Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Борисова 5, СФУ красноярск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	7	5	8	0	2

Шифр

Фамилия Шалашова **Вариант №** 1

Имя Эльвира

Отчество Максимовна

Дата рождения 20.02.2007

Предмет Математика **Класс** 8

Работа выполнена на 4 **листах**

Номер телефона 89526286082 **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Подпись ШЭИ

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 5 8 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

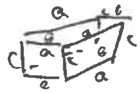
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	6	20	20	86

Задача № 1

Ответ: Да, существует.

Решение:



 $\Rightarrow V = a\cdot b\cdot c$

$S_{пов} = 2\cdot(ab+ac+bc)$

Если $a=b=c=6$

То $V=6^3=216$. $S_{пов}=2\cdot(36+36+36)=216$

Т.к $a=b=c \Rightarrow$ Это частный случай прямоугольного параллелепипеда.

Пример: Куб, с длиной ребра $=6$. +

Задача № 2

x^2+px+q

x_1, x_2 - корни

По т. Виетта

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$$

Система № 1

$x^2-2px-q$

$x_3=x_1+3,\ x_4=x_2+3$ - корни

По т. Виетта

$$\begin{cases} x_3+x_4=2p \\ x_3\cdot x_4=-q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+3+x_2+3=2p \\ (x_1+3)(x_2+3)=-q \end{cases}$$

(1) $x_1+x_2=2p-(3\cdot 2)$

Заменим x_1+x_2 на $-p$, из предыдущего равенства (системы) № 1

$3p=6$

$p=2$

(2) $(x_1+3)(x_2+3)=-q$

$x_1\cdot x_2+3(x_1+x_2)+9=-q$

Заменим $x_1\cdot x_2$ на q, из предыдущей системы № 1 и x_1+x_2 на $-p=-2$ по верхнему равенству

$q+6\cdot(-1)+9=-q$

$-2q=3$

$q=-1{,}5$

Проверим $p=2$ $q=-1{,}5$

$x^2+2x-1{,}5=0$

$2x^2+4x-3=0$

$D=16+24=40$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{40}}{4}=-1+\sqrt{40}$

$x_2=\frac{-4-\sqrt{40}}{4}=-1-\sqrt{40}$

$x^2-4x+1{,}5=0$

$2x^2-8x+3=0$

$D=64-24=40$

$x_3=\frac{8+\sqrt{40}}{4}=2+\sqrt{40}$

$x_4=\frac{8-\sqrt{40}}{4}=2-\sqrt{40}$

и $x_3-x_1=3$

$2+\sqrt{40}-(-1+\sqrt{40})=3$

$3=3$

$x_4-x_2=3$

$2-\sqrt{40}-(-1-\sqrt{40})=3$

$3=3$

Верно.

Ответ: $q=-1{,}5$; $p=2$ +

Вариант № 1

МА00017580 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4

Даны числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$S_1 = 1^{ое}$ число

$S_2 = 1^{ое}$ число $+ 2^{ое}$ число

⋮

$S_{10} = 1+2+3\ldots+10 = 55$

~~Пусть первое число это X => Если X простое и четное,~~

Оценка:

S_{10} - точно не простое, т.к $55 \vdots 5$ и $\vdots 11$

Всего из ряда чисел - 5 нечетных:

=> точно будет какая-то сумма с 2 и 4 - нечетными числами,

т.к min сумма $2^{ух}$ различных нечетных $= 1+3=4$ => Сумма двух нечетных > 2 и четное число, а => Составное.

Тогда из 10 сумм две - четные и больше $2^{ух}$ => $\vdots 2$ и одна $\vdots 5$ => 3 суммы - Составные

остается 7 сумм. => Max - 7.

Пример:

Порядок чисел: 2, 1, 4, 6, 10, 8, 3, 9, 7, 5

$S_1 = 2$ - Простое

$S_2 = 3$ - Простое

$S_3 = 7$ - Простое

$S_4 = 13$ - Простое

$S_5 = 23$ - Простое

$S_6 = 31$ - Простое

$S_7 = 34$

$S_8 = 43$ - Простое

$S_9 = 50$

$S_{10} = 55$

7 простых

Ответ: 7 сумм могут принимать значение простых чисел.

Вариант № 1 | МА00017580 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

6 команд:

Пример.

	1	2	3	4	5	6	S
1	//	~~3~~4	0	4	0	4	12
2	0	//	4	4	1	1	10
3	4	0	//	4	1	0	9
4	0	0	0	//	4	4	8
5	4	1	1	0	//	1	7
6	0	1	4	0	1	//	6

Ответ: 4

Решение:

Общее кол-во очков: $12+10+9+8+7+6=52$

Общее кол-во партий: $\frac{5\cdot 6}{2}=15$

=> Пусть партии закончились НЕ ничьей - x партий

=> Ничьей - $15-x$, $x\in N$

Пусть за победу давали y очк.

=> За ничью в общий зачет идет $1\cdot 2=2$ очка за партию

Уравнение: $xy+2\cdot(15-x)=52$

$$xy+30-2x=52$$

$$x(y-2)=22.$$

При этом, x - целое и ≥ 0

Тогда: $x\leq 15$. Но есть еще одно ограничение, т.к 6 баллов нельзя набрать только ничьими => Шестая команда выиграла хотя бы одну игру. => $y\leq 6$, иначе S_6 была бы больше.

Так-же $y\cdot 1$; $y\cdot 2$; $y\cdot 3$; $y\cdot 4$; $y\cdot 5$ - Хотя бы одно было целым числом, иначе сумма - нецелая, т.е $\neq 6$.

Перебор: $x(y-2)=22$, $x\leq 15$

$x=15$ => $y-2=1{,}4666...$ Но тогда ни одно из чисел не будет целым => невозможно *

$x=14$ => $y-2=1{,}69...$ - Ни одно из чисел не будет целым

$x=13$ => $y-2=1{,}571...$ - Ни одно из чисел не будет целым

$x=12$ => $y-2=1{,}833...$ - Ни одно из чисел не будет целым

$x=11$ => $y-2=2$ $y=4$ - Подходит.

$x=10$ => $y-2=2{,}2$ $y=4{,}2$ - Чтобы было целое число - Слишком большой множитель - 5, но $21>6$ => невозможно

$x=9$ => $y-2=2{,}44$ - Ни одно из чисел не будет целым

$x=8$ => $y-2=2{,}75$ - Ни одно из чисел не будет целым

$x=7$ => $y-2=3{,}14285...$ - Ни одно из чисел не будет цел.

$x=6$ => $y-2=3{,}66...$ - Но тогда ни одно из чисел не будет целым => не подходит

$x=5$ => $y=2+4{,}4$ - Много, т.к $y\leq 6$

$x=4$ => $y=2+5{,}5$ - Много, т.к $y\leq 6$

$x=3$ => $y-2=7{,}33...$ - Много, т.к $y\leq 6$

$x=2$ => $y-2=11$ - Много, т.к $y\leq 6$

$x=1$ => $y-2=22$ - Много, т.к. $y\leq 6$

* Ни одно из чисел это числа
$y\cdot 1$
$y\cdot 2$
$y\cdot 3$
$y\cdot 4$
$y\cdot 5$

+

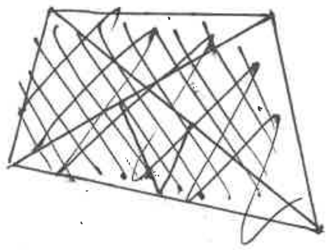
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

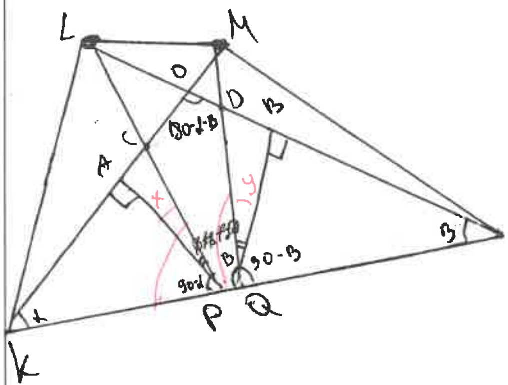
Вариант № 1 МА000175 8022

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №3





Дано:

$KA = AM$

$\angle KAP = 90^\circ$

$LB = BN$

$\angle NBQ = 90^\circ$

$LP \parallel MQ$

N Док-ть, что $LN \perp KM$

Решение:

1) Т.к. $LP \parallel MQ \Rightarrow$

$\angle KPC = \angle KQD$

2) Пусть $\angle MKN = \alpha$

$\angle LNK = B$

$\Rightarrow \angle BQN = 90 - B$

$\Rightarrow \angle APK = 90 - \alpha$

$\Rightarrow$ Т.к. P и Q - лежат на одной прямой.

