{(2\sin x + \cos x)^2} + 2\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\cos^2 x = 0$$

$$2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\cdot 1 = 2$$

$$(2\sin x + \cos x)^2 + 2 - 3(\cos x + 2\sin x) = 0$$

$$2\sin x + \cos x = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \qquad D = 9 - 2\cdot 4 = 1 = 1^2$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \qquad t_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = 2 \\ 2\sin x + \cos x = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = 2\pi n \end{array}\right. \ /\ k, n \in \mathbb{Z}.$

Вопрос 5.

$n \geq 2$ (1).

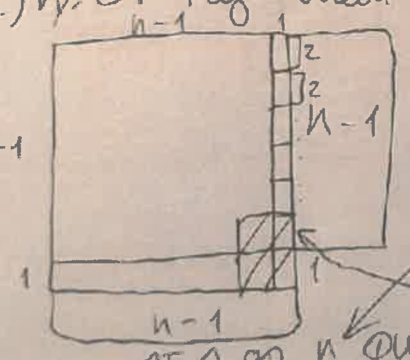
Рассматриваем два случая:

1) $n \vdots 2$. Разбиваем ~~ква~~ таблицу на $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ квадратиков 2×2:

По условию, в каждом из них ровно 2 фишки, $\Rightarrow$ всего их $k = 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2}$.

Пример такой расстановки – шахматная раскраска. ($\boxed{}$): ~~Вк~~ в любом квадрате ровно 2 фишки (я понимаю, что такие квадраты есть, и для них тоже все верно). Они входят в понятие „любой квадрат".

2) $n \not\vdots 2$. Разбиваем квадрат следующим образом:



от 0 до $n-1$ фишки

суммарно от 1 до $2n-1$ фишек (0 не может быть, т.к. тогда в заштрих. квадрате не более 1 фишки.)

от 0 до n фишек

В квадрате $(n-1)\times(n-1)$ действуем аналогично пункту 1), получая, что там ровно $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{(n-1)^2}{2}$ фишек.

Значит, для $n \not\vdots 2$ $k \in \left[\frac{(n-1)^2}{2}+1; \frac{(n-1)^2}{2} + 2n-1\right]$. (2).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 2 | 5 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение Вопроса 5.

3) Осталось проверить, входит ли $\frac{n^2}{2}$ во (2) при условии (1):

$$\frac{(n-1)^2}{2}+1=\frac{n^2-2n+1}{2}+1=\frac{n^2}{2}+\frac{3}{2}-n$$

$n\geq 2, \Rightarrow \frac{3}{2}-n<0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(n-1)^2}{2}+1<\frac{n^2}{2}.$$

$$\frac{(n-1)^2}{2}+2n-1=\frac{n^2-2n+1}{2}+2n-1=$$

$$=\frac{n^2}{2}-n+2n+\frac{1}{2}-1=$$

$$=\frac{n^2}{2}+n-\frac{1}{2}$$

$n-\frac{1}{2}>0$, т.к. $n\geq 2$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(n-1)^2}{2}+2n-1>\frac{n^2}{2}.$$

Значит, $\frac{(n-1)^2}{2}+1<\frac{n^2}{2}<\frac{(n-1)^2}{2}+2n-1$, откуда делаем вывод, что $\frac{n^2}{2}\in(2)$ и получаем ответ: $k\in\left[\frac{(n-1)^2}{2}+1;\ \frac{(n-1)^2}{2}+2n-1\right]$.

Вопрос 3.

$\overline{abc}=100a+10b+c$. Пусть (1) $100a+10b+c=x(\overset{\text{сумма цифр}+1}{a+b+c+1})+1$ (ост.)

$\overline{cba}=100c+10b+a$ (2) $100c+10b+a=y(a+b+c+1)+1$

(1)−(2):

$$99(a-c)=(x-y)(a+b+c+1).$$

$$3\cdot3\cdot11\cdot(a-c)=(x-y)(a+b+c+1).$$

$a+b+c+1\geq 4, \Rightarrow a+b+c+1\neq 3$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение Вопроса 3.

При $a=c$:

$3\cdot 3\cdot 11\cdot 0=(x-y)(a+b+c+1)$

$x=y$

$\overline{abc}=\overline{cba}$.

Среди таких чисел подойдет 121:

$121:(1+2+1+1)=121:5=24$ (ост. 1).

~~353~~ 313:

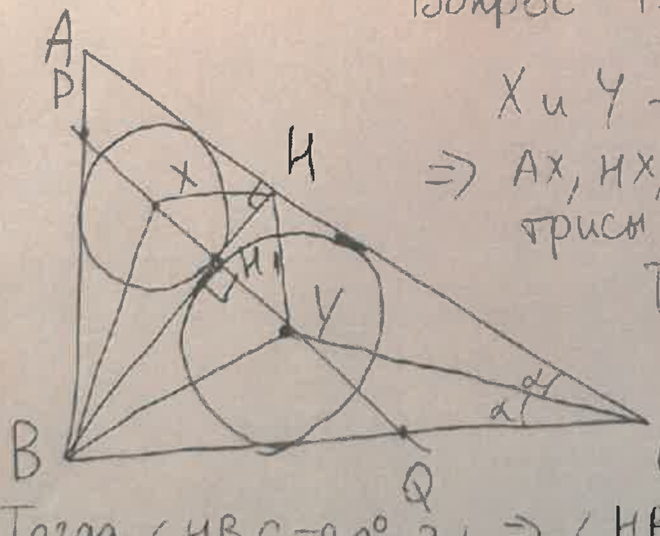
~~$353:(3+5+3+1)$~~

других таких $\overline{abc}$ нет. $313:(3+1+3+1)=313:8=39$ (ост. 1)

При $a\neq c$ одновременное выполнение (1) и (2) невозможно.

Ответ: 121, 313.

Вопрос 4.



X и Y – центры впис. окр., ⇒ AX, HX, BX, BY, HY и CY – биссектрисы своих углов.

Тогда $\angle XBY=45^\circ$, а $\angle XHY=90^\circ$.

Пусть $\angle HYC=YCB=\alpha$

Тогда $\angle HBC=90^\circ-2\alpha$, ⇒ $\angle HBY=45^\circ-\alpha$. В $\triangle XHY$ $HX=HY$, $\angle HYX=45^\circ=\angle YHC$ ⇒

⇒ $PQ\parallel AC$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 2 | 5 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение Вопроса 4.

Из $PQ \parallel AC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BPQ$ (1)

$AB = \frac{a}{\cos 2\alpha}$; $BC = \frac{a}{\sin 2\alpha}$.

$AC = \frac{a}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$ (по т. Пиф. для $\triangle ABC$).

$AH = a \cdot tg 2\alpha$; $CH = a \cdot ctg 2\alpha$

$\triangle ABC \sim \triangle ABH$ и $\triangle ABC \sim \triangle BCH$ и остальных подобий и выражений сторон.

Из (1) получаем, что $k = \frac{AC}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}}$.

$S_{BPQ} = \frac{BH_1 \cdot PQ}{2} = \frac{\frac{a \cdot \sqrt{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}}{\cancel{\sqrt{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}}} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Ответ: $S_{BPQ} = \frac{a^2}{2}$.

Лист 06 из 06

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Проекторинг | М А 0 0 0 1 3 0 6 7 2 1

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 2

Фамилия Шихова

Имя Екатерина

Отчество Евгеньевна

Дата рождения 13.06.2003 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на _____ **листах** **Дата выполнения работы** 12.03.2021

Номер телефона +79774656695 **Подпись** Шик

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

13067, 11 кл

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

МАТЕМАТИКА

от (Ф.И.О.)

Шихова Екатерина Евгеньевна

Адрес площадки проведения

ПРОКТОРИНГ

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 1(2б); 2(6б); 3(0б); 5(0б) (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

Я не вижу свою работу не понимаю проблемы и ошибки. Прошу ещё раз посмотреть. Спасибо

О себе сообщаю:

+79774656695 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

svetya-1977@yandex.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 08.04.2021 г 17:15

Подпись участника Олимпиады: Ших

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 17:10

Комментарии членов апелляционной комиссии: Задача N 5 отсутствует. В задачах N1 и N2 представлены полные версии решения - 20б. Задача N 3 отсутствует.

Результат рассмотрения апелляции: Повысить баллы за задачу N1 с 2 до 20 баллов. Повысить баллы за задачу N2 с 6 до 20 баллов.

Члены Апелляционной комиссии:

Михалкина Е.К. / [подпись]

Шалимова И.В. / [подпись]

Шуглеев А.В. / [подпись] /

______ / ______ /

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	3	0	6	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Предположим, что два рыцаря высказались про рыцарей. Тогда их высказывания разные.
⇒ один из них врёт.
Т.о. два рыцаря высказываться о рыцарях не могут.

3б

Аналогично два рыцаря не могут высказаться и о кол-ве лжецов.

1	2	3	4	5	Σ
~~2~~ 20	~~8~~ 20	–	20	–	~~28~~ 60

Т.е. рыцарей не более 2-х.

Если их 2-е
⇒ Один из них называет кол-во рыцарей (нечётное число), а другой кол-во лжецов.
Тот который называет кол-во рыцарей говорит не правду
⇒ и 2х рыцарей быть не может.
⇒ Рыцарей ровно 1 и он говорит первым.
Все остальные лжецы.
Пусть кол-во лжецов n
а) n – нечётное;
подходит
И в этом случае они все врут.
б) n – чётное; Тогда последний назовет верное кол-во лжецов, т.е он скажет правду.
— ПРОТИВОРЕЧИЕ

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | N | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 6 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

т.е. его нет,

т.е $n=0$

Ответ: На поляне могут собраться любое ~~кол-во~~ нечетное кол-во бельчат, среди которых один рыцарь.

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	3	0	6	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

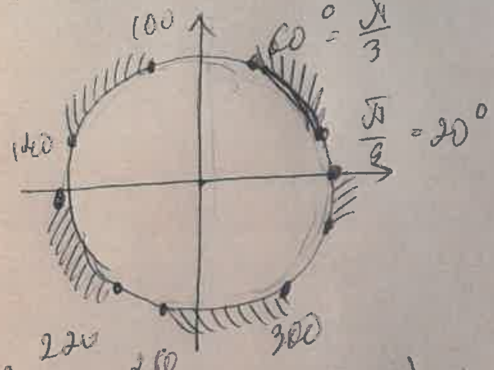
№2 $2\cos\frac{x}{3} + \sqrt{5} = 2 - (\sqrt{5}-1)\sin\frac{x}{6}$

Замена $\frac{x}{6} = t$

$$\begin{cases} 2\cos 2t + \sqrt{5} = 2 - (\sqrt{5}-1)\sin t \\ \cos\frac{9t}{2} < 0 \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{9t}{2} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

$\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi n}{9} \leq t < \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{9}$



$2 - 4\sin^2 t + \sqrt{5} = 2 - (\sqrt{5}-1)\sin t$

$4\sin^2 t - (\sqrt{5}-1)\sin t - \sqrt{5} = 0$

$D = (\sqrt{5}-1)^2 + 16\sqrt{5} = 6 + 14\sqrt{5}$

$\sin t = \frac{(\sqrt{5}-1) \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8}$

$t_1 = \arcsin\frac{(\sqrt{5}-1) \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8} + 2\pi$

$t_2 = \arcsin\frac{(\sqrt{5}-1) \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{2} + 2\pi n$

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 6 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

И надо сделать отбор корней, которые попадают в заштрихованную область. И потом обратную замену. где?

№ 4

$НОК(a, b+1) = НОК(b, a+3)$

Пусть $НОД(a, b+1) = d$

$НОК(a, b+1) \vdots d \Rightarrow$

$НОК(b, a+3) \vdots d$ и $b \not\vdots d$

$\Rightarrow a+3 \vdots d$ и $a \vdots d$ $\Rightarrow$ $d = 1$ или $d = 3$

Пусть

$НОД(b, a+3) = d \Rightarrow$

$b \vdots d$, $a+3 \vdots d$

$\Downarrow$

$b+1 \not\vdots d$

$НОК(b, a+3) \vdots d \Rightarrow$

$НОК(a, b+1) \vdots d$ и $b+1 \not\vdots d$

$a \vdots d$ и $a+3 \vdots d$ $\Rightarrow d = 1$ или 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 6 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Пред. $a, b+1$ и $b, a+3$ взаимно просты $\Rightarrow$

$a/(b+1) = b/(a+3)$

$b+1$ и b – взаимно просты

$\Rightarrow a \vdots b \Rightarrow a = b \cdot a'$

$ba'(b+1) = b(ba'+3)$

$\Rightarrow a' = 3 \Rightarrow a = 3b$

т.о. $a \vdots 3 \Rightarrow b+1$ и $b/3$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 3k+1 \\ a = 3(3k+1) = 9k+3 \end{cases}$

$9k+3 < 10^6$

$0 \le k \le 111110$

Всего: 111111 пар

2) НОД $(a, b+1)$ и НОД $(b, a+3) = 3$

$\Rightarrow b+1$ и $b \vdots 3$ противо.

3) НОД $(a, b+1) = 3$

НОД $(b, a+3) = 1$

Опять же как и раньше

$a \vdots b$ $(a = a'b)$

Лист 5 из ____

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 6 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a'b(b+1) = 3b(a'b+3)$

$a'b + a' = 3a'b + 9$

$a' + 9 = 2a'b \Rightarrow 9 \vdots a'$

$d = 1$ или 3 или 9

$a' = 1 \Rightarrow 10 = 2b$, $b = 5$

Получили пару

$a = 5$ $b = 5$

НОК$(5,6) \neq$ НОК$(5,8)$

$a' = 3$ $12 = 6b \Rightarrow b = 2$

$a = 6$ $b = 2$

НОК$(6,3) \neq$ НОК$(2,9)$

$a' = 9$ $18 = 18b \Rightarrow b = 1$

$a = 9$ $b = 1$

НОК$(9,21) \neq$ НОК$(1,12)$

$\Rightarrow$ этот исход не подходит

4) НОД$(a, b+1) = 1$

НОД$(b, a+3) = 3$

$a(b+1) = \dfrac{b(a+3)}{3}$

$3a(b+1) = b(a+3)$

$b = 3b_1$

$a(b+1) = b_1(a+3)$

b_1 – делитель $3 \Rightarrow$

$b+1$ и b_1 – взаимнопросты

$\Rightarrow a \vdots b_2 \Rightarrow a = a_1 b_1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в рамке

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	3	0	6	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a_1 b_1 (3b_1 + 1) = b_1 (a_1 b_1 + 3)$

$3a_1 b_1 + a_1 = a_1 b_1 + 3$

$2a_1 b_1 + a_1 = 3$

$\Rightarrow 3 \vdots a_1 \Rightarrow \underline{a_1 = 1}$ или

$2b_1 + 1 = 3 \Rightarrow b_1 = 1$

$a = 1 \quad b = 3$

НОК $(1, 4) \neq$ НОК $(3, 4)$

$a_1 = 3$

$6b_1 + 3 = 3$

нет $b_1 \in N$

$\Rightarrow$ Ответ: 111 111

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	0	5	4	2	1

Шифр

____

Адрес площадки проведения

Вариант № 1

Фамилия Кириллов

Имя Кирилл

Отчество Олегович

Дата рождения 20.07.2003 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на ____ **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона +7 919 896 35 77 **Подпись** ______

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами, дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Ответ.

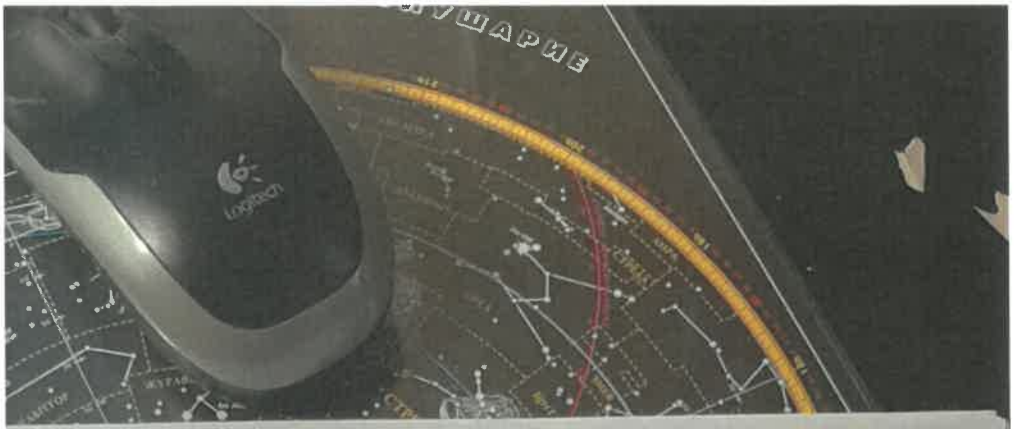
5

$x_2 = 141$

$x_3 = 171$

$x_4 = 313$

Лист 6 из ____



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 5 | 4 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$2\sin 2x + 3 - 3\cos x + 3\sin^2 x - 6\sin x = 0$

$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3(\cos x + 2\sin x) + 3 + \cos^2 x - 1 = 0$

пусть $2\sin x + \cos x = a$, тогда получим квадратное ур-е

$a^2 - 3a + 2 = 0$ $\quad D = 1$

$\left.\begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

1	2	3	4	5	Σ
20	16	20	–	–	56

$\left\{\begin{matrix} 2\sin x + \cos x = 1 \\ 2\sin x + \cos x = 2 \end{matrix}\right. \Rightarrow$

30б

① $2\sin x + \cos x = 1$ пусть $\cos x = t$, тогда

$2\sqrt{1-t^2} + t = 1$

$2\sqrt{1-t^2} = 1 - t \quad |(\,)^2$

$5t^2 - 2t - 3 = 0$ $\quad D = 8^2 \Rightarrow$

$\left[\begin{matrix} t_1 = -0{,}6 \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} \cos x = -0{,}6 \\ \cos x = 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 2\pi k \\ x_2 = \pi + \arccos 0{,}6 + 2\pi k \\ x_3 = \pi - \arccos 0{,}6 + 2\pi k \end{matrix}\right.$

р-м другой случай (см. далее)

② $2\sin x + \cos x = 2$

пусть $\cos x = t$, тогда

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 0 5 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2 (продолжение)

$2\sqrt{1-t^2} = 2-t \quad |\,()^2$

$5t^2-4t=0 \Rightarrow t(5t-4)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=0 \\ t_2=0{,}8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=0{,}8 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ x_2=\frac{3\pi}{2}+2\pi k \\ x_3=\arccos 0{,}8+2\pi k \\ x_4=-\arccos 0{,}8+2\pi k \end{array}\right.$

Ответ:

$x_1=2\pi k$

$x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$x_3=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$?

$x_4=\arccos 0{,}8+2\pi k$

$x_5=-\arccos 0{,}8+2\pi k$

$x_6=\pi+\arccos 0{,}6+2\pi k$

$x_7=\pi-\arccos 0{,}6+2\pi k$

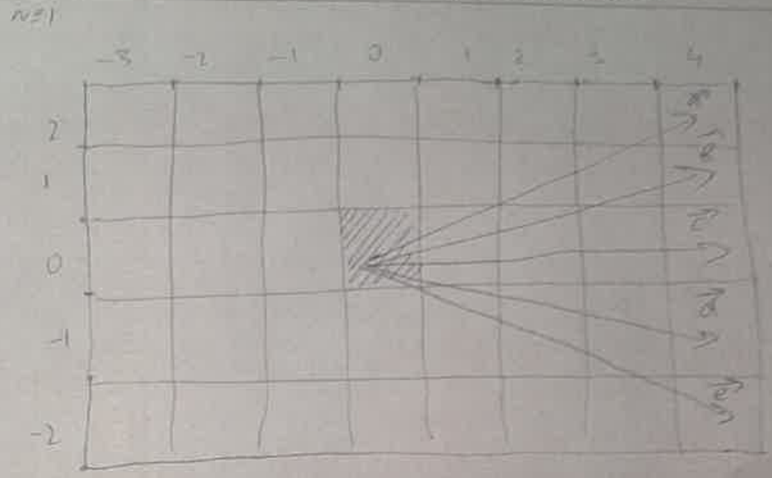
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 0 5 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№1



1) введем систему координат с центром в закрашенной клетке

Тогда сумма ~~...~~ модулей всех векторов этого прямоугольника равна 0

надо найти наименьшую сумму от наименьшую сумму модулей векторов от точки (0,0) до точки (4,0) (4,1) (4,2), (4,-1)(4,

$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|+|\vec{e}| = \vec{f}\{4+4+4+4+4,\ 0+1+2-1-2\}$

$|\vec{f}|=20$

Чтобы сумма была наименьшей, надо убрать 2 вектора. пусть это будут $\vec{a}$ и $\vec{e}$.

$\vec{f}'\{4+4+4;\ 1+0-1\} \Rightarrow |\vec{f}'|=12$

Ответ 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000120 5421

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

расшифруем число $\overline{abc}$

$$\begin{cases} 100a+10b+c \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \\ 100c+10b+a \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ — десятичное представление}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 99a+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \\ 99c+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \end{cases}$$

такое может быть только если

1) $a=c$ или 2) $a+b+c+1=9$ или 3) $a+b+c+1=11$.

1) пусть $a=c$, тогда число имеет вид $\overline{aba}$ $\Rightarrow$

$$\frac{100a+10b+a}{a+b+a+1} = x + \frac{1}{a+b+a+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{101a+10b-1}{2a+b+1} \qquad x \in N.$$

$$x = \frac{81a-11}{2a+b+1} + 10 \Rightarrow \frac{81a-11}{2a+b+1} = x-10$$

$a \in [10, +\infty)$.

1) пусть $a=1 \Rightarrow \frac{70}{3+b} = x-10 \Rightarrow$

$b = \{2, 4, 7\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 0 5 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте правильность, что записано с этой стороны листа

№ 3 (продолжение)

2) пусть $a = 2$ $\Rightarrow \frac{153}{5+b} = \frac{51 \cdot 3}{5+b} = v = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходящих b не существует

3) пусть $a = 3$ $\Rightarrow \frac{232}{b+7} = \frac{2 \cdot 29}{b+7} \Rightarrow$

$b = 1$

4) пусть $a = 4$ $\Rightarrow \frac{313}{9+b}$, 313 число простое $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходящих b не существует

5) пусть $a = 5$ $\Rightarrow \frac{394}{11+b} + \frac{2 \cdot 197}{11+b}$

197 — простое число $\Rightarrow$ подходящих b не существует

6) пусть $a = 6$ $\Rightarrow \frac{475}{13+b}\ \frac{19 \cdot 25}{13+b} \Rightarrow b = 6$

7) пусть $a = 7 \Rightarrow \frac{556}{15+b} = \frac{4 \cdot 139}{15+b}$

139 — простое число $\Rightarrow$ нет подходящих b

8) $\frac{637}{17+b} = \frac{7 \cdot 91}{17+b} = \frac{13 \cdot 49}{17+b}$

подходящих b не существует

9) пусть $a = 9$ $\Rightarrow \frac{718}{19+b} = \frac{2 \cdot 359}{19+b}$

359 — простое число $\Rightarrow$ подходящих b не существует.

(см. далее

Лист 5 из ____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 0 5 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3 (продолжение)

Таким образом получаем

1) 121
2) 141
3) 171
4) 313
5) 666

2) пусть $a+b+c+1=9$, тогда

$$\frac{100a+10b+c}{9} = x + \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11a+b+1-\frac{1}{9} = x+\frac{1}{9}$$

$a; b; c; x \in N \Rightarrow$ такое невозможно

3) пусть $a+b+c+1=11$, тогда

$$\frac{100a+10b+c}{11} = x+\frac{1}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a+1+\frac{9b-1}{11} = x+\frac{1}{11}$$

возможно, когда $9b-1 \vdots 11$

$9b-1 \equiv_{11} 0 \Rightarrow 9b \equiv_{11} 1 \Rightarrow b = 11k$.

противоречие, т.к. $b \leq 9$.

Таким образом Ответ: $x_1 = 121$ $x_5 = 666$
$x_2 = 141$
$x_3 = 171$
$x_4 = 313$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ПРОКТОРИНГ | МА00011987 21

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 1

Фамилия БАРОЦКИЙ

Имя ГЛЕБ

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 03.02.2003 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на ____ листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона +79105934?593 Подпись [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами, дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

11987, 11кл

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

математика

от (Ф.И.О.)

Барзукий Глеб Алексеевич

Адрес площадки проведения

дистанционный формат

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 5 (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

задача №5: рассмотрены частные случаи, решение начато

О себе сообщаю:

+79089342583 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

bark574@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 07.04.2021 21:27

Подпись участника Олимпиады: Гр.

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 16:00

Комментарии членов апелляционной комиссии: Продвижений для рассмотрения случая n×n нет — 0 баллов (решение начато, но продвижений нет).

Результат рассмотрения апелляции:

Выставленные баллы оставить без изменений

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. / [подпись]

Шалько Ю.В. / ЮШа

Шуплев А.В. / [подпись] /

/ /

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 9 | 8 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$3 - 3\cos^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + 3 = 0$

$\frac{9}{2} - 3\cos x - \frac{3\cos^2 x}{2} - 6\sin x + 4\cos x\sin x + \frac{3\sin^2 x}{2} = 0$

$\frac{9}{2} - \frac{3\cos^2 x}{2} - 6\sin x + \frac{3\sin^2 x}{2} + (4\sin x - 3)\cos x = 0$

$(-3 + 3\cos x + \sin x)(3 + \cos x - 3\sin x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 3 + \cos x - 3\sin x = 0 \ (1) \\ -3 + 3\cos x + \sin x = 0 \ (2) \end{array}\right.$ 1) пусть $t = tg\frac{x}{2}$;

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	0	60

30

$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$;

$3 + \frac{1}{t^2+1} - \frac{6t}{t^2+1} - \frac{t^2}{t^2+1} = 0$

$\frac{2(t^2 - 3t + 2)}{t^2+1} = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = arctg(2) + \pi n, n \in Z \\ tg\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = 2arctg(2) + 2\pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$

2) пусть $t = tg\frac{x}{2}$; $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$

$-3 + \frac{3}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1} - \frac{3t^2}{t^2+1} = 0$, $\frac{-2(3t^2 - t) = 0}{t^2+1} \Rightarrow$

~~x+t~~ $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = 0 \\ tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi n, n \in Z \\ \frac{x}{2} = arctg(\frac{1}{3}) + \pi n, n \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA0001198721

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n,\ n\in Z \\ x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$$

ответ $2\operatorname{arctg}(2) + 2\pi n,\ n\in Z;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z;$ $2\pi n,\ n\in Z,\ 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n,\ n\in Z$

№5

$n\geq 2$

2×2

$k=2;$

3×3

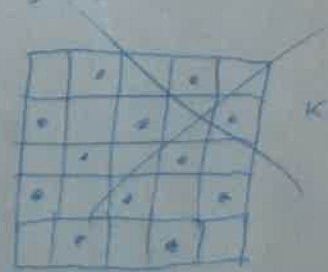
$k=5$

4×4

$k=8.$

$k=2,\ k=5,\ k=8,$

5×5



$k=12$

$k=12$

ответ 12, 5, 8, 2

продвижений для случая $n\times n$ нет.

№3

Заметим, что 140 : 7 = 20, если возьмём 141 : 7 (первая цифр увелич на 1), 1+4+1 = 6+1 = 7;

141 : 7 = 20 (ост 1), a = 1; ~~рассмотрим все~~

рассмотрим все случаи $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$,

обозначим $\overline{abc} \le 999$, и $\overline{cba} \le 999$; 111 : 4 = 27 (ост 3);

121 : 5 – (ост 1) => 121 : 5 = 24 (ост 1), 1+2+1 = 4+1 = 5 – верно

131 : 6 – (ост 5)

141 : 7 = 20 (ост 1), 1+4+1 = 6+1 = 7 – верно

151 : 8 – (ост 7)

161 : 9 – (ост 8)

171 : 10 = 17 (ост 1), 1+7+1 = 9+1 = 10 – верно

181 : 11 – ост 5

191 : 12 – ост 11

202 : 5 – ост 2

212 : 6 – ост 2

222 : 7 – ост 5

232 : 8 – ост 0

242 : 9 – ост 8

252 : 10 – ост 2

262 : 11 – ост 2

272 : 12 – ост 8

282 : 13 – ост 9

292 : 14 – ост 12

303 : 7 – ост 2

313 : 8 – ост 1 = 1

313 : 8 = 39 (ост 1), 3+1+3 = 8 – верно

323 : 9 – ост 8

333 : 10 – ост 3

343 : 11 – ост 2

353 : 12 – ост 5

363 : 13 – ост 12

373 : 14 – ост 9

383 : 15 – ост 8

393 : 16 – ост 9

404 : 9 – ост 8

MA 000 1198721

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

414 : 10 - ост 4
424 : 11 - ост 6
434 : 12 - ост 2
444 : 13 - ост 2
454 : 14 - ост 6
464 : 15 - ост 14
474 : 16 - ост 10
484 : 18 - ост 8
494 : 18 ост 8
505 : 11 - ост 10
515 : 12 - ост 11
525 : 13 - ост 5
535 : 14 - ост 3
545 : 15 ост 5
555 : 16 - ост 14
565 : 17 - ост 4
575 : 18 - ост 17
585 : 19 - ост 15
595 : 20 - ост 15
606 : 13 - ост 8
~~646 : 14 - ост~~ 14
616 : 15 - ост 11
616 : 14 - ост 0
626 : 15 - ост 11
636 : 16 - ост 12
646 : 17 - ост 0
656 : 18 - ост 8

666 : 19 - ост 1 = 1
666 : 19 = 35 (ост 1),
6+6+6+1 = 18+1 = 19 - верно
676 : 20 - ост 16
686 : 21 - ост 14
696 : 22 - ост 14
707 : 15 - ост 2
717 : 16 - ост 13
727 : 17 - ост 13
737 : 18 - ост 17
747 : 19 - ост 12
767 : 21 - ост 19
757 : 20 - ост 17
777 : 22 - ост 7
787 : 23 - ост 12
797 : 24 - ост 9
808 : 17 - ост 9
818 : 18 - ост 8
828 : 19 - ост 19
838 : 20 - ост 18
848 : 21 - ост 8
858 : 22 - ост 2
868 : 23 - ост 17
878 : 24 - ост 14
888 : 25 - ост 13
898 : 26 - ост 14
909 : 19 - ост 16
919 : 20 - ост 19
929 : 21 - ост 5
939 : 22 - ост 15
979 : 26 - ост 13
999 : 21 - ост 17
949 : 23 - ост 6
959 : 24 - ост 23
969 : 25 - ост 19
989 : 27 - ост 17

Ответ: 111, 141, 171, 333, 666.

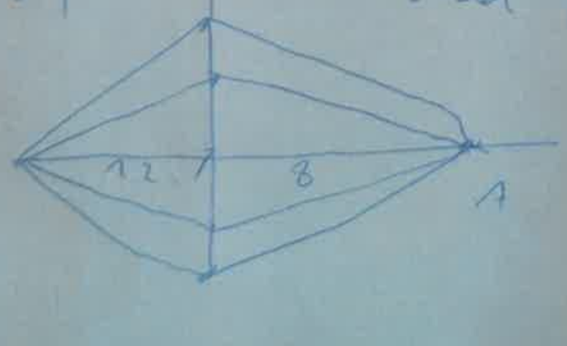
вариант № 1 | M A 0 0 0 1 1 9 8 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

Заметим, что итоговая сумма векторов - сумма всех векторов, кроме двух,

сумма всех векторов - сумма пяти и всех остальных; но суммы остальных равны 0, т.к. существуют противоположные вектора, сумма тех пяти - вектор длины вправо, очевидно, что сумма любых (10) двух векторов не более в единицу, мы должны вычесть из



длины вектора длиной 10 еще 2 каких-либо, очевидно, что это будут вектора длины 1 таким образом, наша длина - 12

ответ: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	7	3	1	2	1

____

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Девяткова

Имя Полина

Отчество Сергеевна

Дата рождения 16.07.2003 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона 8 963 260 33 78 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

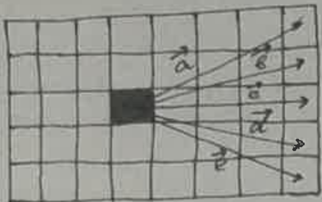
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 7 | 3 | 1 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№1

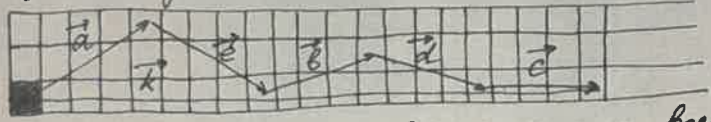


В прямоугольнике 5×7 с центром в черной клетке для любого вектора, проведенного из центра черной клетки в центр другой клетки, найдется противоположный вектор той же длины, направленный в противоположную сторону.

Сумма этих двух противоположнонаправленных векторов будет равна нулю.

Так сумма всех векторов в прямоугольнике 5×7 с центром в черной клетке будет равна нулю.

Сумма длин всех оставшихся векторов:



длина результатирующего вектора $\vec{k}$ равна 20.

т.к. по условию необходимо наименьшее значение длины суммы всех векторов без двух из оставшихся пяти, необходимо убрать два с наибольшей суммой длин:

$|\vec{c}|=4$

$|\vec{a}|+|\vec{e}|=8$

$|\vec{b}|+|\vec{d}|=8$

$\Rightarrow$ убираем вектора $\vec{a}$ и $\vec{e}$, тогда сумма длин оставшихся будет равна $20-8=12$

Ответ: 12

№2 $3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0$ $\qquad 3=3\sin^2x+3\cos^2x$

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cos x+\sin^2x+2\sin^2x+\cos^2x+2\cos^2x=0$

$(4\sin^2x+4\sin x\cos x+\cos^2x)+2(\sin^2x+\cos^2x)-3\cos x-6\sin x=0$

$(2\sin x+\cos x)^2-3(2\sin x+\cos x)+2=0$

1	2	3	4	5	Σ
20	16	8	20	—	64

Пусть $2\sin x+\cos x=t$

$t^2-3t+2=0$

$D=9-8=1$

$t_1=\frac{3+1}{2}=2$

$t_2=\frac{3-1}{2}=1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x+\cos x=1 & (1) \\ 2\sin x+\cos x=2 & (2) \end{array}\right.$

3об

(1) $2\sin x+\cos x=1$ введём вспомогательный угол t:

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt5$

$\sin t=\frac{1}{\sqrt5}$, $\cos t=\frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin x+\frac{1}{\sqrt5}\cos x=\frac{1}{\sqrt5}$

$t_1=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l,\ l\in z$

$t_2=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l,\ l\in z$

$\sin(x+t)=\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{ll} x+t=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in z & (*) \\ x+t=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in z & (**) \end{array}\right.$

подставим t в $(*)$ и $(**)$:

t в (*) $x+t=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z$

t_1: $x+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z,\ l\in Z$

$x=2\pi k-2\pi l,\ k,l\in Z$

$x=2\pi(k-l),\ k,l\in Z \Rightarrow k-l=m,\ m\in Z$

$x=2\pi m,\ m\in Z$

t_2: $x+\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\ k,l\in Z\quad k-l=m,\ m\in Z$

$x=2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\pi+2\pi m,\ m\in Z$

t в (**) $x+t=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z$

t_1: $x+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z,\ l\in Z\quad k-l=m,\ m\in Z$

$x=\pi-2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi m,\ m\in Z$

t_2: $x+\cancel{\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}}+2\pi l=\cancel{\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}}+2\pi k,\ k,l\in Z$

$x=2\pi(k-l),\ k,l\in Z$

$x=2\pi m,\ m\in Z$

(2) $2\sin x+\cos x=2$

$c=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt5$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin x+\frac{1}{\sqrt5}\cos x=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(x+t)=\frac{2}{\sqrt5}$

введём вспомогательный угол t:

$\sin t=\frac{1}{\sqrt5}\quad \cos t=\frac{2}{\sqrt5}$

$t_1=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l,\ l\in Z$

$t_2=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l,\ l\in Z$

$$\left[\begin{array}{ll} x+t=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z & (*)\\ x+t=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z & (**)\end{array}\right.$$

подставим t в (*) и (**):

t в (*): $x+t=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z$

t_1: $x+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k,l\in Z$

$x=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi m,\ m\in Z$

$k\in Z$
$l\in Z$
$k-l=m,\ m\in Z$

t_2: $x+\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z$

$x=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\pi+2\pi m,\ m\in Z$

t в (**): $x+t=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z$

t_1: $x+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z$

$x=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi m,\ m\in Z$

t_2: $x+\cancel{\pi}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l=\cancel{\pi}-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi k,\ k\in Z$

$x=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi m,\ m\in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

Н	А	0	0	0	1	2	7	3	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: $x = 2\pi m, m\in Z$

$x = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \pi + 2\pi m, m\in Z$

$x = \pi - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m, m\in Z$

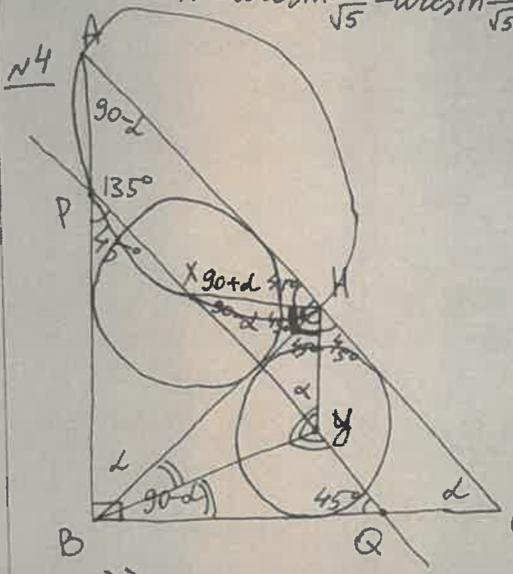
$x = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m, m\in Z$

$x = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \pi + 2\pi m, m\in Z$

$x = \pi - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m, m\in Z$

$x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi m, m\in Z$

№4



$BH = a \quad S_{BPQ} = ?$

1) рассмотрим $\triangle ABH$ и $\triangle BHC$: $\angle AHB = \angle CHB = 90°$, $\angle HAB = \angle HBC = 90° - \alpha$, $\angle HBA = \angle HCA = \alpha \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle BHC$ по трём углам.

2) центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис. HX и HY — биссектрисы из прямого угла в $\triangle AHB$ и $\triangle CHB \Rightarrow$
$\frac{AH}{HB} = \frac{HB}{CH} = \frac{BA}{BC} = \frac{HX}{HY}$ и $\angle AHX = \angle XHB = \angle BHY = \angle CHY = 45° \Leftrightarrow \angle XHY = 90°$

3) $\angle ABC = \angle XHY = 90°$, $\frac{AB}{BC} = \frac{HX}{HY} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HXY$

4) $\Rightarrow \angle BCH = \angle HYX = \alpha$, $\angle BAH = \angle HXY = 90° - \alpha$, тогда $\angle HXP = 180° - \angle HXY = 180° - 90° + \alpha = 90° + \alpha$ (как смежные).

