



Университетская олимпиада
«Курс на СФУ»
по математике

1. Известно, что $3^x \cdot 9^y = 81$, $\frac{2^x}{8^y} = \frac{1}{2}$. Найти $\frac{49^x}{7^y}$.

2. Вычислить:

$$\frac{49^{8/7} \cdot 25^{5/3} - 49^{15/7} \cdot 25^{2/3}}{7^{9/7} \cdot 25^{7/6} + 7^{2/7} \cdot 25^{5/3}}.$$

3. Через образующую цилиндра проведены два сечения, одно из которых проходит через центр основания. Угол между плоскостями сечений равен 60° . Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π . Найти меньшую из площадей данных сечений.

4. Решить уравнение

$$\frac{(17 \cos(\frac{7\pi}{2} - x) + 15) \cdot (17 \cos(5\pi + x) - 8)}{15 \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x) + 8} = 0.$$

5. Решить уравнение $\sqrt{5 + \sqrt{x}} + \sqrt{5 - \sqrt{x}} = \sqrt{14}$.

6. Сколько граммов воды нужно выпарить из 400 грамм солевого раствора, содержащего 75% воды, чтобы получить раствор, содержащий 60% воды?

7. Найти область определения функции $y = \frac{\log_{x+2}(25 - x^2)}{x - 4}$.

8. Найти косинус острого угла между касательными, проведёнными к параболе $y = x^2 - 4x + 5$ в точках с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$.

9. Некоторая сумма была помещена в банк, и после первого года хранения проценты, начисленные на вклад, составили 6 тысяч рублей. Затем вкладчик добавил на счёт ещё 4 тысячи рублей. После второго года хранения и начисления процентов на вкладе стало 48 тысяч рублей. Найти начальную сумму вклада (в тысячах), если известно, что она была больше пяти тысяч, и процентная ставка за два года не менялась.

10. В треугольнике ABC угол C равен 90° , AC=BC. Точка M — середина AC. На стороне AB взята точка P так, что отрезок CP перпендикулярен отрезку BM. Найти отношение BP:PA.