$\Rightarrow \angle KPQ + \angle PQN = 360^\circ$

и Пусть $\angle APC = x$, $\angle BQD = y$ $\Rightarrow x + y = 360 - 180 + 2\alpha - 180 + 2B = 2\alpha + B + B = 2\alpha + 2B$

Тогда $\angle APQ + \angle BQA = 360 - 90 + \alpha - 90 + B = 180 + \alpha + B$. ~~Тогда Если предположить, что $\angle \alpha + \angle B = 90$~~

и ~~тогда Сумма углов в PHDBQ = 540 = 90 + 90 + \angle COD + 90 + 180 + (x+y) = 540 = 360 + 90 + 2\alpha + 2B~~ ~~$\Rightarrow 180 - \alpha - B = 90 = \angle KON$~~

~~$\Rightarrow$ Из 2-х Равенств получаем: $2\alpha + 2B = 180 + \alpha + B$~~

Тогда. Т.к. $90 - \alpha = B$, а $90 - B = \alpha$

$\alpha + B = 90 \Rightarrow \angle MKN + \angle KNL = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle KON = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ЧТД

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ангарск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	6	8	1	7	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Алексеев

Имя Сергей

Отчество Александрович

Дата рождения 23.10.2007 **Класс** 8

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.22.

Номер телефона 8 950 0898983 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 8 1 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	20	20	98

№1

Рассмотрим куб со сторонами 6;6;6 $\Rightarrow$ такой прямоуг. паралл. сущ.

объем $= 6\cdot6\cdot6 = 216$

S поверхности $= 6\cdot6$(одна грань) $\cdot\, 6 = 216$ (кол-во граней)

Ответ: да, стороны 6;6;6

№2

1) x^2+px+q – корни $x_1; x_2$

2) $x^2-2px-q$ корни x_1+3; x_2+3

По теор. Виетта

1) $x_1+x_2=-p$; $x_1\cdot x_2=q$

2) $x_1+3+x_2+3=2p$; $(x_1+3)(x_2+3)=-q$

$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+x_2+6=2p \end{cases}$ $(-p=2p-6 \Rightarrow -3p=-6)$ $\Rightarrow 3p=6 \Rightarrow p=2$

$x_1\cdot x_2=q$

$(x_1+3)(x_2+3)=-q = x_1\cdot x_2+3(x_1+x_2)+9=-q$; $x_1+x_2=-p=-2$

$p=\cancel{-}2$

$x_1\cdot x_2+3\cdot(-2)+9=-q$; $x_1\cdot x_2=q$

$x_1\cdot x_2+9-6=-q = x_1\cdot x_2+3=-q$; $x_1\cdot x_2=q$

$\begin{cases} x_1\cdot x_2+3=-q \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$

$x_1\cdot x_2+3-(x_1\cdot x_2)=-q-q$

$3=-2q$; $q=-1,5$

Ответ: $p=-2$; $q=-1,5$

№4

Все простые числа, кроме двойки, нечетны. Следовательно, если S_n – простое число, отл. от 2-ки, то для того, чтобы S_{n+1} може было простым числом, то число в ряду, стоящее на $n+1$ месте

Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	8	1	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N4 (продолжение)

должно быть четным, т.к. нечет + чет = нечет, а простые числа (кроме 2) нечетные. Тогда, если мы к простому (не 2) прибавим нечетное число, то полученное число простым не будет. Но можно разбить нечетные числа на „пары", сделав их четными (S_n - простое; S_{n+1} - сост.; S_{n+2} - прост.)

x — неч; $x+7$ — чет; $x+7+1 = x+8$ — неч

Таким образом, у нас 5 четных чисел, 2 пары сумм нечетных и 1 нечетное. Макс кол-во простых чисел: $5 + 2(\text{пары}) = 7$ (чет чисел) т.к. одиночное нечетное не делает нам простое

~~[illegible]~~

7; 10; 2; 3; 9; 6; 4; 1; 5; 8

7 17 19 22 31 37 41 42 47 55

$1+1+1+0+1+1+1+0+1+0 = 7$

Ответ: 7 простых чисел среди $S_1 \dots S_{10}$ — наиб возм. кол-во.

N5

Всего проведено игр: x — кол-во очков за победу

$5+4+3+2+1=15$

Всего очков:

$12+10+9+8+7+6=52$

рассмотрим команду, набравшую 6 очков.

Предположим, что она не выигрывала, тогда максимальное количество очков, которое возможно набрать: $\underbrace{5}_{\text{игр}}\cdot\underbrace{1}_{\text{очков за ничью}}=5$ ⇒ команда хоть раз выигрывала. Если команда выиграла бы больше 1 раза, тогда бы очков за победу давали 3 или меньше $(6:2=3)$, тогда макс. кол-во очков суммарно: $\underbrace{15}_{\text{игр}}\cdot\underbrace{3}_{\text{макс. очков за игру}}=45<52$ ⇒ $6\geq x>3$ команда, набравшая 6 очков победила 1 раз.

Если мы выясним, что команда с 6 очками победила 1 раз, то остальные очки она набрала ~~[illegible]~~ с ничьей и/или с поражениями, а т.к. за ничью и за поражения дают целое кол-во очков, то и за победу тоже, $\underbrace{x\cdot 1}_{\text{победы; целое число}} + \underbrace{\overset{\text{ничьи}}{m}\cdot 1}_{\text{очк за ничью; целое число}} + \underbrace{\overset{\text{пораж.}}{n}\cdot 0}_{\text{целое число}} = 6$ ⇒ x — целое число; $(x\in N)$ $6\geq x>3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 8 1 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 (продолжение)

Рассмотрим разность мин. суммы очков и имеющейся суммы очков: $52-30=22$ очка. Таким образом, если бы команды только играли вничью, они бы суммарно набрали на 22 очка меньше, чем с результатами несходными. Тогда, при каждом невничейном результате, сумма очков менялась бы на $x-2>1$ (т.к. $x>3$). Тогда всего побед: $\frac{22}{x-2}$ (очки за победу − сумма очков за ничью)

всего побед: $\frac{22}{x-2}$ — целое число (т.к. побед целое число). Найдем решение для целых x: $22=2\cdot 11=22\cdot 1$

$x-2=2$ $\quad x-2=1$

$x-2=11$ $\quad x-2=22$ $\Rightarrow$ $x=4$ $\quad x=3$ $\quad x=13$ $\quad x=24$

Для найденного диапазона $6\geq x>3$ $x=4$ Пример для $x=4$

	12	10	9	8	7	6
12		0:4	0:4	4:0	4:0	4:0
10	4:0		4:0	4:0	1:1	1:1
9	4:0	0:4		D:		
8						
7						
6						

12	10	9	8	7	6
4	4	4	4	4	4
4	1	1	4	1	1
4	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

Ответ: 4 очка за победу

№3

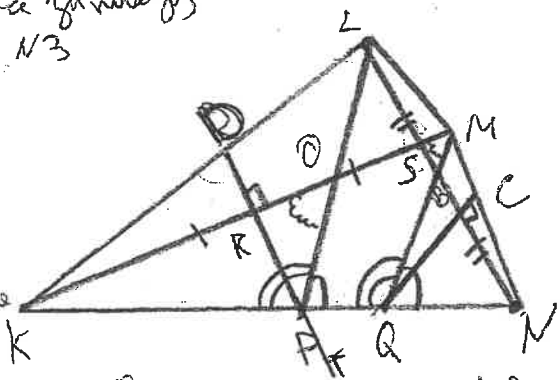
Дано

KLMN − чет.

LP ∥ MQ

P ∈ [KQ]

PT − продолжение DP



$\angle KPL = \angle PQM$ (LP ∥ MQ) $\quad \angle KOP = \angle OMQ$ (LP ∥ MQ)

$LP \parallel MQ \Rightarrow \angle MBN = \angle OPT$

$\angle RPO = 180 - \angle OPT$

$\angle MBS = 180 - MBN \Rightarrow \angle RPO = \angle MBS$

$\Delta MSB = \Delta ROP \Leftarrow$

$LN \perp KM$ ч.т.д. $\Leftarrow \angle ORP = 90 = \angle MSB \Leftarrow$

Ответ: $LN \perp KM$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Борисова, 5, СФУ Красноярск

дрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	7	3	4	5	2	2

Вариант № 2 Шифр

илия Лямин

Егор

ство Валерьевич

рождения 06.03.2007 **Класс** 8

ет МАТЕМАТИКА

выполнена на 4 **листах**

елефона 8-908-223-82-23 **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Подпись Лев

свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, мер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату я работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	4	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	–	20	20	–	60

3б

1. Пусть x – длина, y – ширина, z – высота параллелепипеда, тогда:

$2xy + 2yz + 2yz = 4y + 4x + 4z$

$xy + yz + yz = 2y + 2x + 2z$

Такое возможно при $y = x = z = 2$

Ответ: ~~возможно~~ существует

4. Обозначим первую пару чисел x и y, вторую – m и n.

$\underbrace{xy}_{\text{нечёт.}} + \underbrace{mn}_{\text{чёт.}} = 1001 \Rightarrow$ x и y – нечёт. m и n – чёт. (т.к. одно из них должно быть чётным, а их сумма $=100$, то второе тоже будет чётным).