5) рассмотрим ~~AB~~ $APXH$: $\angle APH + \angle PXH = 90° + \alpha + 90° - \alpha = 180° \Rightarrow APXH$ — вписанный четырехугольник $\Rightarrow \angle XPA = 180° - \angle XHA = 180° - 45° = 135°$, тогда $\angle BPX = 180° - \angle XPA = 180° - 135° = 45° \Rightarrow \triangle BPQ$ — равнобедр. прямоуг.
$\Rightarrow S_{BPQ} = \frac{1}{2} BP \cdot BQ = \frac{1}{2} BQ^2$

6) рассмотрим $\triangle BHY$ и $\triangle BQY$: BY — общая сторона, $\angle HBY = \angle QBY$ (т.к. BY — биссектр.) $\angle BHY = \angle BQY = 45° \Rightarrow \angle BYQ = \angle BYH \Rightarrow \triangle BHY = \triangle BQY$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.
В равных треугольниках соотв. элементы равны $\Rightarrow BH = BQ = a$

7) $S_{BPQ} = \frac{1}{2} BQ^2 = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	7	3	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке справа

№3 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$$\begin{cases} 100a + 10b + c = (a+b+c+1)k + 1 \\ 100c + 10b + a = (a+b+c+1)k + 1 \end{cases}$$

1) $a = c$

$101a + 10b = (2a + b + 1)k + 1$

$101a + 10b - 1 = (2a + b + 1)k$

$10(2a + b + 1) + 81a - 11 = (2a + b + 1)k$

$81a - 11 = (2a+b+1)k - (2a+b+1)\cdot 10$

$81a - 11 = (2a + b + 1)(k - 10)$

правая часть $\vdots\, (2a+b+1) \Rightarrow (81a-11) \vdots (2a+b+1)$ (1)

т.к. a, b и k – целые, то

перебор возможных вариантов для $a = 1, \dots, 9$ ($a \neq 0$, иначе $\overline{abc}$ не трёхзнач.)

при этом должно выполняться (1)

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2, 4, 7	–	1	–	–	6	–	–	–

$a = c \Rightarrow$ найдем k для каждого варианта

$a = 1$	$a = 1$	$a = 1$	$a = 3$	$a = 6$
$b = 2$	$b = 4$	$b = 7$	$b = 1$	$b = 6$
$k = 24$	$c = 1$	$c = 1$	$c = 3$	$c = 6$
$c = 1$	$k = 20$	$k = 17$	$k = 39$	$k = 35$

2) $a \neq c$

$100a + 10b + c = 99a + 9b + (a + b + c + 1) - 1$

$$\begin{cases} 100a + 10b + c = (a+b+c+1)k + 1 \\ 100c + 10b + a = (a+b+c+1)k + 1 \end{cases}$$

$99a + 9b - 2 = (a + b + c + 1)(k - 1)$

правая часть кратна $a+b+c+1 \Rightarrow$ ~~$99(a-c) \neq 0$~~

левая часть тоже должна быть кратна $a+b+c+1$

$a + b + c + 1 \leq 28$ т.к. a, b, c – цифры в числе

~~[illegible]~~

Ответ: 121, 141, 171, 313, 666

А 90-2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	2	7	8	2	1

Адрес площадки проведения ________ Шифр

Вариант № 1

Фамилия Стрижина

Имя Анастасия

Отчество Михайловна

Дата рождения 12.09.2003 Класс 11

Предмет математика

Работа выполнена на 6 листах Дата выполнения работы 6.03.21.

Номер телефона 89055324054 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

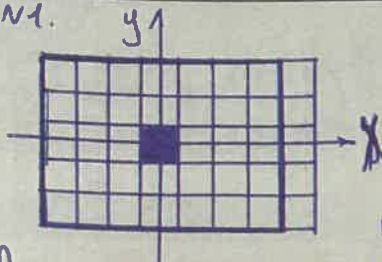
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	2	7	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1.



1) Введу прямоугольную систему координат, центром которой будет черная клетка с координатами (0;0). Черная клетка является центром прямоугольника 7×5. Если из точки (0;0) направить векторы одновременно в центры всех клеток прямоугольника 7×5, то для каждого вектора найдется такой же вектор с противоположными по знаку координатами. Поэтому их сумма будет равна нулю. Для получения наименьшей суммы нужно оставить две свободные клетки, поэтому будем оставлять таковые в прямоугольнике 1×5 располагающемся справа

2) Обозначу векторы в крайнем правом столбце за: (4;1), (4;2), (4;0), (4;-1), (4;-2). Если убрать какие-то два из них, то оставшиеся векторы имеют координаты (3;4; x+y+z), где $x,y,z \in \{0;1;-1;-2\}$.

Длина вектора, образованного тремя оставшимися клетками равна $\sqrt{12^2+(x+y+z)^2}$. Длина минимальна, если минимален корень, а значит минимальна $(x+y+z)^2$.

Эта сумма будет равна 0 при $x=0$, $y=1$, $z=-1$, поэтому наименьшая длина суммы всех полученных векторов равна $\sqrt{12^2}=12$

Ответ: 12.

1	2	3	4	5	Σ
20	16	—	20	6	62

ЗА

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 2 7 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

1) Обозначу $m = tg\frac{x}{2}$

Проверим, является ли $\cos\frac{x}{2} = 0$ корнем

$\cos\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \qquad x = \pi + 2\pi n \quad n \in Z$

Подставим в исходное уравнение

$3 \cdot 0 - 3(-1) - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 = 0 \qquad 6 \neq 0$

Значит, $x = \pi + 2\pi n$ не входит в ответ.

2) $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2m}{1+m^2}$,

$\cos x = \frac{1-m^2}{1+m^2}$

Подставлю в исходное уравнение:

$3 \cdot \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right) - 6 \cdot \frac{2m}{1+m^2} + 4 \cdot \frac{2m}{1+m^2} \cdot$

$\cdot \frac{1-m^2}{1+m^2} + 3 = 0$

Домножу на $(1+m^2)^2$

$3 \cdot 4m^2 - 3(1-m^2)(1+m^2) - 12m(1+m^2) + 8m(1-m^2) +$

$+ 3(1+m^2)^2 = 0$

$12m^2 - 3 + 3m^4 - 12m - 12m^3 + 8m - 8m^3 + 3 + 6m^2 + 3m^4 = 0$

$6m^4 - 20m^3 + 18m^2 - 4m = 0$

$3m^4 - 10m^3 + 9m^2 - 2m = 0$

$m(3m^3 - 10m^2 + 9m - 2) = 0$

$m = 0$

$tg\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = \pi n$

$x = 2\pi n, n \in Z$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$3m^3-10m+9m-2=0$

	3	-10	9	-2
1	3	-7	2	0

$(m-1)(3m^2-7m+2)=0$

$D=49-4\cdot6=25$

$\left[\begin{array}{l} m=\frac{7+5}{6}=2 \\ m=\frac{7-5}{6}=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

$tg\frac{x}{2}=1$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

$tg\frac{x}{2}=2$

$x=2arctg2+2\pi l, l\in Z$

$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$

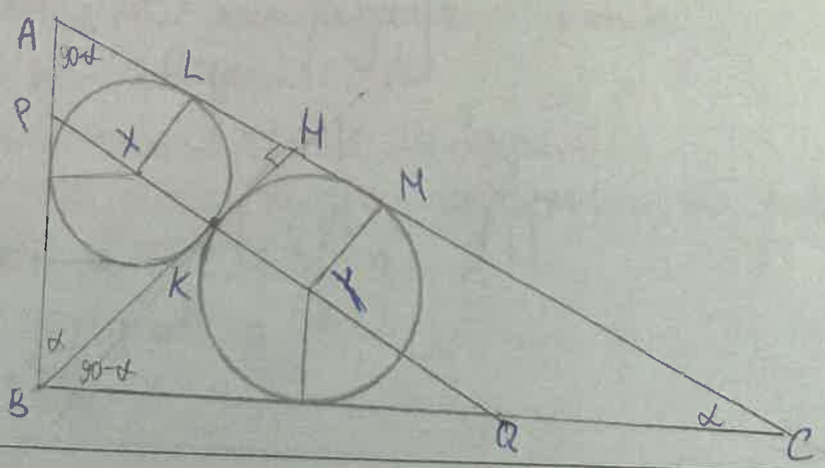
$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi t, t\in Z$

Ответ: $x=2\pi n, n\in Z$

$x=2arctg2+2\pi l, l\in Z$

$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi t, t\in Z$

№4.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 2 7 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Пусть $\angle ACB = \alpha$, $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$

В $\triangle ABH$ $\angle ABH =$ [redacted] α

В $\triangle BHC$ $\angle CBH = 90 - \alpha$

2) $\triangle ABH \sim \triangle BHC$, т.к.

$\angle BAH = \angle CBH = 90 - \alpha$

$\angle ABH = \angle BCH = \alpha$

$\angle BHA = \angle BHC = 90^\circ$

3) Из подобия

$\frac{HB}{AH} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow HB^2 = AH \cdot CH$

$a^2 = AH \cdot CH$

4) $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BHC$

Распишу стороны через α

$BC = \frac{a}{\sin\alpha}$,

$AH = BH \cdot tg\alpha$, $HC = \frac{a}{tg\alpha}$

$AB = \frac{a}{\cos\alpha}$

5) Пусть радиус окружности с центром $Y = R$

Тогда $KY = YM$ как радиусы

6) $BH \perp AC$, т.к. явл. высотой

$YM \perp AC$ как радиус, тогда

$KHYM$ – квадрат

Аналогично $XLHK$ – квадрат

Получаем, что радиусы окружностей равны

7) $BK = BH - KH = a - R$

8) т. синусов $\triangle BKQ$

$\frac{BQ}{\sin 90} = \frac{BK}{\sin\alpha} = \frac{KQ}{\sin(90-\alpha)}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{a-R}{\sin 90} = \frac{QK}{\sin\alpha} \Rightarrow QK = a - R$

$QK = BK \Rightarrow \triangle BKQ$ – р/б.

$\angle KBQ = \angle KQB = 45^\circ = \alpha$

9) Теперь найду радиус R окружности $\triangle BHC$

$R = \frac{2S_{BHC}}{BH+HC+BC}$

$S_{BHC} = \frac{1}{2}\cdot a \cdot \frac{a}{\cancel{tg\alpha}} = \frac{a^2}{2}$

$BH + HC + BC = a + a + a\sqrt{2} = 2a + a\sqrt{2}$

$R = \frac{2\cdot\frac{a^2}{2}}{2a+a\sqrt{2}} = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$

10) Найду стороны $\triangle ABC$

$AB = \frac{a}{\cos\alpha} = \sqrt{2}a$

$BC = \frac{a}{\sin\alpha} = \sqrt{2}a$

$AC = \frac{a}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = 2a$

11) $BK = a - R = a - \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{2a+\sqrt{2}\cdot a - a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$PQ = \frac{a-R}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot 2 = \sqrt{2}\cdot a$

12) $S_{BPQ} = \frac{1}{2}\cdot BK\cdot PQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot a = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

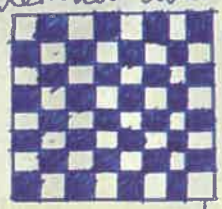
Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 7 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N5.

1) Мы можем расставить фишки в клетки в шахматном порядке 2-мя вариантами. Пусть квадратная доска имеет черные и белые цвета, тогда можно поставить фишки на все белые клетки или на все черные клетки.



Тогда получаем:

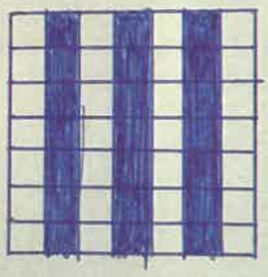
если n – четное, то $k = \frac{n}{2}$

если n – нечетное, то $k = \frac{n+1}{2}$ или $k = \frac{n-1}{2}$

в зависимости на черных или белых клетках стоят фишки.

2) Если n нечетное, то мы можем поставить фишки на вертикальных полосах с четными номерами.

Тогда $k = \frac{n-1}{2}$



Ответ: $k = \frac{n}{2}$ при четном числе n.

$k = \frac{n+1}{2}$; $k = \frac{n-1}{2}$ при нечетном числе n

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

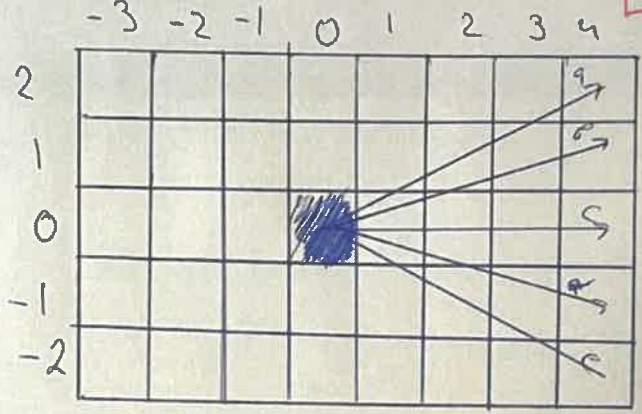
Н	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

1	2	3	4	5	Σ
20	16	20	—	2	58



Решение:

1) введем систему координат, где закрашенный квадрат имеет координаты: (0; 0; 0), тогда сумма длин векторов в прямоугольнике с координатами: (-3; 2); (3; 2), (-3; -2) (3; -2) равняется 0 => Надо найти сумму длин от точки (0; 0), до точек (4; 2) (4; 1) (4; 0) (4; -1) (4; -2);

2) $\bar a\{4;2\} + \bar b\{4;1\} + c\{4;0\} + d\{4;-1\} + e\{4;-2\} = \bar X\{x_a + x_b + x_c + x_d + x_e;\ y_a + y_b + y_c + y_d + y_e\}$; $\bar x\{20;0\}$ => $|\bar X| = 20$, чтобы сумма была наименьшей надо искл. 2 вектора: a c или b d =>

=> $\bar X_1\{x_b + x_c + x_d;\ y_b + y_c + y_d\}$ $\bar X_1\{12;0\}$ $|\vec X_1| = 12$

$\bar X_2\{x_c + x_c + x_e;\ y_a + y_c + y_e\}$ $\bar X_2\{12;0\}$ $|\bar X_2| = 12$

Ответ: 12

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	1	6	1	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$3\sin^2x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$4\sin^2x + \cos^2x - 1 - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + 3 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(\cos x + 2\sin x) + 2 = 0$

Сделаем замену: $2\sin x + \cos x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$D = 1$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$; $t_1 = 2$ $t_2 = 1$ =>

$2\sin x + \cos x = 2$

Пусть $\cos x = t$

$2\sqrt{1-t^2} + t = 2$

$4(1-t^2) = 4 - 4t + t^2$

$5t^2 - 4t = 0$

$t = 0$ $t = \frac{4}{5}$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k$

$2\sin x + \cos x = 1$

$2\sqrt{1-t^2} + t = 1$

$4(1-t^2) = 1 - 2t + t^2$

$5t^2 - 2t - 3 = 0$

$D = 64$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{10}$; $t_1 = 1$ $t_2 = -\frac{3}{5}$

$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2\pi k$

$\begin{cases} \cos x = -\frac{3}{5} \\ \sin x = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$

Ответ: $x = 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k$; $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$

$k \in Z$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N3

$$\begin{cases} 100a+10b+c \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \\ 100c+10b+c \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 100a+10b+c-1 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \\ 100c+10b+a-1 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 99a+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \\ 99c+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \end{cases} \Rightarrow$$

выполняется, когда

$a=c$; $a+b+c+1=9$

$a+b+c+1=11$

1) Рассмотрим случай, когда $a=c$

$\overline{aba}$ - подходят такие числа $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{100a+10b+a}{a+b+a+1} = x + \frac{1}{c+b+a+1} \Rightarrow \frac{101a+10b+-1}{2a+b+1} = x$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1} + 10 = x$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1} = x-10 \qquad x \geq 10$$

• Рассмотрим случай $a=1$

$$\frac{70}{3+b} = x-10 \to \begin{matrix} b=2 \\ b=4 \\ b=7 \end{matrix}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

• Рассмотрим случай $a=2$

$\frac{153}{5+b} = \frac{51\cdot 3}{5+b} = x \neq -10$ нет таких $b \le 9$

• Рассмотрим случай $a=3$

$\frac{232}{b+7} = \frac{8\cdot 29}{b+7} \Rightarrow b=1$

• Рассмотрим случай $a=4$

$\frac{313}{9+b}$, нету таких b, т.к. 313 простое число

• Рассмотрим случай $a=5$

$\frac{394}{11+b} = \frac{2\cdot 197}{11+b}$, нету т.к. 197 – простое

• Рассмотрим случай $a=6$

$\frac{475}{13+b} = \frac{19\cdot 25}{13+b} \Rightarrow b=6$

• Рассмотрим случай $a=7$

$\frac{556}{15+b} = \frac{4\cdot 139}{15+b}$ т.к. 139 – простое, то b нету

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

• Рассмотрим случай $a=8$

$\frac{637}{17+b} = \frac{7\cdot 91}{17+b} = \frac{7\cdot 7\cdot 13}{17+b}$ нет таких

• Рассмотрим $a=9$

$\frac{718}{19+b} = \frac{2\cdot 359}{19+b}$ нет таких, т.к. 359 - простое

2) Рассмотрим случай $a+b+c+1=9$

$\frac{100a+10b+c}{9} = x+\frac{1}{9}$

$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{9} = x+\frac{1}{9}$

$11a+b+1-\frac{1}{9} = x+\frac{1}{9}$

противоречие, т.к. $a, b, c, x \in \mathbb{Z}$

3) $a+b+c+1=11$

$\frac{100a+10b+c}{11} = x+\frac{1}{11}$

$9a+1+\frac{9b-1}{11} = x+\frac{1}{11}$

$9b-1 \underset{11}{\equiv} 0$

$9b \equiv 1$

$b=11k$, $b\leq 9$ - противоречие

Ответ: $x\ \{121; 141; 171; 313; 666\}$

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	1	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Ответ: для четного n: $k = \frac{n^2}{2}$

для нечетного n: $k = \frac{n(n-1)}{2}$; $k = \frac{n(n+1)}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	0	9	8	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия КОТОВ

Имя СТЕПАН

Отчество Сергеевич

Дата рождения 22.09.2003 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 6 листах Дата выполнения работы 6.03.2021

Номер телефона 89253887112 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами, дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Вариант № 1 MA0001269821

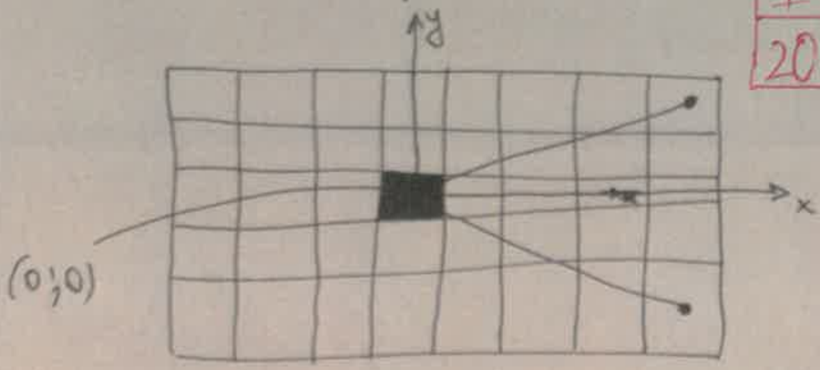
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

300

Вопрос №1.



Введём систему координат, как показано на рисунке и просуммируем все вектора, тогда получится вектор с координатами (20;0) (все вектора, кроме крайних правых компенсируются).

Вычитать из этой суммы нужно такие два вектора, чтобы они как можно сильнее уменьшили координату по X (и, по возможности, не изменили координату по y), заметим, что сумма двух векторов дает по „X" 8, а по „y" – 0 (при этом больше 8 по „x" получить нельзя, так как 4 – максимальная координата), значит минимальная длина равна 12.

+

Ответ: 12.

B

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А 0 0 0 1 2 0 9 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос №2.

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$$

$\cos x + 2\sin x = t$

Тогда:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

$D = 9 - 8 = 1$

$t_1 = \frac{3+1}{2} = 2$

$t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x + 2\sin x = 1 \\ \cos x + 2\sin x = 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \arccos\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{1}{\sqrt5} \\ \cos\left(x - \arccos\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\cdot\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \\ x = 2\pi k \\ x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \\ x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\cdot\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \\ x = 2\pi k \\ x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \\ x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}$$

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0001209821

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос №3.

Перепишем числа в десятичном виде, тогда

$\frac{100a+10b+c-1}{a+b+c+1}$ - целое и $\frac{100c+10b+a-1}{a+b+c+1}$ - тоже целое, тогда ~~тоже~~ и их разность

$\frac{99a-99c}{a+b+c+1} = \frac{99(a-c)}{a+b+c+1}$ - будет целым числом.

Заметим и то, что $a-c < a+b+c+1$, тогда числитель будет делиться на знаменатель только в тех случаях, когда $a+b+c+1$ содержит делитель 99 или $c-a=0$, тогда поделится всегда. При этом $\frac{100c+10b+a-1}{a+b+c+1} =$

$= 1 + \frac{99c+9b-2}{a+b+c+1}$ и $\frac{100a+10b+c-1}{a+b+c+1} = 1 +$

$+ \frac{99a+9b-2}{a+b+c+1}$. Значит $\frac{99a+9b-2}{a+b+c+1}$ - целое,

и его числитель не делится на 9 или на 3, значит и знаменатель не делится, отсюда

$a+b+c+1 = 11$ или $a+b+c+1=22$

(больше быть не может, так как цифры не превосходят 9). Тогда в первом варианте: $\frac{100a+10b+c-1}{a+b+c+1} = \frac{99a+9b+9}{11} =$

Лист 3 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000120982 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос №3. продолжение

$= 9a + \frac{9b+9}{11}$, значит, чтобы они были целыми дробь $\frac{9b+9}{11}$ — целая (так как числитель делится на 9, это возможно только при $b = 10$, а это не цифра). Во втором:

$$\frac{100a+10b+c-1}{a+b+c+1} = \frac{99a+9b+20}{11},$$ значит, чтобы они были целыми дробь $\frac{9b+20}{11}$ — целая (перебирая все „b" от нуля до 9, получаем, что таких значений нет).

~~Ответ: таких чисел нет.~~

При $c-a=0$ получим, что $\frac{101a+10b-1}{2a+b+1}$ — целое, значит $\frac{81a-11}{2a+b+1}$. Переберем значения $a = 1, 2, 3 \ldots, 9$, получим: $\frac{70}{3+b}$; $\frac{151}{5+b}$; $\frac{232}{7+b}$; $\frac{313}{9+b}$; $\frac{394}{11+b}$; $\frac{475}{13+b}$; $\frac{556}{15+b}$; $\frac{637}{17+b}$; $\frac{718}{19+b}$ и исследуем делители данных чисел (первое будет целым при $b = 2; 4; 7$), (второе не будет, так как 151 — простое), (третье при $b = 1$), (четвертое не будет, так как 313 — простое), (пятое не будет, так как $394 = 2 \cdot 197$), (шестое при $b = 6$), (седьмое не будет, так как $556 = 4 \cdot 139$), (восьмое не будет, так как $637 = 49 \cdot 13$), (девятое не будет, так как $718 = 2 \cdot 359$)

Ответ: 121; 141; 171; 313; 666.

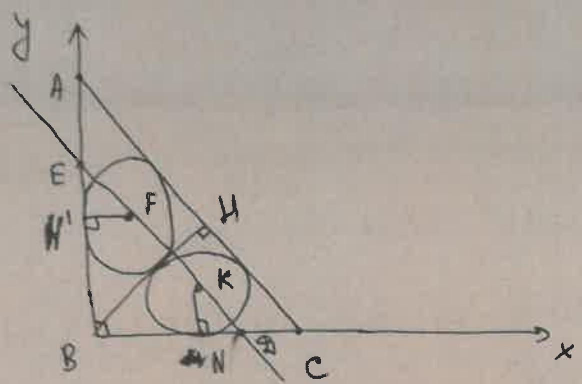
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000120982 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос №4.



Заметим, что $\frac{EH'}{H'F} = \frac{KD}{ND}$ (поворот плюс гомотетия), значит $tg\angle E$ должен быть равен $tg\angle D$, а так как BED - прямоугольный, то эти углы должны быть равны в сумме 90, значит $tg\, x = tg(90^\circ - x) = ctg\, x \Rightarrow x = 45^\circ$, тогда $BE = BD = BH$, так как каждый из этих отрезков состоит из касательной к окружности плюс радиус ($H'F = r$), значит $\triangle BED$ - равнобедренный со стороной «a» и его площадь: $\frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00012098 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа

Вопрос №5

Для n - чётных всё просто, и мы можем замостить таблицу клетками 2×2, в каждой из которых должно быть ровно 2 фишки, в итоге мы получим $\frac{n^2}{2}$ фишек. Пример достижения, если поставить фишки в шахматном порядке. Тогда любой квадрат 2×2 содержит 2 фишки. Для квадрата с нечётной стороной варианты с шахматной раскраской подойдут. Тогда достигается значение $\frac{n^2-1}{2}$ и $\frac{n^2+1}{2}$ (если раскрасить все черные или все белые клетки, возможен и вариант с $\frac{n^2+n}{2}$ фишками и $\frac{n^2-n}{2}$ фишками, если поставить фишки на все столбцы через 1. Можно получить и все целые значения между $\frac{n^2-n}{2}$ и $\frac{n^2-1}{2}$, если освобождать клетки одной диагонали и ставить в них фишки через одну). Аналогично со значен. от $\frac{n^2+1}{2}$ до $\frac{n^2+n}{2}$. Значит возможны все варианты от $\frac{n^2-n}{2}$ до $\frac{n^2+n}{2}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Дома с использованием системы прокторинга

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	2	3	2	7	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия СТРИГАЛЕВ

Имя НИКИТА

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 04.12.2003 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 10 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.21

Номер телефона +79185548799 **Подпись**

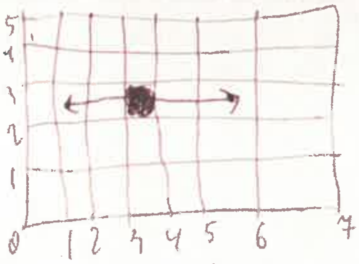
Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 2 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Рассмотрим прямоуг. 5×7 (без посл. столбца):



Если мы посмотрим на сумму векторов, проведённых в симметричные относительно закрашенной клетки (как показ на рисунке), то она равна 0. В данном прямоуг 17 пар симметричных клеток ⟹ если провести из закр. клетки векторы во центры всех других клеток, то общая сумма будет равна 0.

Зная этот факт, посмотрим на исходный прямоуг:

30л

1	2	3	4	5	Σ
20	16	20	–	20	76

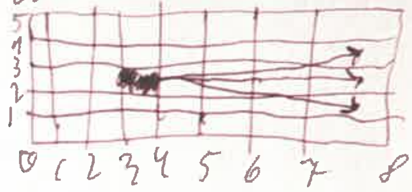
30б

Очевидно что необходимо вычеркнуть такие 2 вектора, которые в сумме дадут наиб. длину в направлении, не скомпенсированном суммой других векторов. Самый длинный вектор, получившийся из суммы 2 векторов, имеет длину 8: (из клеток с коорд. центра (7,5; 4,5) и (7,5; 0,5) или (7,5; 1,5) и (7,5; 3,5)) (если взять за (0;0) как на рисунке). Этот вектор направлен так: →. Действительно, невыгодно вычеркивать клетки из „левой" половины прямоуг. (линия разделения на рисунке), т.к. длины векторов получившихся из „правой" половины прямоуг. больше. Т.о. вычеркнем клетки с коорд центра (7,5; 4,5) и (7,5; 0,5).

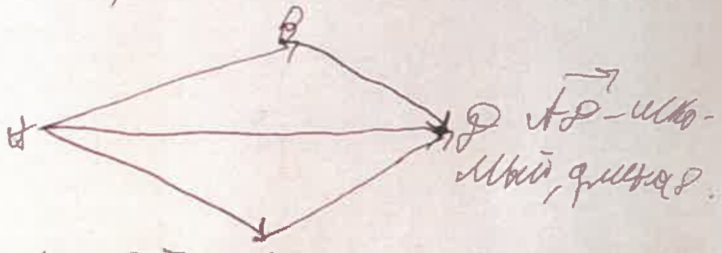
(продолж. на листе 2)

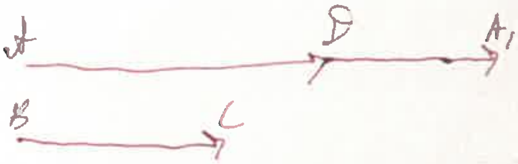
№1 (продолжение)

Тогда получим, что сумма всех векторов, полученных не из последнего столбца, равна 0. Останутся лишь 3 вектора:



Сложив эти вектора, получим ответ, 12:



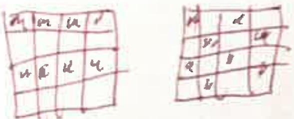


$\vec{AA_1}$ – искомый, длина 12.

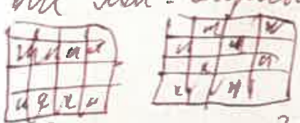
Ответ: 12.

№5.

Рассм. чётные и нечётные n: для чётных n можно закрасить след. образом (в пример $n=4$):



То есть „диагоналями" и „линиями". В таких раскрасках нельзя ни добавить, ни убрать ни переставить фишки (иначе в каких-то кв. будет не ровно 2 фишки). Другие покраски явл. вариантами этих, например:



Т.к. n чётное, то используется то же число фишек. Другие раскраски также используют $\frac{n^2}{2}$ клеток. То есть для чётного n: $\frac{n^2}{2}$. Для нечётного n: покраски линиями и диагоналями могут иметь два вида:

(продолж. на листе 3)

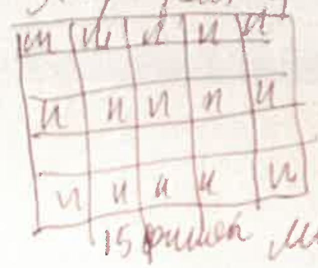
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0001232721

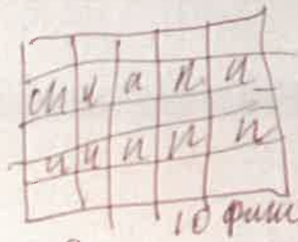
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

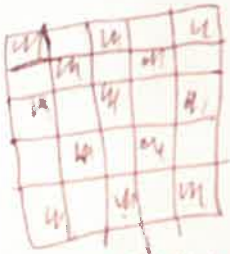


15 фишек



10 фишек

линиями



13 фишек

12 фишек

диагоналями

В зависимости от того как заполнять фишки в рамках 1 способа число фишек меняется (хар-но и для других раскрасок), т.е. число фишек может быть равно: $\frac{n(n+1)}{2}$; $\frac{n(n-1)}{2}$ – линии; $\left[\frac{n^2}{2}\right]$; $\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$ – диагонали. Те же самые числа получим и при других раскрасках: от $\frac{n(n-1)}{2}$ до $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ответ: для чётных: $k=\frac{n^2}{2}$; для нечётных: $k\in\left[\frac{n(n-1)}{2};\frac{n(n+1)}{2}\right]$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0001232721

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Составим систему:

$$\begin{cases} 100a+10b+c \equiv_{a+b+c+1} 1 \\ 100c+10b+a \equiv_{a+b+c+1} 1 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} 100a+10b+c-1 \equiv_{a+b+c+1} 0 \\ 100c+10b+c-1 \equiv_{a+b+c+1} 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 99a+9b-2 \equiv_{a+b+c+1} 0 \\ 99c+9b-2 \equiv_{a+b+c+1} 0 \end{cases}$$

Система выполняется, если:

1) $a+b+c+1=9$

2) $a+b+c+1=11$

3) $a=c$

Рассм. 1):

$$\frac{100a+10b+c}{9} = x + \frac{1}{9}$$

$$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{9} = k + \frac{1}{9}$$

(продолж. на листе 5)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

$11a+b+1-\frac{1}{9}=x+\frac{1}{9}$ - невозможно, т.к. $a, b, c, x \in N$

$\Rightarrow$ в данном случае чисел нет.

2) $a+b+c+1=11$

$\frac{100a+10b+c}{11}=x+\frac{1}{11}$

$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{11}=x+\frac{1}{11}$

$9a+1+\frac{9b-1}{11}=x+\frac{1}{11}$

Возможно при таком b, что $9b-1 \vdots 11$.

~~Все~~ $9b-1 \equiv_{11} 0$

$9b \equiv_{11} 1 \Rightarrow b=11k$, где $k \in N$. Но тогда

$b>9$, что не подх. усл. $\Rightarrow$ в данном случае

чисел тоже нет.

3) $\frac{100a+10b+a}{a+b+a+1}=x+\frac{1}{a+b+a+1}$

(продолж. на листе 6).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0001232721

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

$\frac{10(a+10b-1}{2a+b+1}=x,\ x\in\mathbb{N}$

$\frac{(20a+10b+10)+8(a-11}{2a+b+1}=x$

$\frac{8(a-11}{2a+b+1}+10=x$

$\frac{8(a-11}{2a+1+b}=x-10$

Теперь будем подставлять поочереди:

1) $a=1$:

$\frac{70}{3+b}=x-10$

$70:(3+b)\Rightarrow b=2;\ b=4;\ b=7.$

2) $a=2$:

$\frac{15\cancel{7}}{5+b}=x-10$

$151:(5+b)\Rightarrow$ таких b не сущ.

(продолжи на листе 7)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3 (продолж.)

3) $a=3$:

$$\frac{232}{7+b}=x-10$$

$$\frac{8\cdot 29}{7+b}=x-10$$

$(8\cdot 29) \vdots (7+b) \Rightarrow b=1.$

4) $a=4$:

$$\frac{313}{9+b}=x-10$$

$313 \vdots (9+b) \Rightarrow$ таких b не сущ.

5) $a=5$:

$$\frac{394}{11+b}=x-10$$

$$\frac{2\cdot 197}{11+b}=x-10$$

$(197\cdot 2) \vdots (11+b) \Rightarrow$ таких b не сущ.

6) $a=6$:

$$\frac{475}{13+b}=x-10$$

(продолж. на листе 8)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	2	3	2	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолж)

$475 : (13+b) \Rightarrow b = 6.$

7) $a = 7$:

$\frac{556}{15+b} = k - 10$

$556 : (15+b) \Rightarrow$ таких b не сущ.

8) $a = 8$:

$\frac{637}{17+b} = k - 10$

$637 : (17+b) \Rightarrow$ таких b не сущ.

9) $a = 9$:

$\frac{718}{b+19} = k - 10$

$718 : (b+19) \Rightarrow$ таких b не сущ.

Получим числа: 121; 141; 171; 313; 666.

Ответ: 121; 141; 171; 313; 666.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$3\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\sin^2 x + 3\cos^2 x - 3\cos x - 6\sin x = 0.$

$(4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x) + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3\cos x -$

$-6\sin x = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

Замена: $t = 2\sin x + \cos x$;

$t^2 + 2 - 3t = 0$

$t_1 + t_2 = 3$
$t_1 t_2 = 2$
$\Rightarrow$
$t_1 = 2$
$t_2 = 1$

Обратная замена:

1) $2\sin x + \cos x = 2$

$2\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 2 - \cos x \mid \uparrow 2$

$4(1-\cos^2 x) = 4 - 4\cos x + \cos^2 x$

$4 - 4\cos^2 x = 4 - 4\cos x + \cos^2 x$

$\cos x(5\cos x - 4) = 0$

$\cos x = 0$ и $\cos x = 0,8.$

(продолж. на листе 10)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА00012327 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение).

то же самое, что (подставим знач. в исх. ур-е)

$\sin x = 1$ и $\sin x = 0{,}6$.

1) $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = 0{,}6 \Rightarrow x = \arcsin(0{,}6) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $2\sin x + \cos x = 1$

$2\sin x + \sqrt{1-\sin^2 x} = 1$

$\sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - 2\sin x \mid \uparrow 2$

$1-\sin^2 x = 1 - 4\sin x + 4\sin^2 x$

$1-\sin^2 x - 1 + 4\sin x - 4\sin^2 x = 0$

$-5\sin^2 x + 4\sin x = 0 \mid \cdot(-1)$

$\sin x(5\sin x - 4) = 0$

$\sin x = 0$ и $\sin x = 0{,}8$

Подставим знач. в исх. ур-е

$\cos x = 1$ и $\cos x = -0{,}6$

1) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

2) $\cos x = -0{,}6 \Rightarrow x = \pi - \arcsin(0{,}8) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pi - \arcsin(0{,}8) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$; $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \arcsin(0{,}6) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	4	3	1	2	1

Адрес площадки проведения Шифр

Вариант № 1

Фамилия Дударь

Имя Анастасия

Отчество Владимировна

Дата рождения 12.08.2004 Класс 11

Предмет математика

Работа выполнена на 10 листах Дата выполнения работы 6.03.2021

Номер телефона +7 982 216 87 34 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	2	4	3	1	2	1

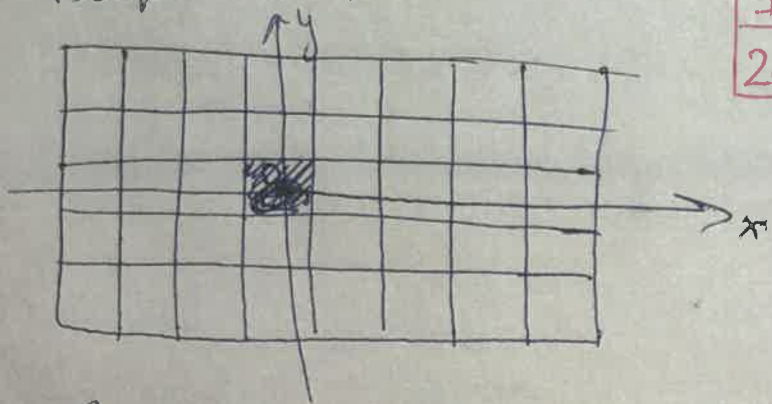
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	6	8	6	60

30

Вопрос №1



Зададим координатную плоскость Oxy с центром в центре чёрного квадрата. Т.к. все стороны квадратов по единице, то возможные вектора имеют следующие координаты:

$\{1;0\}$, $\{1;1\}$, $\{1;-1\}$, $\{1;-2\}$, $\{1;2\}$

$\{2;0\}$, $\{2;1\}$, $\{2;2\}$, $\{2;-1\}$, $\{2;-2\}$

$\{3;0\}$, $\{3;1\}$, $\{3;2\}$, $\{3;-1\}$, $\{3;-2\}$

$\{4;0\}$, $\{4;1\}$, $\{4;2\}$, $\{4;-1\}$, $\{4;-2\}$

$\{-1;0\}$, $\{-1;1\}$, $\{-1;2\}$, $\{-1;-1\}$, $\{-1;-2\}$

$\{-2;0\}$, $\{-2;1\}$, $\{-2;2\}$, $\{-2;-1\}$, $\{-2;-2\}$

$\{-3;0\}$, $\{-3;1\}$, $\{-3;2\}$, $\{-3;-1\}$, $\{-3;-2\}$.

Можно заметить, что при сложении этих векторов сумма многих раз будет давать $\{0;0\}$, т.к. имеется много противоположных векторов (как $\{1;1\}$ и $\{-1;-1\}$). Итак, общая

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

сумма всех векторов будет равна: $\{20;0\}$. Однако здесь есть два лишних вектора (т.к. по условию вектора проведены во все клетки кроме двух). Чтобы сделать минимальную длину результирующего вектора необходимо вычесть из $\{20;0\}$ вектора $\{4;1\}$ и $\{4;-1\}$ либо $\{4;2\}$ и $\{4;-2\}$ т.к. в таком случае ордината вектора останется неизменной и будет равна 0, а координата x уменьшится на максимально возможное значение.

Так, результирующий вектор примет вид $\{12;0\}$ и его длина, это же искомая: $\sqrt{12^2} = 12$.