Рассмотрим, какие цифры могут быть в конце каждого слагаемого:

xy	mn
1	0
3	8
5	6
7	4
9	2

Рассмотрим, какие цифры могут быть последними у x и y (их произведение должно заканчиваться на одну из цифр из таблицы, а их сумма должна ~~заканчиваться на 0~~ заканчиваться на 0, т.к. ~~сумма~~ $x+y=100$):

$1 \rightarrow x=3, y=7$

$3 \rightarrow$ –

$5 \rightarrow x=5, y=5$

$7 \rightarrow$ –

$9 \rightarrow x=1, y=9$

То же сделаем с m и n:

$0 \rightarrow$ ~~0 0~~ $x=0, y=0$

$2 \rightarrow$ –

$4 \rightarrow$ ~~6 4~~ $x=6, y=4$

$6 \rightarrow$ ~~2 8~~ $x=2, y=8$

$8 \rightarrow$ –

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	4	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Таким образом, у нас остаются следующие ~~значения~~ последние цифры xy, mn, x, y, m, n:

xy	mn	x	y	m	n
1	0	3	7	0	0
5	6	5	5	2	8

Обозначим первую цифру x за a, y – за b, m – за c, n – за d

Проверим первый вариант:

$(10a+3)(10b+7)+10c\cdot10d=1001$

$(10a+3)(10(10-a)+7)+100cd=1001$

В этом случае, m=10, n=90, т.к. другие возможные значения превышают 1001.

$(10a+3)(100-10a+7)+900=1001$

~~$100a \quad 100a^2$~~

$(10a+3)(107-10a)=1001-900$

$1070a-100a^2+321-30a=101$

$-100a^2+1040a+220=0$

$a=\dfrac{-1040+\sqrt{1040^2-4(-100\cdot220)}}{-200}$

$a=\dfrac{-1040+\sqrt{1169600}}{-200}$ – нецел., соответственно a – нецел. ⇒ противоречие условию

Проверим второй вариант:

$(10a+5)(10b+5)+(10c+2)(10d+8)=1001$

$(10a+5)(10(10-a)+5)+(10c+2)(10(10-c)+8)=1001$

В этом случае x и y могут равняться только 5 и 95, т.к. остальные варианты будут больше 1001.

$475+(10c+2)(100-10c+8)=1001$

$(10c+2)(108-10c)=1001-475$

$1080c-100c^2+216-20c=526$

$-100c^2+1060c-310=0$

$c=\dfrac{-1060+\sqrt{1060^2-4(-100\cdot(-310))}}{-200}$

$c=\dfrac{-1060+\sqrt{999600}}{-200}$, нецел., соответственно c – нецел. ⇒ противоречие условию

Ответ: не могла

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	4	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

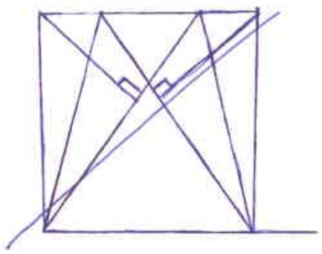
~~5. Всего было 15 игр (5+4+1+3+2+1)~~

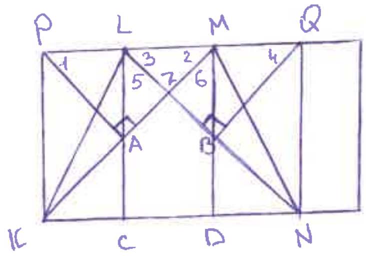
~~$10+7+6+6+3+3$ очков $= 35$ очков всего было получено~~

~~Пусть x – кол-во очков за победу~~

~~$1+x$ = очк После каждой игры прибавлялось либо 2 (ничья), либо k очков.~~

3.





Дано: 4-угольник $KLMN$, KM и LN – диагонали, AP и BQ – серединные перпендикуляры KM и LN соответственно, $PK \parallel QN$

Доказать: $LN \perp KM$

Доказательство:

1) Построим LC такую, что $LC \parallel QN$

$\Downarrow$

2) $\angle 5 = \angle LNQ$ (как накрест леж., при LC и QN, LN – секущая)

I. Рассмотрим $\triangle LBQ$ и $\triangle BQN$

1) $LB = BN$ (по усл.)

2) BQ – общая

$\Downarrow$

$\triangle LBQ = \triangle BQN$ (по 2-м катетам)

$\Downarrow$

3) $LQ = QN$ (как соотв.)

$\Downarrow$

4) $\triangle LQN$ – равнобедр. (по опр.)

$\Downarrow$

5) $\angle 3 = \angle LNQ$ (по св-ву равнобедр. $\triangle$)

$\Downarrow$

6) $\angle 3 = \angle 5$ (по п. 2)

7) ~~Аналогично~~ Построим MD такую, что $MD \parallel PK$

8) Аналогично докажем, что $\angle 2 = \angle 6$

9) $LC \parallel MD$ (по св-ву параллельных прямых)

$\Downarrow$

10) $\angle 3 + \angle 5 + \angle 2 + \angle 6 = 180^\circ$ (как одност., при LC и MD, LM – секущая)

$\Downarrow$

11) $\angle 3 + \angle 2 = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (т.к. $\angle 3 = \angle 5$ и $\angle 2 = \angle 6$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	3	4	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

12) $\angle 7 = 180^\circ - (\angle 3 + \angle 2) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (по т. о сумме углов)

$\Downarrow$

13) $LN \perp KM$

ч.т.д.

~~5. Всего игр 15 (5+4+3+2+1), максимум игр с ничьёй — 12 (т.к. у двух последних команд максимум 3 ничьих), т.е. 12 игр, но при этом их кол-во должно быть нечётным, чтобы при вычитании получалось чётное число, которое можно, тогда игр с победами было 3 минимум~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ул. БОРИСОВА 5

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	4	1	8	2	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия МУЛЯР

Имя ВИКТОР

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 11.09.2007.

Класс 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы 05.03.2022.

Номер телефона 89135331822

Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	4	1	8	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	4	20	82

Задача №1.

Пусть a - длина, b - ширина, h - высота параллелепипеда.

Предположим, что такая фигура существует, тогда $a, b, h \in N$.

$S_{п.п} = 2(ah+ab+bh)$ сумма длин всех рёбер $-4(a+b+h)$.

$$2(ah+ab+bh) = 4(a+b+h),$$

$$ah+ab+bh = 2a+2b+2h,$$

$$a(h-1)+b(h-1)+ab = a+b+2h,$$

$$(a+b)(h-1)-(a+b)-2h+ab=0,$$

$$(a+b)(h-2)-2(h-2)-4+ab=0,$$

$$(h-2)(a+b-2)-4+ab=0.$$

При $a=b=h=2$

$$(h-2)(a+b-2)-4+ab = 0(2)-4+4=0.$$

Ответ: такой параллелепипед существует, $a=b=h=2$.

Задача №2.

$$\begin{cases} x^2+3px+p=0, \text{ корни } V \text{ и } U \\ x^2-4qx+q=0, \text{ корни } \frac{1}{U} \text{ и } \frac{1}{V} \end{cases}$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} V+U=-3p \\ V\cdot U = p \\ \frac{1}{V}+\frac{1}{U}=4q \\ \frac{1}{VU}=q \end{cases}$$

1) $\frac{1}{VU}=q,$

$\frac{1}{p}=q.$

2) $\frac{1}{V}+\frac{1}{U}=4q,$

$\frac{V+U}{VU}=4q,$

$\frac{-3p}{p}=4q,$

$-3=4q,$

$q=-\frac{3}{4}.$

3) $\frac{1}{p}=-\frac{3}{4},$

$p=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}.$

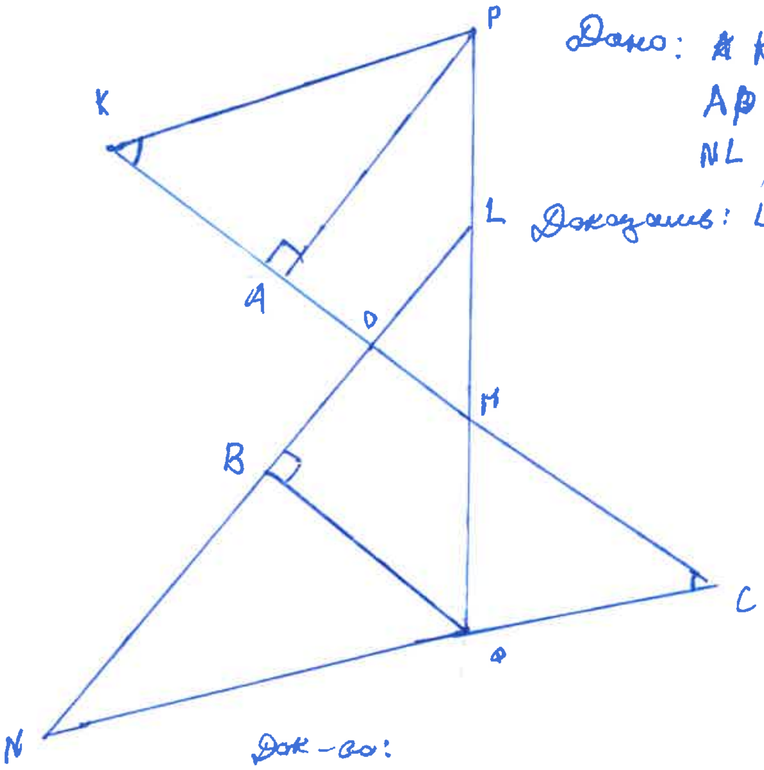
Ответ: $p=-1\frac{1}{3}$, $q=-\frac{3}{4}$.

Вариант № 2 | МА.000141 8222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача № 3.



Дано: KLMN – четырёхугольник, AP – серпер KM, BQ – серпер NL, $KP \parallel NQ$.

Доказать: $LN \perp KM$.

Док-во:

1. Доп. построение – точка C, $C \in KM$, $C \in NQ$.
2. AP, BQ – серперы, ⇒ ΔKPM, ΔLNQ – равнобедренные, $KP = PM$, $LQ = QN$, ⇒ $\angle PKM = \angle PMK$, $\angle NLQ = \angle QLN$.
3. $KP \parallel NQ$, ⇒ $\angle PKC = \angle KCN$; $\angle PMK = \angle CMQ$ (вертикальные), ⇒
$\angle MQC = 180° - 2\angle PKC$; $\angle LQN = 180° - 2\angle QNL$ (сумма углов Δ);
$\angle NQL = 180° - \angle LQC$ (смежные),
$180° - 2\angle QNL = 180° - (180° - 2\angle CKP)$,
$180° - 2\angle QNL = 2\angle CKP$,
$2\angle QNL + 2\angle CKP = 180°$,
$\angle QNL + \angle CKP = 90°$.
4. $\angle NOC = 180° - \angle LNC - \angle KCN = 180° - \angle QNL - \angle CKP = 180° - 90° = 90°$, ⇒
$KM \parallel NL$.

Доказано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2.

М	А	0	0	0	1	4	1	8	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4.

Пусть a, b, c, d - данные числа, ~~тогда~~ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\begin{cases} a + c = 100, \\ b + d = 100 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 100 - c \\ b = 100 - d \end{cases}, \begin{cases} c = 100 - a \\ d = 100 - b \end{cases}.$$

$$ac + bd = a(100-a) + b(100-b) = -(a^2 + b^2 - 100a - 100b)$$

Пусть $t = b^2 - 100b$, $t \in \mathbb{Z}$, тогда

$$-(a^2 + b - 100a - 100b) = -(a^2 - 100a + t).$$

Разложим $a^2 - 100a + t$ на множители:

$a^2 - 100a + t = 0,$

$D/4 = 50^2 - t$, $D \geq 0$,

$a_1 = \sqrt{50^2 - t} - 50.$ $a_2 = -(50 + \sqrt{50^2 - t}).$

$b - 100b \leq \left(\frac{100}{2}\right)^2,$

$t \leq 2500.$

$$a^2 - 100a + t = (a + 50 + \sqrt{50^2 - t})(a - 50 + \sqrt{50^2 - t});$$

Пусть $t_1 = a + \sqrt{50^2 - t}$, $t_1 \in \mathbb{Z}$, тогда

$$a^2 - 100a + t = (t_1 + 50)(t_2 - 50),$$

$$-(ac + bd) = (t_1 + 50)(t_2 - 50).$$

Предположим, что $ac + bd = 1001$, ~~тогда~~ тогда

$-(t_1 + 50)(t_2 - 50) = 1001$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $t_1 \in \mathbb{Z}$, единственное возможное расположение множителей -

$t_1 - 50 = 13$; $t_2 + 50 = 77 = 7 \cdot 11$;

$t_1 = 53$,

$a + \sqrt{50^2 - t} = 53$,

$50^2 - t = 53^2 + a^2 - 106a$,

$-t = 209 + a^2 - 106a$,

$t = 106a - a^2 - 209$,

$b^2 - 100b = 106a - a^2 - 209.$

$$\begin{cases} b^2 - 100b = 106a - a^2 - 209, \\ b^2 - 100b = 1001 - a(100 - a) \end{cases}$$

$106a - a^2 - 209 = 1001 - 100a + a^2,$

$2a^2 + 206a - 1210 = 0$

$D_1 = 106^2 + 1210 \cdot 2 = 11236 + 2420 =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	4	1	8	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача № 5. Каждая команда сыграла 5 раз.
Пусть x – очки, дающиеся за победу, n – количество побед за всё время турнира.
Всего команды сыграли $C_6^2 = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ матчей, => всего ничей было $(15-n)$.
Сумма всех очков $S = 35$; за каждую победу к ней прибавлялось x очков, за ничьи прибавлялось 2 очка, т.е.

$$n x + 2(15-n) = 35,$$
$$n(x-2) = 5,$$
$$n = \frac{5}{x-2}, \quad x = \frac{5}{n} + 2.$$

Т.к. матчей было 15, $0 \leq n \leq 15$, если $n=0$, то очков бы было $2\cdot 15 = 30$, $30 < 35$,
$\Rightarrow 1 \leq n \leq 15$, $\Rightarrow 2\frac{1}{3} \leq x \leq 7$ (получено из $x = \frac{5}{n}+2$ и $1 \leq n \leq 15$).

1. Команды, набравшие 7, 6, 6 и 10 очков, точно одержали 1 победу, иначе они могли набрать не больше 5 очков – это противоречие, $\Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow x \leq 3{,}25$.

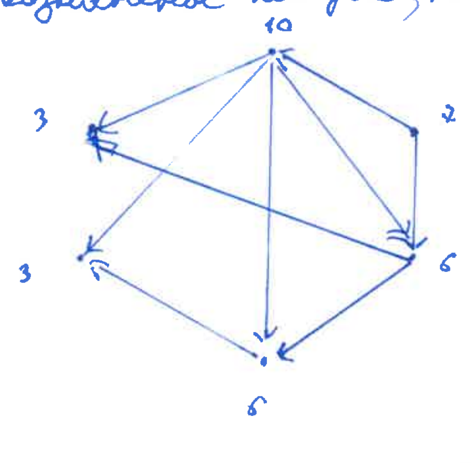
2. Команда, набравшая 6 очков, не могла выиграть более 2-х раз, иначе она бы уже набрала минимум $2\frac{1}{3}\cdot 3 = 7$ очков.

3. Команда, набравшая 10 очков, одержала победу минимум 3 раза, иначе она могла набрать не больше ~~3,25 + 4 = 7,25 очков, => n~~ $2\cdot 3{,}25 + 3 = 9{,}5$ очков, это противоречие, $\Rightarrow n \geq 6 \Rightarrow x < 3$.

4. Из 2 следует, что $2x \in \mathbb{Z}$, т.к. было набрано целое число очков, и то $1 \leq$ число побед ≤ 2, и за ничью даётся целое число очков.

Нам известно, что $2\frac{1}{3} \leq x < 3$ и $2x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$, дробная часть числа может быть равна только $\frac{1}{2}$ или 0, такое число в промежутке одно – 2,5.

Пример.
стрелками обозначены победы, не показанные партии – ничьи.



Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Борисова 5, СФУ Красноярск

Адрес площадки проведения

М А 0 0 0 1 5 3 7 7 2 2

Фамилия Фоминых Вариант № 1 Шифр

Имя Ева

Отчество Максимовна

Дата рождения 25.05.2007

Предмет Математика Класс 8

Работа выполнена на 5 листах

Номер телефона 8 913 046 24 74 Дата выполнения работы 05.03.22

Подпись Фоминых

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	3	7	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть a – длина параллепипеда b – его высота c – ширина

$\Rightarrow V = a \cdot b \cdot c \quad S = 2(S_1 + S_2 + S_3) = 2(ab + bc + ca)$

$V = S$

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	20	–	78

2) $a \cdot b \cdot c = 2(ab + bc + ca)$

$$a \cdot b \cdot c - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$a \cdot b \cdot c - a \cdot b \cdot c\left(\frac{2}{c} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{c} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$$

3) Чтобы данное равенство являлось действенным, к примеру, может быть $c = 6$ $a = 6$ и $b = 6$

Проверка:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216$$

~~$2 \cdot (6 \cdot 6 \cdot 3 = 6 \cdot 36 = 216$~~

$$2 \cdot (6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) = 2 \cdot 36 \cdot 3 = 6 \cdot 36 = 216$$

Ответ: Существует

Фомичева
Ева
Максимовна
8 класс

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	5	3	7	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2

...оказы что:

...гда по теореме Виета

...$-p$

...$=q$)