+

Ответ: 12

Вопрос №2

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$$

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + 3 = 0$$

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)^2}, \quad a \cos x = \frac{1-tg\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	4	3	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$3\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)^2 - 3\,\frac{\left(1-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}{\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} - 6\,\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)^2} +$$

$$+\;4\,\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}{\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^2}+3=0$$

пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

$$3\left(\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\right)-3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)-6\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+4\left(\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right)+$$

$$+\;\frac{3(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=0$$

$$\frac{12t^2-3(1-t^4)-6\cdot 2t\cdot(1+t^2)+8t(1-t^2)+3(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=0$$

$(1+t^2)^2\neq 0$

$\Rightarrow$

$12t^2-\cancel{3}+3t^4-12t-12t^3+8t-8t^3+\cancel{3}+6t^2+3t^4=0$

$6t^4-20t^3+18t^2-4t=0 \quad |:2$

$t(3t^3-10t^2+9t-2)=0$

$t=0$ или $3t^3-10t^2+9t-2=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	Н	3	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$t=0$ или $3t^3-10t^2+9t-2=0$

методом подбора $t=1$ является корнем уравнения

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 3t^3-10t^2+9t-2 & t-1 \\ \underline{3t^3-3t^2} & 3t^2-7t+2 \\ -7t^2+9t-2 & \\ \underline{-7t^2+7t} & \\ 2t-2 & \\ \underline{2t-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$t=0$ или $t-1=0$ или $3t^2-7t+2=0$

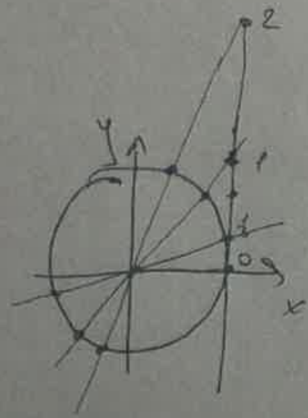
$D=49-24=25$

$t_{1,2}=\dfrac{7\pm5}{6}=\left[\begin{array}{l}2\\ \frac{1}{3}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} t=0\\ t=1\\ t=2\\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=0\\ tg\frac{x}{2}=1\\ tg\frac{x}{2}=2\\ tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi n,\ n \in Z \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(2) + \pi n,\ n \in Z \end{array}\right.$$

$x \in \{2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\operatorname{arctg}(2) + 2\pi n;\ 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n\}$, $n \in Z$.

т.к. $tg\frac{x}{2}$ ограничивает значение $\cos\frac{x}{2} = 0$, то необходимо проверить, является ли $\cos\frac{x}{2} = 0$ корнем уравнения.

$\cos\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$3 \cdot \sin^2(\pi) - 3\cos(\pi) - 6\sin(\pi) + 2\sin(2\pi) + 3 = 0$

$0 + 3 - 0 + 0 + 3 = 0$

$6 \neq 0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 0$ не является корнем уравнения.

Ответ: $x \in \{2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\operatorname{arctg}(2) + 2\pi n;\ 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n\}$, где $n \in Z$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 2 | 1 |

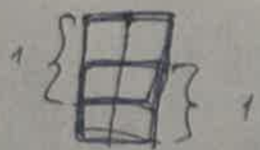
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос № 5

Всего клеток в квадрате n^2. Непересекающихся квадратов 2×2 в большом квадрате $\frac{n^2}{4}$ $\left(\frac{n^2}{2\cdot 2}=\frac{n^2}{4}\right)$ с округлением в меньшую сторону. В каждом из этих квадратов обязательно должно быть ровно 2 фишки по условию. Тогда $k_{min} = \frac{n^2}{4}\cdot 2 = \frac{n^2}{2}$.

Возможно ли увеличить k? До этого мы считали только не пересекающиеся квадраты 2×2, однако в участке, например, 3×2 не 1 квадрата 2×2, а два!



1 1. Таким образом, если мы расставим фишки на пересечении двух соседних квадратов, то возможно получится другое значение k. Однако т.к. у нас квадрат по пересечению есть и сбоку, поэтому итоговое k все равно остается $\frac{n^2}{2}$.

Ответ: $k=\frac{n^2}{2}$, если n нечётная, то округление в меньшую сторону

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | Н А 0 0 0 1 2 4 3 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос № 3

чтобы $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ давали одинаковые остатки при делении на $a+b+c+1$ $\overline{cba}$ должно быть равно $\overline{abc}$, когда $a=c$, при этом $a, c \neq 0$. Рассмотрим случай, когда $a=c=1$:

$\frac{111}{1+1+1+1} = 27$ ост. 3

$\frac{101}{3} = 33$ ост. 2

$\frac{121}{1+2+1+1} = 24$ ост. 1 число 121 нам подходит

$\frac{131}{6} = 21$ ост. 5

$\frac{141}{7} = 20$ ост. 1 число 141 подходит

$\frac{151}{8} = 18$ ост. 7

$\frac{161}{9} = 17$ ост. 8

$\frac{171}{10} = 17$ ост. 1 171 нам подходит

$\frac{181}{11} = 16$ ост. 5

$\frac{191}{12} = 15$ ост. 11

Теперь рассмотрим случай, когда $a, c = 2$, точно таким же образом: $\frac{202}{5}$ ост. 2, $\frac{212}{6}$ ост. 2,

$\frac{222}{7}$ ост. 4, $\frac{232}{8}$ ост. 0, $\frac{242}{9}$ ост. 8, $\frac{252}{10}$ ост. 2

$\frac{262}{11}$ ост 9, $\frac{272}{12}$ ост 8, $\frac{282}{13}$ ост. 9, $\frac{292}{14}$ ост. 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МН00012431 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Все подходящие числа ... только ... если ... деления ... остаток ... условия ...~~

a, c = 3 : , ~~3+3 = 6 ... число ... число abc, cba ... b здесь любое~~

$\frac{303}{7}$ ост. 2 , $\frac{313}{8}$ ост 1 => 313 нам подходит

323, 333, 343, 353, 363, 373, 383, 393 нам не подходят.

a, c = 4 : , ~~abc, cba ... a+c+1 = 9 ... может ... b ... может ... рассматривать~~

$\frac{404}{9}$ ост. 8 414, 424, 434, 444, 454, 464, 474, 484, 494 нам не подходят.

a, c = 5 : 505, 515, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595 нам не подходят;

a, c = 6 : 606, 616, 626, 636, 646, 656 нам не подходят

$\frac{666}{19}$ = 35 ост 1 подходит.

676, 686, 696 не подходят.

a, c = 7 : 707, 717, 727, 737, 747, 757, 767, 777, 787, 797 нам не подходят.

a, c = 8 : 808, 818, 828, 838, 848, 858, 868, 878, 888, 898 не подходят

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 4 3 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

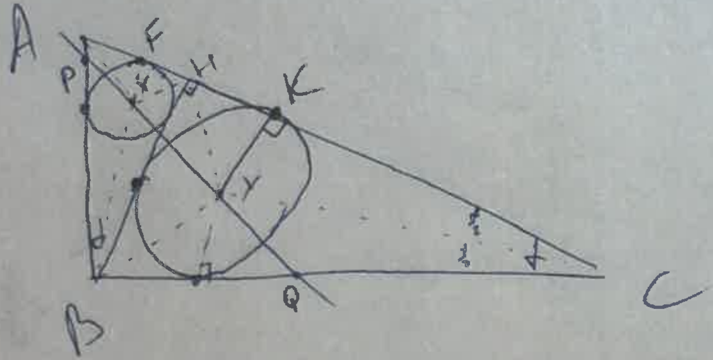
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a, c = 9$:

909, 919, 929, 939, 949, 959, 969, 979, 989, 999

нам не подходят.

Вопрос №4



$BH = a$

$S_{BPQ} - ?$

$$S_{ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = a.$$

$\triangle ABH \sim \triangle BHC$:

$$\frac{BH}{HC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH \cdot HC = BH^2 = a^2$$

$$S_{BPQ} = \frac{BP \cdot BQ}{2}$$

XH - бис-са $\angle AHB$ $\Rightarrow XHB = 45^\circ$
т. к. X - центр вписанной окружности

аналогично $\angle YHB = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle XHY = 90^\circ$

BX - бис-са $\angle ABH$, BY - бис-са $\angle HBC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle XBH + \angle HBY = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

(.) K - радиус окружности в $\triangle HBC$, $YK \perp AC$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	4	3	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

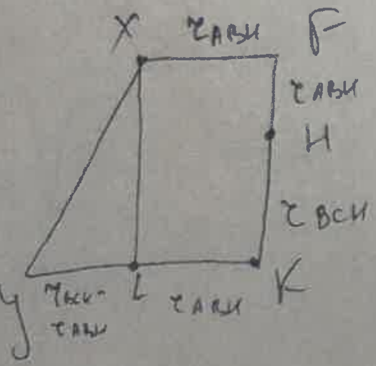
$\sphericalangle$ $\triangle HKY$: $\angle HKY = 90°$, $\angle YHK = 45° \Rightarrow HYK = 45° \Rightarrow$

$HK = KY = r_{BCH}$

проведём $XF \perp AC$, (.)F - точка касания окружности в $\triangle AHB$ с AC.

$XF \parallel YK$, т.к. $XF \perp AC$, $YK \perp AC$. $XFKY$ — прямоугольная трапеция

$\sphericalangle$ $\triangle XFH$: $\angle FHX = 45°$, $\angle XFH = 90° \Rightarrow$ $\angle FXH = 45° \Rightarrow FH = XF = r_{ABH}$.



проведём $XL \perp YK$

в $\triangle XYL$ по т. П.:

$$XY^2 = XL^2 + YL^2 = (r_{ABH} + r_{BCH})^2 + (r_{BCH} - r_{ABH})^2 = 2r_{ABH}^2 + 2r_{BCH}^2$$

по свойству высоты к гипотенузе в прямоугольном треугольнике: $r_{ABH}^2 + r_{BCH}^2 = r_{ABC}^2 \Rightarrow$

$XY^2 = 2r_{ABC}^2$ $\quad XY = r_{ABC}\sqrt{2}$

$$XY = \frac{AB + BC - AC}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	1	5	2	2	1

Адрес площадки проведения ______________________

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ВАКУЛИЧ

Имя АНАСТАСИЯ

Отчество АНДРЕЕВНА

Дата рождения 19.01.2004. **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона +7(989)-701-32-72 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

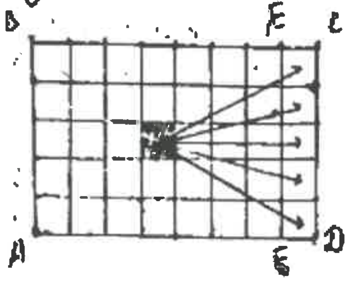
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 1 5 2 2 1

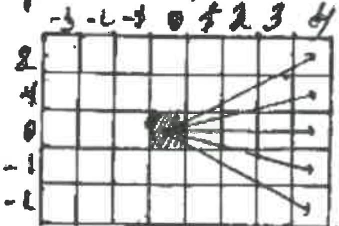
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №1



т.к сумма длин в прямоугольнике ABEF равна 0, то получаем следующее: 30



1	2	3	4	5	Σ
20	16	20	0	–	56

~~Найдём наименьшую сумму длин векторов, проходящих через точки с координатами: (4;3) и (8;5); (4;3) и (8;4); (4;3) и (8;3); (4;3) и (8;2); (4;3) и (8;1)~~

Обозначим закрашенную клетку за начало координат. (0;0) и найдём наименьшую сумму длин векторов, проходящих через (0;0) и точки (4;2); (4;1); (4;0); (4;-1); (4;-2)

$\vec{x} = \{4+4+4+4+4;\ 2+1+0-1-2\} = \{20;0\}$.

значит $|\vec{x}| = 20$. Но т.к нам нужно найти наименьшее значение суммы длин, нам нужно исключить 2 точки по условию. Чтобы значение было наименьшим можно заметить, что мы можем исключить либо a и e, либо b и d.

Следовательно можем получить:

$\vec{x}\{4+4+4;\ 1+0+(-1)\} = \{12;0\} \Rightarrow |\vec{x}| = 12$

или

$\vec{x}\{4+4+4;\ 2+0+(-2)\} = \{12;0\} \Rightarrow |\vec{x}| = 12$

Ответ: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	2	1	5	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №2.

$\underbrace{3\sin^2 x} - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$.

Представим в виде:

$4\sin^2 x + \cos^2 x - 1 - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x - 1 - 3(\cos x + 2\sin x) + 3 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$.

пусть $2\sin x + \cos x = t$ тогда:

$t^2 - 3t + 2 = 0$.

$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$t_1 = 2$ $\qquad$ $t = 1$.

$2\sin x + \cos x = 2$ $\qquad$ $2\sin x + \cos x = 1$

заменим $\cos x$ на x. тогда:

$2\sqrt{1-x^2} + x = 2$

$2\sqrt{1-x^2} = 2 - x$

$4(1-x^2) = 4 - 4x + x^2$

$4 - 4x^2 = 4 - 4x + x^2$.

$5x^2 - 4x = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $x = \frac{4}{5}$

$\cos x = 0$ $\qquad$ $\cos x = \frac{4}{5}$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\qquad$ $\sin x = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

$x = \arcsin(0,6) + 2\pi k, k \in Z$

$2\sqrt{1-x^2} + x = 1$

$2\sqrt{1-x^2} = 1 - x$

$4(1-x^2) = 1 - 2x + x^2$

$4 - 4x^2 = 1 - 2x + x^2$

$5x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{10} = \frac{2 \pm 8}{10}$

$x = 1$ $\qquad$ $x = -0,6$.

$\cos x = 1$ $\qquad$ $\cos x = -0,6$.

$x = 2\pi n, n \in Z$ $\qquad$ $\sin x = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$

$x = \arcsin(0,8) + 2\pi k$ $k \in Z$

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x = \arcsin(0,6) + 2\pi k, k \in Z \\ x = 2\pi l, l \in Z \\ x = \arcsin(0,8) + 2\pi m, m \in Z \end{array}\right.$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 1 5 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №3

Условие:

$$\begin{cases}(100a+10b+c) \bmod (a+b+c+1)=1 \\ (100c+10b+a) \bmod (a+b+c+1)=1\end{cases}$$ тогда:

$$\Rightarrow \begin{cases}(100a+10b+c-1) \bmod (a+b+c+1)=0 \\ (100c+10b+a-1) \bmod (a+b+c+1)=0.\end{cases}$$ тогда:

$$\Rightarrow \begin{cases}(99a+9b-2) \bmod (a+b+c+1)=0 \\ (99c+9b-2) \bmod (a+b+c+1)=0\end{cases}$$ → это возможно только в 3-х случаях.

1) $a=c$

тогда наше число будет иметь вид $\overline{aba}$

тогда

$$\frac{100a+10b+a}{2a+b+1} = x + \frac{1}{2a+b+1}$$

$$\Rightarrow \frac{101a+10b-1}{2a+b+1} = x \qquad x \in \mathbb{N}$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1} = x-10 \qquad \text{и } x \geq 10$$

~~Итак~~ рассмотрим все варианты

$a=1 \Rightarrow \frac{70}{2+b+1} = x-10$ $\boxed{b=2,\ b=4,\ b=7}$

$a=2 \Rightarrow \frac{153}{5+b} = x-10$ таких b нет, которые бы удовлетворяли $b<9$.

$a=3 \Rightarrow \frac{232}{b+7} = x-10$ $\boxed{b=1.}$

$a=4 \Rightarrow \frac{313}{b+9} = x-10.$ 313 – простое. b – нет.

$a=5 \Rightarrow \frac{394}{11+b} = \frac{2\cdot 197}{11+b}$ 197 – простое b – нет

$a=6 \Rightarrow \frac{475}{13+b} = \frac{19\cdot 25}{13+b} \Rightarrow \boxed{b=6.}$

$a=7 \Rightarrow \frac{556}{15+b} = \frac{4\cdot 139}{15+b}$ 139 – простое b – нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 1 5 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение Задания №3.

$a=8 \Rightarrow \frac{637}{17+b} = \frac{7\cdot 7\cdot 13}{17+b}$ таких b - нет

$a=9 \Rightarrow \frac{718}{19+b} = \frac{2\cdot 359}{19+b}$ таких b нет 359 - простое

Получили числа: 121; 141; 171; 313; 666

II $a+b+c+1=9$

тогда

$$\frac{100a+10b+c}{9} = x - \frac{1}{9}$$

$$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{9} = x + \frac{1}{9}$$

$$11a+b+1-\frac{1}{9} = x + \frac{1}{9}$$

натуральных чисел нет, поэтому противоречие

III $a+b+c+1=11$

тогда

$$\frac{100a+10b+c}{11} = x + \frac{1}{11}$$

$$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{11} = x + \frac{1}{11}$$

$$9a+1+\frac{9b-1}{11} = x+11$$

это возможно только если

$(9b-1) \mod 11 = 0$

но это невозможно при $b \in N$, поэтому противоречие

Ответ: 121, 141, 171, 313, 666

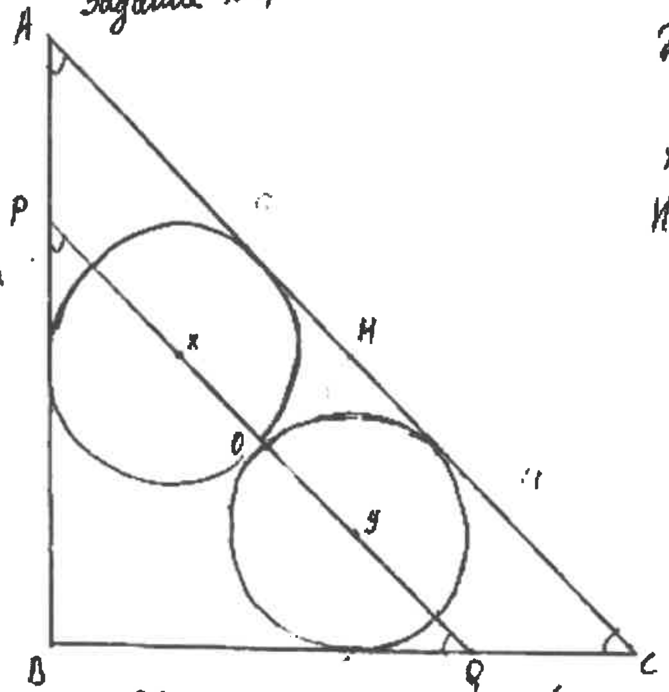
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 1 5 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и в рамке справа

Задача №4



Дано: $\triangle ABC$
BH - высота ; $BH = a$
x и y - центры окружностей.
Найти $S_{\triangle PBQ}$

Решение:
прямая $XY \perp BH$, т.к XO и OY - радиусы, а BH касательная ~~и $\angle XOB = \angle AHO$ как~~, значит $\angle XOB = \angle AHO \Rightarrow AC \parallel XY$. , значит

~~$\angle PQB = \angle BPQ$ как соответс~~ $\angle PQB = \angle ACB$ и $\angle BPQ = \angle BAC$ как соответственные, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle BPQ$ по 3-м углам. Тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{BPQ}} = k^2$

Заметим, что S не будет зависеть от $\angle BAC$ и $\angle ACB$, а будет зависеть только от высоты BH тогда пусть $\triangle ABC$ - равнобедренный. Значит BH - медиана и высота. ~~тогда~~

по теореме Пифагора: $AB^2 + BC^2 = (2a)^2$; т.к $AB = BC$ -

$2AB^2 = 4a^2$

$AB = BC = a\sqrt{2}$.

$r = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$ по с-ву прямоугольного $\triangle$.

BO - высота в $\triangle BPQ$ $= BH - r = a - r = a - \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

тогда $PQ = a\sqrt{2}$ следовательно

$S_{BPQ} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	0	0	0	1	3	8	7	8	2	1

Адрес площадки проведения ______ Шифр

Вариант № ______

Фамилия Данияр

Имя Амирхан

Отчество Курметович

Дата рождения 21.10.2003 г. Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на ____ листах Дата выполнения работы 05.03.2021 г.

Номер телефона +7(777) 247 36 26 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Адрес площадки проведения ______ Шифр

Вариант № ______

Фамилия Данияр

Имя Амирхан

Отчество Курметович

Дата рождения 21.10.2003 г. Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на ____ листах Дата выполнения работы 05.03.2021 г.

Номер телефона +7(777) 247 36 26 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 8 | 7 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N2.

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$. Число 3 равно $\underline{\cos^2 x + \sin^2 x + 2}$ =>

=> $\underline{4\sin^2 x} - 3\cos x - 6\sin x + \underline{4\sin x\cos x} + \underline{\cos^2 x} + 2 = 0$

$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x - 1)(2\sin x + \cos x - 2) = 0$

1	2	3	4	5	Σ
–	20	20	20	6	66

Зач

i) $2\sin x + \cos x = 1 \quad | : \sqrt{5}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Пусть $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $(1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha)$ $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ =>

=> $\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sin\alpha$ => 1) $x + \alpha = \alpha + 2\pi k \Rightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $x + \alpha + \alpha = \pi + 2\pi k \Rightarrow x = \pi - 2\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}$

ii) $2\sin x + \cos x = 2 \quad | : \sqrt{5}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Пусть $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ => $\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \cos\alpha$ =>

=> 1) $x + \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $x + \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = 2\pi k + \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \pi - 2\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

где $\boxed{\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 8 | 7 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N3.

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$\overline{cba} = 100c + 10b + a$

$100a + 10b + c \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 1 \vdots a+b+c+1$

Аналогично $100c + 10b + a - 1 \vdots a+b+c+1$

$100a + 10b + c - 1 = 99a + 9b - 2 + (a+b+c+1) \vdots a+b+c+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{99a + 9b - 2 \vdots a+b+c+1}$

Аналогично $\underline{99c + 9b - 2 \vdots a+b+c+1}$

Если $(a+b+c+1, 3) > 1 \Rightarrow 99a + 9b - 2 \vdots a+b+c+1 \vdots 3 \Rightarrow \times \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+b+c+1, 3) = 1 \Rightarrow (a+b+c+1, 9) = 1$

$99(a-c) = (99a + 9b - 2) - (99c + 9b - 2) \vdots a+b+c+1$

Так как $(9, a+b+c+1) = 1 \Rightarrow 11(a-c) \vdots a+b+c+1$

Если $(a+b+c+1, 11) = 1$, то $a - c \vdots a+b+c+1$. Так как $|a-c| < a+b+c+1$ и $a - c \vdots a+b+c+1$, то $\boxed{a=c} \Rightarrow$

$\Rightarrow 99a + 9b - 2 \vdots a+b+c+1 = 2a+b+1$

$99a + 9(2a+b+1) - 9(2a+1) - 2 \vdots 2a+b+1$

$81a - 11 \vdots 2a+b+1$. Очевидно что $a \neq 0$

1) $a = 1 \Rightarrow 70 \vdots b+3$ $\quad 3 \le b+3 \le 12 \Rightarrow b+3 = 5, 7, 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 2, 4, 7 \Rightarrow$ Получаем: $\boxed{121, 141, 171}$

N3. (продолжение)

2) $a=2 \Rightarrow 151 \vdots b+5$

так как $151 \in P$, $\Rightarrow$ нет ответа

3) $a=3 \Rightarrow 232 \vdots b+7$ $\quad 7 \leq b+7 \leq 16 \Rightarrow b+7=8; \Rightarrow$

$b=1 \Rightarrow$ Получаем: $\boxed{313}$

4) $a=4 \Rightarrow 313 \vdots b+9$

так как $313 \in P \Rightarrow$ нет ответа

5) $a=5 \Rightarrow 394 \vdots b+11$

$11 \leq b+11 \leq 20 \Rightarrow b+11=\varnothing$

6) $a=6 \Rightarrow 475 \vdots b+13$

$13 \leq b+13 \leq 22 \Rightarrow b+13=19; \Rightarrow b=6$

Получаем: $\boxed{666}$ $\quad 666 \not\vdots\; 6+6+6+1 \Rightarrow \varnothing$

7) $a=7 \Rightarrow 556 \vdots b+15$

$15 \leq b+15 \leq 24 \Rightarrow b+15=\varnothing$

8) $a=8 \Rightarrow 637 \vdots b+17$

$17 \leq b+17 \leq 26 \Rightarrow b+17=\varnothing$

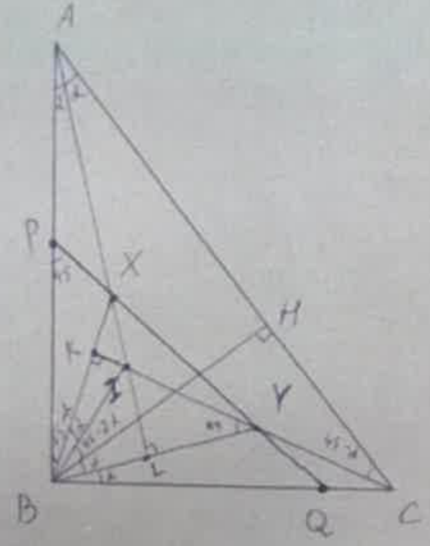
9) $a=9 \Rightarrow 718 \vdots b+19$

$19 \leq b+19 \leq 28 \Rightarrow b+19=\varnothing$

Ответ: 121; 141; 171; 313; 666.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 4.



Решение: Пусть $AX \cap CY = I$ и продолжение YI и BX пересекается в точке K, и продолжение XI и BY пересекаются в точке L.

Заметим что $\angle AXB = 135°$ и $\angle BYC = 135°$

Тогда $\angle KXI = 45°$, $\angle IYL = 45° \Rightarrow K, X, Y, L$ лежат на одной окружности,

и заметим что $\angle AIC = 135° \Rightarrow B, K, I, L$ лежат на одной окружности

Пусть $\angle BAX = \alpha = \angle XAC$. Тогда $\angle BCY = 45 - \alpha = \angle YCA$

Заметим что $\angle XBI = \alpha$. Тогда $\angle KLI = \alpha$ так же B, K, I, L лежат на одной окружности и $\angle KLI = \angle KYX = \alpha$ так как K, L, Y, X лежат на одной окружности. Также $\angle IXY = 45° - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BXP = 90 + \alpha$

$$\frac{BP}{BA} = \frac{BP}{BX} \cdot \frac{BX}{BA} = \frac{\sin(90+\alpha)}{\sin 45} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 135}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 3 8 7 8 2 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{BQ}{BY} \cdot \frac{BY}{BC} = \frac{\sin(135-\alpha)}{\sin 45} \cdot \frac{\sin(45-\alpha)}{\sin 135}$$

$$S_{ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{a \cdot AC}{2}$$

$$\frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}} = \frac{BP \cdot BQ}{AB \cdot AC} = S_{BPQ} = \frac{BPBQ}{AB \cdot AC} \cdot S_{ABC}$$

$$4\sin(90+\alpha)\sin\alpha \cdot \sin(135-\alpha)\sin(45-\alpha) \cdot \frac{a \cdot AC}{2}$$

$$= 4\cos\alpha \sin\alpha \cdot \cos(45-\alpha)\sin(45-\alpha) \cdot \frac{a \cdot AC}{2} =$$

$$= \sin 2\alpha \cdot \sin(90-2\alpha) \cdot \frac{a \cdot AC}{2}$$

$$AC \cdot \sin 2\alpha = BC$$

$$CB \cdot \sin(90-2\alpha) = a \Rightarrow S_{BPQ} = \frac{a^2}{2}$$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 8 | 7 | 8 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Если n - четное, то разделим $n \times n$ на 2×2. Получим всего $\frac{n^2}{4}$ квадратиков размером 2×2. В каждом квадратике ровно 2 фишки $\Rightarrow$ $\boxed{k = 2 \cdot \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	0	0	0	1	2	0	7	5	2	1

Шифр

прокторинг

Адрес площадки проведения

Вариант № 1

Фамилия Мельников

Имя Семён

Отчество Дмитриевич

Дата рождения 24.11.2003 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона +7 961 389 85 12 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 0 7 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	16	–	12	68

30б

2) $3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + 2 = 0$

$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x - 6\sin x - 3\cos x + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

$k = 2\sin x + \cos x$

$k^2 - 3k + 2 = 0$

$D = 9 - 8 = 1$

$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1; 2$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = 1 \\ 2\sin x + \cos x = 2 \end{array}\right.$$

$t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0 \\ \frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4t+1-t^2-1-t^2}{1+t^2} = 0 \\ \frac{4t+1-t^2-2-2t^2}{1+t^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - 2t = 0 \\ 3t^2 - 4t + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t(t-2) = 0 \\ (t-1)(t-\frac{1}{3}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \\ t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg(\frac{x}{2}) = 0 \\ tg(\frac{x}{2}) = 2 \\ tg(\frac{x}{2}) = 1 \\ tg(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = arctg(2) + \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = arctg(\frac{1}{3}) + \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ x = 2arctg(2) + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ x = 2arctg(\frac{1}{3}) + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = 2arctg(2) + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$, $x = 2arctg(\frac{1}{3}) + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 0 7 5 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Пусть $\vec{LP}$ это вектор равный сумме всех векторов на картинке.

Введём систему координат с центром (началом) в центре чёрного квадрата.

$\vec{LP} = \{5(-3)+5\cdot(-2)+5\cdot(-1)+5\cdot 0+5\cdot 1+5\cdot 2+5\cdot 3+5\cdot 4;\ 8\cdot 3+8\cdot 2+8\cdot 1+8\cdot 0+8(-1)+8\cdot(-2)+8(-3)\}$

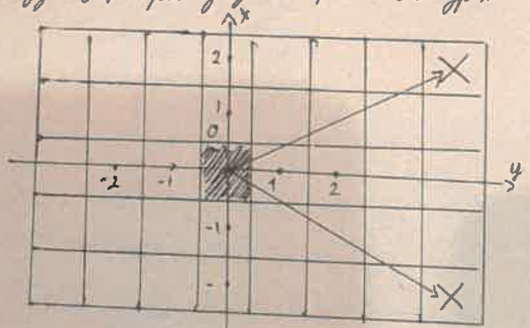
$\vec{LP} = \{20;0\}$

$|\vec{LP}| = \sqrt{x^2+y^2}$ следует, чтоб длина вектора была минимальна, для нас выгодно максимально приблизить x и y по модулю к нулю.

Заметим, что убрав 2 вектора мы можем уменьшить x максимум на 8, ведь у нас есть 5 векторов с координатами по оси ("x") "+4", убрав 2 из них, мы получим $x-8$. Заметим ещё, что убрав 2 таких вектора, мы можем не изменить вектор y оставив его на 0 $(\vec{LP} = \{20;0\} - \{x;y\})$

Тем самым, мы максимально уменьшаем x и ~~даже~~ не изменяем y, оставив его равным нулю, ведь если мы его изменим длина вектора $\vec{LP}$ увеличится.

Уберем 2 вектора, которые ~~указаны~~ ведут в центры указанных крестами квадратов, как на рисунке.



Получаем, наименьшее значение, которое может принимать длина суммы всех векторов, равна

$\sqrt{(20-8)^2+0^2} = \sqrt{12^2+0} = 12$

Ответ: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00012047521

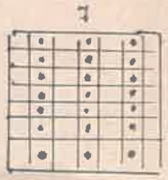
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) Рассмотрим чётные n, раскрасим нашу таблицу в шахматную раскраску, заметим, что мы получим равное количество чёрных и белых клеток. Заметим, что ~~каждая~~ каждый квадрат 2×2 содержит 2 чёрные и 2 белые клетки. Мы можем расположить фишки на один цвет клеток (чёрный или белый), тогда каждый квадрат будет иметь по 2 фишки ровно, если мы будем комбинировать цвета, расставляя фишки на разные, то в итоге всё равно общее кол-во фишек будет равно $k=\frac{n^2}{2}$ т.к. количество чёрных и белых клеток поровну

Рассмотрим нечётные n, ~~заметим, что~~ Расположим фишки, как на рисунке (пример для $n=7$). Наша расстановка имеет $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ столбцов полностью заполненными фишками, если мы будем сдвигать фишки по горизонтали, то каждая строка будет иметь от $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ фишек до $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\left(\frac{n+1}{2}\right)$

7

7 

~~Получаем~~ $\cancel{k\in\left[n\left(\frac{n-1}{2}\right);\ n\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]}$~~, где~~ $\cancel{k\in\mathbb{N}}$

~~Ответ: если n чётно~~ $\cancel{k=\frac{n^2}{2}}$~~, если n нечётно~~ $\cancel{k\in\left[\frac{n^2-n}{2};\ \frac{n^2+n}{2}\right]}$

Получаем $k\in\left[n\left(\frac{n-1}{2}\right);\ n\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]$, где $k\in\mathbb{N}$

Ответ: если n чётно $k=\frac{n^2}{2}$, если n нечётно $k\in\left[\frac{n^2-n}{2};\ \frac{n^2+n}{2}\right]$, где $k\in\mathbb{N}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00012075 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) т.к. $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ имеют одинаковые остатки от деления на $(a+b+c+1)$ значит их разность делится на $a+b+c+1$

$\overline{abc}-\overline{cba} \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$

$100a+10b+c-100c-10b-a \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$

$99a-99c \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$

$99(a-c) \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$

$11\cdot3\cdot3(a-c) \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$

пусть $a-c=1$

$11\cdot3\cdot3 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$ значит $a+b+c+1=3$ или $a+b+c+1=9$ или $a+b+c+1=11$

$a+b+c+1 \leq 28$, т.к. $a,b,c \leq 9$

1) $a+b+c+1=3$, но по условию и по св. делимости на 3, $a+b+c \equiv 1 (3)$

$1+1 \not\equiv 0 \pmod 3$

2) $a+b+c+1 \equiv 9$, но по условию и по св. делимости на 9, $a+b+c \equiv 1 (9)$

$1+1 \not\equiv 0 \pmod 9$

3) $a+b+c+1=11$, по условию и по св. делимости на 11 $a-b+c \equiv \overset{1}{\cancel{0}} (11)$

~~$0+2b+1=11$~~ $1+2b+1=11$ $2b=9$ $b=4{,}5$, такое невозможно, т.к. $\cancel{k\in}$ $b\in\mathbb{Z}$

пусть $a-c=l$

$11\cdot3\cdot3\cdot l \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$

из прошлых выводов следует $a+b+c+1$ делится только на l

$a+b+c+1 \geq 3$ т.к. $a\neq0$ и $c\neq0$, а $l \neq 3,9$

пусть ~~$a+b+c+1 \equiv 0 \pmod 4$~~ $a+b+c+1 \equiv 0 \pmod 5$

тогда $a=1, b=2, c=1$ $1+2+1+1=5$ $5 \equiv 0 \pmod 5$, нам подходит $\overline{abc}=121 \equiv 1 \pmod 5$

$\overline{abc} = 121 \equiv 1 \pmod 5$

$b=7$ тоже подходит $\overline{abc}=171 \equiv \overline{cba} \equiv 1 \pmod 5$

$c, a=6$ тоже подходит $171 \equiv 121 \equiv 676 \equiv 626 \equiv 1 \pmod 5$

Ответ: 121, 171, 626, 676

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	0	8	1	4	2	1

Адрес площадки проведения ______________ Шифр

Вариант № 1

Фамилия ФИЛИМОНОВ

Имя НИКОЛАЙ

Отчество НИКОЛАЕВИЧ

Дата рождения 22.03.2004 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона +7 985 969 93 96 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

10814, 11кл

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

МАТЕМАТИКА

от (Ф.И.О.)

ФИЛИМОНОВА НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА

Адрес площадки проведения

ИНТЕРНЕТ

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 4 / 12 (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

ОТВЕТ ДОКАЗАН ПРАВИЛЬНЫМ, НО ДРУГИМ ПУТЕМ

О себе сообщаю:

+7985 3612583 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

kolyan.nagibator@gmail.com (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 08.04.2021 16:20

Подпись участника Олимпиады: Фил

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 14:00

Комментарии членов апелляционной комиссии:

Представлено полное верное решение – 20 баллов.

Результат рассмотрения апелляции:

Повысить выставленный балл за задачу N 4 с 12 до 20 баллов.

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкин Е.К. / [signature] /

Шулев А.В. / [signature] /

Шанько Ю.В. / ЮШа /

10814, 11кл

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

МАТЕМАТИКА

от (Ф.И.О.)

Филимонова Николая Николаевича

Адрес площадки проведения

ИНТЕРНЕТ

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 5/6 (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

ПОЛУЧЕН ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ $k=\frac{n^2}{2}$, ЧТО СООТВЕТСТВУЕТ КРИТЕРИЮ 8-12 БАЛЛОВ (ВЕРНО РАССМОТРЕН ОДИН СЛУЧАЙ)

О себе сообщаю:

+79853612583 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

kolyan.nagibator@gmail.com (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 08.04.2021 16:00

Подпись участника Олимпиады: [подпись]

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 14:00

Комментарии членов апелляционной комиссии: случай нечетного n более существенный и сложный, поэтому данное решение (рассмотрение четного n) подпадает под критерий „доказаны вспомогательные утверждения помогающие в решении задачи. Работа (а именно задача N5) проверена в соответствии с критериями.

Результат рассмотрения апелляции:

Выставленный бал за задачу N5 оставить без изменений.

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К / [подпись]

Шахова Ю.В. / [подпись]

Шуплов А.В. / [подпись]

/

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	8	1	4	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0$

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin+4\sin x\cdot\cos x+3=0$

$4\sin^2x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2x-3\cos x-6\sin x+2=0$

$(2\sin x+\cos x)^2-3(2\sin x+\cos x)+2=0$

$2\sin x+\cos x=t$

$t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

$t=1$

$t=2$

1	2	3	4	5	Σ
20	8	2	~~12~~ 20	6	~~42~~ 56

3.0

$2\sin x+\cos x=1$

$\cos x=1-2\sin x$

$\cos^2x=1-4\sin x+4\sin^2x$

$1-\sin^2x=1-4\sin x+4\sin^2x$

$5\sin^2x-4\sin x=0$

$\sin x(5\sin x-4)=0$

$\sin x=0\Rightarrow\cos x=1$

$\sin x=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos x=-\frac{3}{5}$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi n,\ n\in Z \\ \left\{\begin{array}{l} x=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z \\ x=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$2\sin x+\cos x=2$

$\cos x=2-2\sin x$

$\cos^2x=4-8\sin x+4\sin^2x$

$1-\sin^2x=4-8\sin x+4\sin^2x$

$5\sin^2x-8\sin x+3=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	8	1	4	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(5\sin x-5)(5\sin x-3)=0$

$(\sin x-1)(5\sin x-3)=0$

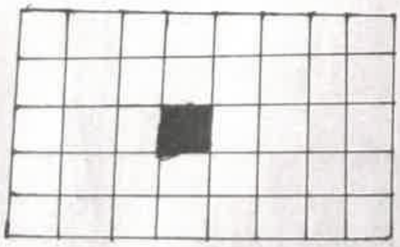
$\sin x=1 \quad \cos x=0$

$\sin x=\frac{3}{5} \quad \cos x=\frac{4}{5}$

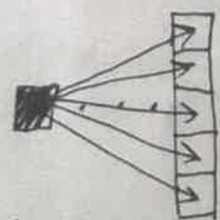
$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z \\ \left\{\begin{array}{l} x=\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)+2\pi L, L\in Z \\ x=\arccos\left(\frac{4}{5}\right)+2\pi L, L\in Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi n, n\in Z \\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z \\ \left\{\begin{array}{l} x=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+2\pi k, k\in Z \\ x=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)+2\pi k, k\in Z \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)+2\pi L, L\in Z \\ x=\arccos\left(\frac{4}{5}\right)+2\pi L, L\in Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

№1

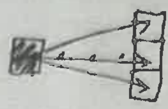


если бы нужно было провести все векторы, то рисунок бы стал таким!

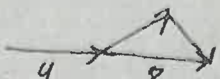


Отсюда сделаем вывод, что крайний правый ряд и образует сумму векторов ⇐ все вертикальные ряды „уравновесятся" следовательно, чтобы получить минимум нужно вычеркнуть клетки оттуда, например верхнюю и нижнюю

Тогда получим рисунок!