...та ...ик 5

...то, что записано с этой стороны листа

$x^2-2px-q\ 0$

$$\begin{cases} x_1+3+x_2+3=2p \\ (x_1+3)(x_2+3)=-q \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \\ x_1+3+x_2+3=2p \\ (x_1+3)(x_2+3)=-q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \\ -p+6=2p \\ x_1\cdot x_2+3x_1+3x_2+9=-q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \\ -3p=-6 \\ q+3\cdot(-p)+9=-q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \\ p=2 \\ 2q=6-9 \end{cases} \quad \begin{cases} p=2 \\ q=-1{,}5 \end{cases}$$

Ответ: $p=2 \quad q=-1{,}5$

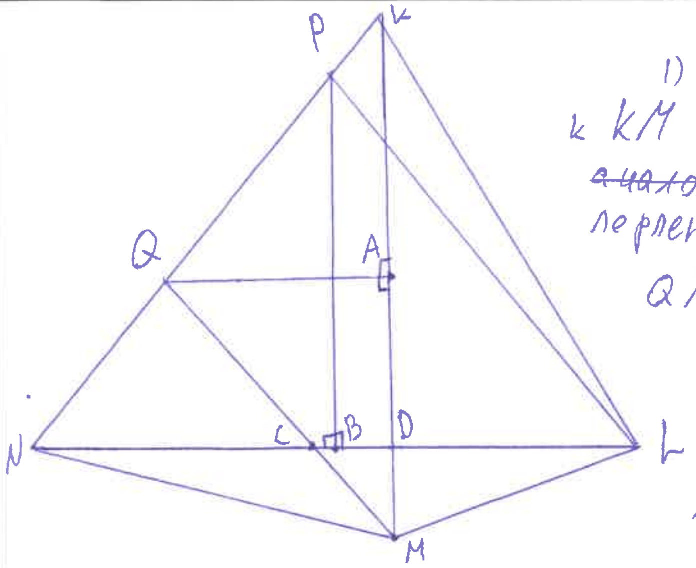
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	3	7	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



1) из Назовём пересечение серединного перпендикуляра к KM и KM — A; ~~аналогично~~ и пересечение сред. перпенд. к NL и NL — B, QM и NL — C

2) $\triangle NPL$ — равнобедренный $\triangle$ т.к. PB — высота и медиана $\Rightarrow$ $\angle PNL = \angle PLN$

3) аналогично MQK — равнобедренный $\triangle$ $\Rightarrow$ $\angle QKM = \angle QMK$

4) Пусть $\angle QKM = \angle QMK = a$, $\angle PNL = \angle PLN = b$

5) $\angle MCL = \angle PLN = b$ т.к. они являются накрест лежащими (CL — секущая, $QM \parallel PL$ по условию)

6) Пусть пересечение KM и NL — D

7) $\triangle CDM$:
$\angle CMD$ совпадает с $\angle QMK \Rightarrow \angle CMD = a$
$\angle MCD$ совпадает с $\angle MCL \Rightarrow \angle MCD = b$
$\angle CDM = 180 - (a+b)$

8) $\triangle NKD$:
$\angle NKD$ совпадает с $\angle QKM \Rightarrow \angle NKD = a$
$\angle KND$ совпадает с $\angle PNL \Rightarrow \angle KND = b$
$\angle NDK = 180 - (a+b)$

9) $\angle NDK$ и $\angle CDM$ — смежные $\Rightarrow$
$180° = 180-(a+b) + 180-(a+b) = 2(180-(a+b)) \Rightarrow$
$\angle CDM = \angle NDK = 90° \Rightarrow$ NL перпендикулярно KM ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00015377 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

1) Н – нечотное число Ч – четное

2) Для того что бы S ровнялось простому числу, она, как минимум, должна быть Нечотной:

S_1	Н	Ч
S_2	Н+Ч	Н+Ч
S_3	Н+2Ч	Н+2Ч
S_4	Н+3Ч	Н+3Ч

Дальше мы будем прибавлять Четные числа, что бы сумма оказывалась Нечетной; на S_6 (или S_5 при S_1=Н) мы начнем использовать Н; Далее Ч суммы и Н будут чередоваться; независимо от того начинали с Н или Ч у нас окажеться 2Н числа

2) если первым Н числом будет:

1сл 1
1+2=3
3+4=7
7+6=13
13+8=19
19+10=29
Все числа простые

2сл 3
3+2=5
5+4=9
9 – Непростое число

3сл 5
5+2=7
7+4=11
11+6=17
17+8=25
25 – не простое число

4сл 7
7+2=9
9 – не простое число

5сл 9
9+2=11
11+4=15
15 – не простое число,

~~Т.к. у нас уже есть вариант где все сумма будут простыми не будем~~

=> Для первого Н подходит ~~та~~ 1

4) Сумма S_6 (S_5) когда используем все Ч, будет ровняться
1+2+4...+10=31

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	3	7	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $31+3+5=39$ — кратно 13 не подходит

$31+3+7=41$, $41+5+9=41+14=55$ кратно 5

$31+3+9=43$, $43+5+7=55$ ...

(только доказано!) сумма всех чисел всегда равна

55; а 55 — не простое число =>

6) $6+1=7$ простых чисел

Ответ: 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Уфа, Космонавтов 1

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	7	7	5	5	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Исмагилов

Имя Данир

Отчество Ринович

Дата рождения 15.07.2007 **Класс** 8

Предмет математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +79174331367 **Подпись** [подпись]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Выдан доп лист N 1

Выдан доп лист N 2

Выход 12:05

Вход 12:08

Выдан доп лист N 3

Выдан доп лист N 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	8	0	66

30л

№1

Ответ: да, существует. Пример: $2\times2\times2$.

$S_{общ}=(2\cdot2)\cdot6=24$

$L_{общ}=2\cdot12=24$

№2

По теор. Виета:

$$\begin{cases} uv=p \\ u+v=-3p \\ \frac{1}{uv}=q \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{u+v}{uv}=4q \end{cases}$$

~~$u+v=4q\cdot q$~~;

$u+v=4q:\frac{1}{uv}=4q:q=4$

$u+v=-3p=4$

$p=-\frac{4}{3}$

$q=\frac{1}{uv}=1:\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{3}{4}$

Ответ: $p=-\frac{4}{3}$; $q=-\frac{3}{4}$.

Доп мес №1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

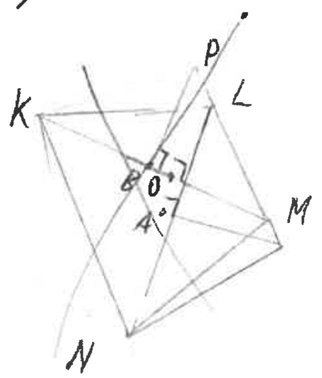
Вариант № 1

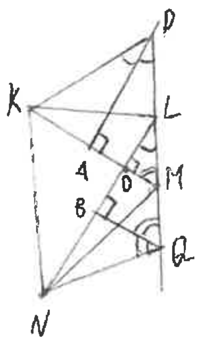
M	A	0	0	0	1	7	7	5	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3





Дано:
AP – сер. пер.
QB – сер. пер.
$KP \parallel NQ$

Д-ть:
$\angle LOM = 90^\circ$

Решение:

Т.к. AP – сер. пер. к KM, то KP = PM (равноуд. от сер. пер.)
ΔKPM – р-б.
Т.к. AP – мед., то AP – бис. => $\angle KPA = \angle APM$.
Т.к. BQ – сер. пер. к NL, то QL = QN. => ΔQLN – р-б.
Т.к. BQ – мед., то BQ – бис. => $\angle BQL = \angle BQN$.
Т.к. $KP \parallel NQ$, $2\angle APM + 2\angle BQL = 180$ (одност.)
$\angle APM + \angle BQL = 90^\circ$
$\angle BLQ = 180 - 90 - \angle BQL = 90 - \angle BQL = \angle APM$ (сумма ∠-ов ΔBQL)
$\angle PMA = 180 - 90 - \angle APM = 90 - \angle ABM = \angle BLQ$ (сумма ∠-ов ΔAPM)
В ΔLOM $\angle LOM = 180 - \angle OLM - \angle LMO = 180 - (\angle APM + \angle BQL) =$
$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
Ответ: ч.т.д.

Доп лист №2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 7 | 5 | 5 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 ~~Пойдём от~~

Пусть первые два числа: $(50+n)$ и $(50-n)$

$50+n+50-n=100$

Пусть вторые два числа $(50+m)$ и $(50-m)$

~~Пойдём от противного~~.

Допустим, что ~~это так~~. такой случай возможен.