Сумма векторов будет выглядеть:

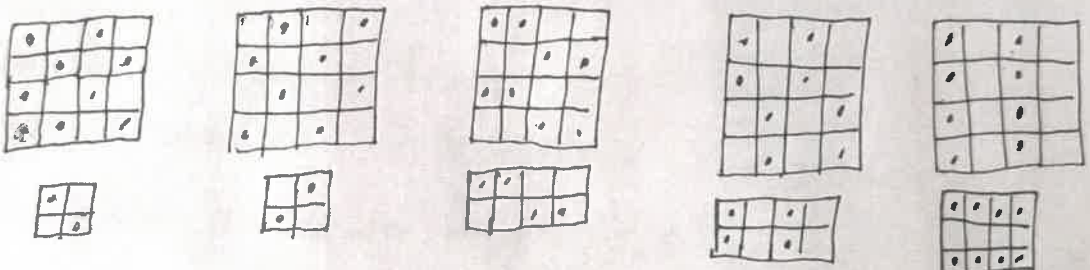


Получится, что мин. значение длины суммы векторов будет равно 12

Ответ: 12

№5

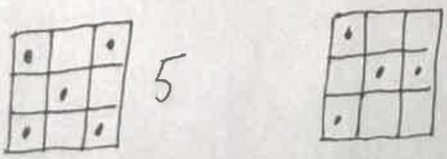
Для того, чтобы в любом квадрате 2×2 было ровно 2 фишки, есть 4 способа расстановки



Но в любом из случаев фишки будут занимать ровно половину клеток => половину площади

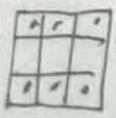
$k = \frac{n^2}{2}$ (при нецелом k округлять в большую ~~сторону~~ и в меньшую сторону, 2 значения)

Проверим для $n = 3$



Ответ: $k = \frac{n^2}{2}$ для четных n и округление в обе стороны для нечетных n и $k = n(n-1)$ для нечетных

Также для нечетных n есть способ

 6 $k = n(n-1)$ и  3 $k = n(n-2) \rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

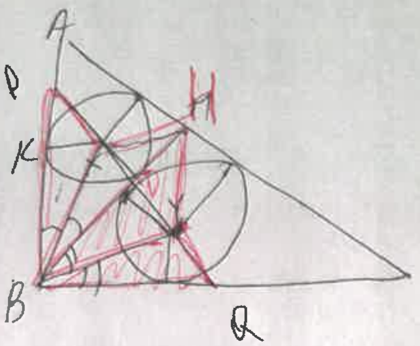
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	8	1	4	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

N 4



$\triangle BPX = \triangle BHX$ т.к $\triangle BKX = \triangle BQX$ (по 2 сторонам и углу)

(BX биссектриса, углы BKX и BQX прямые, BH - общая)

Аналогично для $\triangle BHX$ и BQY

Из этого следует, что $\triangle BPQ$ р/б (BP=BQ), а также

$PB = BQ = BH \Rightarrow PB = BQ = a \Rightarrow S_{BPQ} = \frac{1}{2} PB \cdot BQ = \frac{a^2}{2}$

N 3

числа должны быть зеркальны, для того чтобы выполнялось это условие

Такими числами будут: 121; 141; 171; 313; 666

Ответ: 121; 141; 171; 313; 666

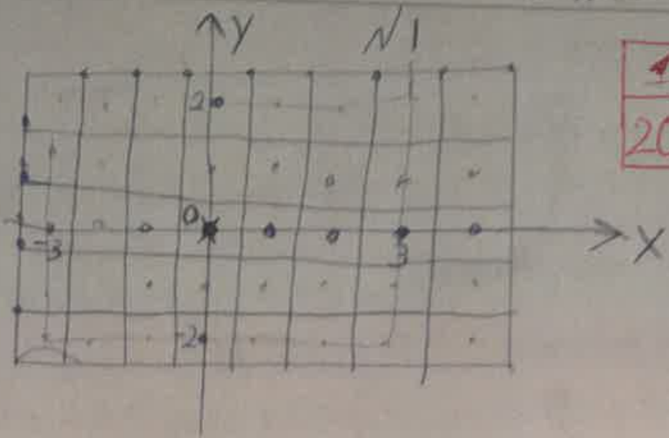
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 6 | 9 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№1

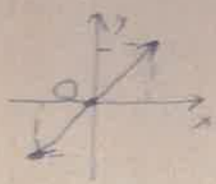


1	2	3	4	5	Σ
20	2	8	20	12	62

30б

• Закрашеная клетка (центр) - начало координат

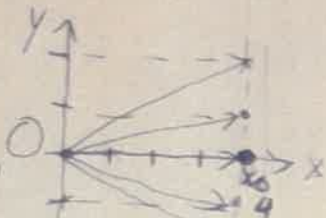
Для векторов с координатами $x \in [-3;3]$ и $y \in [-2;2]$, существует противоположный вектор в сумме с которым он даст 0.



Сумма векторов до центров клеток всех кроме последнего столбца = 0.

Сумма векторов до всех = сумме до клеток последнего столбца.

• Сумма векторов с равными x и противоположными x = 2 • вектор из 0 в x_1



$x_1 = x_2$ $\vec{A_1} + \vec{A_2} = 2\vec{A_0}$

$y_1 = -y_2$

$A_1 = \{x_1 y_1\}$ $A_2 = \{x_2 y_2\}$ $A_0 = \{x_2; 0\}$

Сумма 5 векторов будет $= 5 \cdot A_0$.

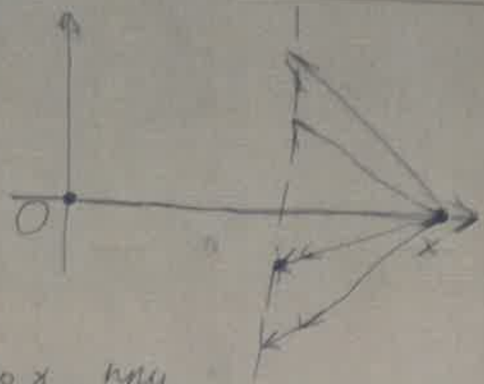
$|A_0| = 4$ $|5A_0| = 5 \cdot 4 = 20$.

MA0001156921

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Сумма всех векторов = $\overrightarrow{OX}$

Мы должны вычесть 2 вектора



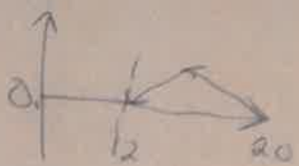
По оси X мы можем максимально уменьшить на 8

~~Если~~ При равном уменьшение по x, при $y \neq 0$ итоговый вектор будет > чем при $y = 0$ => минимальная сумма = 12.

~~Как приме~~

Пример: не берём вектора (4, 1), (4, -1)

Ответ: минимальное значение = 12



№ 2

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$$

$$3\sin^2 x - 6\sin x + 3 - 3\cos x + 2\cdot 2\sin x\cos x = 0$$

$$3(\sin x - 1)^2 - 3\cos x + 4\sin x\cos x = 0$$

$$3(\sin x - 1)^2 + 3\cos x(\sin x - 1) + \sin x\cos x = 0$$

$$(\sin x - 1)(3\sin x - 3 + 3\cos x) + \sin x\cos x = 0$$

$$3(\sin x - 1)(\sin x + \cos x - 1) + \sin x\cos x = 0$$

Вариант № ____ M A 0 0 0 1 1 5 6 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

• $\sin x = 1 \quad \cos x = 0.$

$3\cdot 1^2 - 3\cdot 0 - 6 + 4\cdot 1\cdot 0 + 3 = 0.$

$3 - 6 + 3 = 0$ (+)

• $\cos x = 1 \quad \sin x = 0.$

$3\cdot 0 - 3\cdot 1 - 6\cdot 0 + 4\cdot 0\cdot 0 + 3 = 0.$

$-3 + 3 = 0.$ (+)

• $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

• $\cos x = 1$

$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$4 \sin x \cos x - 3 \cos x + 3 \sin^2 x - 6 \sin x + 3 = 0.$

$$\cos x = \frac{3(\sin x - 1)^2}{3 - 4 \sin x}.$$

$$1 \geq \frac{3(\sin x - 1)^2}{3 - 4 \sin x} \geq -1$$

$3 \sin^2 x - 6 \sin x + 3 \geq 4 \sin x - 3$

$3 \sin^2 x - 6 \sin x + 3 \leq 3 - 4 \sin x \quad (3 \sin^2 x - 2 \sin x) \leq 0.$

$\sin x (3 \sin x - 2) \leq 0$

$\sin x \in \left[0; \frac{2}{3}\right].$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0001156921

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 6 | 9 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в данной строке

№4.

$\overline{abc} \equiv 1 \mod(a+b+c+1)$

$\overline{cba} \equiv 1 \mod(a+b+c+1)$.

$\overline{abc} = 100a+10b+c$

$\overline{cba} = 100c+10b+a$.

$\overline{abc} - \overline{cba} \equiv 0 \mod(a+b+c+1)$.

$99a - 99c = k(a+b+c+1) \quad k \in \mathbb{Z}$.

$99(a-c) = k(a+b+c+1)$

$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$

$a-c < a+b+c+1 \Rightarrow a-c \not\vdots\ a+b+c+1 \Rightarrow$

$НОД(99, a+b+c+1) > 1$ <u>кроме $a-c \le 0$</u>

• $a+b+c+1 \,\vdots\, 3$ • $a+b+c \,\vdots\, 11$

• $a+b+c+1 \,\vdots\, 3$.

$a+b+c \underset{3}{\equiv} 2. \Rightarrow \overline{abc} \underset{3}{\equiv} 2$.

$\overline{abc} = n\cdot(a+b+c+1)+1 \quad n \in \mathbb{Z}$

• mod 3.

$2 = n \cdot 0 + 1$

$2 = 1$ Противоречие ?!

Вариант № 1 MA000115692 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

• $a+b+c+1 \vdots 11$

$\overline{abc} \underset{11}{\equiv} -a+b-c$

$a+b+c+1 \; max = 9+9+9+1=28$

$a+b+c+1 \vdots 11 \Rightarrow a+b+c+1 = 11 \, \underset{\smile}{\vdots} \, 22.$

$a+b+c = 10 \, \underset{\smile}{\vdots} \, 21$

$\overline{abc} = n(a+b+c+1)+1$

mod 11

$\overline{abc} \underset{11}{\equiv} 1$

$-a+b-c=1 \quad b=a+c+1$

• $a=c.$

$\overline{abc} = \overline{cba}.$ $\quad \overline{abc}=121$

$\overline{aba} = n(2a+b+1)+1$

• $\begin{cases} a+b+c=10 \, \underset{\smile}{\vdots} \, 21 \\ b=a+c+1 \end{cases}$

$2a+2c+1=10 \, \underset{\smile}{\vdots} \, 21$ • $2a+2c \neq 9.$

• $2a+2c=20$

$a+c=10.$

• $b=a+c+1=11 \quad b \leq 9$ Противоречие!?

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 6 | 9 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Остаётся только $a=c$.

$\overline{aba} = 100a + 10b + a$

$101a + 10b = n(a+b+a+1) + 1 \quad n \in \mathbb{Z}$

$101a + 10b = 2na + nb + n + 1$

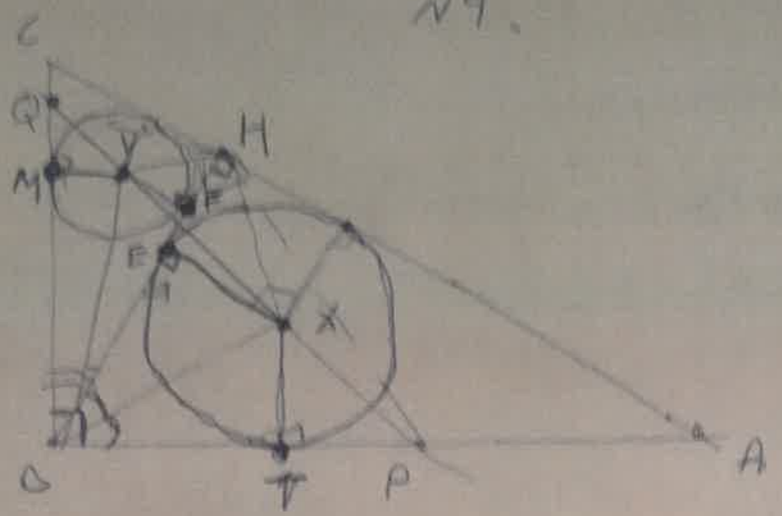
Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	1	5	6	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке страниц

№4.



$BH = a$. S_{BQP} – ?

$a^2 = CH \cdot HA$ $\quad a = \dfrac{BA \cdot BC}{CA}$.

$S_{BQP} = QB \cdot BP \cdot \frac{1}{2}$.

• $BP = BT + TP$ $\quad BP = BE + TP$.

$BT = BE$

$BQ = BM + MQ$

$BM = BF$ $\quad BQ = BF + MQ$.

• $\triangle HEX = \triangle PTX \Rightarrow HE = TP$

$BP = BH + HE = a$.

• $\triangle QMY = \triangle HFY \Rightarrow QM = HF$

$BQ = BM + MQ = BF + FH = a$.

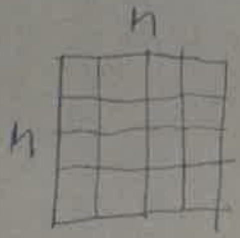
MA 000 115 69 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$S_{\Delta BQP} = BQ \cdot BP \cdot \frac{1}{2} = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Ответ $\frac{a^2}{2}$.

№5.



$n \geq 2$. k фишек.

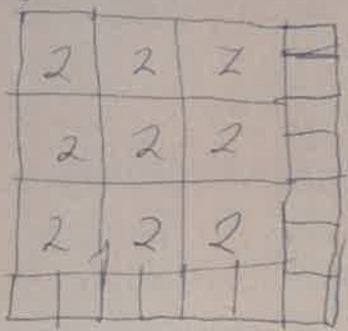
~~$k \leq \frac{n\cdot(n-1)}{2} + n$~~

- n – чётно $n \vdots 2$

2	2	2.
2	2	2
2	2	2

Тогда таблица разбивается на квадраты 2×2 в каждом из которых 2 фишки => всего фишек. $n^2/2$.

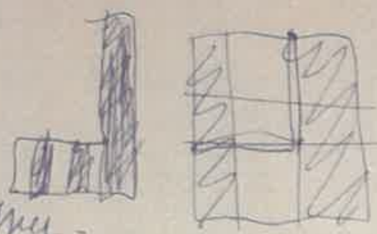
- n – нечётно $n \not\vdots 2$.



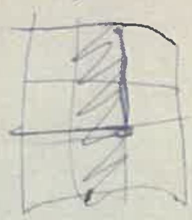
$(n-1)(n-1)$ таблицу можно разделить на кварать 2×2 в каждом ≤ 2 фишки.

$\frac{(n-1)^2}{2}$

остаётся кусок скраю. максимум в нём $n + \frac{(n-1)}{2}$ фишек при разлиновки всей таблицы в полоску.



если инвертировать получается что минимум $\frac{n-1}{2}$.



Также возможны варианты клеточной раскраски в них. n или $n-1$ клеток.

MA0001156921

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

итого возможны.

- $\frac{n-1}{2}\cdot n = \frac{n^2-n}{2}$.
- $\frac{(n-1)^2+(n+1)^2}{4}$
- $\frac{n+1}{2}\cdot n = \frac{n^2+n}{2}$
- $\frac{(n-1)(n+1)}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	0	8	3	0	2	1

Адрес площадки проведения ____________

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ИВАНОВА

Имя МАРИЯ

Отчество МАКСИМОВНА

Дата рождения 04.05.2004 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 7 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 8-928-956-04-10 Подпись ____

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

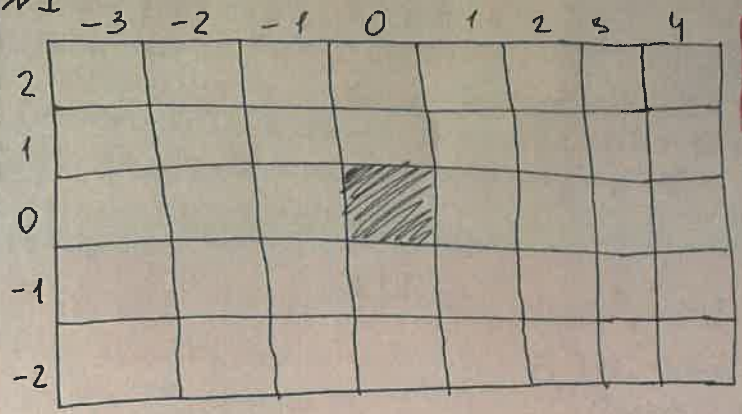
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	8	3	0	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1



1	2	3	4	5	Σ
20	16	20	2	2	60

1) Пусть закрашенная клетка имеет координаты (0;0)

2) Сумма длин всех векторов в прямоугольнике с координатами (-3;-2); (3;2); (-3;2); (3;-2) - равно 0 ⇒

⇒ Нужно найти наименьшую сумму длин векторов, начиная от закрашенной клетки с координатами (0;0) до точек (4;2); (4;1); (4;0), (4;-1); (4;-2).

3) $\vec{a}\{4;2\} + \vec{b}\{4;1\} + \vec{c}\{4;0\} + \vec{d}\{4;-1\} + \vec{e}\{4;-2\} =$

$= \vec{t}\{x_a + x_b + x_c + x_d + x_e;\ y_a + y_b + y_c + y_d + y_e\}$

$\vec{t}\{4+4+4+4+4;\ 2+1+0-2-1\}$; $\vec{t}\{20;0\} \Rightarrow |\vec{t}|=20$

Для того чтобы сумма была наименьшей, нужно исключить 2 вектора (по условию), а не или вид

$\vec{t_1}\{x_b + x_c + x_d;\ y_b + y_c + y_d\} = \vec{t_1}\{12;0\}$; $|\vec{t_1}| = 12$

$\vec{t_2}\{x_a + x_c + x_e;\ y_a + y_c + y_e\} = \vec{t_2}\{12;0\}$; $|\vec{t_2}| = 12$

Ответ: 12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0$

$4\sin^2x-(1-\cos^2x)-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cdot\cos x+3=0$

$4\sin^2x+\cos^2x-1-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cdot\cos x+3=0$

$4\sin^2x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2x-3(2\sin x+\cos x)-1+3=0$

$(2\sin x+\cos x)^2-3(\cos x+2\sin x)+2=0$

Пусть $2\sin x+\cos x=t$

$t^2-3t+2=0$

$D=9-8=1 \Rightarrow t_1=\frac{3+1}{2}=2;\ t_2=\frac{3-1}{2}=1$

1) $2\sin x+\cos x=2$

Пусть $\cos x=a$

$2\sqrt{1-a^2}+a=2$

$2\sqrt{1-a^2}=2-a$

$\cancel{4}-4a^2=\cancel{4}-4a+a^2$

$5a^2-4a=0$

$5a\left(a-\frac{4}{5}\right)=0$

$5a=0 \qquad a-\frac{4}{5}=0$

$a=0 \qquad a=0,8$

$\left.\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=1\end{array}\right| \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

$\left.\begin{array}{l}\cos x=0,8\\ \sin x=0,6\end{array}\right| \Rightarrow x=\arcsin(0,6)+2\pi k, k\in Z$

2) $2\sin x+\cos x=1$

Пусть $\cos x=a$

$2\sqrt{1-a^2}+a=1$

$2\sqrt{1-a^2}=1-a$

$4-4a^2=1-2a+a^2$

$5a^2-2a-3=0$

$D=4+60=64$

$a_1=\frac{2+8}{10}=1;\quad a_2=\frac{2-8}{10}=\frac{-6}{10}=-0,6$

$\left.\begin{array}{l}\cos x=1\\ \sin x=0\end{array}\right| \Rightarrow x=2\pi n, n\in Z$

$\left.\begin{array}{l}\cos x=-0,6\\ \sin x=0,8\end{array}\right| \Rightarrow x=\pi-\arcsin(0,8)+2\pi k, k\in Z$

Ответ: $x=2\pi k$;

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$;

$x=\arcsin(0,6)+2\pi n$;

$x=\pi-\arcsin(0,8)+2\pi k$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$$\begin{cases} 100a+10b+c \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \\ 100c+10b+a \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 100a+10b+c-1 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \\ 100c+10b+a-1 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 99a+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \\ 99c+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1)\ a=c \\ 2)\ a+b+c+1=9 \\ 3)\ a+b+c+1=11 \end{matrix}$$

1) если $a=c \Rightarrow$ подходят числа $\overline{aba}$

$$\frac{100a+10b+a}{a+b+a+1} = X + \frac{1}{a+b+a+1}$$

$$\frac{101a+10b-1}{2a+b+1} = x, \quad x \in N$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1} + 10 = x$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1} = x-10 \Rightarrow x \geq 10$$

если $a=1$

$$\frac{70}{3+b} = x-10 \;\Big|\Rightarrow b=2;\ b=4;\ b=7$$

если $a=2$

$$\frac{153}{5+b} = \frac{51\cdot 3}{5+b} = x-10 \text{ — нет } b \leq 9$$

если $a=3$

$$\frac{232}{b+7} = \frac{8\cdot 29}{b+7} \Rightarrow b=1$$

если $a=4$

$\frac{313}{9+b}$; 313 нельзя разложить на множители $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нет b

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

если $a=5$

$\frac{394}{11+b}=\frac{2\cdot 197}{11+b}$; 197 нельзя разложить на множители $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ нет b

если $a=6$

$\frac{475}{13+b}=\frac{19\cdot 25}{13+b}$ $\Rightarrow b=6$

если $a=7$

$\frac{556}{15+b}=\frac{4\cdot 139}{15+b}$; 139 нельзя разложить на множители $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ нет b

если $a=8$

$\frac{7\cdot 7\cdot 13}{17+b}$ $\Rightarrow$ нет b

если $a=9$

$\frac{718}{19+b}=\frac{2\cdot 359}{19+b}$; 359 нельзя разложить на множители $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ нет b

Числа $\overline{abc}$: 121; 141; 171; 313; 666.

(2) если $a+b+c+1=9$

$\frac{100a+10b+c}{9}=x+\frac{1}{9}$

$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{9}=x+\frac{1}{9}$

$11a+b+1-\frac{1}{9}=x+\frac{1}{9}$

Мы пришли к противоречию т.к. $a, b, c, x \in N$

(3) если $a+b+c+1=11$

$\frac{100a+10b+c}{11}=x+\frac{1}{11}$

$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{11}=x+\frac{1}{11}$

$9a+1+\frac{9b-1}{11}=x+\frac{1}{11}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 0 8 3 0 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(9b-1) \vdots 11$ – нет таких b

$9b-1 \underset{11}{\equiv} 0$

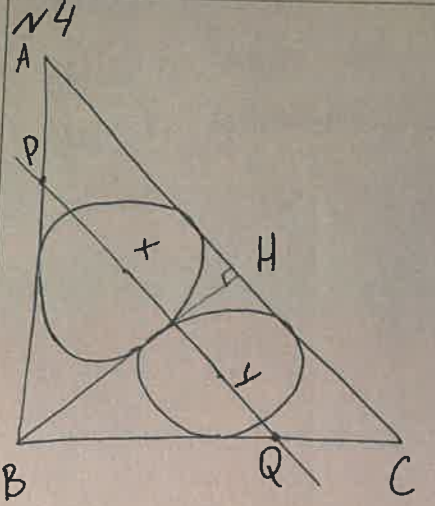
$9b \underset{11}{\equiv} 1$

$b \le 9$ – противоречие

Ответ: 171; 141; 121; 313; 666.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: $BH = a$

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle BQP$:

$\angle B$ - общий, $\angle A = \angle P$ $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BQP$ (по 1 признаку) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BQP}} = k^2$

2) $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BH}{2}$

Если $\triangle ABC$ - равнобедренный ? $\Rightarrow BH = AH = HC$ (т.к. BH - медиана) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{BQP}} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{BQP} = \frac{a^2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 0 8 3 0 2 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Если n-четное, то $k=\frac{n^2}{2}$

Если k-нечетное, $k\in\left[\frac{n(n-1)}{2};\frac{n(n+1)}{2}\right]$

ответ точно.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Дистанционно

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	2	3	2	3	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ИВАЩЕНКО

Имя БРОНИСЛАВ

Отчество Егорович

Дата рождения 22.11.2003 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 13 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона +79185918717 **Подпись** Бр

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

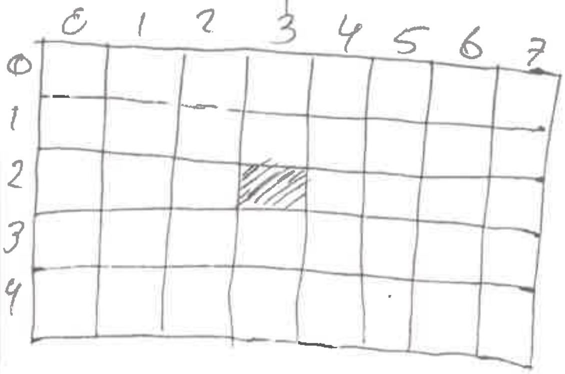
М	А	0	0	0	1	2	3	2	3	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Рассмотрим наш прямоугольник:



1	2	3	4	5	Σ
20	16	20	–	20	76

3о6

И пронумеруем клетки от 0 до 7 и до 4 по горизонтали и вертикали соответственно.

Векторы, которые направлены симметрично относительно закрашенной клетки, взаимно уничтожатся в сумме. В этом можно легко убедиться, если вспомнить ф-лу суммы векторов в координатах. Например, посмотрим на векторы в клетки (0;2) и (6;2) их координаты будут $\{-3;0\}$ и $\{3;0\}$; при суммировании получим, что эти два вектора взаимно уничтожатся, т.к. $\{-3+3;0+0\}=\{0;0\}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 2 3 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение).

Поэтому все векторы кроме направленных в клетки 7 столбца сократятся.

Из-за этого можно рассматривать только клетки столбца 7.

По условию нам нужно убрать две клетки, но для начала рассмотрим какая сумма получается, если их не убирать.

У нас есть векторы $\{4;-2\}, \{4;-1\}; \{4;0\}, \{4;1\}, \{4;2\}$. Если их сложить, то мы получим вектор $\{20;0\}$.

Очевидно, что следует убрать либо клетки $(7;0)$ и $(7;4)$, или $(7;1)$ и $(7;3)$, т.к. их координаты у попарно уничтожаются, при чём, какую бы из этих пар мы не выбрали, ответ будет один - 12

Ответ: 12.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 2 3 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{cba} = 100c + 10b + a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100a + 10b + c \equiv 1 \pmod{a+b+c+1} \\ 100c + 10b + a \equiv 1 \pmod{a+b+c+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100a + 10b + c - 1 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \\ 100c + 10b + a - 1 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \end{cases}$$

Вычтем $(a+b+c+1)$:

$$\begin{cases} 99a + 9b - 2 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \\ 99c + 9b - 2 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \end{cases}$$

Вычтем первое из второго:

$$99(c-a) \equiv 0 \pmod{a+b+c+1}$$

Такое возможно только в 3-х случаях (т.к. $99 = 9 \cdot 11$):

1.) $a+b+c+1 = 9$

2.) $a+b+c+1 = 11$

3.) $a = c$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3 (продолжение)

1.) Рассмотрим случай $a+b+c+1=9$:

$100a+10b+c=n\cdot(a+b+c+1)+1, \; n\in Z \; |:(a+b+c+1)$

$\frac{100a+10b+c}{9}=n+\frac{1}{9}$ { ~~прибавим вычтем~~

$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{9}=n+\frac{1}{9}$

$11a+b+\frac{9}{9}-\frac{1}{9}=n+\frac{1}{9}$

$11a+b+1=n+\frac{2}{9}$

Такого не может быть, т.к. a,b,c - целые.

2.) Рассмотрим $a+b+c+1=11$:

$\frac{100a+10b+c}{11}=n+\frac{1}{11}$

$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{11}=n+\frac{1}{11}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 2 3 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение).

$9a+1+\frac{9b-1}{11}=n+\frac{1}{11}$

$9a+1+\frac{9b-2}{11}=n$

т.к. $a,b,c,n\in N$, то $\frac{9b-2}{11}$ – целое, но это возможно только когда $9b-2 \vdots 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9b-2\equiv 0 \pmod{11}$

$9b\equiv 2 \pmod{11}$

$9b=11n+2,\ n\in Z$

$n=0$ не подходит, а при $n\geq 1$, $b>9$, что противоречит условию.

3.) Рассмотрим $a=c$:

Тогда $\overline{abc}=\overline{cba}=\overline{aba}=100a+10b+a=$

$=101a+10b$

$101a+10b\equiv 1 \pmod{a+b+c+1}$

$101a+10b=n(a+b+c+1)+1,\ n\in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3 (продолжение)

$$101a+10b=n(a+b+c+e)+1 \quad \Big| : (a+b+c+e)$$

$$\frac{101a+10b}{a+b+a+e}=n+\frac{1}{a+b+a+e}$$

$$\frac{101a+10b}{2a+b+e}=n+\frac{1}{2a+b+e}$$

$$\frac{101a+10b-1}{2a+b+1}=n$$

$$\frac{81a+(20a+10b+10)-11}{2a+b+1}=n$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1}+10=n \Rightarrow n\geq 10$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1}=n-10$$

$\frac{81a-11}{2a+b+1}$ должно быть целым

Будем перебирать a от 1 до 9 и подбирать b так, чтобы $\frac{81a-11}{2a+b+1}$ было целым

$a=1$:

$$\frac{70}{b+3}=n-10 \Rightarrow b\in\{2;4;7\} \Rightarrow 121, 141, 171$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	2	3	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение).

$a=2$:

$\frac{153}{b+5}=\frac{3\cdot 51}{b+5}$ => нету b таких, чтобы $(b+5)=3$ или $(b+5)=51$ и $b\le 9$.

$a=3$:

$\frac{232}{b+7}=\frac{8\cdot 29}{b+7}$ => $b=1$ => 313

$a=4$:

~~$\frac{394}{b+9}=\frac{2\cdot 197}{b\ldots}$~~

$\frac{313}{b+9}$ => нету подходящих b.

$a=5$:

$\frac{394}{b+11}=\frac{2\cdot 197}{b+11}$ => нету подх. b.

$a=6$:

$\frac{475}{b+13}=\frac{19\cdot 25}{13+6}$ => $b=6$ => 666

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 2 3 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3 (продолжение).

$a=7$:

$\frac{556}{b+15}=\frac{4\cdot139}{b+15}\Rightarrow$ нет подх. b.

$a=8$:

$\frac{637}{b+17}=\frac{7\cdot91}{b+17}\Rightarrow$ нет подх. b.

$a=9$:

$\frac{718}{b+19}=\frac{2\cdot359}{b+19}\Rightarrow$ нет подх. b.

Ответ: 121, 141, 171, 313, 666.

№ 2.

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0$

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cdot\cos x+\sin^2x+\cos^2x+$

$+2=0$

$(4\sin^2x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2x)-3\cos x-6\sin x+2=0$

$(2\sin x+\cos x)^2-3(2\sin x+\cos x)+2=0$

Пусть $(2\sin x+\cos x)=t$:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	2	3	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение).

$t^2-3t+2=0$

$t_1+t_2=3 \Rightarrow t_1=2$

$t_1\cdot t_2=2 \quad t_2=1$

Возвратимся к x:

1.) $2\sin x+\cos x=1$

$2\sin x+\sqrt{1-\sin^2 x}=1$

$1-2\sin x=\sqrt{1-\sin^2 x} \quad |\uparrow 2$

$\cancel{1}-4\sin x+4\sin^2 x=\cancel{1}-\sin^2 x$

$\sin x(5\sin x-4)=0$

$\sin x=0 \qquad \sin x=\frac{4}{5}$

Подставим в исходное ур-е и найдём cos

$\cos x=1 \qquad \cos x=-\frac{3}{5}=-0,6$

$x_1=2\pi n, n\in Z \qquad x_2=\pi-\arcsin(0,6)+2\pi k, k\in Z.$

2.) $2\sin x+\cos x=2$

$2\sqrt{1-\cos^2 x}+\cos x=2$

$2\sqrt{1-\cos^2 x}=2-\cos x \quad |\uparrow 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение).

$4-4\cos^2 x = 4-4\cos x+\cos^2 x$

$\cos x(5\cos x-4)=0$

$\cos x=0 \qquad \cos x=\frac{4}{5}$

Подставим в исходное ур-е и найдём $\sin x$:

$\sin x=1 \qquad \sin x=0,6$

$x_3=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z \qquad x_4=\arcsin(0,6)+2\pi k, k\in Z.$

Ответ: $x=\{2\pi n, n\in Z; \pi-\arcsin(0,6)+2\pi k, k\in Z; \frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z; \arcsin(0,6)+2\pi l, l\in Z\}$

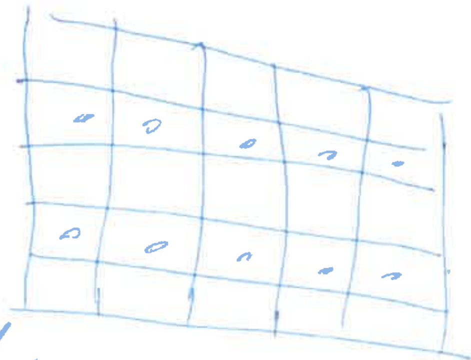
№5

Всего в таблице $n\cdot n$ клеток.
В каждом квадрате 2×2 (4 клетки) должно быть 2 фишки $\Rightarrow$ как минимум в $n\cdot\left[\frac{n}{2}\right]$ клеток должны быть фишки (док-во этого ниже).

Рассмотрим таблицу $n\times n$ (n — нечётно). ~~Закрасим~~

№5(пр)

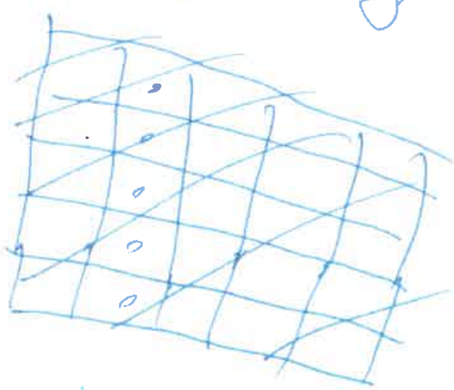
Расставим фишки на строчки таблицы через 1, начиная со 2 (на рисунке $n=5$, но очевидно, что это будет работать и при больших n)

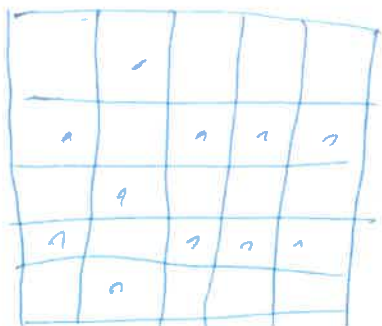


Мы расставим $n \cdot \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ фишек при этом условие выполняется

~~Тепе~~

Теперь расставим фишки на 2 столбце след. образом:





Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1

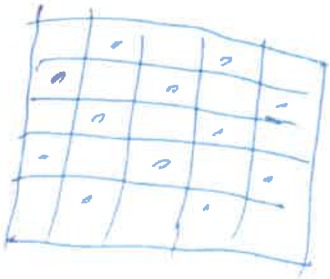
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№5 (пр.)

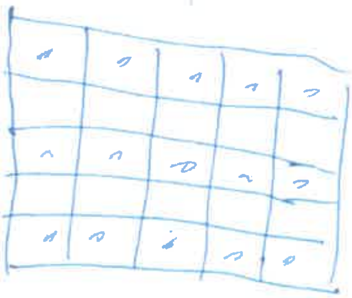
Мы получим $\frac{n\cdot(n+1)}{2}+1$ фишку

Теперь ещё один столбец (4-й):



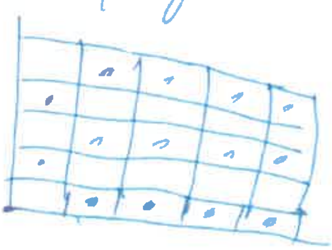
Мы получим $\frac{n(n-1)}{2}+2$ фишки

Сейчас расставим фишки по строкам начиная с 1:



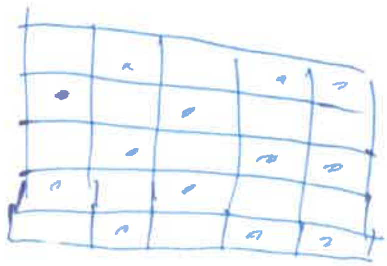
$\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ фишек

И проделаем аналогичные операции

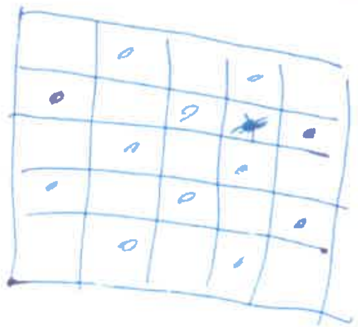


$\frac{n(n+1)}{2}-1$ фишка

№ 5 (пр.)



$\frac{n(n+1)}{2} - 2$ фишек



$\frac{n(n+1)}{2} - 3$ фишек

Таким образом, мы могли получить от $\frac{n(n-1)}{2}$ до $\frac{n(n+1)}{2}$ фишек.

Ответ: при чётном n — $\frac{n^2}{2}$ фишек, при нечётном — от $\frac{n(n-1)}{2}$ до $\frac{n(n+1)}{2}$ фишек.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Нягань, заочно

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	1	1	1	2	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Камов

Имя Рамир

Отчество Анзорович

Дата рождения 29.05.2003 **Класс** 11В

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона 8-912-423-03-04 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке

№1

Заметим, что векторы с началами в закрашенной клетке и концах в симметричной области 7 x 4 вокруг не будут в сумме давать нулевой вектор. Вектор с концами в клетках (4;3) и (8;3) никаким не компенсируется.

Векторы с концами в последнем правом столбце будут в сумме иметь наименьшую вертикальную координату в силу симметрии, если исключать клетки этого столбца, симметричные относительно (8;3).

То есть, или (8;2) и (8;4), или (8;1) и (8;5). Длина суммы оставшихся трёх векторов легко находятся по правилу параллелограмма и равна 12.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	—	80

З.Ю.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Номер 2

1) Преобразуем:

$(4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x) - 3(\cos x + 2\sin x) + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(\cos x + 2\sin x) + 2 = 0$, $\Rightarrow$

$2\sin x + \cos x = 2$, $2\sin x + \cos x = 1$

Пункт а) Воспользуемся методом вспомогательного аргумента

$2\sin x + \cos x = 2 \mid : \sqrt{5}$

$\sin(x + \operatorname{arctg} 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k \end{array}\right.$

Заметим, что из прямоугольного треугольника с катетами 1, 2 и гипотенузой $\sqrt{5}$ следует, что $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \operatorname{arctg} 2 = \frac{\pi}{2}$,

тогда: $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right.$ $n, k \in Z$

Пункт б)

аналогично: $\sin(x + \operatorname{arctg} 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi L \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi M \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi L \\ x = \pi - 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi M \end{array}\right.$ $L, M \in Z$

Ответ: $x = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = 2\pi L, L \in Z$

$x = \pi - 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi M, M \in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Для краткости $x_1 = \overline{100a+10b+c}$

$x_2 = 100c+10b+a$, $S = a+b+c+1$

Заметим, что $a \neq 0$, $c \neq 0$ и $\frac{x_1-1}{S}, \frac{x_2-1}{S} \in \mathbb{Z}$

тогда их разность $\frac{99(a-c)}{S} \in \mathbb{Z}$

Пункт а) $a=c$, тогда

$\frac{x_1-1}{S} = \frac{81a-11}{2a+b+1} + 10$, откуда $\frac{81a-11}{2a+b+1} \in \mathbb{Z}$.

$a=1$, $\frac{70}{3+b}$, $b=2,4,7$

$a=2$, $\frac{151}{5+b}$, нет, так как 151 - простое число

$a=3$, $\frac{232}{7+b}$, $b=1$

$a=4$, $\frac{313}{b+9}$, 313 - простое

$a=5$, $\frac{394}{b+11}$, нет, так как $394=2\cdot197$, $b+11>2$, 197 - простое число

$a=6$, $\frac{475}{13+b}$, $b=6$

$a=7$, $\frac{556}{15+b}$, нет, $556=139\cdot4$, 139 - простое, $b+15>4$

$a=8$, $\frac{634}{17+b}$, нет, $637=49\cdot13$, $13<b+17<49$

$a=9$, $\frac{718}{b+19}$, нет, $718=2\cdot359$, 359 - простое число

Итак, 121, 141, 171, 313, 666

Пункт б) $a \neq c$

Лист ____ из ____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано...