$(50-n)(50+n)+(50-m)(50+m)=1001$

$2500-n^2+2500-m^2=1001$

$5000-1001=n^2+m^2$

$3999=m^2+n^2$

Левая часть равенства $\vdots 3$, значит и правая $\vdots 3$

$n^2+m^2 \vdots 3$

Рассмотрим остатки при делении на 3 какого-то k^2

если	то
$k \pmod 3 = 0$	$k^2 \bmod 3 = 0$
$k \pmod 3 = 1$	$k^2 \bmod 3 = (3l+1)^2 \bmod 3 = \underbrace{9l^2}_{\vdots 3} + \underbrace{6l}_{\vdots 3} + 1 \pmod 3 = 1$
$k \pmod 3 = 2$	$k^2 \bmod 3 = (3l+2)^2 \bmod 3 = \underbrace{9l^2}_{\vdots 3} + \underbrace{12l}_{\vdots 3} + 4 \pmod 3 = 4 \pmod 3 = 1$

Доп. лист №3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 7 7 5 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$\Rightarrow$ любой квадрат при делении на 3 даёт остаток 0 или 1.

n^2 или m^2 не могут давать остаток 1, так как остаток суммы будет 1 или 2.

$\Rightarrow$ $n^2 \vdots 3$; $m^2 \vdots 3$.

Но если $n^2 \vdots 3$, то $n \vdots 3$, так как 3 – простое. $\Rightarrow$

n можно представить как $3a$.

$n^2 = 9a^2$

Симметрично для $m = 3b$; $m^2 = 9b^2$

$3999 = 9a^2 + 9b^2$

$3999 = 9(a^2 + b^2)$

Но $3999 \not\vdots 9$. $\Rightarrow$ такого быть не может.

Ответ: нет, не могла.

Доп. лист №4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	7	5	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Общее кол-во баллов: $35 = 2n + km$, где k - кол-во очков за ~~выигрыш~~ победу. $n + m = 15$ - кол-во игр.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Якутск, СВФУ

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	8	4	9	6	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Романюк

Имя Анастасия

Отчество Руслановна

Дата рождения 09.01.2007 **Класс** 8

Предмет математика

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +79141061590 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	4	9	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

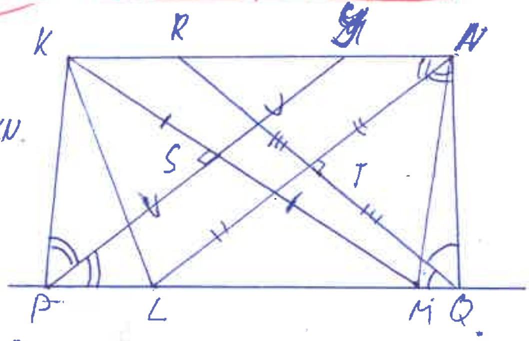
1	2	3	4	5	Σ
20	12	20	18	0	70

20

№3

1) Продолжим QT до точки R так, что QT=TR.

RNQL – парал., т.к. в чет-угольнике диагонали точкой перес. делятся пополам.



• Заметим, что пока не известно лежит ли точка R на прямой KN.

Аналогично с продолжением PS до точки Y так, что PS=SY.

$\Rightarrow$ PNQL – парал, KYMP – парал $\Rightarrow$ RN∥LQ, KY∥PM $\Rightarrow$ RN∥LM, KY∥LM

• RN и KY параллельны одной прямой и имеют точки K и N, которые лежат на одной прямой KN $\Rightarrow$ прямые RN и KY совпадают с прямой KN

$\Rightarrow$ KN∥LM

KNQP – парал, т.к KN∥LM и KP∥NQ – по опр. парал. $\Rightarrow$ ∠KPM = ∠KNM – противол.

В △LNQ TQ – мед. и выс. $\Rightarrow$ △LNQ – равнобед. $\Rightarrow$ LQ = NQ по св-ву равнобед.△

$\Rightarrow$ В RNQL LQ=RN – против лет., NQ=RL $\Rightarrow$ LQ=NQ=RN=RL $\Rightarrow$ RNQL – ромб по опр.

$\Rightarrow$ NL – бисс-са, по св-ву ромба $\Rightarrow$ ∠KNL = ∠QNL

Аналогично с △KPM и парал. KYMP $\Rightarrow$ ∠KPY = ∠YPM

т.к ∠KPM = ∠KNM $\Rightarrow$ ∠KPY = ∠YPM = ∠KNL = ∠QNL

∠NLM = ∠KNL – накрест. лет. при сек. NL

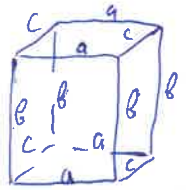
∠NLM = ∠YPM – соотв $\Rightarrow$ PY∥LN

$\Rightarrow$ ∠PSM = ∠LOM – соотв. углы при секущ. KM

$\Rightarrow$ ∠PSM = ∠LOM = 90° $\Rightarrow$ LN⊥KM

№1

Пусть параллелепипед имеет ребра размером a, b, c



Тогда площадь поверхности равна $S = 2bc + 2ab + 2ac$

$S = 4a + 4b + 4c$ – по условию

$\Rightarrow 2bc + 2ab + 2ac = 4a + 4b + 4c \;|:2$

$bc + ab + ac = 2a + 2b + 2c$

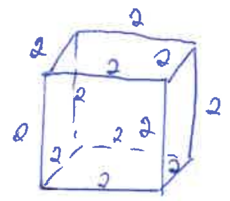
Заметим, что можно подставить вместо a, b, c число 2

Тогда при $a=2, b=2, c=2$ $S = 2\cdot2\cdot6 = 24$

$4a + 4b + 4c = 8\cdot3 = 24$ ⇒ Существует

$24 = 24$

Пример:



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000184 96 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 $a+b=100$
$c+d=100$
пусть $b=100-a$, $d=100-c$

Тогда: $ab+cd=1001$
$a(100-a)+c(100-c)=1001$
$100\cdot a-a^2+100c-c^2-1001=0$
$a^2-100a+c^2-100c=-1001$
$a^2-100a+50^2+c^2-100c+50^2=-1001+2\cdot 50^2$
$(a-50)^2+(c-50)^2=2500\cdot 2-1001$
$(a-50)^2+(c-50)^2=3999$

a	0	1	2	3
a^2	0	1	0	1

по мод. 4

Заметим, что $(a-50)^2$ и $(c-50)^2$ – это квадраты
$\Rightarrow$ при делении на 4 дают остатки 0 и 1
$3999 \underset{4}{\equiv} 3$
сумма остатков квадратов больше или равно нулю, но ≤ 2
$\Rightarrow$ возникает противоречие (т.к $3>2$
$\Rightarrow$ не могло.

№2
$u+v=-3p$
$u\cdot v=p$
$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=-4q$
$\frac{1}{u\cdot v}=q$
по т. Виета

$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{u+v}{u\cdot v}=\frac{-3p}{p}$ – подставили исходя из условия
$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{-3p}{p}=-4q \Rightarrow -3=-4q \Rightarrow q=\frac{3}{4}$
$\frac{1}{u\cdot v}=q=\frac{3}{4} \Rightarrow u\cdot v=\frac{4\cdot 1}{3}=\frac{4}{3}$ – по пропорции.
$\Rightarrow p=u\cdot v=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

Ответ: $p=1\frac{1}{3}$; $q=\frac{3}{4}$

№5
Всего партий сыграно $\frac{6\cdot 5}{2}=15$.
~~Очков за победу дается ≥ 2 т.к у одного игро~~
Очков за победу ≥ 2, т.к каждый играет по 5 партий, а у игроков очков >5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МА0001972022

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 4

Фамилия Насырова

Имя Тажин

Отчество Салимовна

Дата рождения 06.03.2007 **Класс** 8

Предмет математика

Работа выполнена на 9 **листах** **Дата выполнения работы** 16.02.2022

Номер телефона 8965 847 02 85 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	9	7	2	0	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть ширина прямоугольника равна a, длина прямоугольника равна $в$. Тогда изначально периметр был равен $2a+2в$. Затем ширина стала равна $a+\frac{30}{100}a = 1{,}3a$, длина стала равна $в-\frac{20}{100}в = 0{,}8в$. Периметр неизменился $\Rightarrow$ можем составить уравнение:

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	2	82

$$2\cdot a + 2\cdot в = 2\cdot 1{,}3a + 2\cdot 0{,}8в$$
$$2a+2в = 2{,}6a + 1{,}6в$$
$$0{,}4в = 0{,}6a$$
$$в = 1{,}5a$$

Тогда изначально периметр был равен:

$$2a+2\cdot в = 2a+2\cdot 1{,}5a = 5a$$

После того, как мы уменьшим его ширину на 20%, она ~~стала в~~ станет равна $a-\frac{20}{100}a = 0{,}8a$, когда мы ~~уменьшим его~~ увеличим его длину на 30%, она станет равна $в+\frac{30}{100}в = 1{,}3в$. Тогда периметр станет равен: $2\cdot 0{,}8a + 2\cdot 1{,}3в = 1{,}6a + 2\cdot 1{,}3\cdot 1{,}5 = 1{,}6a + 3{,}9a = 5{,}5a$. То есть периметр изменится (по сравнению с изначальным) ~~на~~ в (он увеличится так как $5{,}5a > 5a$)

$$\frac{5{,}5a}{5a} = 1{,}1 \text{ раза увеличится}$$

или можно сказать, что он увеличится

$$\frac{5{,}5a-5a}{5a}\cdot 100\% = \frac{0{,}5a}{5a}\cdot 100\% = 10\%$$

Ответ: периметр увеличится на 10% (~~или~~ увеличится в 1,1 раз)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	Н	0	0	0	1	9	7	2	0	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Дано: x^2+ux-v имеет корни p, q

x^2+px-q имеет корни u, v

$u, v, p, q \neq 0$, $u \neq v$, $p \neq q$

Решение:

По теореме Виета для уравнения x^2+ux-v

$$\begin{cases} p+q=-u \\ pq=-v \end{cases}$$

По теореме Виета для уравнения x^2+px-q

$$\begin{cases} u+v=-p \\ uv=-q \end{cases}$$

Т.к. условия выполняются одновременно:

$$\begin{cases} p+q=-u \\ pq=-v \\ u+v=-p \\ uv=-q \end{cases} \quad \begin{cases} p+q+u=0 \\ pq+v=0 \\ u+v+p=0 \\ uv+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -p-q=u \\ pq=-v \\ u+v=-p \\ uv=-q \end{cases}$$

(первое и третье уравнения сложили)

- $u+v+p+q=-u-p$

  $2u+2p+v+q=0 \Rightarrow p=-0{,}5v-0{,}5q-u$

- $pq+uv=-v-q$

  $uv+v=-q-pq$

  $v(u+1)=-q(p+1)$

  $\cancel{v(u+1}$

- $p+q+u+v+pq+uv=-u-v-p-q$

  $2(p+q+u+v)+pq+uv=0$

  $2(p+q+u+v)-v-q=0$

  $p+q+u+v=\frac{v+q}{2}$

№2 (продолжение)

$2p+2q+2u+2v-v-q=0$

$2p+2u+q+v=0$

$2(p+u)=-(q+v)$

$-2(p+u)=q+v$

$p+p+u+u+q+v=0$

$p+p+u+q+(u+v)=0$

$p+p+u+q+p=0$

$p+u+q=0$

• $p+q+u+pq+v+u+v+p+uv+q=0$

$2u+2v+2p+2q+pq+uv=0$

$2(u+v+p+q)+pq+uv=0$

$2\cdot\frac{v+q}{2}+pq+uv=0$

$v+q+pq+uv=0$

$v(u+1)+q(p+1)=0$

Решим часть из этой системы (~~уже~~ написанной ранее)

$$+\begin{cases}-p-q=u\\ u+v=-p\end{cases}$$

$-p-q+u+v=u-p$

$v-q=0$

$v=q$

Вариант № 4 MA0001972022

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2 (продолжение)

Подставим эти данные в уравнения рассматриваемой ~~Решим теперь другую часть системы~~ системы:

- $uv = -q$

$uq = -q$

$uq + q = 0$

$q(u+1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ u+1 = 0 \end{array}\right.$ (это по условию невозможно) ~~посторон~~

$\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ u = -1 \end{array}\right. \Rightarrow u = -1$

- $pq = -v$

$pq = -q$

$pq + q = 0$

$q(p+1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ p+1 = 0 \end{array}\right.$ (по условию $q \neq 0$)

$\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ p = -1 \end{array}\right. \Rightarrow p = -1$

Подставим теперь эти данные:

- $-p \cdot q = u$

$q = -p - v = -(-1) - (-1) = 2$

$q = v = 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA 0001972022

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано внутри рамки справа

~~Ответ~~ и 2 (продолжение)

Т.к. если подставим, то система имеет 1 решение:

$$\begin{cases} p = -1 \\ p = 2 \\ u = -1 \\ v = 2 \end{cases}$$

Ответ: $p = -1$, $q = 2$, $u = -1$, $v = 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 1 9 7 2 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Дано: трапеция KLMN

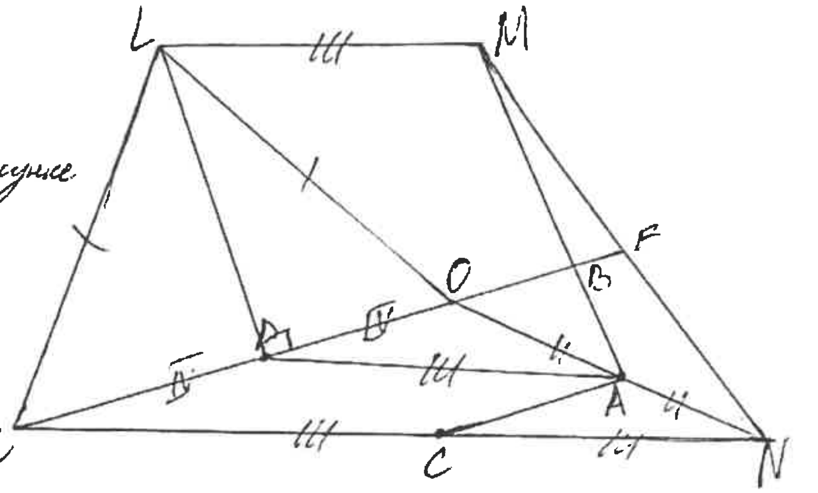
$2LM = KN$

т. O внутри трапеции

$KL = OL$, $OA = AN$

Отметим A и B и F как на рисунке

Док-ть: $MA \perp OK$



Доказательство:

Проведем AC ($C \in KN$) так, что $KC = CN$

~~KC + CN = KN KL LM~~

~~2KC = LM~~

$KC + CN = KN$

$2KC = KN \Rightarrow 2KC = 2LM \Rightarrow LM = KC$

Проведем AD ($D \in KO$) так, чтобы $KD = DO$

Рассмотрим ~~△KOK~~ △KON:

$\left\{ \begin{array}{l} KD = DO \\ OA = AN \end{array} \right. \Rightarrow AD$ - средняя линия △KON $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AD = \frac{1}{2}KN \\ AD \parallel KN \end{array} \right.$ (по свойству средней линии)

$AD = \frac{1}{2}KN = KC = LM$

$\left. \begin{array}{l} AD \parallel KN \\ KN \parallel LM \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel LM$

(т.к KLMN - трапеция и LM и KN - основания)

Проведем LD.

Рассмотрим △KLO: $KL = LO \Rightarrow$ △KLO - равнобедренный.

Рассмотрим

$\left. \begin{array}{l} KD = DO \Rightarrow LD \text{ - медиана } \triangle KLO \\ \triangle KLO \text{ - равнобедренный} \end{array} \right\} \Rightarrow LD$ - еще и высота △KLO (по свойству равнобедренного треугольника)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М Н 0 0 0 1 9 7 2 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

LD - высота $\triangle KLO \Rightarrow \angle LDO = 90°$

Рассмотрим четырехугольник $DLMA$:

$\left.\begin{matrix} LM \parallel AD \\ LM = AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow DLMA$ - параллелограмм (по признаку параллелограмма)

$DLMA$ - параллелограмм $\Rightarrow LD \parallel MA \Rightarrow \angle LDO = \angle MBF$ (соответственные углы при $LD \parallel MA$ и секущей $DF(DO)$)

$\angle LDO = \angle MBF = 90° \Rightarrow MA \perp OK$ $(MB \perp DF)$

что и требовалось доказать

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | Н | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 7 | 2 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Пусть в первый день зайчик весил x_1 граммов, во второй — x_2, в третий — x_3, в четвертый — x_4, в пятый — x_5, в шестой — x_6. Тогда:

$$\begin{cases} (x_1+x_2)\vdots 2 \\ (x_1+x_2+x_3)\vdots 3 \\ (x_1+x_2+x_3+x_4)\vdots 4 \Rightarrow \vdots 2 \\ (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\vdots 5 \\ (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\vdots 6 \Rightarrow \vdots 2; \vdots 3 \\ (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+225)\vdots 7 \end{cases}$$

$225=3^2\cdot 5^2$

т.к. $(x_1+x_2)\vdots 2$ и $(x_1+x_2+x_3+x_4)\vdots 4 \Rightarrow (x_3+x_4)\vdots 2$

т.к. $(x_1+x_2+x_3+x_4)\vdots 4$ и $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\vdots 6 \Rightarrow (x_5+x_6)\vdots 2$

т.к. $(x_1+x_2+x_3)\vdots 3$ и $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\vdots 6 \Rightarrow (x_4+x_5+x_6)\vdots 3$

т.к. $225\vdots 3$ и $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\vdots 6 \Rightarrow$ сумма всех кратна 3 $\Rightarrow$ сумма всех кратна $3\cdot 7=21$ (НОД$(3;7)=1$)

Заметим, что все пары чисел, которые $\vdots 2$ содержат числа одной и той же четности

Т.к. все зайчики весили по-разному $\Rightarrow x_6 \neq 225$

$225 \not\vdots 7 \Rightarrow (x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\not\vdots 7$