№3 продолжение

Так как $s > a-c$, то 99 имеет общий делитель s

$$\frac{x_1-1}{s} = 1 + \frac{99a+9b-2}{s},$$

$99a+9b-2$ не делится ни на 3, ни на 9.

Значит $s=11$, $s=22$, больше нет, так как $s \leq 9+9+9+1=28$

1) $s=11$, тогда

$$\frac{x_1-1}{s} = 9 + \frac{9b+9}{11}$$ — не целое ни при каком b

2) $s=22$

$$\frac{x_1-1}{s} = \frac{99a+9b+20}{11\cdot 2},$$

Тогда $9b+20$ делится на 11, что невозможно.

Ответ: 121, 141, 171, 313, 666.

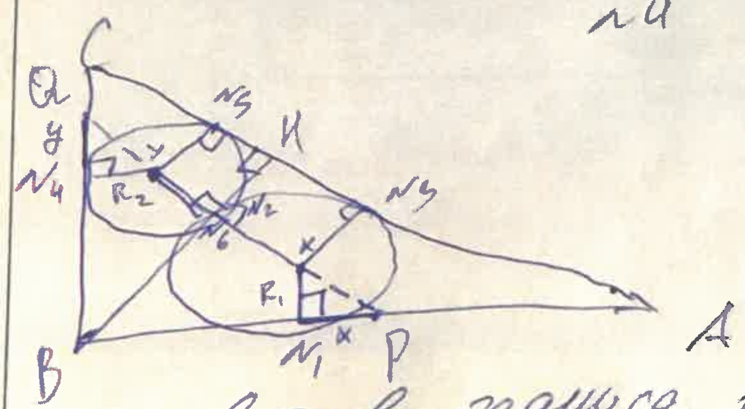
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	1	1	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



По свойству радиуса, проведенного в точку касания:

~~QN_3HN_2X и N_5HN_6Y~~ =

N_3HN_2X и N_5HN_6Y – квадраты со сторонами r_2 и r_1

По свойству касательных: $BN_4 = BN_6 = a - r_2$, $BN_1 = BN_2 = A - r_1$

Заметим, что прямоугольные треугольники BQP, QN_4Y и XPN_1 подобны.

Их подобие:

$\frac{x}{r_1} = \frac{r_2}{y}$, $x = \frac{r_1 r_2}{y}$

$\frac{x + A - r_1}{y + A - r_2} = \frac{r_2}{y}$

$r_1 r_2 + Ay - r_1 y = r_2 y + Ar_2 - (r_2)^2$

$r_2(A - r_1 - r_2) = y(A - r_1 - r_2)$

Откуда $y = r_2$, тогда $x = r_1$

Лист ____ из ____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке

№4 продолжение

$BQ = BP = BH = A$

$S_{BQP} = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Вариант № 1 MA0001111221

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Очевидно, что задаче удовлетворяет шахматная раскраска и того при чётном n имеем: $a = \frac{n^2}{2}$, при нечётном n имеем: $a = \frac{(n^2+1)}{2}$.

Лист из

Для a+b

$\frac{100a+10b+c}{9}$

$\frac{99a+9b+a+}{9}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	6	6	4	2	1

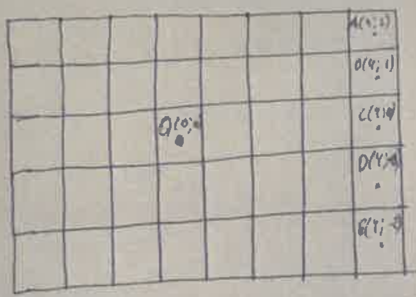
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Рассмотрим прямоугольник 5×7, в котором закрашенная клетка является центром. В этом ~~пр~~ прямоугольнике для каждой клетки найдётся симметричная ей ⇒ если провести 2 вектора, 1 в клетку, а 2 в симметричную, то сумма этих векторов будет равна 0.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	–	80



3-8

Всего есть 4 различных варианта исключения точек (остальные не рассматриваются в силу симметрии, например, если исключить точки A и D, то это равносильно исключению точек B и D)

Рассмотрим 2 варианта:

I) Если мы не собираемся исключать ~~2 сими~~ точку C, то мы должны исключить 2 симметричные точки для достижения наименьшей длины, действительно, ведь длина равна $\sqrt{|x_1|^2+|y_1|^2}$, где x_1 и y_1 – координаты M (M – точка при которой $\vec{OM}$ – вектор-сумма всех векторов). $|\vec{OM}|$ минимален при $y_1=0$, т.к. x_1 не зависит от исключенных точек и равен 12, т.к. всего есть 6 векторов с одинаковой x координатой равной 4, 2 из которых мы не провели

Для a+b

$\frac{100a+10b+c}{9}$

$\frac{99a+9b+a}{9}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 6 | 4 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

II) Если мы собираемся исключить C, то мы не сможем исключить 2 симметричные точки (у C её нет) $\Rightarrow y_1 \neq 0$, что приведёт к наименьшей длине $\vec{OM}$

Из I и II следует, что нужно исключить симметричные точки, допустим, что это A и D, тогда

$x_1 = x_B + x_C + x_D = 12.$

$y_1 = y_B + y_C + y_D = 0.$

$|\vec{OM}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 12.$

Ответ: 12

№2.

$3\sin^2(x) - 3\cos(x) - 6\sin(x) + 2\sin(2x) + 3 = 0.$

$3\sin^2(x) - 3\cos(x) - 6\sin(x) + 2\sin(2x) + 1 - 1 + 3 = 0$

$4\sin^2(x) + 4\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) - 3\cos(x) - 6\sin(x) + 2 = 0.$

$(2\sin(x) + \cos(x))^2 - 3(2\sin(x) + \cos(x)) + 2 = 0$

$2\sin(x) + \cos(x) = 2.$

$2\sqrt{1-\cos^2(x)} = 2 - \cos(x).$

т.к. $\cos(x) \in [-1; 1]$, то

$2 - \cos(x) \in [1; 3] \Rightarrow$

$2 - \cos(x) \geq 0.$

$4 - 4\cos^2(x) = 4 - 4\cos(x) + \cos^2(x)$

$\cos(x)(5\cos(x) - 4) = 0$

$\cos(x) = 0$ $\quad$ $\cos(x) = \frac{4}{5}.$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $\quad$ $\sin(x) = \frac{3}{5}.$

$2\sin(x) + \cos(x) = 1$

$2\sqrt{1-\cos^2(x)} = 1 - \cos(x)$

т.к. $\cos(x) \in [-1; 1]$, то

$1 - \cos(x) \in [0; 2] \Rightarrow$

$1 - \cos(x) \geq 0.$

$4 - 4\cos^2(x) = 1 - 2\cos(x) + \cos^2(x)$

$5\cos^2(x) - 2\cos(x) - 3 = 0.$

$\cos(x) = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{10} = \frac{2 \pm 8}{10}.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 6 6 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x = \arcsin(\frac{3}{5}) + 2\pi k$. $\quad \cos(x) = 1 \quad \cos(x) = -\frac{3}{5}$

$x = 2\pi k$. $\quad \sin(x) = \frac{4}{5}$

$x = \pi - \arcsin(\frac{3}{5}) + 2\pi k$

Ответ: $\left.\begin{matrix} \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2\pi k \\ \arcsin(\frac{3}{5}) + 2\pi k \\ \pi - \arcsin(\frac{3}{5}) + 2\pi k \end{matrix}\right\} k \in \mathbb{Z}$.

№3.

Для числа $\overline{abc}$:

$\begin{cases} 100a + 10b + c \equiv 1 \pmod{a+b+c+1} \\ 100c + 10b + a \equiv 1 \pmod{a+b+c+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100a + 10b + c - 1 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \\ 100c + 10b + c - 1 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \end{cases}$

$\begin{cases} 99a + 9b - 2 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \\ 99c + 9b - 2 \equiv 0 \pmod{a+b+c+1} \end{cases}$

Возможно это в 3-х случаях.

I) $a+b+c+1 = 9$

II) $a+b+c+1 = 11$

III) $a = c$.

I) Для $a+b+c+1 = 9$.

$\frac{100a+10b+c}{9} = k + \frac{1}{9}$

$\frac{99a+9b+a+b+c+1-1}{9} = k + \frac{1}{9}$

$11a + b + 1 - \frac{1}{9} = k + \frac{1}{9}$ невозможно, т.к $a, b, c, k \in \mathbb{N}$

Для $a+b+c$

$\frac{100a+10b+c}{9} =$

$\frac{99a+9b+a+b}{9}$

$11a+b+1-\frac{1}{9}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 6 | 4 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

V) Для $a+b+c+1=11$

$$\frac{100a+10b+c}{11} = k+\frac{1}{11}$$

$$\frac{99a+9b+c+a+b+1-1}{11} = k+\frac{1}{11}$$

$$9a+1+\frac{9b-1}{11} = k+\frac{1}{11}$$

Т.к. $a, b, c, k \in N$, то $\frac{9b-1}{11}$ должно быть кратно 11.

$9b-1 \equiv 0 \pmod{11}$

$9b \equiv 1 \pmod{11}$.

при $b \in [0;9]$ $9b$ принимает значения: $0; 9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81$, но ни одно из них не даёт остаток 1 при делении на 11 $\Rightarrow$ невозможно

VI $a=c$.

$$\frac{100a+10b+a}{a+b+a+1} = \frac{101a+10b}{2a+b+1} = k+\frac{1}{2a+b+1}$$

$$k = \frac{101a+10b-1}{2a+b+1}$$

$a=1$

$$\frac{70\cancel{b}}{3+b} = k-10$$

$b = 2, 4, 7$

Для $a+b+c$

$\frac{100a+10b+c}{9}=$

$\frac{99a+9b+a+b+}{9}$

$11a+b+1-\frac{1}{9}=$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 6 6 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a=2:$

$\frac{153}{5+b}=k-10$

нет $b\leq 9$.

$a=3:$

$\frac{232}{b+7}=\frac{8\cdot 29}{b+7}$

$b=1$.

$a=4:$

$\frac{313}{9+b}=k-10$

$b\in\varnothing$, т.к. 313 – простое.

$a=5:$

$\frac{394}{11+b}=\frac{2\cdot 197}{11+b}$

$b\in\varnothing$, т.к. 197 – простое и $b\leq 9$.

$a=6$

$\frac{475}{13+b}=\frac{19\cdot 25}{13+b}$

$b=6$.

$a=7:$

$\frac{556}{15+b}=\frac{4\cdot 139}{15+b}$

$b\in\varnothing$, т.к. 139 – простое и $b\leq 9$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 6 6 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a=8$:

$\frac{637}{17+b} = \frac{7\cdot7\cdot13}{17+b}$ нет $b\in[0;9]$

$a=9$:

$\frac{718}{19+b} = \frac{3\cdot359}{19+b}$

$b\in\varnothing$, т.к. 359 - простое и $b\in[0;9]$.

Итого: 121, 141, 171, 313, 666

Ответ: 121, 141, 171, 313, 666

$100a+$
9
$99a+9b$
$4a+b+$

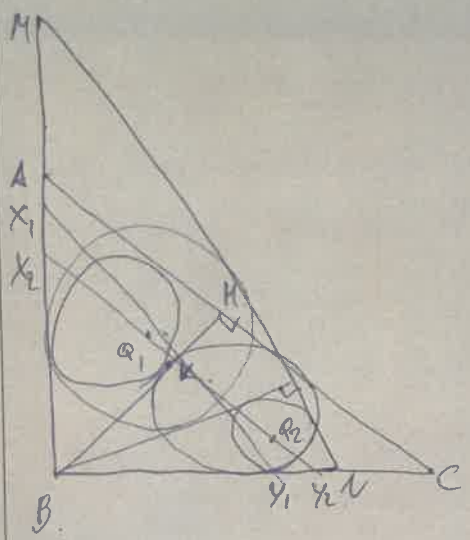
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 6 | 4 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Дано:
BH – высота.
BM = a.

Решение:
1) Докажем, что $S_{BXC} = S_{XBC_1}$ если бы он был рав. а ноб. Для этого возьмем $\triangle ABC$ равноб., а $\triangle MNC$ – произвольный. Для удобства чтобы $X = Q_1$, а $Y = Q_2$, а ~~рорд~~ центры окр в равноб. тр. O_1 и O_2

2) $S_{X_1Y_1B} = S_{BX_1KY_1} + S_{X_1X_2K}$

$S_{X_2Y_2B} = S_{BX_2KY_2} + S_{Y_1Y_2K}$.

3) O_1O_2 и Q_1Q_2 пересекаются в K. $K \in BH \Rightarrow BH$ – биссектр. $\Rightarrow$ K равноуд. от AB и BC. $X_2K = KY_2$, т.к. $Y_1K = KY_2$, т.к. $\triangle ABC$ – равноб., т.к. BH – бис. в равноб. треуг $\Rightarrow$ медиана, то $X_1K = KY_1$, $\angle X_1KX_2 = \angle Y_1KY_2 \Rightarrow \triangle X_1KX_2 = \triangle Y_1KY_2 \Rightarrow$ $S_{X_1X_2K} = S_{Y_1Y_2K}$

~~$2\bar{a}\ldots$~~

$\frac{100a+\ldots}{9}$

$99a+9b\ldots$

$11a+b+\ldots$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 6 6 4 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) BH - мед в равноб. $\triangle ABC \to AH = BH = HC$.
$\triangle ABH = \triangle HBC$ по 3-м сторонам ($AH = HC$, $AB = BC$, BH - общая) $\Rightarrow r_1 = r_2$.

5) Допустим окружности касаются BH в J.
$HJ = r$, ~~$BH = a - r$~~ $BJ = a - r$.
$AB = BC = a\sqrt{2}$.
$r = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

6) Т.к. точки касания совпадают, то $J \in PQ$.
$PQ \parallel AC \Rightarrow PQ \perp BJ \Rightarrow \triangle PQB$ - равноб.

7) аналогично п.4: $BJ = PJ = JQ = a - r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$PQ = a\sqrt{2}$
$S_{PBQ} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

______________________ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 7 | 7 | 2 | 1 |

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № ________

Фамилия Чипура

Имя Егор

Отчество Олегович

Дата рождения 25.09.2003 Класс 11

Предмет математика

Работа выполнена на _____ листах Дата выполнения работы 6.03.2021

Номер телефона 7 925 075 71 88 Подпись ________

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 2 7 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

1	2	3	4	5	Σ
20	20	6	20	6	72

Зол

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + 3 = 0$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$

$3\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + 3 = 0$

$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + 3 = 0$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x = 0$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + \frac{3}{2}\sin^2 x - 3\cos x = 0$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 x - 6\sin x + \frac{3}{2}\sin^2 x + \cos x(4\sin x - 3) = 0$

$-\frac{1}{2}(3+\cos x - 3\sin x)(-3+3\cos x+\sin x) = 0$

$(3+\cos x - 3\sin x)(-3+3\cos x+\sin x) = 0$

① $3+\cos x - 3\sin x = 0$

$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

② $-3+3\cos x+\sin x = 0$

$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

Пусть $tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \frac{t}{1+t^2};$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

1) $3 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{6t}{1+t^2} = 0$

$1+t^2 \neq$

$t^2 \neq 1$

$3+3t^2+1-t^2-6t = 0$

$2t^2-6t+4 = 0 \mid :2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 7 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$t^2-3t+2=0$

$D=9-8=1$

$t_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}$ $t_1=2$ $t_2=1$

$tg\frac{x}{2}=2 \Rightarrow \frac{x}{2}=arctg\,2+\pi n, n\in Z$

$x=2\,arctg\,2+2\pi n, n\in Z$

$tg\frac{x}{2}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}=arctg\,1+\pi K, K\in Z$

$x=2\,arctg\,1+2\pi K, K\in Z$

$\boxed{x=\frac{1}{2}(4\pi K+\pi), K\in Z}$

2) $-3+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}=0$

$-3+\left(\frac{3-3t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}=0 \quad |\cdot(1+t^2)$

$-3(1+t^2)+3-3t^2+2t=0$

$\cancel{-3}-3t^2+\cancel{3}-3t^2+2t=0$

$-6t^2+2t=0 \quad |:(-2)$

$3t^2-t=0$

$t(3t-1)=0$ $\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=0 \\ tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

$tg\,x\ \frac{x}{2}=0$

$\frac{x}{2}=\pi m, m\in Z$

$\boxed{x=2\pi n, m\in Z}$

Необходимо выяснить, не является ли $\cos\frac{x}{2}=0$ корнем уравнения: $\cos\frac{x}{2}=0$; $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$; $x=\pi+2\pi n$, подставим в уравнение $3\cdot 0-3\cdot(-1)-6\cdot 0+2\cdot 0+3=6\neq 0$ – значит не является корнем

$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+p\pi$

$x=2arctg\frac{1}{3}+2p\pi, p\in Z$

Ответ: $x=2\,arctg\,2+2\pi n, n\in Z$; $x=\frac{1}{2}(4\pi K+\pi), K\in Z$; $x=2\pi m, m\in Z$; $x=2\,arctg\frac{1}{3}+2p\pi, p\in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

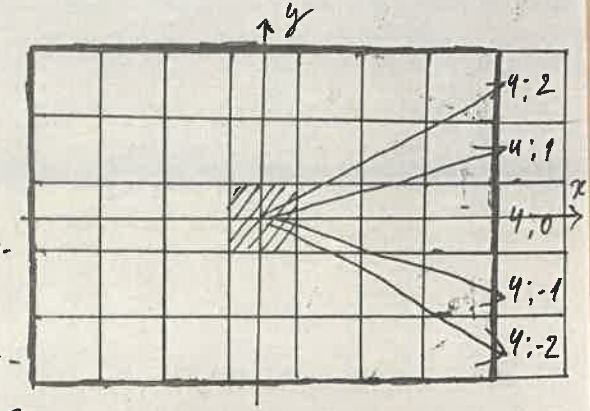
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	2	7	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 1



Для решения задачи, введем прямоугольну системусистему координат, при этом центр ее поместим в закрашенную клетку. Очевидно, что наша клетка с координатами (0; 0), будет центром прямоугольника 7×5 (выделено жирным). Если отложить векторы клетки (0;0) во все остальные клетки прямоугольника 7×5, то мы получим множество векторов, причем для каждого вектора (a; b), найдется вектор (−a;−b). Таким образом, сумма всех векторов в прямоугольнике 7×5 будет равна $\bar{0}$ (нулевому вектору). Кроме того, чтобы получить наим. подійне сумму векторов, нам выгодно пропустить клетки не в этом прямоугольнике, а в оставшемся столбце.

Векторы, отложенные из (0; 0) в клетки оставшегося столбца, будут иметь координаты: (4; −2); (4; −1); (4; 0); (4; 1); (4; 2). Суммы трех векторов (два убрали), будет иметь координаты: $(3 \cdot 4; a+b+c)$, где a, b, c принадлежат $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. При этом модуль вектора будет $\sqrt{12^2+(a+b+c)^2}$. Очевидно, что модуль будет иметь минимальное значение при минимальной сумме $(a+b+c)$, но минимальной она будет при координатах по $y = -1; 0; 1$, значит: $(a+b+c)^2 = (-1+0+1)^2 = 0$. Таким образом, исключив два вектора с координатами (4;2) и (4; −2) мы получим

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	O	O	O	1	2	2	7	7	2	1

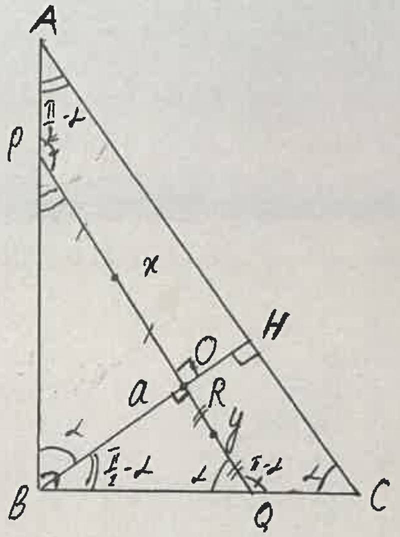
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

минимальную сумму равную $\sqrt{12^2} = 12$

Ответ: 12

№4



Дано:

$BH = a$

Найти:

S_{PBQ} – ?

Решение:

Пусть $\angle ACB = \alpha \Rightarrow$ в пр-у $\triangle ABC$, $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$; В пр-у $\triangle BHC$ $\angle HBC = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Т.к $\angle ABC = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle ABH = \angle ABC - \angle HBC = \alpha$.

Итак,
$$\left.\begin{aligned} \angle BAH &= \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \angle ABH &= \angle HCB = \alpha \\ \angle AHB &= \angle BHC = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle HBC \sim \triangle HAB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{BC}{AC} = \frac{HC}{HB}$$

$$\frac{HB}{HA} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow HB^2 = HA \cdot HC$$

$$a^2 = HA \cdot HC$$

Распишем стороны $\triangle ABC$ через α:

$$\sin\alpha = \frac{BH}{BC} = \frac{a}{BC} \Rightarrow BC = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$tg\,\alpha = \frac{BH}{HC} \Rightarrow HC = a\, tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = tg\,\alpha \cdot BH$$

$$tg\,\alpha = \frac{BH}{HC} \Rightarrow HC = \frac{BH}{tg\,\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BH}{\cos\alpha}$$

Пусть $R = Oy \Rightarrow Oy = yM$, как радиусы окружности $\Rightarrow$ $yM = R$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 2 7 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

BH - высота $\triangle AB \Rightarrow BH$ - перпендикулярно AC, yM перпендикулярно $AC \Rightarrow OH \parallel yM$, $OH = R \Rightarrow OHMy$ - квадрат.

xN перпендикулярно AC, т.к. это радиус, BH перпендикулярно AC, $xN \parallel OH \Rightarrow xN = OH = R = Ox \Rightarrow$

$OH = R \Rightarrow PO = PH - OH = a - R.$

$\sin\angle = \frac{PO}{PQ} \Rightarrow PQ = \frac{a-R}{\sin\angle}$

$\cos\angle = \frac{PO}{PB} \Rightarrow PB = \frac{a-R}{\cos\angle}$

По теор. синусов для $\triangle POQ$:

$$\frac{PQ}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{BO}{\sin\angle} = \frac{OQ}{\sin(\frac{\pi}{2}-\angle)} = \frac{OQ}{\sin\angle}$$

$$\frac{a-R}{\sin\angle} = \frac{OQ}{\sin\angle} \Rightarrow OQ = a - R \Rightarrow OQ = PO \Rightarrow \triangle OPQ - р/б \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OBQ = \angle OQB = \frac{\pi}{4} = \angle$$

Найдем радиус. впис. окр-ти в $\triangle BHC$

$$R_{впис.} = \frac{2S_{BHC}}{BH + HC + BC}$$

$$S_{BHC} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{tg\angle} = \frac{a^2}{2}$$

$$BH + HC + BC = a + a + a\sqrt{2} = 2a + a\sqrt{2}$$

$$R_{впис} = \frac{\frac{2a^2}{2}}{a\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$$

Найдем стороны $\triangle ABC$:

$$AB = \frac{a}{\cos\angle} = \sqrt{2} \cdot a$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 2 7 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$BC = \frac{a}{\sin\alpha} = a\sqrt{2}$$

$$AC = \frac{a}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2a$$

$$BO = a - R = a - \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{2a + a\sqrt{2} - a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a + \sqrt{2}\cdot a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a\cancel{(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}\cancel{(1+\sqrt{2})}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$PQ = \frac{a-3}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{2}} : \frac{1}{2} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$S_{BPQ} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 2 7 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

1) Допустим, таблица размечена на черные и белые клетки, как шахматная доска. Если мы ставим фишки только на черные или только на белые клетки, то

а) При n - четное, K равно $\frac{n}{2}$

б) При n - нечетное, K равно $\frac{n+1}{2}$ (черные клетки), или K равно $\frac{n-1}{2}$ (белые клетки)

2) В случае, если n - нечетное, возможен и другой порядок. Например, на всех вертикальных или горизонтальных полосах с четными номерами поставить фишки, тогда число полос $\frac{n-1}{2}$, а число фишек $K = n \cdot \frac{n-1}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 7 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

По У.З. (по условию задачи)

$100a+10b+c=k(a+b+c+1)+1$ (1)

$100c+10b+a=m(a+b+c+1)+1$ (2)

Вычтем (1)-(2):

$99(a-c)=k-m(a+b+c+1)$

Тогда $a+b+c+1$ кратно или 3 или 9 или 11 (т.к $a-c<a+b+c+1$)

Первый случай:

$a+b+c+1=3n$ или $9n$

Тогда из (1): $\overline{abc}=k\cdot 3n+1 \overset{md3}{\equiv} 1$

Значит остаток при делении на 3 равен 1, то остаток равен $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b+c=3n \end{cases}$, что невозможно

Аналогично это невозможно для $9n$

Второй случай:

$a+b+c+1=11n$

тогда из (1) $(\overline{abc})=k\cdot 11n+1 \overset{md11}{\equiv} 1$

Остаток числа $\overline{abc}$ при делении на 11 равен $\begin{cases} c-b+a=1 \\ a+b+c+1=11n \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

дом. (дистанционно с системой прокторинга)

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	2	3	1	8	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Яремчук

Имя Иван

Отчество Валерьевич

Дата рождения 29.07.21 Класс 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 7 листах Дата выполнения работы 06.03.21

Номер телефона 89857201068 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	3	1	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. ~~Если~~ рассмотреть прямоугольник 5×4 (без самого правого столбца), то для каждой клетки (кроме черной) можно найти симметричную ей относительно черной ⇒

⇒ без правого столбца $\vec{s}=0$.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	16	–	20	76

Теперь рассмотри правый столбец.

$\vec{s}(20;0)$

$\vec{s}=\xrightarrow{20}$

$|\vec{s}|=20$

Теперь надо убрать 2 вектора. т.к. $\vec{s}$ направлен направо, то убирать векторы, которые направлены налево нам невыгодно, аналогично для направленных вверх и вниз, ⇒ нужно убрать векторы, которые направлены направо, то есть у нас есть 5·4=20 вариантов.

Т.к. по Ox мы можем убрать максимум 4 за вектор, то минимум длина $|\vec{s}|=20-2\cdot4=12$

пример: убираем правую верхнюю и правую нижнюю.

Получается:

$\vec{s}=\nearrow+\rightarrow+\searrow=\xrightarrow{12}$ Значит наим. длина 12.

Ответ: 12.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2.

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

Пусть $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

У.Т.П (универсальная тригонометрическая подстановка):

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x = \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

$3\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} - 3\frac{1-t^2}{(1+t^2)} - 6\frac{2t}{1+t^2} + 3 + 4\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0$

$\frac{18t^2 + 6t^4 - 4t - 20t^3}{(1+t^2)^2} = 0$

$1+t^2 > 0 \Rightarrow 18t^2 + 6t^4 - 4t - 20t^3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=0 \\ tg\frac{x}{2}=1 \\ tg\frac{x}{2}=2 \\ tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 1 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рамке справа

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x}{2} = \pi k \\ &\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ &\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(2) + \pi k \\ &\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \pi k \end{aligned}\right. \qquad k \in Z$$

$$\left[\begin{aligned} &x = 2\pi k \\ &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ &x = 2\operatorname{arctg}(2) + 2\pi k \\ &x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi k \end{aligned}\right.$$

Проверим $x = \pi + 2\pi k$ решением

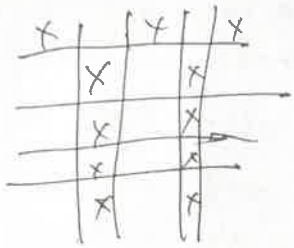
$3 = -3 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k$ — не решение

$$\left[\begin{aligned} &x = 2\pi k \\ &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ &x = 2\operatorname{arctg}(2) + 2\pi k \\ &x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi k \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned} &x = 2\pi k \\ &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ &x = 2\operatorname{arctg}(2) + 2\pi k \\ &x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi k \end{aligned}\right. \qquad k \in Z$.

5.

Рассмотрим квадрат $n \times n$ с n-нечетным:



в каждой строке ~~через одну~~ будет либо ~~...~~ $n//2$, либо $n//2+1$ (где // - целочисленное деление) фишек.

Таким образом в каждом кв 2×2 будет ровно 2 фишки.

$k \in [(n//2)n; (n//2+1)n]$

Докажем, что больше нельзя:

Пусть $k = (n//2+1)n+1$, тогда хотя бы в одном столбце/строке будет $n//2+2$ фишек $\Rightarrow$ в столбце/строке под ним не может быть $n//2+1$ фишек $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в какой-то другой столбце/строке будет $n//2+2$ фишек.

Идя рекурсивно приходим к тому, что в $(n//2+1)$ столбцах/строках $n(n//2+1)+1$ фишек, что невозможно. $\Rightarrow k \leq n(n//2+1)$.

Пусть $k = n(n//2)-1$, тогда ~~хотя бы в одном столбце/строке будет ...~~

$k < 2n$, что невозможно т.к. нам нужно покрыть угловые квадраты, а для них

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 1 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

хотя бы ~~одна~~ ~~одна~~ одна фишка должна оказаться у края квадрата => так мини и фишки у края.
т.к. ~~две~~ фишка у края покрывает макс-гум 2 2×2 кв., а фишка не у края 4, то $k \geq 2n$, но $k < 2n$ => невозможно.
Таким образом для нечет. n:
$k \in [(n//2)n; (n//2+1)n]$
Для n-четных кратчайшего:
$k = n \cdot \frac{n}{2}$

Значит для всех $n \geq 2$:
для четных $k = \frac{n^2}{2}$
для нечетных $k \in [(n//2)n; (n//2+1)n]$.
Ответ: для $n \geq 2$:
если $n \vdots 2$, то $k = \frac{n^2}{2}$
если $n \not\vdots 2$, то $k \in [(n//2)n; (n//2+1)n]$,
а то есть $k \in [2;6] \cup \{8\} \cup [10;15] \cup \{18\} \cup [21;28] \cup \ldots$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 1 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и в рамке справа

3.

% – остаток от деления.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a$$

$$(100a + 10b + c) \% (a+b+c+1) = 1$$

$$(100c + 10b + a) \% (a+b+c+1) = 1$$

$$(100a - a + c - 100c + 10b - 10b) \% (a+b+c+1) = 0$$

$$99(a-c) \vdots (a+b+c+1)$$

$$3^2 \cdot 11(a-c) \vdots (a+b+c+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \le a \le 9 \\ 0 \le b \le 9 \\ 1 \le c \le 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \le a+b+c \le 27$$

$$\left[\begin{array}{l} a = c \\ a+b+c+1=11 \\ a+b+c+1=9 \\ \begin{cases} a+b+c+1=18 \\ a=c+2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b+c+1=27 \\ a=c+3 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b+c+1=15 \\ a=c+5 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b+c+1=21 \\ a=c+7 \end{cases} \end{array}\right.$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 3 1 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\left[\begin{array}{l} a=c \\ a+b+c=10 \quad \text{нет реш.} \\ a+b+c=8 \quad \text{нет реш} \\ \begin{cases} 2c+b=15 \\ a=c+2 \end{cases} \text{нет реш} \\ \begin{cases} 2c+b=23 \\ a=c+3 \end{cases} \text{нет реш} \\ \begin{cases} 2c+b=9 \\ a=c+5 \end{cases} \text{нет. реш.} \\ \begin{cases} 2c+b=13 \\ a=c+7 \end{cases} \text{нет реш.} \end{array}\right.$$

перебираем все случаи.

$a=c$

Перебираем и получаем:

121; 141; 171; 313; 666

Ответ: 121; 141; 171; 313; 666.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	1	9	3	2	2	1

____

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Чижиков

Имя Иван

Отчество Ильич

Дата рождения 03.08.2004 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 8 961 4036061 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

математике

от (Ф.И.О.)

Чижикова Ивана Ильича

Адрес площадки проведения

дист.

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 5, 6б. (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

Некорректное выставление баллов за правильно решенное и полностью расписанное задание. Ход решения прослеживается

О себе сообщаю:

89614036061 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

chizhikova.n.p@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 08.04.2021, 17.45

Подпись участника Олимпиады: Чиж

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 13:50

Комментарии членов апелляционной комиссии:

Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения.

Результат рассмотрения апелляции:

Выставленный бал за задачу N5 оставить без изменений.

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. / [подпись] /

Шанько Ю.В. / ЮШа /

Шуклев А.В. / [подпись] /

/ /

В Апелляционную комиссию

университетской Олимпиады школьников «Бельчонок»

по (указать предмет)

математике

от (Ф.И.О.)

Чижикова Ивана Ильича

Адрес площадки проведения

дист.

Апелляционное заявление на результаты проверки олимпиадной работы

Прошу пересмотреть результаты проверки моей олимпиадной работы.

Задача № 2, 8б. (Номер задачи, выставленный за нее балл)

Основанием для пересмотра баллов считаю:

Некорректное выставление баллов за правильно решенное задание. Ход решения прослеживается

О себе сообщаю:

89614036061 (номер контактного телефона)

Результат рассмотрения апелляции прошу сообщить

chizhikova.n.p@mail.ru (адрес электронной почты)

Дата и время подачи апелляции: 08.04.2021, 17.45

Подпись участника Олимпиады: Чи

Дальнейшие поля НЕ заполняются заявителем.

Дата и время рассмотрения апелляции 12.04.21 13:50

Комментарии членов апелляционной комиссии:

Полное верное решение – 20 баллов.

Результат рассмотрения апелляции:

Повысить выставленный за задачу N2 балл с 8 до 20 баллов.

Члены Апелляционной комиссии:

Мышкина Е.К. / [подпись] /

Шанько Ю.В. / Юш[подпись]

Шуплев А.В. / [подпись] /

/ /

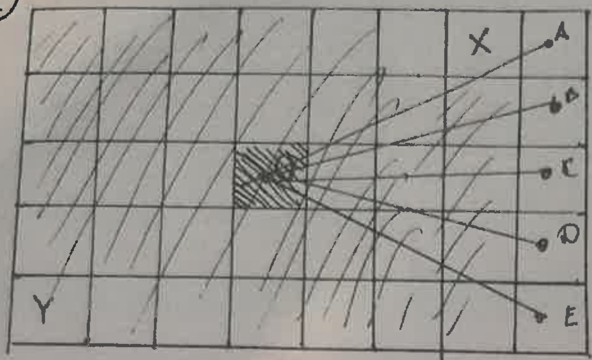
Вариант № 1

М	Н	0	0	0	1	1	9	3	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

①



1	2	3	4	5	Σ
20	~~8~~ 20	–	12	6	~~46~~ 58

Рассмотрим клетку X и клетку Y – координаты

$X(3;2)$ $Y(-3;-2)$ $\Rightarrow$ при сложении мы получим 0, т.е.

также будет с остальными, кроме 8 столбца $\Rightarrow$ мы рассматриваем

последний 8 столбец: $OA\{4;2\}$ $OB\{4;1\}$ $OC\{4;0\}$

$OD\{4;-1\}$ $OE\{4;2\}$, чтобы сумма была минимальна необходимо

убрать 2 вектора противоположных друг другу относительно Oy т.к.

координата по Ox – у всех одинаковая $\therefore$ можно убрать OA, OE или

OD и OB $\therefore$ тогда $sum_x = 4+4+4$ $sum_y = 1+(-1)+0=0$

$sum_y=0$ $sum_x=12$ $\Rightarrow$ $l = \sqrt{sum_x^2+sum_y^2} = \sqrt{144+0} = 12$ $\Rightarrow$

минимальная длина $=12$. Ответ: 12

②

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0$

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cdot\cos x+\sin^2x+\cos^2x+2=0$

$4\sin^2x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2x-3\cos x-6\sin x+2=0$

$(2\sin x+\cos x)^2-3(2\sin x+\cos x)+2=0$

$2\sin x+\cos x=t$

$t^2-3t+2=0$

$t_1=2$ $t_2=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 9 | 3 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$2\sin x + \cos x = 2$ $\qquad 2\sin x + \cos x = 1$, аналогично решаем

$\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \sin x\cos x = 1$

$-\frac{3}{4}\cos x^2 + \sin x\cos x = 0$

$\cos x(\sin x - \frac{3}{4}\cos x) = 0$

$3\sin^2 x + 4\sin x\cos x = 0$

$\sin x(3\sin x + 4\cos x) = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}\cos x = 1$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 2\pi k$

$\cos x = 0 \qquad \sin x = \frac{3}{4}\cos x$

$3\sin x = -4\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \text{arctg}(0{,}75)$ $\qquad \text{tg}\, x = -\frac{4}{3}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad x = \text{arctg}(0{,}75) + \pi k \qquad x = \text{arctg}(-\frac{4}{3}) + \pi k \quad x = 2\pi k \Rightarrow$

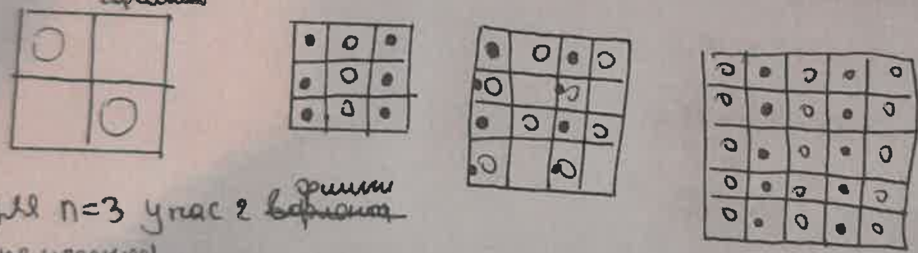
+

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\text{arctg}(\frac{3}{4}) + \pi k$; $\text{arctg}(-\frac{4}{3}) + \pi k$; $2\pi k$

$\boxed{5}$

Рассмотрим таблицы $n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$

для $n=2$ мы можем поставить 2 фишки



для $n=3$ у нас 2 ~~варианта~~ фишки (белые и черные)

для 1 варианта: 3 фишки для 2–6

для $n=4$ несколько вариантов, но фишек всегда 8;

для $n=5$ 2 варианта либо 10 фишек, либо 15, т.е.

для четных $n \cdot (n \,\text{div}\, 2)$ где div – целая ~~часть~~ количество т.е.

для $n=6$ $\quad 6\cdot(6\,\text{div}\,2) = 6\cdot 3 = 18$ фишек

для нечетных $n\cdot(n\,\text{div}\,2)$ – минимальное количество

$n((n+1)\,\text{div}\,2)$ – максимальное, т.е.

Ответ: для четных $k = n\cdot(n\,\text{div}\,2)$

для нечетных $k = n(n\,\text{div}\,2)$; $n((n+1)\,\text{div}\,2)$

рассмотрение частных случаев!

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

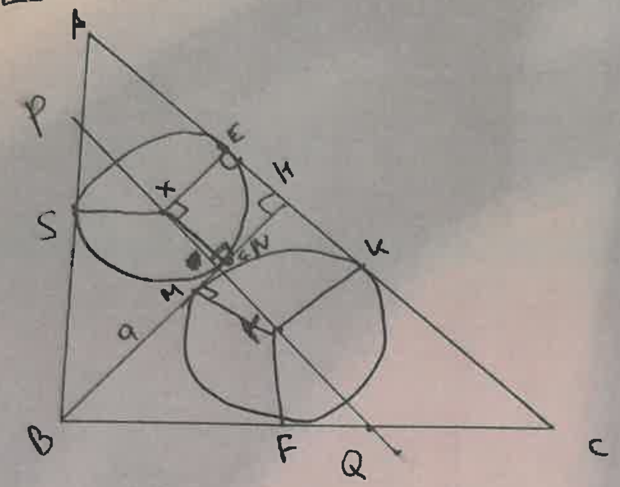
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	9	3	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4



Решение 1) пусть $XE = r_1$ $YK = r_2$ (радиусы) тогда

четырехугольники $XEHN$ и $MYKH$ являются квадратами

($\angle K = \angle H = \angle M = \angle N = 90^\circ$) $XN = XE$; $YM = YK$ $\Rightarrow$

$BM = BF = a - r_2$ (касательные из 1 точки) $BS = BN = a - r_1$ - касательные из одной точки; т.к. $YF = r_2$ и $Q \in PQ$ и $X; Y \in PQ \Rightarrow YF = FQ = r_2$.

аналогично $SP = SX = r_1$, т.е. $PB = a - r_1 + r_1 = a$; $BQ = a - r_2 + r_2 = a$

тогда т.к. $\angle B = 90^\circ$, $S = \frac{1}{2} PB \cdot BQ = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	3	8	9	7	2	1

Адрес площадки проведения ____________ Шифр

Вариант № 1

Фамилия ЛИТАУ

Имя ЕКАТЕРИНА

Отчество ЛИТАУ

Дата рождения 25.12.2003 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 89029192464 Подпись [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	3	8	9	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

<u>N1</u> Проведем вектора из закрашенной клетки, как сказано в условие. Заметим, что вектора, направленные в противоположные стороны (например ↕) в сумме будут давать 0 т.к у них противоположные знаки ⇒ остаутся только такие (рис. 2) клетки.

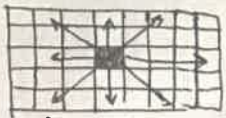


рис.1

Обозначим векторы: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ (начиная с самого верхнего). Заметим, что $|\vec{c}| = 4$. Чтобы посчитать длины других, воспользуемся правилом треугольника.

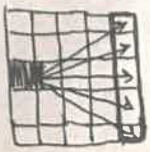
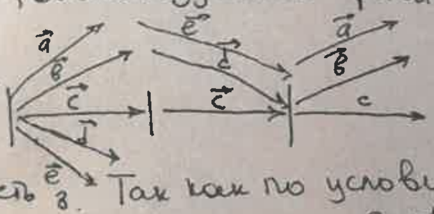


рис. 2



Мы видим, что $|\vec{b}+\vec{d}|$ и $|\vec{a}+\vec{e}|$ будут равняться удвоенной длине вектора $\vec{c}$, то есть 8. Так как по условию нам нужно убрать 2 клетки, то мы можем выбрать любую из пар, т.к у них равны суммы ⇒ наименьшее значение может быть $|\vec{a}+\vec{e}+\vec{c}| = 12$.

Ответ: 12

+

1	2	3	4	5	Σ
20	20	6	20	—	66

30

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	3	8	9	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 $3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cos x + \underbrace{2\sin^2 x + 2\cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x}_{3} = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3\cos x - 6\sin x + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(\cos x + 2\sin x) + 2 = 0$

Пусть $(2\sin x + \cos x) = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$, $\sqrt{1} = 1$

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $t_1 = 1$, $t_2 = 2$

$\left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = 1 \\ 2\sin x + \cos x = 2 \end{array}\right.$

1) $2\sin x + \cos x = 1$

$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right) = 1$

$* \cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$* \cos t \sin x + \sin t \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+t) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$t = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi p$

$t = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m$

$\left[\begin{array}{l} x + t = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x + t = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

Подставим t

$\left[\begin{array}{l} x + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi p = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi p = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x + \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi p = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x + \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi p = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n - 2\pi p = 2\pi(n-p) = 2\pi z,\ z \in Z \\ x = \pi - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k - 2\pi p \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -\pi + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi(n-p),\ z \in Z \\ x = 2\pi k - 2\pi p = 2\pi(\underbrace{k-p}_{c}),\ c \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi z,\ z \in Z \\ x = \pi - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi(\underbrace{k-p}_{c}),\ c \in Z \end{array}\right.$

2) $2\sin x + \cos x = 2$

$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x\right) = 2$

$* \cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\rightarrow$ $t = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k$, $t = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m$

$\cos t \sin x + \sin t \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+t) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	3	8	9	7	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\left[\begin{array}{l} x+t=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi n,\ n\in Z \\ x+t=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi p,\ p\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi n,\ n\in Z \\ x+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi p,\ p\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-k) \\ x=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(p-k) \end{array}\right.$$

Подставим t

$$\left[\begin{array}{l} x+\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi m=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi n \\ x+\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi m=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+2\pi p \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-m) \\ x=-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(p-m) \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=2\pi z,\ z\in Z \\ x=\pi-2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi c,\ c\in Z \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\pi+2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi z,\ z\in Z \\ x=2\pi c,\ c\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-k) \\ x=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(p-k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{2}{\sqrt5}-\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(n-m) \\ x=-\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi(p-m) \end{array}\right.$$

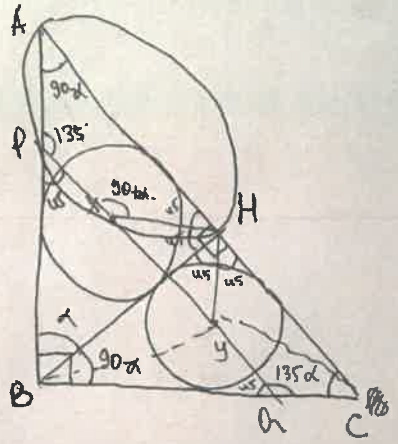
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 3 8 9 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



$BH = a$

Найти: $S_{\triangle BPQ}$

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle HXY$.
$\triangle HXY$ - прямоугольный т.к HX и HY - биссектрисы, а $\angle BHA$ и $\angle BHC = 90°$ (BH - высота)
$\Rightarrow \angle BHX = \angle XHA = \angle BHY = \angle YHC = 45°$
$\angle XHY = 45° + 45° = 90°$

2. Рассмотрим $\triangle BHA$ и $\triangle BHC$
$\angle AHB = \angle BHC = 90°$ (BH - высота)
$\angle HBA = \alpha \Rightarrow \angle HBC = 90 - \alpha \Rightarrow \angle HCB = 180° - 90° - 90 + \alpha = \alpha$.
$\Downarrow$
$\triangle BHA \sim \triangle BHC$ по 2-м углам.

3. $\frac{AH}{HB} = \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{HX}{HY}$ т.к это соответственные элементы в подобных тр-ках.

Заметим, что $\frac{HX}{HY} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{HX} = \frac{BC}{HY} \Rightarrow \triangle HXY \sim \triangle ABC$

4. Опишем около $AHXP$ окружность
$\angle AHX = 45°$ (п.1) $\Rightarrow \angle APX = 180° - 45° = 135°$ (по св-ву)
$\angle PXH = 180° - 90 + \alpha = 90 + \alpha$.

5. $\angle BPX = 180° - \angle APX = 180° - 135 = 45°$ (смежные)

6. Аналогично опишем около $HYQC$ окр.
$\angle YQC = 180° - 45° = 135°$ (по с-ву)
$\Downarrow$
$\angle BQY = 180° - 135° = 45°$

7. Т.к $\angle BPX = 45°$ и $\angle PQY = 45° \Rightarrow \triangle BPQ$ - равнобедренный

8. Рассмотрим $\triangle BYQ$ и $\triangle BYH$
- BY - общая
- $\angle BYQ = \angle BYH$ $(180 - 45° - 45 + \frac{\alpha}{2} = 180 - 45° - 45° + \frac{\alpha}{2})$
- $\angle YBQ = \angle YBH$ (BY - биссектриса) $= 45 - \frac{\alpha}{2}$.

$\Rightarrow \triangle BYQ = \triangle BYH$ по стороне и 2∠ $\Rightarrow BH = BQ = a$ как соотв. элементы в равных тр-ках

9. $S_{BPQ} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$ (т.к $\triangle BPQ$ - равнобедренный)

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 $\overline{abc}$ $\qquad\qquad$ $\overline{cba}$

$100a+10b+c=(a+b+c+1)k-1$ $\qquad$ $100c+10b+a=(c+b+a+1)m-1$

Вычтем из 1-го 2-е:

$100(a-c)+(c-a)=(a+b+c+1)(k-m)$

$100a-100c+c-a=(a+b+c+1)(k-m)$

$99a-99c=(a+b+c+1)(k-m)$

$99(a-c)=(a+b+c+1)(k-m)$ $\vdots 99$ то есть $\vdots 9$ и $\vdots 11$

1) $a=c$ $\vdots 99$ $\rightarrow$

$0=(a+b+c+1)(k-m) \Rightarrow k=m$ Подставим в 1

$10\cancel{1}a+10b=(2a+b+1)k-1$ $\qquad 101a+10b+1=(2a+b+1)k$

$\cancel{81a+10+10(2a+b+1)=(2a+b+1)k}$

$81a-11+10(2a+b+1)=(2a+b+1)k$

$81a-11=(2a+b+1)k-(2a+b+1)10$

$81a-11=(2a+b+1)(k-10)$

$81a-11 \vdots (2a+b+1)$

Сделаем табличку:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2,4,7	X	1	X	X	2,6	X	X	X

$a=1 \Rightarrow 70 \vdots (3+b) \Rightarrow b=2,4,7$

$a=2 \Rightarrow 151 \vdots (5+b) \Rightarrow$ нет целых b

$a=3 \Rightarrow 232 \vdots (7+b) \Rightarrow b=1$

$a=4 \Rightarrow 313 \vdots (9+b) \Rightarrow$ нет целых b

$a=5 \Rightarrow 384 \vdots (11+b) \Rightarrow$ нет целых b

$a=6 \Rightarrow 475 \vdots (13+b) \Rightarrow b=2,6$

$a=7 \Rightarrow 556 \vdots (15+b) \Rightarrow$ нет целых b

$a=8 \Rightarrow 637 \vdots (17+b) \Rightarrow$ нет целых b

$a=9 \Rightarrow 718 \vdots (19+b) \Rightarrow$ нет целых b

Найдем c $\qquad a+b+c+1 \vdots 99 \Rightarrow a+b+c+1 \vdots 9$, $a+b+c+1 \vdots 11$

$a=1, b=2 \Rightarrow 4+c \vdots 9 \Rightarrow c=5$; $4+c \vdots 11 \Rightarrow c=7$

$a=1, b=4 \Rightarrow 6+c \vdots 9 \Rightarrow c=3$; $6+c \vdots 11 \Rightarrow c=5$

$a=1, b=7 \Rightarrow 9+c \vdots 9 \Rightarrow c=0;9$; $9+c \vdots 11 \Rightarrow c=2$

$a=3, b=1 \Rightarrow 5+c \vdots 9 \Rightarrow c=4$; $5+c \vdots 11 \Rightarrow c=6$

$a=6, b=2 \Rightarrow 9+c \vdots 9 \Rightarrow c=0;9$; $9+c \vdots 11 \Rightarrow c=2$

$a=6, b=6 \Rightarrow 13+c \vdots 9 \Rightarrow c=6$; $13+c \vdots 11 \Rightarrow c=9$

6с

Ответ: 125; 127; 143; 145; 170; 179; 172; 316; 622; 669; 314, 624, 666

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	3	8	9	1	2	1

____

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия БЛИНОВ

Имя ДАНИИЛ

Отчество ГЕННАДЬЕВИЧ

Дата рождения 17. 07. 2003 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на _____ **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона 8994 4485338 **Подпись** _______

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 3 8 9 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	Σ
20	20	8	20	–	68

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос N2

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+2\sin2x+3=0$

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cos x+3=0$

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cos x+3(\sin^2x+\cos^2x)=0$

$3\sin^2x-3\cos x-6\sin x+4\sin x\cos x+2\sin^2x+\sin^2x+2\cos^2x+\cos^2x=0$

$(4\sin^2x+4\sin x\cos x+\cos^2x)-3\cos x-6\sin x+2(\sin^2x+\cos^2x)=0$

$(2\sin x+\cos x)^2-3(2\sin x+\cos x)+2=0$

Пусть $t=2\sin x+\cos x$, тогда:

$t^2-3t+2=0$

$D=9-8=1$; $\sqrt{D}=1$

$t_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}$; $t_1=2$; $t_2=1$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l}2\sin x+\cos x=2\\ 2\sin x+\cos x=1\end{array}\right.$$

по основному тригонометрическому ~~сво~~ тождеству:

$\sin^2x+\cos^2x=1$

$\sin^2x=1-\cos^2x$

$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2x}$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\pm2\sqrt{1-\cos^2x}+\cos x=2\\ \pm2\sqrt{1-\cos^2x}+\cos x=1\end{array}\right.$$

1. $\pm2\sqrt{1-\cos^2x}+\cos x=2$

$\pm2\sqrt{1-\cos^2x}=2-\cos x$

20б

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 8 | 9 | 1 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

$4(1-\cos^2 x) = (2-\cos x)^2$

$4 - 4\cos^2 x = 4 - 4\cos x + \cos x^2$

$-5\cos x^2 + 4\cos x = 0$

$\cos x(4 - 5\cos x) = 0$

$\cos x = 0$ или $4 - 5\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$ $\cos x = \frac{4}{5}$

$x = \pm\arccos\frac{4}{5} + 2\pi n; n \in Z$

2. $\pm 2\sqrt{1-\cos^2 x} + \cos x = 1$

$\pm 2\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - \cos x$

$4(1-\cos^2 x) = (1-\cos x)^2$

$4 - 4\cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$

$-5\cos^2 x + 2\cos x + 3 = 0 \mid \cdot(-1)$

$5\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$

Пусть $\cos x = z$, $-1 \le z \le 1$;

$5z^2 - 2z - 3 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$; $\sqrt{D} = 8$

$z_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{10}$; $z_1 = 1$; $z_2 = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\cos x = 1$ $\cos x = -\frac{3}{5}$

$x = 2\pi n; n \in Z$ $x = \pm\arccos(-\frac{3}{5}) + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $2\pi n$; $\pm\arccos\frac{4}{5} + 2\pi n$; $\pm\arccos(\frac{-3}{5}) + 2\pi n$; $n \in Z$

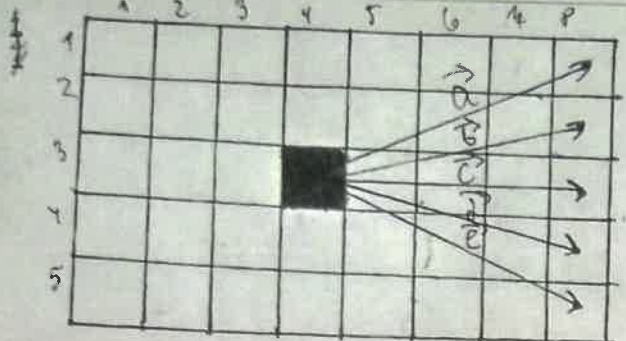
Вопрос №1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

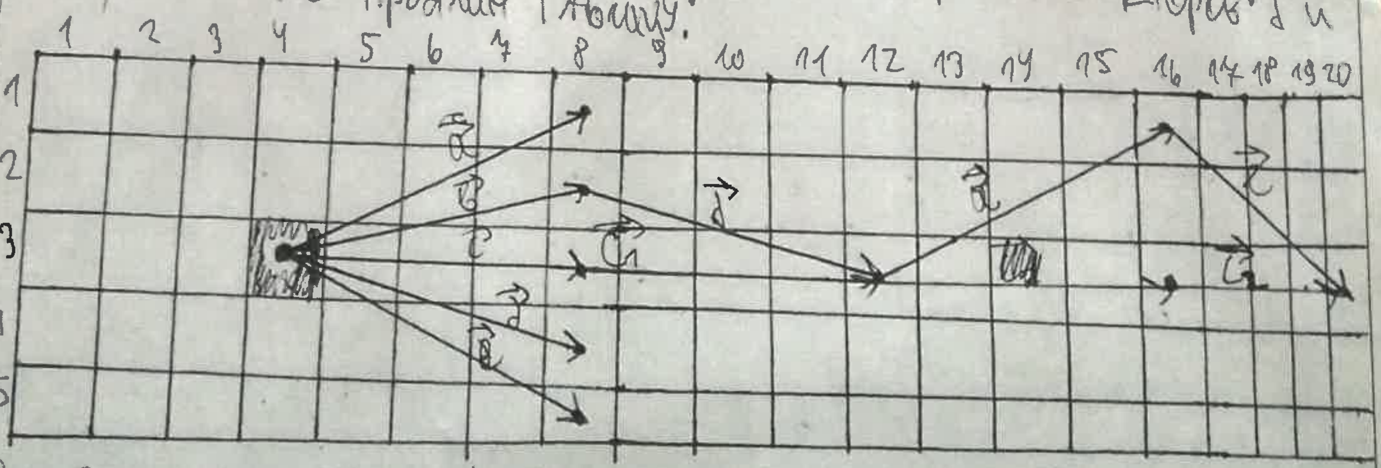
Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 3 8 9 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке строки



Заметим, что сумма всех векторов в таблице без восьмого столбца сумма всех векторов равна 0 т.к. там представлены пары противоположных векторов. Следовательно векторная сумма всех векторов в таблице равна векторной сумме $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d, \vec e$. Поскольку к ним нельзя провести противоположные векторы. ~~т.к.~~ Векторы $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d, \vec e$ имеют наибольшую длину, а значит, чтобы получить наименьшую длину суммы всех векторов, необходимо чтобы среди них отсутствовало 2 каких-либо вектора. Заметим, что $|\vec c| = 4$ т.к. он проведён из середины ~~квадрата~~ квадрата 4-ого столбца в центр квадрата 8-ого столбца. Выполним параллельный перенос векторов $\vec a$, $\vec d$ и $\vec e$, а также продлим таблицу:



Заметим, что правилу параллелограмма, вектор $\vec c_1$ является результирующим вектором, т.е. $\vec b + \vec d = \vec c_1$. Также заметим, что

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА00013891 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

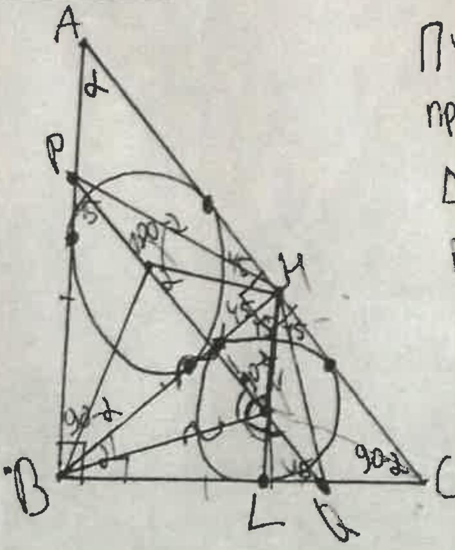
Длина $\vec{c_1}$ равна 8 т.к. он проходит из центра квадрата и столбца в центр квадрата 12-ого столбца не меняя строки. Также заметим, что вектор $\vec{c_2}$ является результирующим для $\vec{a}$ и $\vec{e}$, т.е. $\vec{a}+\vec{e}=\vec{c_2}$. Длина $\vec{c_2}$ составляет также 8 т.к. Он проходит из центра квадрата 12-ого ~~квадрата~~ столбца в центр квадрата 20-ого столбца не меняя строки.

Выходит, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{c}+\vec{c_1}+\vec{c_2}=4+8+8=20$

Если убрать векторы $\vec{a}$ и $\vec{e}$ то ~~дл~~ длина суммы всех векторов таблицы станет 12

Ответ: 12

Вопрос №4



Пусть $\angle BAC=\alpha$, тогда $\angle ACB=90-\alpha$ (т.к. $\triangle ABC$ прямоугольный). Тогда $\angle HBC=\alpha$ (т.к. $\triangle BHC$ – прямоугольный, один из острых углов равен $90-\alpha$). $\angle ABH=90-\alpha$ (т.к. $\triangle ABH$ – прямоугольный, один из острых углов α). Рассмотрим $\triangle ABH$ и $\triangle BHC$:

$\angle HBC=\angle BAH=\alpha$
$\angle HCB=\angle HBA=90-\alpha$
$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle BHC$ (по двум углам)

т.к. $\triangle ABH \sim \triangle BHC$:

$$\frac{AH}{BH}=\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{HC}=\frac{XH}{YH}$$ (как соответственные элементы подобных треугольников)

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle HYX$:

Лист 4 из 7

$\frac{AB}{BC} = \frac{XM}{YM} \Rightarrow AB \cdot YM = BC \cdot XM \Rightarrow \frac{AB}{XM} = \frac{BC}{YM}$; $\angle XMY$ – прямой (т.к. MY – биссектрисса прямого угла в ΔBMC, MX – биссектрисса прямого угла в $\Delta AMB \Rightarrow \angle XMA = \angle XMB = \angle BMY = \angle YMC = 45° \Rightarrow \angle XMB + \angle BMY = 90°$; $\angle ABC$ – тоже прямой $\Rightarrow \Delta MYX \sim \Delta ABC$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow \angle MXY = \alpha$, $\angle MYX = 90 - \alpha$; $\angle PXM = 180° - \alpha$ (смежный с $\angle MXY = \alpha$), рассмотрим $PAMX$: противоположные углы в сумме дают $180°$ ~~...~~ ($\angle MXP + \angle PAM = 180 - \alpha + \alpha = 180$) $\Rightarrow$ опишем около $PAMX$ окружность. Т.к. вокруг $PAMX$ можно описать окружность $\Rightarrow \angle AMX + \angle XPA = 180° \Rightarrow \angle XPA = 180° - \angle AMX = 180° - 45° = 135°$.

$\angle BPQ = 180° - \angle XPA = 180° - 135° = 45°$ (смежные). Рассмотрим ΔBPQ – прямоугольный ($\angle B$ – прямой по условию) ~~...~~ $\angle BPQ = 45° \Rightarrow \angle PQB = 90° - 45° = 45° \Rightarrow \Delta BPQ$ – равнобедренный, $BP = BQ$.

Рассмотрим ΔBMY и ~~...~~ ΔB~~M~~YQ:

1. $\angle MBY = \angle YBQ = \frac{\alpha}{2}$
2. $\angle BMY = \angle BQY = 45°$
3. $\angle MYB = \angle BYQ = \frac{\alpha}{2} - 45°$
4. BY – общая ~~...~~

$\Rightarrow \Delta BMY = \Delta BYQ$ (по двум прилежащим углам и стороне)

$\Rightarrow BM = BQ = a$ как соответственные элементы $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BPQ} =$ ~~...~~ $BP \cdot BQ \cdot \frac{1}{2} = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

Вариант № 1

...ников «БЕЛЬЧОНОК»

М А 0 0 0 1 3 8 9 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вопрос № 3

(1) $100a + 10b + c = (a+b+c+1)k + 1$

(2) $100c + 10b + a = (a+b+c+1)m + 1$ $\quad k, m \in \mathbb{Z}$

Вычтем (2) из (1):

$$99a - 99c = (a+b+c+1)(k-m)$$

$$99(a-c) = (a+b+c+1)(k-m)$$

Если $a \neq c$:

~~$0 = (a+b+1)(k-m)$~~

~~a, b ... $2a+b+1>0 \Rightarrow k-m=0$~~

~~$k=m$~~

$$\underbrace{99(a-c)}_{\vdots 9,\ \vdots 11} = \underbrace{(a+b+c+1)}_{\vdots 9 \text{ или } \vdots 11}(k-m)$$

Если $(a+b+c+1) \vdots 9$:

$$100a + 10b + c = \underbrace{(a+b+c+1)}_{\vdots 9}k + 1$$

~~$\underbrace{99a}_{\vdots 9} + a + \underbrace{9b}_{\vdots 9} + b + c - 1 = (a+b+c+1)k$~~

$$\underbrace{99a}_{\vdots 9} + a + \underbrace{9b}_{\vdots 9} + b + c - 1 = (a+b+c+1)k$$

$$\underline{a+b+c} - 1 + 1 - 1 = \underbrace{(a+b+c+1)}_{\vdots 9} - 2 \;\; \cancel{\vdots 9} \Rightarrow a+b+c+1 \text{ не делится на } 9$$

Вариант № 1

N A 0 0 0 1 3 8 9 1 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Если $(a+b+c+1) \vdots 11$:

$100a + 11b - b + c - 1 = (a+b+c+1)k$

$\underbrace{99a}_{\vdots 11} + a + \underbrace{11b}_{\vdots 11} - b + c - 1 = \underbrace{(a+b+c+1)k}_{\vdots 11}$

$\underline{a} - b + c - 1 + b - b + 1 - 1 = \underbrace{(a+b+c+1)}_{\vdots 11} - 2b - 1$ $\quad \vdots 11$

$\underbrace{2b-1}_{\not\vdots 11}$

$\Downarrow$

$(a+b+c+1) \not\vdots 11$

$\Downarrow$

$a = c$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	0	0	0	1	2	6	7	2	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Воловиков

Имя Кирилл

Отчество Витальевич

Дата рождения 16.08.2004 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 06 03 2021

Номер телефона 89614194153 **Подпись** Волов

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	2	6	7	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	20	80

2 $3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$4\sin^2 x + \cos^2 x - 1 - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(\cos x + 2\sin x) + 2 = 0$

$2\sin x + \cos x = a$

$a^2 - 3a + 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right.$

1) $2\sin x + \cos x = 2$ $\cos x = b$

$2\sqrt{1-b^2} + b = 2$

$4 - 4b^2 = 4 - 4b + b^2$

$5b^2 - 4b = 0$

$b(5b-4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases} \end{array}\right.$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k$

2) $2\sin x + \cos x = 1$ $\cos x = a$

$2\sqrt{1-a^2} = 1 - a$

$4 - 4a^2 = 1 + a^2 - 2a$

$5a^2 - 2a + 3 = 0$

$a = -\frac{3}{5}$

$a = 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = -\frac{3}{5} \\ \sin x = \frac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right.$ $x = 2\pi k$; $x = \pi - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$

Ответ: $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi k$

$x = \pi - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$

30 / 30

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 6 7 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3.
$$\begin{cases} 100a+10b+c \underset{abc+1}{\equiv} 1 \\ 100c+10b+a \underset{a+b+c+1}{\equiv} 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100a+10b+c-1 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \\ 100c+10b+a-1 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 99a+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \\ 99c+9b-2 \underset{a+b+c+1}{\equiv} 0 \end{cases} \Rightarrow$$

есть только 3 случая
1) $a=c$
2) $a+b+c+1=9$
3) $a+b+c+1=11$

Рассмотрим случай $a=c$

$\overline{aba}$

$$\frac{100a+10b+a}{a+b+a+1}=x+\frac{1}{a+b+a+1} \Rightarrow \frac{101a+10b-1}{2a+b+1}=x$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1}+10=x \qquad x\geq 10$$

$$\frac{81a-11}{2a+b+1}=x-10$$

1) Рассмотрим случай $a=1$
$$\frac{70}{3+b}=x-10 \qquad b=2,\ b=4,\ b=7$$

2) $a=2$
$$\frac{153}{5+b}=x-10$$
нет решений таких $b\leq 9$

3) $a=3$
$$\frac{232}{b+7}=\frac{8\cdot 29}{b+7} \qquad b=1$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 6 7 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) $a=4$

$\frac{313}{9+b}$ 313 – простое нет таких b

5) $a=5$

$\frac{394}{11+b}=\frac{2\cdot 197}{11+b}$; 197 - простое нет таких b

6) $a=6$

$\frac{425}{13+b}=\frac{17\cdot 25}{13+b}$ $b=6$

7) $a=7$

$\frac{556}{15+b}=\frac{4\cdot 139}{15+b}$ нет таких b

8) $a=8$

$\frac{637}{17+b}=\frac{7\cdot 7\cdot 13}{17+b}$ нет таких b

9) $a=9$

$\frac{718}{19+b}=\frac{2\cdot 359}{19+b}$ нет таких b

$\Rightarrow \{121;\ 141;\ 171;\ 313;\ 666\}$

Рассмотрим случай когда $a+b+c+1=9$

$\frac{1000a+10b+c}{9}=x+\frac{1}{9}$

$11a+b+1-\frac{1}{9}=x+\frac{1}{9}$

противоречие т.к. $a,b,c \in N$

Рассмотрим случай когда $a+b+c+1=11$

$\frac{100a+10b+c}{11}=x+\frac{1}{11}$

$9a+1+\frac{9b-1}{11}=x+\frac{1}{11}$

Это возможно когда $9b - 1 \vdots 11$, но таких в нет

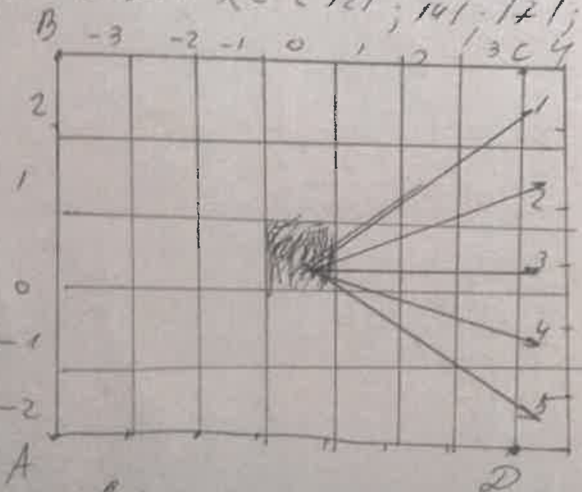
$9b - 1 \underset{11}{\equiv} 0$

$9b = 1$

$b = 11k$, но $b \le 9$ – противоречие

Ответ: $x = \{121; 141; 171; 313; 666\}$

1.



1) Сумма векторов в прямоугольнике ABCD – равно 0

2) Нужно найти наименьшую сумму длин векторов от закрашенной клетки до точек 12345

1. $\{4; 2\}$ 2 $\{4; 1\}$ 3 $\{4; 0\}$ 4 $\{4; -1\}$ 5 $\{4; -2\}$

$\bar{t} = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\}$

$\bar{t}\{20; 0\}$ $|\bar{t}| = 20$

3) Нужно убрать 2 вектора (но уск), либо 1 5 либо 2 4

$\bar{t}_1 = \{x_1 + x_3 + x_5; y_1 + y_3 + y_5\}$ $\bar{t}_1\{12; 0\}$ $|\bar{t}_1| = 12$

или

$\bar{t}_2 = \{x_2 + x_3 + x_4; y_2 + y_3 + y_4\}$ $\bar{t}_2\{12; 0\}$ $|\bar{t}_2| = 12$

Ответ: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 7 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. Есть 2 варианта, когда n - чётно и нечётно

1) Если n чётно, то квадратов 2×2 будет $\frac{n^4}{4}$ и в каждом таком квадрате будет по 2 фишки, след, $k = \frac{n^2}{4} \cdot 2 = \frac{n^2}{2}$

Ну и больше быть не может, т.к. если бы было больше, то в каком то квадрате было бы 3 фишки - противоречие.

2) При n - неч. у нас будет на 1 строку и столбец больше или меньше, значит и кол-во квадратов в строчку или столбец будет на 1 больше или меньше, след, x - кол-во квадратов

$$\frac{n(n-1)}{4} \leq x \leq \frac{n(n-1)}{4}$$

$k = 2x$

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq k \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

Ответ: $k = \frac{n^2}{2}$; $k \in \left[\frac{n(n-1)}{2}; \frac{n(n+1)}{2}\right]$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Н	А	0	0	D	1	1	0	0	1	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Герасимов

Имя Евгений

Отчество Дмитриевич

Дата рождения 13.05.2003 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона +79200100915 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	Σ
20	8	2	20	6	56

Задание 1

Рассмотрим все клетки прямоугольника кроме последнего столбца и кроме черной клетки. Так как данный прямоугольник имеет размер 5×7, а черная клетка равноудалена от сторон прямоугольника, то она — центр данного прямоугольника. Значит для каждой из рассматриваемых клеток есть клетка симметричная относительно центра прямоугольника (черной клетки). Отсюда сумма всех необходимых векторов в данном прямоугольнике равна нулевому вектору. Рассмотрим последний столбец. Пусть координата x вектора a — количество единиц на которые данная клетка стоит правее черной клетки, а координата y - кол-во единиц на которые клетка стоит выше черной, тогда запишем координаты оставшихся ~~клеток~~ векторов: $(4;2)$, $(4;1)$, $(4;0)$, $(4;-1)$, $(4;-2)$ с длинами $\sqrt{20}$, $\sqrt{17}$, 4, $\sqrt{17}$, $\sqrt{20}$ соответственно. Заметим также что два вектора с длиной $\sqrt{20}$ - самые длинные вектора из рассматриваемых, потому как они ~~самые~~ соединяет две самые отдаленные от черной клетки клетки, поэтому они по условию задания не рассматриваются. Остается 3 вектора $(4;1)$, $(4;0)$ и $(4;-1)$ их сумма равна вектору $(12;0)$ длина которого 12.

Ответ: 12.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке строки

Задание 2

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

Так как $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, а $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ получим:

$4\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

Пусть $t = 2\sin x + \cos x$, тогда:

$t^2 - 3t + 2 = 0$. Решив полученное уравнение, получим систему:

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \\ 2\sin x + \cos x = \frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2} - 2\sin x \\ \sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{5}{2} - 2\sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{2} - 2\sin x \geq 0 \\ 1 - \sin^2 x = \frac{1}{4} - 2\sin x + 4\sin^2 x \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5}{2} - 2\sin x \geq 0 \\ 1 - \sin^2 x = \frac{25}{4} - 10\sin x + 4\sin^2 x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \leq \frac{1}{4} \\ \sin x = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{10} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x \leq \frac{5}{4} \\ \varnothing \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{2 - \sqrt{19}}{10} \Rightarrow x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{2-\sqrt{19}}{10} + \pi n$.

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{2-\sqrt{19}}{10} + \pi n$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3

рассмотрим числа $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ - в них a или c стоят в старшем разряде и значит не могут быть равны нулю. Оба этих числа можно представить в виде:

$\overline{abc} = (a+b+c+1)\cdot k+1$; $\overline{cba} = (a+b+c+1)\cdot m+1$

так как по условию они дают остаток 1 при делении на $(a+b+c+1)$ отсюда следует, что их разность должна делиться на $(a+b+c+1)$.

Рассмотрим 2 случая:

① $a=c$, тогда исходные числа - - палиндромы и их разность равна 0. Такими числами являются 121, 141 и 171.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② $a \neq c$. Пусть $\overline{abc} > \overline{cba}$ тогда в разности на месте старшего разряда будет стоять цифра $(a-c-1)$ на месте среднего – 9, а на месте младшего разряда $(10+c-a)$. чисел из трех знаков удовлетворяющих данному условию нет, поэтому!

Ответ: 121, 141 и 171.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

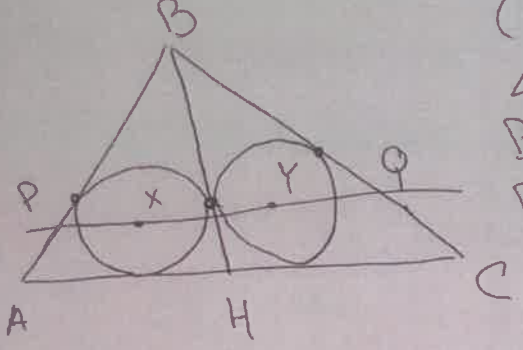
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	0	0	1	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4



Дано:
$\angle ABC = 90^\circ$
BH – высота
$BH = a$

Так как $AB = BC \Rightarrow PQ \parallel AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PBQ$. $AH = HC = BH = a$

радиус окружностей $r = \frac{S_{BHC}}{P_{BHC}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{2a+\sqrt{2}a}{2}} = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$

тогда высота $\triangle PBQ = BH - r = a - \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a+\sqrt{2}a}{2+\sqrt{2}}$

Коэф. подобия $k = \frac{a}{\frac{a+\sqrt{2}a}{2+\sqrt{2}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$k^2 = 2$ Отсюда $\frac{S_{ABC}}{S_{PBQ}} = k^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{PBQ} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{a^2}{2}$

Ответ: $S_{PBQ} = \frac{a^2}{2}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 0 0 1 2 1

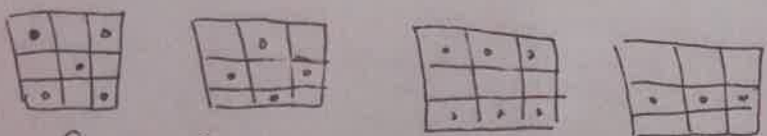
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 5.

Заметим, что в любой кв. таблице $n \times n$ будет рассматриваться $(n-1)\times(n-1)$ квадратов 2×2 и в каждом из них по условию должно быть ровно 2 фишки. Рассмотрим 2 случая:

(1) n – нечетный, тогда кол-во квадратов 2×2 будет равно $(n-1)\times(n-1)$ – четное. Отсюда следует 4 возможных различных расположений фишек на клетках:



два возможных "шахматных" расположения и 2 через строчку. По индукции такие наборы будут единственными для всех нечетных n. Таким образом в данном случае есть 4 различных k:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00011001 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке справа

$\left\lfloor\frac{n^2}{2}\right\rfloor$; $\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$; $n\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$; $n\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ где

$\lfloor x\rfloor$ и $\lceil x\rceil$ – округление числа x в меньшую и большую сторону соответственно.

(2) n – четный, тогда кол-во квадратов 2×2 будет нечетным. Из этого следует что существует только одно расположение удовлетворяющее условию – шахматное для всех четных n. Отсюда $k=\frac{n^2}{2}$

объединяя решения (1) и (2) получаем что k может быть равно:

$\left\lfloor\frac{n^2}{2}\right\rfloor$; $\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$; $n\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$; $n\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$

Ответ: $\left\lfloor\frac{n^2}{2}\right\rfloor$; $\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$; $n\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$; $n\cdot\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	6	1	7	2	1

______________________ Шифр

Адрес площадки проведения

Вариант № ________

Фамилия ВАСИЛЬЕВА

Имя АЛЁНА

Отчество ДМИТРИЕВНА

Дата рождения 05.04.2003 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 8-920-120-01-85 Подпись ________

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

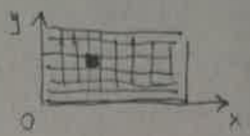
Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 1 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Введём систему координат XoY

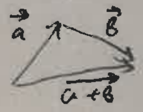


Пусть векторы проведены во все клетки

Разложим векторы в параллельные осям координат.

Тогда сумма всех векторов по Oy равна 0, а по Ox 20

Сумма векторов определяется по правилу треугольника:



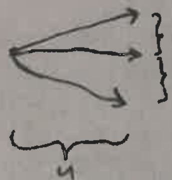
То есть сумма векторов в рассматриваемой системе будет равна векторной сумме смещений по Ox и Oy

1	2	3	4	5	Σ
20	20	12	–	10	62

3-й

Чтобы эта сумма была минимальной требуется не проводить векторы к 2 клеткам с наиб смещением по Ox. У любого вектора смещение по Ox не более 4, тогда имеем оценку на длину суммы векторов ≥ 12.

Пример: проведём вектора во все клетки, кроме угловых с правой стороны, тогда сумма всех векторов будет равна сумме таких:



, равной 12

Ответ: 12

Пояснение: у двух векторов наименьшее смещение по Oy равно 0, если считать длину их суммы, поэтому выше имеется наименьшее смещение по Ox

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 1 | 7 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$ (*)

$3\sin^2 x - 6\sin x + 3 = \cos x\,(3 - 4\sin x)$

Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1;1]$, тогда $\cos x = \pm\sqrt{1-t^2}$

$3(t^2 - 2t + 1) = \pm\sqrt{1-t^2}\,(3-4t)$

Возведём обе части уравнения в квадрат

$9(t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^3 - 4t + 2t^2) = (1-t^2)(9 - 24t + 16t^2)$

$9(t-1)^4 = (1-t)(1+t)(9 - 24t + 16t^2)$

$t - 1 = 0$, иначе

$9(t-1)^3 = -(t+1)(16t^2 - 24t + 9)$

$9(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) = -16t^3 + 24t^2 - 9t - 16t^2 + 24t - 9$

$9t^3 - 27t^2 + 27t - 9 = -16t^3 + 8t^2 + 15t - 9$

$25t^3 - 35t^2 + 12t = 0$

$t = 0$, иначе

$25t^2 - 35t + 12 = 0$

$D = 1225 - 1200 = 25$

$t_1 = \frac{35+5}{50} = \frac{4}{5}$

$t_2 = \frac{3}{5}$

Получили возможные решения $t=1$, $t=0$, $t=\frac{4}{5}$, $t=\frac{3}{5}$

Т.к. были неравносильные переходы, то эти значения необходимо проверить

Если $t=1$, то $\sin x = 1$, $\cos x = 0$ Удовлетворяет (*)

Если $t=0$, то $\sin x = 0$, ~~cos x~~ $\cos x = 1$ Удовлетворяет (*) или $\cos x = -1$ не удовлетворяет (*)

Если $t = \frac{3}{5}$, то $\cos x = \frac{4}{5}$ удовлетворяет (*) или $\cos x = -\frac{4}{5}$ не удовлетворяет (*), т.к. $3\left(\frac{3}{5}-1\right)^2 = \frac{3\cdot 4}{5^2} = \cos x\left(3 - \frac{4\cdot 3}{5}\right) = \cos x\,\frac{3}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 6 1 7 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $\sin x = \frac{4}{5}$, то $\cos x = \frac{3}{5}$ не удовлетворяет (*) или $\cos x = -\frac{3}{5}$ удовлетворяет (*), т.к. $3\left(\frac{4}{5}-1\right)^2 = \frac{3}{5^2} = \cos x\left(3 - \frac{4\cdot 4}{5}\right) = \cos x\left(\frac{-1}{5}\right)$

Получили следующие ответы:

$\sin x = 1,\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0,\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \frac{3}{5},\ \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \frac{4}{5},\ \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; $x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
$x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}$

№ 3

$\overline{abc} = 100a + 10b + c \equiv 1 \mod a+b+c+1$
$\overline{cba} = 100c + 10b + a \equiv 1 \mod a+b+c+1$ $\Rightarrow \overline{abc} - \overline{cba} \ \vdots\ a+b+c+1$

$99(a-c) \ \vdots\ a+b+c+1$

Пусть $a+b+c+1 = k$, т.к. a, b, c - цифры трёхзначного числа, то $k \in [2; 28]$

Докажем, что $k \not\vdots\, 3$, если $k \vdots 3$, то $a+b+c \equiv 2 \mod 3$, но $\overline{abc} \equiv a+b+c \equiv 1 \mod 3$ Противоречие

Значит, $99(a-c) \ \vdots\ k \Rightarrow 11(a-c) \ \vdots\ k$

Если НОД$(11, k) \neq 1$, то $k = 11$ или $k = 22$, тогда $\overline{abc} \overset{11}{\equiv} a+c-b \equiv 1$. При $k = 11$, $a+b+c = 10$, $a+c = 10-b$
$10 - 2b = 11n + 1$ при $b \in [0;9]$ не имеет решений, $b, n \in \mathbb{Z}$.
При $k = 22$, $a+b+c = 21$, $\overline{abc} \overset{11}{\equiv} a+c-b \overset{11}{\equiv} 1$ $\quad 21 - 2b = 11n + 1$
при $b \in [0;9]$ не имеет решений $b, n \in \mathbb{Z}$

Значит, НОД $(11, k) = 1$ и $11(a-c) \vdots k \Rightarrow a-c \vdots k$

Заметим, что a и c одной чётности, $a, c \in \mathbb{Z}$, $a, c \in [1;9]$.
$a-c \in \{0; 2, 4, 6\}$

Рассмотрим случаи $a-c \in \{2; 4\}$, тогда $k \vdots 2$, $a+b+c \not\vdots 2$
т.е. b - нечётное $a \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow a, b, c \not\vdots 2 \Rightarrow a+b+c \geq 3 \Rightarrow k=4$
Тогда $a=b=c=1$, но $111 \equiv 3 \mod 4$. $k \geq 4$

Если $a-c=6$, т.к. $k \neq 2$, то $k=3$ или $k=6$.

~~Если $k=3$, то $\overline{abc} = \overline{cba} = 121 \overset{3}{\equiv} 1$ подходит~~

Если $k=6$, то $\overline{abc} = 311 \overset{6}{\equiv} 5$

$\overline{abc} = 131 \overset{6}{\equiv} 5$

$\overline{abc} = 113$, но $\overline{cba} = 311 \overset{6}{\equiv} 5$

Если $k=3$, то $\overline{abc} = 101 \overset{3}{\equiv} 2$

Остался случай $a=c$, тогда $\overline{abc} = \overline{cba}$. Необходимо и достаточно, чтобы $101a + 10b \equiv 1 \mod 2a+b+1$

Имеем 2 случая: a, k - чёт, b - нечёт и a, k - нечёт, b - чёт

Если $k=5$, то $\overline{abc} = 121 \overset{5}{\equiv} 1 \mod 5$ подходит $\boxed{121}$

Если $k=7$, то $\overline{abc} = 141 \overset{7}{\equiv} 1$ подходит $\boxed{141}$

$\overline{abc} = 303 \overset{7}{\equiv} 2$

Если $k=13$, то $\overline{abc} = 525 \overset{13}{\equiv} 4$

$\overline{abc} = 363 \overset{13}{\equiv} 12$

Если $k=8$, то $\overline{abc} = 232 \overset{8}{\equiv} 0$

Если $k=10$, то $\overline{abc} = 333 \overset{10}{\equiv} 3$

$\overline{abc} = 171 \overset{10}{\equiv} 1$ $\boxed{171}$

Рассмотрим все $\overline{cba}$: $a=1$: 111 $k=4$ (рассмотрено), 131 $k=6$, (рассмотрено), $151 \overset{7}{\equiv} 7$, 161 $k=9$, $k \not\vdots 3$ не удовл., 181 $k=11$ (рассмотрено), 191 $k=12$ $k \vdots 3$ не удовл. 121; 141; 171 - подходят.

Ответ 121, 141, 171

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 1 | 7 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

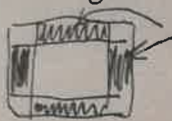
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~задача~~ 5

В таблице $n \times n$ квадратов 2×2 $(n-1)^2$ штук (кол-во способов выбрать угловую клетку)

В каждом квадрате 2 ~~клетки~~ фишки. Каждая клетка принадлежит не более, чем 4 квадратам т.к. фишек хотя бы $\frac{2(n-1)^2}{4}$.

Но фишек не более, чем $\frac{2(n-2)^2}{4} + \frac{2 \cdot 4(n-2)}{2} + 4$, сумма количеств. фишек во ~~внут~~ внутр квадрате $(n-2) \times (n-2)$ (каждая клетка входит в 4 квадрата), полосах



таких, что каждая клетка входит в 2 квадрата и 4 угловые клетки. Т.е. $K \in \left[\frac{(n-1)^2}{2}; \frac{(n-2)^2}{2} + 4(n-2) + 4\right]$

Ответ: $K \in \left[\frac{(n-1)^2}{2}; \frac{(n-2)^2}{2} + 4n - 4\right]$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	9	5	2	2	1

____

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Орлова

Имя Анастасия

Отчество Станиславовна

Дата рождения 18.05.2003 Класс 11

Предмет Математика

Работа выполнена на ____ листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 8(968) 831 09 45 Подпись Орлова

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

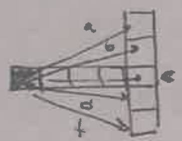
Вопрос №1

Чтобы получить наименьшую длину результативного вектора надо стремиться уменьшать длину, ~~нот~~ выбирая противоположные вектора ($\vec{a}$ и $-\vec{a}$)

Таким образом можно взять 5×7 клеток:

используя эти клетки и соотв-е вектора, длина рез суммарного вектора будет 0 так как на каждый из построенных векторов $\vec{b}$ найдётся обр-й вектор $-\vec{b}$ причём только один.

Теперь рассм-м оставшиеся 5 клеток и все варианты выбора трех из них.



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{a}+\vec{f}+\vec{c}$

$\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}$

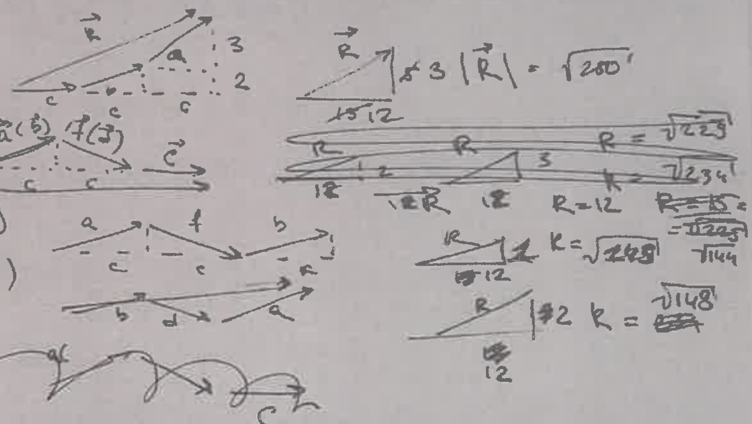
$\vec{a}+\vec{f}+\vec{b}(\vec{d})$

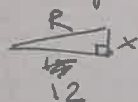
$\vec{b}+\vec{d}+\vec{a}(\vec{f})$

$\vec{a}+\vec{f}+\vec{c}$

$\vec{d}+\vec{b}+\vec{c}$

a (b) – a или b



R = ~~15~~ 12 – минимальная длина. при иных сочетаниях мы получаем картину:  , где R > ~~15~~ 12 по т о соот-и углов и сторон в Δ

Ответ: ~~15~~ 12

1	2	3	4	5	Σ
20	20	–	–	20	60

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 9 | 5 | 2 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Вопрос № 2

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$$

$$3\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right)^2 - 3\left(\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right) - 6\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}\right) + 2\cdot 2\left(\frac{2tg\frac{x}{2}(1-tg^2\frac{x}{2})}{(1+tg^2\frac{x}{2})^2}\right) + 3 = 0$$

$1 + tg^2\frac{x}{2} > 0$ (т.к. $tg^2\frac{x}{2} > 0$)

$—\,||\,— = 0 \mid \times (1+tg^2\frac{x}{2})^2$

$$3\cdot 4\cdot tg^2\frac{x}{2} - \cancel{3} + 3tg^4\frac{x}{2} - 12tg\frac{x}{2} - 12tg^3\frac{x}{2} + 8tg\frac{x}{2} - 8tg^3\frac{x}{2} + \cancel{3} +$$
$$+ 6tg^2\frac{x}{2} + 3tg^4\frac{x}{2} = 0$$

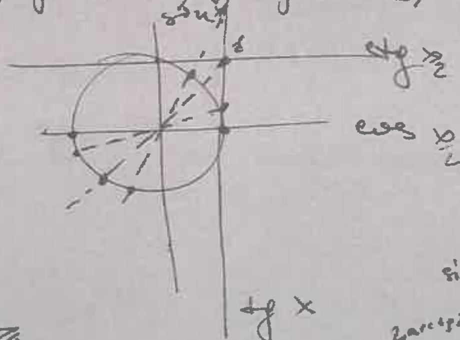
$$6tg^4\frac{x}{2} - 20tg^3\frac{x}{2} + 18tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} = 0$$

$$tg\frac{x}{2}(3tg^3\frac{x}{2} - 10tg^2\frac{x}{2} + 9tg\frac{x}{2} - 2) = 0$$

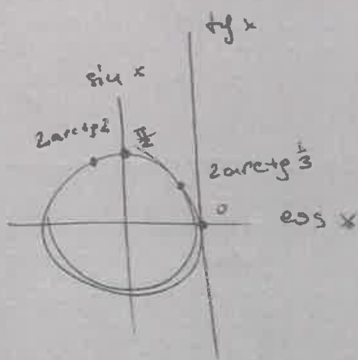
$$tg\frac{x}{2}(tg\frac{x}{2} - 1)(3tg^2\frac{x}{2} - 7tg\frac{x}{2} + 2) = 0$$

$$tg\frac{x}{2}(tg\frac{x}{2} - 1)(tg\frac{x}{2} - 2)(3tg\frac{x}{2} - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = 0 \\ tg\frac{x}{2} = 1 \\ tg\frac{x}{2} = 2 \\ tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = arctg\,2 + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = 0{,}5\pi + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = 2arctg\,2 + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \longleftarrow \text{Ответ.}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 9 | 5 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

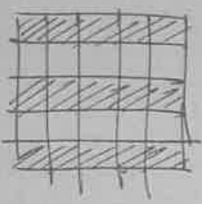
Вопрос № 5

Чтобы в любом квадрате 2×2 было 2 фишки любой квадрат 2×2 выглядит как один из 6 вариантов.

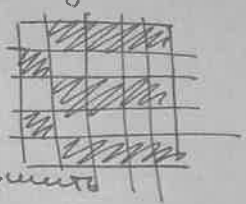
если $n \vdots 2$, то $n \times n \vdots 4 \Rightarrow$ в любое поле $n \times n$ в таком случае можно порезать на квадраты 2×2 каждый из которых ровно на половину заполнен фишками. Тогда $k = \frac{n \times n}{2}$

если $n \not\vdots 2$, то максимальное кол-во фишек ~~...~~ $\frac{n+1}{2} \cdot n$

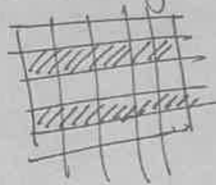
рассм-м 5×5



Теперь, при сдвиге одного столбца кол-во фишек уменьшится на один:



Таким образом можно уменьшить кол-во до $\frac{n-1}{2} \cdot n$.
и это минимум.



И тогда $k \in \{\frac{n \times n}{2}\}$ для чётных и

Ответ: $k \in [\frac{n-1}{2} \cdot n ; \frac{n+1}{2} n]$ для нечётных n.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Дистанционно

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	1	2	0	9	2	1

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Лунев ЛУНЕВ

Имя Максим МАКСИМ

Отчество Александрович АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 15.08.2003 Класс 11

Предмет Математика

Работа выполнена на _____ листах Дата выполнения работы 06.03.2021

Номер телефона 89845354211 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	0	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. $3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2 x + \cos^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x - 6\sin x - 3\cos x + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	6	66

пусть $t = 2\sin x + \cos x$

тогда $t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = 1 \\ 2\sin x + \cos x = 2 \end{array}\right.$ $\quad \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - 2\sin x \\ \sqrt{1-\sin^2 x} = 2 - 2\sin x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sin^2 x = 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 \\ 1-\sin^2 x = 4\sin^2 x - 8\sin x + 4 \end{array}\right.$

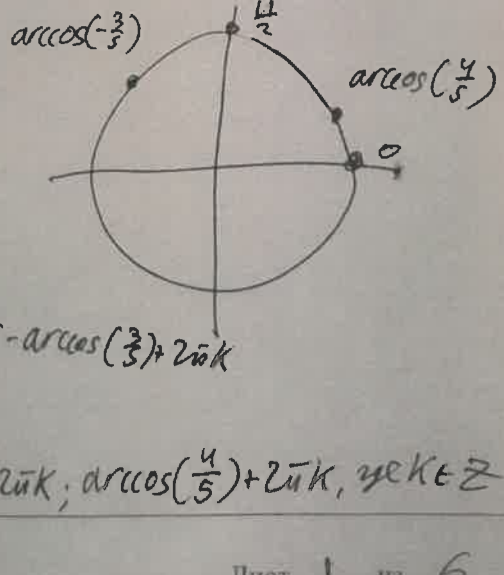
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (5\sin x - 4)\sin x = 0 \\ 5\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (5\sin x - 4)\sin x = 0 \\ (5\sin x - 3)(\sin x - 1) = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{4}{5} \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{3}{5} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$ $\cos x = \frac{3}{5}; \Rightarrow \cos = -\frac{3}{5}$ ($\frac{4}{5}; \frac{3}{5}$ не удовлетворяет $2\sin x + \cos x = 1$)

$\cos x = 1;$

$\cos x = \frac{4}{5};$

$\cos x = 0$



$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \Rightarrow \\ \cos x = 0 \end{array} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = 2\pi k \end{array}\right.$

$\sin x = \frac{4}{5}; \cos x = -\frac{3}{5} \Rightarrow x = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k = \pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi k$

$\sin x = \frac{3}{5}; \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $2\pi k$; $\pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi k$; $\arccos\left(\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

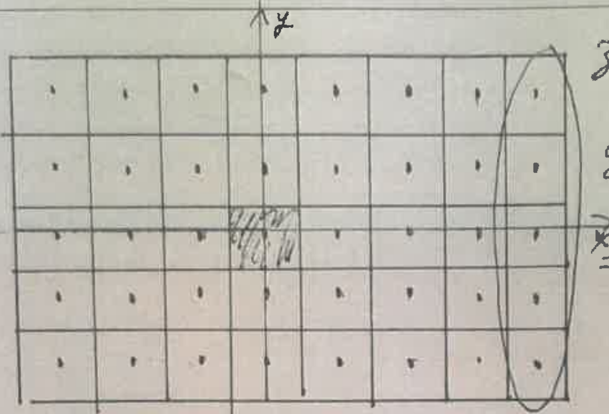
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	2	0	9	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.



Заметим, что если сторона клетки $a=1$, то расстояние между центрами смежных клеток равно $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a=1$

=> введем систему координат с началом в центре закрашенной клетки.

рассмотрим прямоугольник с вершинами в точках (-3;-2) (3;2) (3;-2):
заметим, что сумма всех векторов, проведенных точки, ему принадлежащие будет равна 0 (нулю), т.к. $\forall \{x_i;y_i\} \exists \{-x_i;-y_i\}$

$\Rightarrow \{x_i;y_i\}+\{x_i;y_i\}=0$

=> Если провести векторы во все клетки, то их сумма будет складываться из векторов, проведенных в точки (4;0), (4;-1), (4;1), (4;-2), (4;2); $\{4;0\}+\{4;1\}+\{4;-1\}+\{4;-2\}+\{4;2\}=\{20;0\}$

=> длинна суммы => $\vec{K}\{20;0\}$ $|\vec{K}|=20$

$|\vec{K}|=\sqrt{20^2+0^2}$

=> исключая два вектора $\vec{i}\{x_i;y_i\}$ и $\vec{j}\{x_j;y_j\}$ получаем $\sqrt{(20-x_i-x_j)^2+(y_i+y_j)^2}$, т.к. $x_i=x_j=4$, то

$\sqrt{(12)^2+(y_i+y_j)^2}$ выгодней будет исключить 2 вектора у которых $x_i=x_j=4$, $y_i=-y_j$ и при этом $|\vec{K}|_{min}$ будет равно 12.

Ответ: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М Н 0 0 0 1 1 2 0 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. $\overline{abc} \bmod (a+b+c)+1 = 1$

$\overline{cba} \bmod (a+b+c)+1 = 1$

$\Rightarrow 100a+10b+c = 100c+10b+a \pmod{a+b+c+1}$

$\Rightarrow 99a \underset{a+b+c+1}{\equiv} 99c \quad 99 = 9\cdot 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c+1=9 \\ a+b+c+1=11 \\ a=c \end{array}\right.$

① $a+b+c+1=11$

$\Rightarrow a+b+c=10$, но т.к. $\overline{abc} \underset{\bmod 11}{\equiv} 1$,

то $a+b+c = a+(a+c+1)+c = 2a+2c+1$, причем $a+c \le 10$

$\underbrace{2a+2c+1}_{\text{нечетное}} = 10$ ← четное

(⇒ либо $a+c<10$ либо $a=c=5$, но тогда $\overline{abc}=605$ ∅)

⇒ противоречие

~~② $a+b+c+1=9$~~

② $a=c$

$\frac{100a+10b+c}{a+b+c+1} = K + \frac{1}{a+b+c+1}$

$\Rightarrow \frac{101a+10b-1}{2a+b+1} = K \Rightarrow \frac{81a-1+20a+10b+10-10}{2a+b+1} = K$

$\Rightarrow \frac{81a-11}{2a+b+1} = K-10$

⇒ проверим все a $(a<10,\ b<10,\ c<10)$

$a, b, c, K \in N$

Лист 3 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 2 0 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a=1$

$\frac{70}{b+3}=k-10$ $b=2;\ b=4;\ b=7$ 121 141 171

$a=2$

$\frac{151}{b+5}$ $\varnothing$ простое

$a=3$

$\frac{232}{b+7}=\frac{116\cdot 2}{}\ \frac{58\cdot 4}{}\ \frac{29\cdot 8}{b+7}\Rightarrow b=1$ 313

$a=4$

$\frac{313}{b+9}$ $\varnothing$ простое

$a=5$

$\frac{394}{11+b}=\frac{2\cdot 197}{11+b}$ $\varnothing$ простое

$a=6$

$\frac{475}{13+b}=\frac{5\cdot 95}{}=\frac{25\cdot 19}{13+b}\Rightarrow b=6$ 666

$a=7$

$\frac{556}{15+b}=\frac{4(125+14)}{15+b}=\frac{4\cdot 139}{15+b}$ $\varnothing$ простое

$a=8$

$\frac{637}{17+b}=\frac{7\cdot 91}{b+17}=\frac{13\cdot 7\cdot 7}{b+17}$ $\varnothing$

$a=9$

$\frac{718}{b+19}=\frac{2\cdot 359}{b+19}$ $\varnothing$ простое

③

$a+b+c+1=9$

$\frac{100a+10b+c}{9}=k+\frac{1}{9}$

$\frac{99a+9b+a+b+c}{9}=k+\frac{1}{9}$

$\Rightarrow 11a+b+\frac{8}{9}=k+\frac{1}{9}$

$\Rightarrow 11a+b-k=-\frac{7}{9}$

$\varnothing$

т.к. $a,b,c,k\in N$, то противоречие

$\Rightarrow \{121;141;171;313;666\}$

637 $\not{7}$

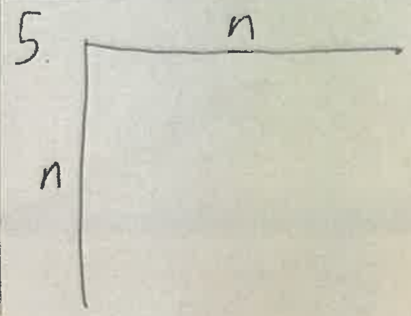
Ответ: $\{121;141;171;313;666\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М Н 0 0 0 1 1 2 0 9 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5.



при четных n:

$n \,\vdots\, 2$

Будем иметь n^2 клеток => можно поделить на $\frac{n^2}{4}$ квадратов стороной 2 (в каждом максимум 2 закрашенных)

=> $\frac{n^2}{2}$ закрашенных.

не может быть $\frac{n^2}{2}+x$ т.к. тогда, по принципу дирихле в каком-то квадрате будет >2 закрашенных клеток

=> при $n \,\vdots\, 2$ $k = \frac{n^2}{2}$

при нечетных

ответ: при четных n − $k=\frac{n^2}{2}$

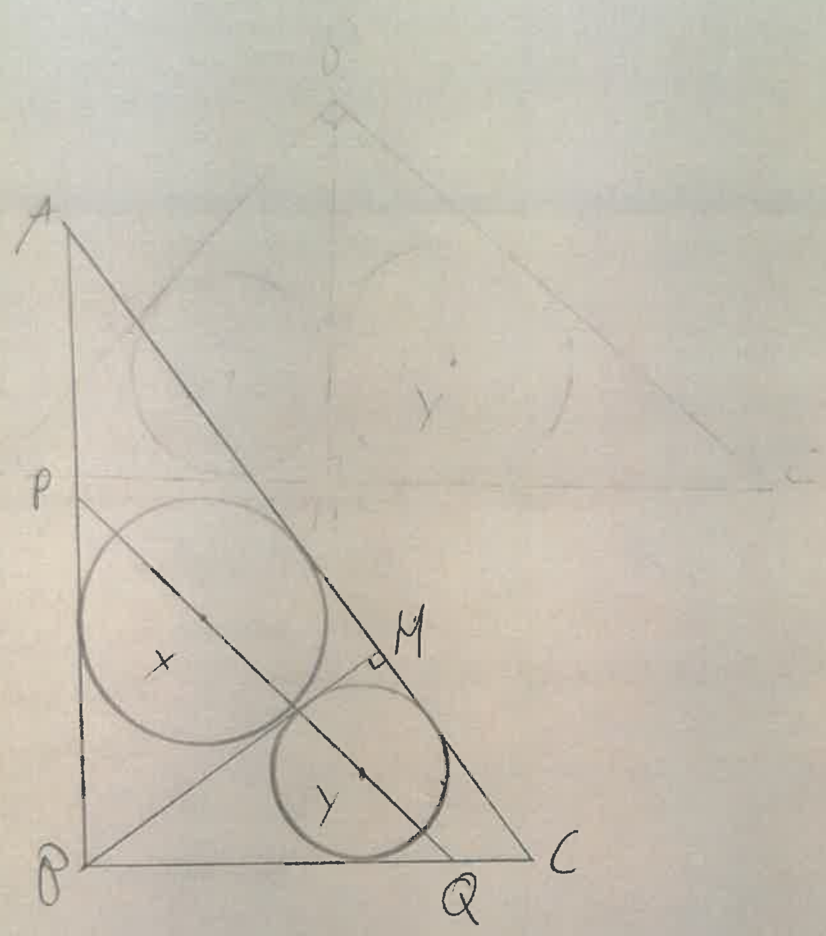
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 9 | 2 | 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	3	2	0	6	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ПЕРЧИН

Имя ИВАН

Отчество НИКОЛАЕВИЧ

Дата рождения 11.01.2004 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 12.03.2021

Номер телефона ____________ **Подпись** ____________

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 3 2 0 6 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

1-ый

Среди бельчонков с чётными номерами может быть лишь 1 рыцарь, т.к. любые два чётных утверждения противоречат друг другу. Среди бельчат с нечётными номерами рыцарь тоже только 1 по этой же причине, ⇒, всего два рыцаря. Однако это противоречит условию, т.к. иначе не говорили, что рыцарей двое - можно нечётн. количество ⇒, рыцарь только 1, и он - 1-ый бельчонок, а количество лжецов - нечётное. Итого всего было 1+k бельчат, где k - натуральное и нечётное число лжецов, а рыцарь 1.

Ответ: $1+k$, где $k\in N$ и k - нечётное.

1	2	3	4	5	Σ
18	2	20	0	20	58

№2.

$$2\cos\frac{x}{3}+\sqrt5=2-(\sqrt5-1)\sin\frac{x}{6}$$

$$2\left(\cos^2\frac{x}{6}-\sin^2\frac{x}{6}\right)+\sqrt5=2-(\sqrt5-1)\sin\frac{x}{6}$$

$$2-4\sin^2\frac{x}{6}+\sqrt5=2-\sqrt5\cdot\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{x}{6}$$

$$4\sin^2\frac{x}{6}+\sqrt5+\sqrt5\cdot\sin\frac{x}{6}-\sin\frac{x}{6}=0$$

$$(\sqrt5+1)\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{x}{6}\left(4\sin\frac{x}{6}-1\right)=0$$??

$$\sin\frac{x}{6}\left(4\sin\frac{x}{6}+\sqrt5\right)=0$$

$\sin\frac{x}{6}=0$ $\qquad$ $\sin\frac{x}{6}=-\frac{\sqrt5}{4}$

$\frac{x}{6}=\pi k,\ k\in Z$ $\qquad$ $x=(-1)^m\cdot\arcsin\left(-\frac{\sqrt5}{4}\right)\cdot 6+6\pi m,\ m\in Z.$

$x=6\pi k,\ k\in Z.$

$\cos\frac{3x}{4}=0$

$\frac{3x}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n \quad \Big|\cdot\frac{4}{3}$

$\frac{2}{3}\pi n-\frac{4}{3}\pi<x<\frac{8}{3}\pi n$

Из них в промежуток подходит второй вариант ответа.

Лист 01 из 03

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

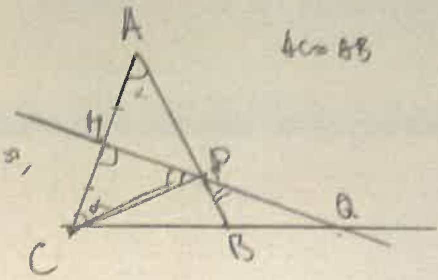
Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | 0 | 6 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: $(-1)^n \cdot 6 \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right) + 6\pi n,\ n \in Z$.

№3.



Рассмотрим ΔAPC. пусть $PH \perp AC$ (согласно условию). PH – серединный $\perp$-р., $\Rightarrow$,

$AP = PC$ $\angle ACP = \angle CAP = \alpha$.

$\angle APC = 180° - 2\alpha$, $\angle CPB = 2\alpha$

$\angle CPH$ (PH-биссектриса) $= \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$, $\Rightarrow$,

$\angle BPQ = 180° - (90° - \alpha) - 2\alpha = 90° - \alpha = \angle CPH$. $\angle ACB = \frac{180° - \alpha}{2}$, $\Rightarrow$, $\angle BQP =$

$= \cancel{180°}\,90° - \frac{180° - \alpha}{2} = \cancel{\frac{180°+\alpha}{2}}\ \frac{\alpha}{2}$, $\Rightarrow$, $\angle PBQ = 180° - \frac{\alpha}{2} - 90° + \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Из условия, т.к. $\Delta APC = \Delta PBQ$, то, т.к. $\angle PBQ > 90°$, то и $\angle APC > 90°$

и $90° + \frac{\alpha}{2} = 180° - 2\alpha$, откуда $180° - 90° = 2{,}5\alpha$, $\alpha = \frac{90°}{2{,}5} = 36° = \angle BAC$.

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$.

Ответ: $\angle BAC = 36°$, $\angle ACB = \angle ABC = 72°$.

№4.

Оба числа меняют свою чётность, $\Rightarrow$, в паре 1 число нечётное, другое чётное. Т.к. НОК$(a, b+1)$ = НОК$(b; a+3)$, то это число (пусть оно равно x) кратно a, $b+1$, b и $a+3$. Однако, наименьший НОК для двух разных чисел ~~может быть~~ равен их произведению, т.е. $x \le a(b+1)$ и $x \le b(a+3)$. При зависимости b от a, получаем что одно из чисел равно 1. Если:

$a=1$, то $a+3=4$, т.е. $b+1=4b$, $b\notin N$, не подходит

$b+1=1$, т.е. $b=0$, не подходит

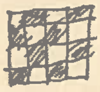
$b=1$, → $b+1=2$, $2a=a+3$, $a=3$. Пара $a=3, b=1$

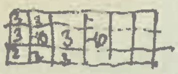
$a+3=1$, $a<0$, не подходит.

Итого единственный вариант — $a=3, b=1$.

Ответ: $a=3, b=1$.

№5.

Т.к. в любом квадрате 2×2 Σ чисел $=0$, то, если сделать квадрат 4×4 и закрасить его шахматной раскраской: , то тогда будет не менее 4-х отрицательных чисел. А т.к. каждый квадрат 3×3 содержит положительное количество, а в этом квадрате 4×4 так найдётся квадрат 3×3 с 3-мя отр. числами. Σ-ма 1 такого числа на любое 3 положительных $b<0$ (по условию), а Σ-ма 3-х — на 9, но в квадрате 3×3 остаётся 6 чисел, т.з. использование квадрата 2×2 уголком →  нельзя.

Единственный оставшийся вариант — полоса $n\times m$, где $n=3$, а $m\geq3$. Пример:  .. В нём, где в среднем ряду каждая чётная клетка - (-1d), а остальные - пятёрки, условие выполнено

Ответ: одно из чисел n и $m=3$, а другое - любое ≥ 3.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	1	3	3	5	2	1

дистанционно

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Воронова

Имя Виктория

Отчество Александровна

Дата рождения 26.01.2003 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2021

Номер телефона +79003302451 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 3 3 5 2 1

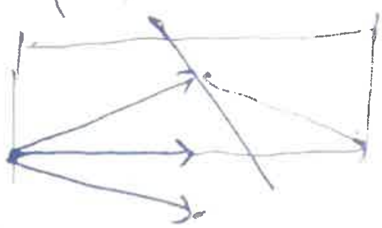
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

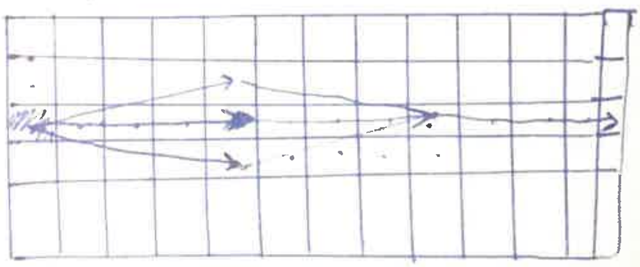
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

Заметим, что если ~~поставить~~ провести векторы в центры всех клеток таблицы 5 × 7, где черная клетка будет центром, то сумма векторов будет равна 0. Но у нас есть "еще" один столбец справа. Мы не сможем добиться того, чтобы ~~эти~~ одновременно 2 из них (из 5, проведенных в центры дл. столбца справа) были равны нулю после сложения с другими векторами. (допустим, мы можем убрать вектор с концом в (1;8), если пустыми будут клетки (2;7) и (3;5), сложив ①, получив ② и сложив с ⑤)

Поэтому лучше выбрать две клетки, куда не надо проводить вектор из правого столбца. Чтобы сумма была наименьшей, то пусть пустыми останутся клетки (1;8) и (5;8). Тогда сумма векторов:





20б

равна 12.

Ответ: 12.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	2	6	68

3б

№2

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$

$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 4\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2 = 0$

$4\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2 = 0$

$(2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$

Пусть $2\sin x + \cos x = t$, тогда

$t^2 - 3t + 2 = 0$ | Обратная замена: $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = 2 \quad (1) \\ 2\sin x + \cos x = 1 \quad (2) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1 \end{array}\right.$

(1): $2\sin x + \cos x = 2$

$4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - 1 = 0$

$-2\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$

$-3\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0$

$-\left(2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{x}{2} = 0$

$\left(\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} -\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0 \\ 3\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right.$

Заметим, что ни $\sin\frac{x}{2}$, ни $\cos\frac{x}{2}$ не равны нулю, ведь тогда оставшийся ($\sin\frac{x}{2}$ или $\cos\frac{x}{2}$) если они равны нулю, тоже будет равен нулю, и нарушится основное тригонометрическое тождество. Поэтому делим на $\cos\frac{x}{2}$.

$\left[\begin{array}{l} -\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1 \\ \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ x = 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

в рамке справа

(2): $2\sin x + \cos x = 1$

$$4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0 \\ 2\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right.$$

, можем поделить на $\cos\frac{x}{2}$, т.к. $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ведь иначе нарушилось бы основное тригонометрическое тождество

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0 \\ 2 - tg\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0 \\ tg\frac{x}{2} = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi k, k \in Z \\ \frac{x}{2} = arctg\, 2 + \pi n, n \in Z \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = 2arctg\, 2 + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi m\ \ m \in Z$

$x = 2arctg\, 2 + 2\pi l\ \ l \in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$$\begin{cases} \overline{abc} = k(a+b+c+1)+1 \\ \overline{cba} = m(a+b+c+1)+1 \end{cases}$$

$$100a+10b+c-100c-10b-a=(a+b+c+1)(k-m)$$

$$99a-99c=(a+b+c+1)(k-m)$$

$\frac{99(a-c)}{a+b+c+1} = k-m$. При этом, k и m - целые числа. Значит

$99(a-c)$ должно нацело делиться на $(a+b+c+1)$.

Т.к. a и c у нас могут стоять вначале, то $a \neq 0$ и $c \neq 0$.

Тогда минимальное значение, к-рое может принимать $(a+b+c+1)$ - это $3: (1+0+1+1)$, а максимальное - $19: 9+9+9+1$.

~~Нам подходят все трехзначные числа, у к-рых первая и третья цифры одинаковые (101, 111;~~

Рассмотрим числа, когда $a=c$. Тогда

$$100a+10b+a=k(2a+b+1)+1$$

$$\frac{101a+10b-1}{2a+b+1} = k$$

1. Если $a=1$, то $\frac{100+10b}{3+b}$. Подходящие $b=2, 4, 7$. Тогда трехзначные числа: 121, 141, 171

2. Если $a=2$, то $\frac{201+10b}{5+b}$. Подходящих b нет.

3. Если $a=3$, то $\frac{302+10b}{7+b}$. Подходящие $b=1$. Число: 313.

4. Если $a=4$, то $\frac{403+10b}{9+b}$. Подходящих b нет.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

5. $a=5$, то $\frac{504+10b}{11+b}$. Подходящих b нет.

6. $a=6$, то $\frac{605+10b}{13+b}$. Подходящий $b=6$. Число 666.

7. $a=7$, то $\frac{706+10b}{15+b}$. Подходящих b нет

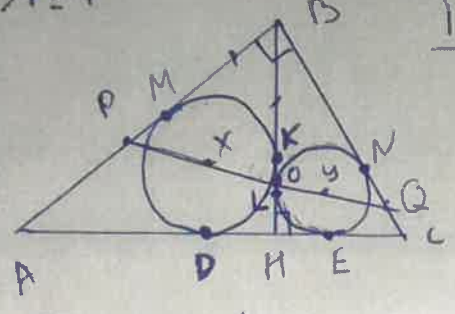
8. $a=8$, то $\frac{807+10b}{17+b}$. Подходящих b нет.

9. $a=9$, то $\frac{908+10b}{19+b}$. Подходящих b нет.

В итоге получим, что подходящие числа 121, 141, 171, 313, 666

Ответ: 121, 141, 171, 313, 666.

№ 4

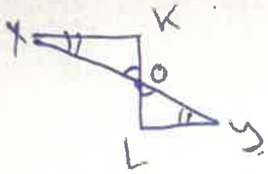


Дано: $\triangle ABC$ – п/у тр-к, $BH \perp AC$, окр (X, R) – впис-ная в $\triangle ABH$, окр-ть $(Y; r)$ – впис-ная в $\triangle BHC$, $XY \cap AB = P$, $XY \cap BC = Q$, $BH = a$.

Найти: $S_{\triangle BPQ}$. Реш-ние:

Т.к. BH – высота, проведенная из прямого угла, то

$AB = \sqrt{AC \cdot AH}$, $BC = \sqrt{AC \cdot HC}$, $BH = \sqrt{AH \cdot HC} = a$



$\triangle XKO \sim \triangle LOY$ по 2-м углам, т.к. $\triangle XKO$ и $\triangle LOY$ – п/у тр-ки, ведь XK и LY – радиусы, проведенные в точку кас-я, $XK \parallel LY$, $\angle KXO = \angle OYL$, как н/л. Тогда

$$\frac{XK}{LY} = \frac{KO}{OL} \Rightarrow \frac{KO}{OL} = \frac{R}{r}$$

$MB = BK$, $BO = BN$, как отрезки кас-ных, проведенных из одной точки

Тогда $MB + \overset{KL}{\cancel{OL\ KO}} = BN$. Аналогично $AM = AD$, $HD = HK$, $LH = HE$, $EC = CN$

Т.к. $\triangle BPQ$ тоже п/у тр-к ($\angle B = 90^\circ$), то $S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} PB \cdot BQ$

$LH = YE = r$, а $KH = R$, т.к. XDHK и LYEH – квадраты. Тогда

$KH - LH = R - r = KL = KO + OL = KO + \frac{KO \cdot r}{R}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	3	3	5	2	1

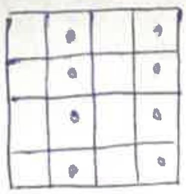
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

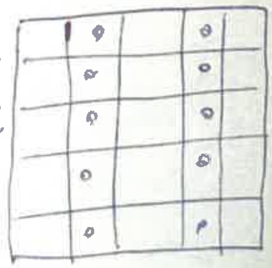
Допустим, что n- четное число, тогда таблицу можно разбить на целое число квадратиков 2×2 и в каждом из них будет ровно 2 фишки, значит нам понадобится $\frac{n^2}{2}$ фишек.

если n = 4



Расставим фишки следующим образом (таким образом, в любом квадратике 2×2 будет ровно 2 фишки. Для n-четного подходит и шахматная раскраска).

Если n- нечетное, то у нас добавляется дополнительный ряд к n-четному сбоку и снизу. Так как ~~нижний ряд~~ когда n-четное у нас столбец справа весь в фишках, то новый столбец справа новых фишек не потребует. Тогда как ~~нижняя~~ нижняя строка потребует продолжения столбцов фишек.



Значит при n-четное $k = \frac{n^2}{2}$, а при n-нечетное, $k = \frac{n(n-1)}{2}$

Ответ: при n-четное, $k = \frac{n^2}{2}$.

при n-нечетное, $k = \frac{n(n-1)}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	0	0	0	1	2	9	7	6	2	1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Клеванский

Имя Алексей

Отчество Геннадьевич

Дата рождения 29.10.2003 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 12.03.2021

Номер телефона +7(917)464-55-20 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 9 | 7 | 6 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
4	~~10~~ 20	8	6	20	~~50~~ 58

№ 1 Предположим, что рыцарей ≥ 3, тогда заметим, что как минимум двое из них говорят об одном и том же, то есть либо о количестве лжецов, либо о количестве рыцарей, чего быть не может, поскольку количество рыцарей или лжецов на самом деле не может одновременно соответствовать двум разным значениям. Противоречие, 3 и более быть не может. (иначе бы рыцарю пришлось врать)

Посмотрим на случай когда рыцарей два, заметим, что тогда ни один из них не может говорить о числе рыцарей, поскольку оно чётно, а высказывания о количестве рыцарей содержат только нечётные значения.

Наконец, если рыцарь всего один:

Если он говорит о лжецах, тогда первый бельчонок был не рыцарем, но сказал правду, чего быть не может ($!р = л$)

~~Если он~~ Значит он сказал, что $р=1$ и был 1-ым. Тогда все остальные бельчата – лжецы и их $2k$, тогда бельчонок под номером $2k$ сказал правду, значит бельчонка-лжеца под номером $2k$ быть не может. $k=0$

Значит он был совсем один. Вышел и сказал: „Среди нас ровно один рыцарь.", всё. По условию рыцарь есть как минимум один.

Не знаю насколько 1 подходит под слово „несколько", однако...

Ответ: 1 (если по условию такого быть не могло, то 0 или же просто такого не могло быть.)

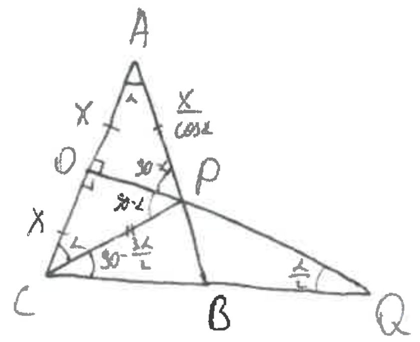
№ 3 Пусть $\angle CAB = \alpha$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 2 9 7 6 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Тогда $\angle OPA = 90-\alpha$ $(180-90-\alpha-\angle OPA=0)$

$\angle ACB = \angle ABC = 90-\frac{\alpha}{2}$

$\triangle APO = \triangle CPO$ по двум сторонам и углу между ними

$\angle ACP = \alpha$ $\angle OPC = 90-\alpha$

$\angle OQC = \frac{\alpha}{2}$ $(180 = \angle OQC + 90 + 90 - \frac{\alpha}{2})$

$S_{APC} = 2S_{APO}$

Ответ: 72°; 54°; 54°

(см ↓)

Пусть $AO = x$, тогда $AP = \frac{x}{\cos\alpha}$

$OC = x$

$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ не подходит, убеждаемся в этом проверкой.

$S_{APC} = S_{PQB}$, значит $S_{PQB} = 2S_{APO}$

$S_{ABC} - 2S_{APO} = S_{QOC} - S_{APO} - S_{PQB}$

$S_{ABC} = S_{QOC} - S_{APO}$

$\frac{2x\cdot 2x\cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{x}{tg\frac{\alpha}{2}}}{2} - \frac{x\cdot\frac{\cancel{x}}{\cos\alpha}\sin\alpha}{2}$

$4\sin\alpha = \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}} - tg\alpha$ $\alpha \neq 180^\circ$ $8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = t$

$8t(1-2t) = (1-2t) + 2t$ $16t^2 - 12t + 1 = 0$ $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{8}$ $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{5\mp\sqrt{5}}{8}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}$ $\cos\alpha = \frac{|\sqrt{5}\pm1|}{4}$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18$ $\alpha = 90-18 = 72^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 2 9 7 6 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 Заметим, что

$x = НОД(a, a+3) = 1$ или 3

$НОД(b, b+1) = 1$

Рассмотрим два случая

1) $x = 1$, тогда все ~~множители~~ которые были у a (простые) теперь либо у b, а те, что были у $b+1$ теперь у $a+3$, тогда

$b+1 = a+3$ $b = a+2$

$a = b$ — невозможно.

2) $x=3$, тогда $a \vdots 3$ и тройка остаётся с ней, тогда

$b+1 = \frac{a+3}{3}$

$\frac{a}{3} = b$, всё сходится.

Логично, что чтобы это работало b и $b+1$ не делились $\vdots 3$, иначе либо a, либо $a+3$ будет иметь в разложении степень тройки на одну больше чем второе число (из a и $a+3$)

Убедимся: $b=1$ $b=4$ $b=7$
$a=3$ $a=12$ $a=21$

(3, 2) (6, 1) (12, 5) (15, 4) (21 8) (24 7)
6 6 60 60 168 168

Итак, $a, b < 1000000$, значит $b < 333334$ Первое $b = 1$, последнее $b = 333331$

$\frac{333331-1}{3} + 1 = 111111$

Ответ: 111111

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

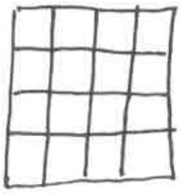
Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 9 | 7 | 6 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

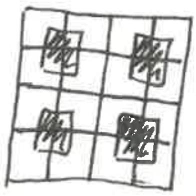
№5

Рассмотрим таблицу 4×4



Заметим, что сумму чисел на этой таблице можно получить несколькими способами

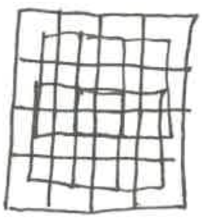
1) 4 2×2 квадрата



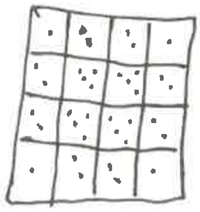
Сумма четырех отрицательных чисел есть число отрицательное.

С другой стороны, можно рассмотреть это как

4 квадрата 3×3 из которых нужно убрать лишнее

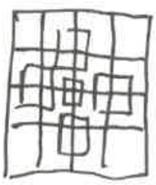


– 4 квадрата 3×3



– наложения.

Убрать:



4 положительных числа вычесть 5 отрицательных будет число положительное.

Таким образом сумма чисел с одной стороны положительна, с другой отрицательна, значит m и n не могут быть одновременно ≥ 4. Тогда нас устраивают пары $(3, m)$ или $(n, 3)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА000129 7621

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Где m и n ≥ 3

Вот примеры:

3	3	3	3	3	...
3	-10	3	-10	3	...
3	3	3	3	3	...

Заметим, что $3\cdot3-10=-1$ и $3\cdot7-10-10=1$

Все условия выполнены. Ответ $(3\times m)$ или $(n\times 3)$, где m и n ≥ 3

№2 Условие $\cos\frac{3x}{4}$ ... Хм, глупо..

$$2\cos\frac{x}{3}+\sqrt{5}=2-(\sqrt{5}-1)\sin\frac{x}{6}$$

$$t=\frac{x}{6}$$

$$\cos 2t=1-2\sin^2 t$$

$$2-4\sin^2 t+\sqrt{5}=2-(\sqrt{5}-1)\sin t$$

$$\sin^2 t-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\sin t-\frac{\sqrt{5}}{4}=0$$

$$\sin t=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}+\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{8}\pm\frac{\sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8}$$

Но мы знаем, что $\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\sin 18^\circ$

$$x=6\left((-1)^n\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{8}\pm\frac{\sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8}\right)+\pi n\right)$$

$$\sin^2 t-\sin 18^\circ\sin t-\sin 18^\circ-\frac{1}{4}=0$$

$$\sin t=\frac{\sin 18^\circ\pm\sqrt{\sin^2 18^\circ+1+4\sin 18^\circ}}{2}$$

$$x=6\left((-1)^n\arcsin\left(\frac{\sin 18^\circ\pm\sqrt{\sin^2 18^\circ+4\sin 18^\circ+1}}{2}\right)+\pi n\right)$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	9	7	6	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что если $\sin\frac{x}{6} = -1$, то

$2\cos\frac{x}{3} = -\sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 1$

$\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$x = \pm\pi + 6\pi k$

$\frac{x}{6} = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$

$x = 9\pi + 12\pi n$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	2	6	9	2	2	1

Адрес площадки проведения ____________ Шифр

Вариант № 2

Фамилия АРТЮХОВ

Имя ВЛАДИСЛАВ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 13 06 2003 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 10 **листах** **Дата выполнения работы** 12.03.2021

Номер телефона +7 918 3506356 **Подпись** ____

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами, дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

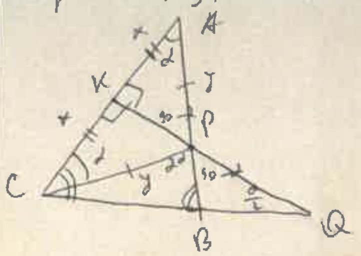
Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	2	6	9	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задание №3:



$S_{\triangle APC} = S_{\triangle QBP}$

3α

$AB = AC = 2x$

1	2	3	4	5	Σ
20	~~6~~	16	8	–	~~50~~

64

1) т.к. KQ – серединный перпендикуляр, то $AP = PC \Rightarrow$

20

$\Rightarrow \angle CAP = \angle PCA = \alpha$

2) $\angle ACB = \angle ABC = \frac{180-\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

3) $\angle PCB = (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \angle ACP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \alpha = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$

4) $\angle CPB = 180^\circ - (\angle PCB) - \angle PBC = 180^\circ - (90 - \frac{3\alpha}{2}) - (90 - \frac{\alpha}{2}) = 2\alpha$

5) $\angle APK = 180^\circ - \angle AKP - \angle KAP = 90^\circ - \alpha$ (т.к. KP – серединный перпендикуляр и $KP \perp AC$)

$\Downarrow$

$\angle BPQ = \angle APK = 90 - \alpha$

6) $\angle CPQ = \angle CPB + \angle BPQ = 2\alpha + 90 - \alpha = 90 + \alpha$

7) $\angle PQC = 180^\circ - \angle CPQ - \angle PCQ = 180^\circ - (90+\alpha) - (90 - \frac{3\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2}$

8) $AP = CP = y = \frac{x}{\cos\alpha}$ (в прямоугольном $\triangle$-ке APK)

$KP = x\,tg\,\alpha$ (в $\triangle APK$)

9) По т. Менелая в $\triangle ABC$ и секущей QK:

$\frac{CK}{AK} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} = 1$ $\qquad PB = AB - AP = 2x - y \Rightarrow$

$CK = x$; $AK = x$

$\Rightarrow \frac{BQ}{QC} = \frac{2x - \frac{x}{\cos\alpha}}{\frac{x}{\cos\alpha}} = 2\cos\alpha - 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	6	9	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

п-3 (продолжение)

$$\frac{BQ}{QC} = 2\cos\alpha - 1 \Rightarrow BQ = (2\cos\alpha - 1)QC$$

$$CB = CQ - QB = (2 - 2\cos\alpha)CQ$$

10) По т. Менелая в $\triangle CQK$ и секущей AK:

$$\frac{CB}{BQ} \cdot \frac{QP}{PK} \cdot \frac{AK}{AC} = 1 \qquad \frac{AK}{AC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CB}{BQ} = \frac{2(1-\cos\alpha)\cancel{CQ}}{(2\cos\alpha - 1)\cancel{QC}} = \frac{2-2\cos\alpha}{2\cos\alpha - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{PQ}{PK} = \frac{2\cos\alpha - 1}{1-\cos\alpha}} \Rightarrow PQ = \frac{2\cos\alpha - 1}{1-\cos\alpha} PK, \text{ где } PK = (x\,tg\alpha)$$

$$PQ = \frac{(2\cos\alpha - 1)}{1-\cos\alpha} \cdot x \cdot tg\alpha$$

11) $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}\sin\alpha\ AC \cdot AP = \frac{1}{2}\sin\alpha\, 2x\,y = xy\sin\alpha$ (1)

$$S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2}\sin(90-\alpha)\, PB \cdot PQ = \frac{1}{2}\cos\alpha\left(\frac{2\cos\alpha - 1}{1-\cos\alpha}\right)x \cdot tg\alpha \cdot (2x - y)$$

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2}\cancel{\cos\alpha}\left(\frac{(2\cos\alpha - 1)^2}{1-\cos\alpha}\right) \cdot x \cdot tg\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{\cos\alpha}} \quad (2)$$

12) (1) = (2) — по условию: $\qquad y = \frac{x}{\cos\alpha}$

$$\cancel{x}\,\frac{x}{\cos\alpha}\,\cancel{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\,\cancel{x^2}\,\cancel{tg\alpha}\left(\frac{(2\cos\alpha - 1)^2}{1-\cos\alpha}\right)$$

$tg\alpha \neq 0$, т.к. $KP = x\,tg\alpha > 0 \Rightarrow (x^2 tg\alpha)$ можно сократить

$$2 - 2\cos\alpha = (2\cos\alpha - 1)^2$$

$$4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \\ \alpha = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \end{array}\right.$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА0001269221

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №3:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \\ \alpha = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \end{array}\right.$$

$AP = y = \frac{x}{\cos\alpha} > 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0$

При $\alpha = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \neq \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$

$\Downarrow$

$\alpha = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

$\Downarrow$

- $\angle CAB = \alpha = \arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
- $\angle ACB = \angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

Ответ: $\arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$; $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$;
$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 2 6 9 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №1

1) т.к. есть хотя бы 1 рыцарь ~~и он заплатил~~, то:

1.1. Пусть он сказал: „всего $2i+1$ рыцарей", где $2i+1$ - его номер (такую фразу говорит только нечетный бельчонок) ⇒

⇒ все остальные, кто стоит на нечетных местах лжецы, т.к. их номера не равны $(2i+1)$ и они говорят, что рыцарей другое количество, также все ~~кто~~, кто стоит на четных местах, кроме одного, который сказал: „всего j лжецов", а все остальные солгали, т.к. ровно одна белка может сказать "есть j лжецов" ⇒

⇒ имеется 2 рыцаря и $2k+1-2=(2k-1)$ лжец. Но 2 рыцаря - четное число, а ~~рыц~~ рыцарей всего $(2i+1)$ - нечетное кол-во, поэтому все фразы „имеется $2k$ лжецов" сказали лжецы ⇒ всего 1 рыцарь, который стоит на I месте;

Заметим, что если всего 1 рыцарь, то осталось $2k$ лжецов и значит тот, кто стоял на $2k$-ом месте сказал правду, но мы доказали, что рыцарь всего 1 ⇒ ~~случай 1.1~~ ~~невозможен~~ ⇒ $2k=0 \Rightarrow k=0$, такое возможно только если нет ни одного лжеца, в ~~ином~~ ином случае $2k$-ый лжец скажет правду. ⇒ всего бельчат: $2k+1=2\cdot 0+1=1$ бельчонок - рыцарь: I белка-рыцарь: „Среди нас один рыцарь".

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 2 6 9 2 2 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.2. Пусть рыцарь сказал: „всего $2i$ лжецов", тогда найдется такой бельчонок, сказавший, что всего „$(2j+1)$ рыцарей" ⇒ уже имеется хотя бы 2 рыцаря. Т.к. оба эти 2 рыцаря сказали правду, то всего действительно имеется $2i$ лжеца и $(2j+1)$ рыцарей, другие бельчата ~~сказали различные~~ указали количества рыцарей и лжецов отличное от данных, то есть солгали ⇒ все бельчата, кроме двоих лжецы ⇒ всего 2 рыцаря, но ранее мы уже рассматривали данный случай и пришли к выводу, что на членке всего 1 бельчонок-рыцарь (это доказано в пункте 1.1) ⇒ получаем, что в данном случае также всего 1 бельчонок.

Ответ: на полянке собрался ~~один~~ маленький, одинокий бельчонок, не имеющий друзей-бельчат. 1 бельчонок-рыцарь, сказавший: „Среди нас ровно 1 рыцарь".

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 2 6 9 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 4.

НОК $(a; b+1)$ = НОК $(b; a+3)$

$b+1$ и b – взаимно просты, т.к. это последовательные числа $\Rightarrow$ НОД $(b; b+1) = 1$

НОК $(a; b+1) \cdot$ НОД $(a; b+1) = a(b+1)$

НОК $(b; a+3)$ НОД $(b; a+3) = b(a+3)$

$$\frac{a(b+1)}{\text{НОД}(a; b+1)} = \frac{b(a+3)}{\text{НОД}(b; a+3)}$$

НОД $(a; b+1)$ = НОД $(a+3b+3; b+1) = A$

НОД $(b; a+3)$ = НОД $(b; a+3b+3) = B$

Заметим, что $(b+1)$ и b – взаимно просты и мы имеем НОД $(x; b)$ и НОД $(x; b+1)$, где $x = a+3b+3$,

значит НОД (НОД $(x; b)$; НОД $(x; b+1)$) = 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ НОД $(A; B) = 1$; $x = a+3b+3$

Имеем:

$$\frac{a(b+1)}{\text{НОД}(b+1; x)} = \frac{b(a+3)}{\text{НОД}(b; x)}$$

$(b+1) = b' \cdot$ НОД $(b+1; x)$ – по определению

$b = b''$ НОД $(b; x)$ – по определению

$a \cdot b' = b''(a+3)$

т.к. НОД $(b; b+1) = 1$, то НОД $(b'; b'') = 1$ также $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \vdots b''\cancel{(a+3)}$; $(a+3) \vdots b'$

Лист 6 из 10

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7

М	А	0	0	0	1	2	6	9	2	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задача №4 (продолжение)

$ab' = b^4(a+3)$ $\qquad x = a+3b+3$

1) $a = 3m$, $m \in N$:

$3mb' = b^4 3(m+1)$

$m = b^4$, $m+1 = b'$ $\Rightarrow m = b^4 = b'-1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3b^4 = 3(b'-1) \\ b = b^4\ \text{НОД}(b, x) \\ b+1 = b'\ \text{НОД}(b+1, x) \end{cases}$ (1)

2) $a \not\vdots 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ НОД $(a, a+3) = 1$

$a b' = b^4 (a+3)$

$a = b^4$, $a+3 = b'$ $\Rightarrow a = b^4 = b'-3 \Rightarrow \begin{cases} a = b^4 = b'-3 \\ b = b^4(\text{НОД}(b, x)) \\ b+1 = b'\ \text{НОД}(b+1, x) \end{cases}$ (2)

(1):

НОК $(a, b+1) =$ НОК $(3b^4; b'\ \text{НОД}(b+1, x)) =$ (2)

тк НОД $(b', b^4) = 1$ и как следствие НОД (НОД $(b+1, x)$, $b^4) = 1$, то

(2) $3b'b^4$ НОД $(b+1, x)$

НОК $(b, a+3) =$ НОК $(b^4\ \text{НОД}(b, x), 3b') = 3b'b^4\ \text{НОД}(b, x)$

$\cancel{3b'b^4}\ \underbrace{\text{НОД}(b+1; x)}_{=A} = \cancel{3b'b^4}\ (\underbrace{\text{НОД}(b, x)}_{B=})$

~~тк~~ тк НОД $(A, B) = 1$, то равенство возможно только если оба НОД'а равны 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0001269221

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4 (продолжение):

$$\text{НОД}(b+1,\ a+3b+3) = \text{НОД}(b,\ a+3b+3) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\text{НОД}(a,\ b+1) = \text{НОД}(b,\ a+3) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a(b+1)}{\text{НОД}(b+1,\ a)} = \frac{b(a+3)}{\text{НОД}(b,\ a+3)}$$

знаменатели равны 1:

$$\cancel{ab} + a = \cancel{ab} + 3b$$

$$a = 3b$$

$$\begin{cases} a < 10^6 \\ b < 10^6 \end{cases} \Rightarrow 3b < 10^6 \Rightarrow b < \frac{10^6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \le 333\,333$$

Для b существует $(333\,333 - 1 + 1)$ чисел, а ~~для a при~~ число a восстанавливается единственным образом через b $\Rightarrow a = 3b \Rightarrow$

$$\Rightarrow (333\,333 + 1 - 1) = \boxed{333\,333 \text{ пар}}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 2 6 9 2 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4 (продолжение):

$$(2): \begin{cases} a = b^4 = b'-3 \\ b = b^4 \text{ НОД}(b, x) \\ b+1 = b' \text{ НОД}(b+1, x) \end{cases}$$

$$\text{НОК}(a, b+1) = \text{НОК}(b^4, b' \text{ НОД}(b+1, x)) =$$

$= b' b^4 \text{ НОД}(b+1, x)$ — т.к. все взаимнопросты

$$\text{НОК}(a+3, b) = \text{НОК}(b', b^4 \text{ НОД}(b, x)) =$$

$$= b' b^4 \text{ НОД}(b, x)$$

$$\cancel{b'b^4}\text{ НОД}(b+1, x) = \cancel{b'b^4}\text{ НОД}(b, x)$$

т.к. $\text{НОД}(\text{НОД}(b+1, x); \text{НОД}(b, x)) = 1$, то

$\text{НОД}(b+1, x) = \text{НОД}(b, x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a(b+1)}{\text{НОД}(b+1, x)} = \frac{b(a+3)}{\text{НОД}(b, x)}$$

знаменатели равны 1:

$\cancel{ab} + a = \cancel{ab} + 3b \Rightarrow a = 3b$ — данный

случай уже рассмотрен $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~все случаи~~ имеем кол-во подходящих

пар: 333 333 пар

Ответ: 333 333 пар

Лист 9 из 10

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 | 9 | 2 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №2

$2\cos\frac{x}{3} + \sqrt{5} = 2 - (\sqrt{5}-1)\sin\frac{x}{6}$

$\frac{x}{3} = 2\alpha \Rightarrow \frac{x}{6} = \alpha$

$2(1-2\sin^2\alpha) + \sqrt{5} = 2 - (\sqrt{5}-1)\sin\alpha$

$\cancel{2} - 4\sin^2\alpha + \sqrt{5} = \cancel{2} - (\sqrt{5}-1)\sin\alpha$

$4\sin^2\alpha - (\sqrt{5}-1)\sin\alpha - \sqrt{5} = 0$

$D = 6 - 2\sqrt{5} + 16\sqrt{5} = 6 + 14\sqrt{5}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8}$; $\sqrt{5}-1 < 2$, $\sqrt{5}-1 > 1$

$5 < \sqrt{\underbrace{6+14\sqrt{5}}_{<28}} < \sqrt{35} < 6$

$\Downarrow$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8}$

$\sqrt{5}-1 + \sqrt{6+14\sqrt{5}} < 2+6 = 8$

$\sqrt{5}-1 - \sqrt{6+14\sqrt{5}} > 1-6 = -5$

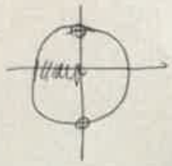
$\alpha = \frac{x}{6}$

$6\alpha = x \quad | :4$

$-1 \le \frac{\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8} \le 1$

$\frac{3\cdot 6\alpha}{4_2} = \frac{x}{4} = \frac{3\alpha}{2} \quad | \cdot 3$

$\frac{3x}{4} = \frac{9\alpha}{2}$



$\cos\frac{3x}{4} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi k < \frac{3x}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$
$k \in \mathbb{Z}$

$2\pi + 8\pi k < 3x < 6\pi + 8\pi k$

$\frac{2\pi}{3} + \frac{8\pi k}{3} < x < 2\pi + \frac{8\pi k}{3}$

$\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi k}{9} < \frac{x}{6} < \frac{3\pi}{9} + \frac{4\pi k}{9}$

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi k}{9} < \alpha < \frac{3\pi}{9} + \frac{4\pi k}{9}}$

Ответ:
$x = 6\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8}\right) + 12\pi k$
$x = 6\pi \pm 6\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1 \pm \sqrt{6+14\sqrt{5}}}{8}\right) + 12\pi k$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Москва

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	2	1	1	8	2	1

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ЖЕЛЯПОВ

Имя Алексей

Отчество Кириллович

Дата рождения 12.05.2003 Класс 11

Предмет математика

Работа выполнена на 9 листах Дата выполнения работы 12.03.21

Номер телефона +7-977-850-99-71 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2. M A 0 0 0 1 2 1 1 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1.

Пусть собралось n бельчат. Мы знаем, что среди них точно есть рыцарь. Пусть он сказал фразу „Среди нас ровно m „А" ", где m - количество, „А" - вид рыцарь или лжец. Тогда обозначим Б - противопол. А. Т.е. если А - рыцарь, Б - лжец, Б - рыц., А - лжец.

Тогда если есть хотя бы еще один рыцарь, он может сказать только 2 фразы: „среди нас ровно (далее СНР) m „А" " или „СНР (n-m) „Б" ", т.к. первая фраза уже была сказана, если второй рыцарь есть, очевидно он скажет 2ую фразу. Так же очевидно, что не может быть больше 2х рыцарей. (т.к. всего 2 разн. фразы)

① Рассмотрим случай когда 2 рыцаря:

~~Т.к. высказывания m „А" (n-m) „Б" => m и n-m разной четности. Пусть m высказывание (m „А") встречается первым. Тогда до этого (m-1 высказывание - ложное) => m-1 человек до этого - лжецы. Понятно, что если 2 р =>~~

1	2	3	4	5	Σ
20	8	-	6	20	54

30 58 12

Очевидно, что в нашей последовательности высказываний просто нет высказывания, среди нас ровно 2 Рыцаря. Значит оба рыцаря должны были бы сказать среди нас m и k лжецов, а т.к. $m \neq k$ они противоречат себе => такого варианта быть не может $(m, k \in N)$

② Значит у нас ровно 1 рыцарь:

Значит именно он скажет 1ое высказывание „среди нас ровно 1 рыцарь."

1) Если n - нечетное, => высказывание $\overset{чет}{n-1}$ бельчонка будет правдой => он рыцарь, а рыцарь 1 и $n-1 \neq 1$ => если n - нечетное у нас нет решений.

2) Если n - четное. Тогда n-1 лжец и 1 рыцарь.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

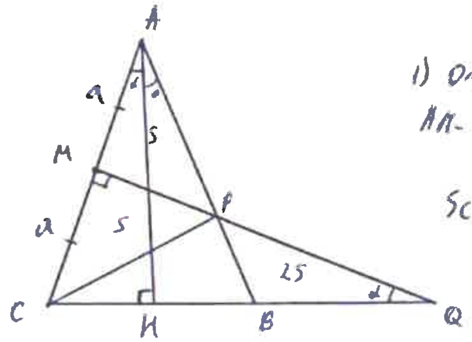
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

Очевидно все нечетные высказывания, кроме первого ложны, а все четные тоже, т.к. лжецов - нечетное кол-во, а рыцарей 1.

Ответ: любое ~~нечетное~~ четное число бельчат (среди них 1 рыцарь, и $n-1$ лжец) или 1 бельчонок - рыцарь.

№3



1) Опустим высоту AH как на рис к стор CB

AH - медиана по св-ву р/б $\triangle ABC$

$\Downarrow$

$S_{CAH} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ по св-ву медианы.

2) PM - медиана в $\triangle AKC$ по определению

$\Downarrow$

$S_{CMP} = S_{MPA}$ по св-ву медианы

Пусть $CM = a$, $\angle CAH = \alpha \Rightarrow \angle ACH = 90 - \alpha$, $\Rightarrow$ из $\triangle CMQ \Rightarrow \angle CQM = \alpha$

т.к. AH - бис по св-ву р/б $\triangle \Rightarrow \angle HAB = \alpha$

$\triangle CAH \Rightarrow \sin\alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = 2a\cdot\sin\alpha \Rightarrow \boxed{CB = 4a\sin\alpha}$

$\triangle CMQ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{CQ} \Rightarrow \boxed{CQ = \frac{a}{\sin\alpha}} \Rightarrow \boxed{BQ} = CQ - CB = \boxed{\frac{a}{\sin\alpha} - 4a\sin\alpha}$

$\triangle AMP \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{a}{AP} \Rightarrow \boxed{AP = \frac{a}{\cos 2\alpha}}$

$\boxed{PB} = AB - AP = \boxed{2a - \frac{a}{\cos 2\alpha}}$

Для $\triangle CAB$ и прямой MPQ запишем Т. Менелая

$$\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{CQ} = 1 \Rightarrow \frac{a}{a}\cdot\frac{a}{\cos 2\alpha\left(2a - \frac{a}{\cos 2\alpha}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{a}{\sin\alpha} - 4a\sin\alpha\right)}{\frac{a}{\sin\alpha}} = 1$$

$$\frac{\frac{a}{\sin\alpha}\cdot(1 - 4\sin^2\alpha)\sin\alpha}{\cos 2\alpha\ \cancel{a}\cdot\cos 2\alpha\,(2\cos 2\alpha - 1)} = 1$$

$$(\underbrace{2 - 4\sin^2\alpha}_{2\cdot\cos 2\alpha} - 1) = \cos^2 2\alpha\,(2\cos 2\alpha - 1) \qquad \text{Замена } 2\alpha = x$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000121118 21

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 продолжение.

$(2\cos x - 1) = \cos^2 x(2\cos 2x - 1)$

$(2\cos x - 1)(\cos^2 x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = \pm 1\end{array}\right.$ т.к. $\triangle HAP$ должен существовать, и $P \in [AB] \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos x = \pm 1$ не подходит

$\cos x = \frac{1}{2}$ и с учетом $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} = 60°$

$90 - \frac{x}{2} = 60°$

Ответ: углы $\triangle ABC$ равны по $60°$.

№2

Замена $\frac{x}{6} = \alpha$

$2 \cdot \cos 2\alpha + \sqrt{5} = 2 - (\sqrt{5} - 1)\sin\alpha$

$2 \cdot (1 - 2\sin^2\alpha) + \sqrt{5} = 2 - (\sqrt{5} - 1)\sin\alpha$

$\cancel{2} - 4\sin^2\alpha + \sqrt{5} = \cancel{2} - (\sqrt{5} - 1)\sin\alpha$

$4\sin^2\alpha + (1 - \sqrt{5})\sin\alpha - \sqrt{5} = 0$

$\sin\alpha = \frac{(\sqrt{5} - 1) \pm \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2 + 16\sqrt{5}}}{8} = \frac{(\sqrt{5} - 1) \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{5} + 5 + 16\sqrt{5}}}{8} =$

$= \frac{(\sqrt{5} - 1) \pm \sqrt{6 + 14\sqrt{5}}}{8}$

$\frac{x}{6} = \alpha = \left[\begin{array}{l}\arcsin\left(\frac{(\sqrt{5} - 1) \pm \sqrt{6 + 14\sqrt{5}}}{8}\right) + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}\\ \pi - \arcsin\left(\frac{(\sqrt{5} - 1) \pm \sqrt{6 + 14\sqrt{5}}}{8}\right) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(\frac{x}{6} \cdot \frac{6 \cdot 3}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{6} \cdot \frac{9}{2}\right)$

Будем пока работать только на ~~отрезке~~ промежутке $[0; 2\pi)$ почему?

$\cos\frac{3x}{4} < 0 \Rightarrow \frac{3x}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right) \Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	2	1	1	8	2	1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

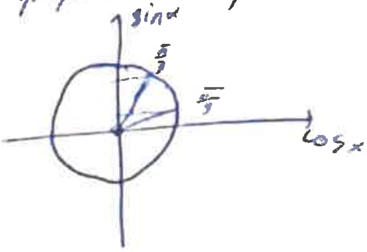
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение)

$\Rightarrow \frac{x}{6} \in \left(\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \frac{\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{3}$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА000121 1821

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$НОК(a; b+1) = НОК(a+3; b) = x$ $\left(НОК(c,d) = \frac{c \cdot d}{НОД(c,d)}\right)$

Т.к. $x \vdots (b+1)$ и $x \vdots b$, заметим, что b и $b+1$ – взаимнопросты =>

=> $x = b \cdot (b+1) \cdot k_1$, где $k_1 \in \mathbb{N}$

~~Анало~~ Аналогично $x \vdots a$, $x \vdots (a+3)$, но т.к. они могут быть не взаимно простые имеет место равенство

$$x = \frac{a(a+3)}{НОД(a; a+3)} \cdot k_2, \quad k_2 \in \mathbb{N}$$

Тогда $x = НОК\left(b \cdot (b+1) k_1 ; \frac{a(a+3)k_2}{НОД(a; a+3)}\right)$

$$x = \frac{b \cdot (b+1)\, a(a+3)\, k_3}{НОД\left(b(b+1)k_1 ; \frac{a(a+3)k_2}{НОД(a; a+3)}\right)}$$

1) 1 случай – $a \not\vdots 3$ => т.к. $a \not\equiv a+3 \pmod{n}$ где $n \in \mathbb{N}, \neq 1, \neq 3$

=> a взаимнопросто с $a+3$.

По сновной тереме арифм. представим числа в разложении

$$\left.\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \\ b+1 &= p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \\ a+3 &= p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \ldots \\ b &= p_1^{\sigma_1} \cdot p_2^{\sigma_2} \ldots \end{aligned}\right\}$$

где p_i – простые числа, $\alpha_i \in \mathbb{Z}, \geq 0$

Т.к. a, $a+3$ – взаимно просты => если $\alpha_i \neq 0$ => $\gamma_i = 0$ и наоборот

Аналогично если $\beta_i \neq 0$ => $\sigma_i = 0$ и наоборот.

Т.к. $НОК(a; b+1) = p_1^{\max(\alpha_1;\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2;\beta_2)} \cdot \ldots =$

$= НОК(a+3; b) = p_1^{\max(\gamma_1;\sigma_1)} \cdot p_2^{\max(\gamma_2;\sigma_2)} \cdot \ldots$

$\max(\alpha_i; \beta_i) = \max(\gamma_i; \sigma_i)$ т.к. p_i; p_n, где $n \neq i$ – взаимно просты => т.к. одно из $(\alpha_i; \gamma_i)$ – ноль $(\beta_i; \sigma_i)$ – ноль →

Лист 5 из 9

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 8 | 2 | 1 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

НОК $(a; b+1)$ = НОК $(a+3; b) = x$

Заметим, что b, $b+1$ – взаимно просты $\Rightarrow$ x можно представить в виде $x = a \cdot b \cdot (b+1) \cdot k$ (т.к. $x \vdots b; (b+1); a; a+1$..), где $k = \dfrac{a+3}{\text{НОД}(a; a+3)}$

$x = \dfrac{a \cdot (a+3) \cdot (b^2+b)}{\text{НОД}(a; a+3)}$. ~~[illegible]~~

Понятно, что $a \not\equiv a+3 \pmod{n}$ где n – $\forall$ нат число ≥ 2, $\neq 3$.
Значит если a и $a+3$ имеют общий делитель >1, то это может быть только 3. Иначе НОД$(a; a+3) = 1$. Расм. 2 случая

1) $a \vdots 3 \Rightarrow a = k \cdot 3$, где $k \in \mathbb{N}$, тогда $a+3 = (k+1) \cdot 3$

$x = 3 \cdot k \cdot (k+1) \cdot b \cdot (b+1)$ = НОК $(3 \cdot k; b+1)$ = НОК $(3 \cdot (k+1); b)$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 продолжение

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_i = \sigma_i \\ \beta_i = \gamma_i \end{cases}$$

№9

Если мы найдем и докажем, что в какую-то таблицу $n_1 \times m_1$ мы не можем расставить числа, то никакая таблица больших размеров (т.е. $n_2 \times m_2$, где $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n_2 \geq n_1 \\ m_2 \geq m_1 \end{cases} \\ \begin{cases} n_2 \geq m_1 \\ m_2 \geq n_1 \end{cases} \end{array}\right.$) не может быть заполнена. Т.к. мы выделим внутри нее таблицу $n_1 \times m_1$ или $m_1 \times n_1$, и мы точно уже знаем, что ее невозможно заполнить. Благодаря такому размышлению нам достаточно находить граничные пары при фикс n. Т.е. $n \times m$ можно, $n \times (m+1)$ - нельзя. Это будет напрямую обозначать, что ~~все что меньше $n \times (m+1)$ мы уже~~ все, что меньше или равно $n \times m$ мы умеем заполнять.

Поймем, что любые таблицы вида $3 \times m$ (или $m \times 3$) мы умеем заполнять. Пример (понятно можно развернуть на 90°)

10	10	10	10	10	10	10	
-31	10	-31	10	-31	10	-31	. . .
10	10	10	10	10	10	10	

И нам в условии дали огранич. $n \geq m \geq 3 \Rightarrow$ можно рассм. только горизонтальные таблицы и забыть про повороты на 90°.

~~Поймем, что из таблиц $4 \times m$ мы тоже умеем заполнять. Пример~~

~~-31~~	~~10~~	~~10~~	~~-31~~	~~10~~	~~10~~	~~-31~~	~~10~~	~~10~~	
~~10~~	~~-31~~	~~10~~	~~10~~	~~-31~~	~~10~~	~~10~~	~~-31~~	~~10~~	
~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	. . .
~~-31~~	~~10~~	~~10~~	~~-31~~	~~10~~	~~10~~	~~-31~~	~~10~~	~~10~~	

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

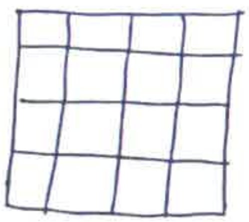
Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 2 1 1 8 2 1

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

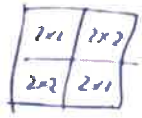
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5 (продолжение)

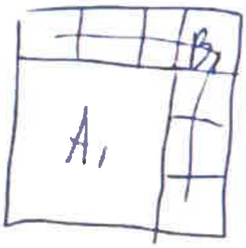
Поймем, что таблицу 4×m мы не умеем заполнять. Достаточно док-ть, что мы не можем заполнить 4×4, тогда в больших таблицах можно выделить кусок 4×4 и сказать, что мы его точно не можем заполнить, а значит большие тем более.



Σ всех чисел < 0, т.к. можно разбить на 4 непересек квадрата 2×2 каждый из которых Σ < 0.



Пусть общая сумма S. S < 0.



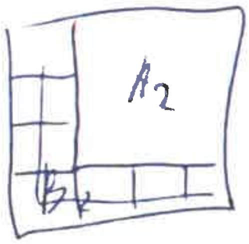
$A_1+B_1<0$ $\quad$ A_1, B_1 – Σ чисел

$A_2+B_2<0$ $\quad$ $A_1+\dots+A_4 = 2C_1+4C_2+B_1+B_2$

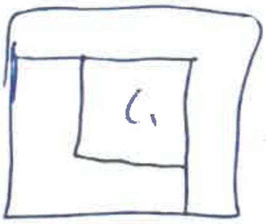
$A_3+B_3<0$

$A_4+B_4<0$

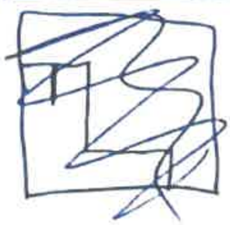
$A_1+\dots+A_4+B_1+\dots+B_4<0$



~~$A_1+\dots+A_4$~~ но тогда S > 0 должно быть, чтобы можно было замостить.



Не можем 4×4



Ответ: можно только 3×m