Вся сумма должна быть кратна 5. Все x-ы оканчиваются на 1, 2, 3 ... , 9, 0 (на одну из них)

$x_6 + (\underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}_{\vdots 5} + \underbrace{225}_{\vdots 5}) \Rightarrow x_6 \vdots 5$ как бы мы не выбирали числа, сумма будет $\vdots 5$

~~Чтобы нужные числа~~ Чтобы пары чисел были одной четности, мы ~~должны~~ выбрать четное кол-во нечетных чисел из набора 221, ..., 230

$\vdots 5$

Среди чисел 221, 222, 223 ... , 229, 230. Есть только 2 числа $\vdots 5$. $x_6 \neq 225 \Rightarrow x_6 = 230$. Ответ: 230

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00019720 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Заметим, что в каждой игре разыгрывалось 2 очка

Пусть было x команд. Тогда игр было:

$\frac{x(x-1)}{2}$, а очков (суммарно все набрали):

$\frac{x(x-1)}{2} \cdot 2 = x(x-1) = x^2 - x$

Команда „Бельчата" одержала не больше $(x-1)$ побед, а значит получила не больше $2(x-1)$ очков

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ростов-на-Дону
пер. Крепостной 139

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	6	6	0	5	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Годунов

Имя Борис

Отчество Эдуардович

Дата рождения 27.06.2007 **Класс** 8

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 5.03.22

Номер телефона 79613008453 **Подпись** Годув

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000166052 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	–	20	12	70

3ал

№1

Решение:

Рассмотрим куб 6 на 6 на 6

V(объём куба) $= 6\cdot6\cdot6 = 216$

S(площадь поверхности куба) $= 2\cdot6\cdot6 + 2\cdot6\cdot6 + 2\cdot6\cdot6 =$
$= (2+2+2)6\cdot6 = 6\cdot6\cdot6 = 216$

$V = S \Rightarrow$ Ответ: существует.

№2

Решение:

Пусть: x_1 и x_2 - корни ~~ур~~ квадратного трехчлена

x^2+px+q; - (1) квадратный трёхчлен

x_1+3 и x_2+3 - корни квадратного техчлена

$x^2-2px-q$; (т.к. оба корня увеличили на 3) - (2) кв. трех.

Тогда по теореме Виета:

1) в (1) $x_1+x_2=-p$ (т.к. p - второй коэфициент)

$x_1\cdot x_2 = q$ (т.к. q - свободный член)

в (2) $(x_1+3)+(x_2+3) = ~~2p~~ -(-2p) = 2p$

$(x_1+3)(x_2+3) = -q$

2) $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+3+x_2+3 = 2p \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{\begin{matrix} x_1+x_2+3+3=2p \\ x_1+x_2=-p\end{matrix}}{\begin{matrix}3+3=3p \\ 6=3p\end{matrix}} \Rightarrow p=\frac{6}{3}=2$

Продолжение решения на следующейстранице.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00016605 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение решения №2

3) $\begin{cases} x_1 x_2 = q \\ (x_1+3)(x_2+3) = -q \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1+3)(x_2+3) = q-(-q)$

$x_1 x_2 - x_1(x_2+3) - 3(x_2+3) = 2q$

$x_1 \cdot x_2 - x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 - 9 = 2q$

$-3x_1 - 3x_2 - 9 = 2q$

$-3(x_1+x_2) - 9 = 2q$

$-3 \cdot (-p) - 9 = 2q$

$-3 \cdot (-2) - 9 = 2q$

$6 - 9 = 2q$

$-3 = 2q$

$q = -1{,}5 = -\frac{3}{2}$

4) Получаем $p=2$ $q=-1{,}5$

Ответ: $p=2$ $q=-1{,}5$

Решения 4 и 5 дальше.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 | 0 | 5 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~4

Оценка:

1) Докажем, что максимальное кол-во нечетных сумм равно = 8:

(н - нечетное число/сумма ; ч - четное число/сумма)

Чтобы сумма чисел была нечетной, в ней должно быть нечетное кол-во нечетных слагаемых т.к.

ч + ч = ч ч + н = н

н + н = ч (с четным кол-вом) $= 2k \cdot н$

н + н + н = н $= (2k+1) \cdot н$

А отдельных сумм таких (с нечетным кол-вом нечетных слагаемых) может быть 3 т.к. у нас всего 5 нечетных чисел (1, 3, 5, 7, 9) и в одной сумме будет 1 н, в той 3 н, а в другой 5 н, четвертой суммы с неч. кол-вом неч. слагаемых не может быть ведь тогда нужны будут 7 н. чисел, а у нас только 5.

Далее из какой-то нечетной суммы можно сделать еще одну нечетную сумму прибавив четное число т.к. ч + н = н. И у нас есть 5 четных чисел => мы можем получить еще 5 различных нечетных сумм. На большее кол-во нечетных сумм нет ~~чисел~~ чисел. Получается: 3+5=8 нечетных сумм.

2) Из этих 8 нечетных сумм одна сумма кратна 5 т.к. $S_{10} = 55 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ и $55 : 5 = 11$. Получается остается $8-1 = 7$ нечетных сумм, которые могут быть простыми числами.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение № 4.

3) Пример: $S_1=2$; $S_2=2+1$, $S_3=2+1+4$, $S_4=2+1+4+6$, $S_5=2+1+4+6+10$, $S_6=2+1+4+6+10+8$, $S_7=2+1+4+6+10+8+3$, $S_8=2+1+4+6+8+10+3+5$, $S_9=1+2+3+4+5+6+8+10+7$, $S_{10}=1+2+3+4+5+6+7+8+10+9$.

$S_1=2$, $S_2=3$, $S_3=7$, $S_4=13$, $S_5=23$, $S_6=31$, $S_7=34$, $S_8=39$, $S_9=46$, $S_{10}=55$. И суммы S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, — простые.

4) Дополнение к оценке:

~~В возможных 3, 6ти нечетных суммах мы можем прибавить (к на 8у штук) не 5, а 4 суммы ведь~~

Прибавляя к нечетному числу/сумме четное число мы можем получить не 5, а 4 суммы, ведь мы прибавляем к уже существующей нечетной сумме. С нечетным кол-вом нечетных слагаемых => у нас есть не 8, а 7 возможных нечетных сумм из которых одна $= 55 = S_{10}$ и кратна 5. => у нас есть $7-1=6$ возможных нечетных простых сумм. Но 2 - является хоть и четным числом, но еще и простым => к нашим возможным 6 мы прибавим еще 1 сумму, которая может быть простой (точнее и является таковой) И получим $6+1=7$ возможных простых сумм максимум. И в примере получилось 7 сумм простых.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	6	0	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Пример:
в виде таблицы:

X	1	2	3	4	5	6	
1	X	4	4	0	4	0	→ 12
2	0	X	4	4	1	1	→ 10
3	0	0	X	4	1	4	→ 9
4	4	0	0	X	0	4	→ 8
5	0	1	1	4	X	1	→ 7
6	4	1	0	0	1	X	→ 6

При победных очках = 4.

(n - n-ная команда)

Оценка:

1) Всего было $5+4+3+2+1=15$ сражений (или можно вычислить по формуле нахождения рёбер в графе: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{5\cdot 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$)

2) Пусть k - искомое кол-во очков за победу. Если $k \leq 3$, то макс. кол-во очков будет $\leq 3\cdot 15 = 45$ за все сражения, что меньше $12+10+9+8+7+6=52$ т.к. $52>45 \Rightarrow k>3$. ($\Rightarrow$ - знак "следовательно")

3)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	7	2	5	4	2	2

____

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № ________

Фамилия КОКАРЕВ

Имя КОНСТАНТИН

Отчество ЗАХАРОВИЧ

Дата рождения 03.07.2007 Класс 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 листах Дата выполнения работы 12.03.2022

Номер телефона +79150538745 Подпись Кокарев

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

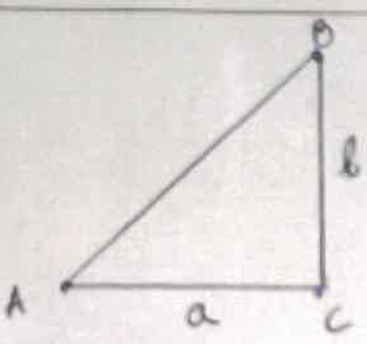
Вариант № ______ MA000172542 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
0	20	20	20	–	60

$h = \frac{ab}{c}$



1) $S(ABC) = \frac{ab}{2} \Rightarrow AB = \frac{ab}{4}$

2) по теореме о неравенстве треугольников:

$\frac{ab}{4} < a+b$

$\frac{ab}{4} + a > b$

$\frac{ab}{4} + b > a$

3) Рассмотрим $\frac{ab}{4} + a > b$ и $\frac{ab}{4} + b > a$

$\frac{ab}{4} + a \vee b \mid \cdot 4$

$ab + 4a - 4b \vee 0$

$ab + 4(a-b) \vee 0$

$ab + 4(a-b) > 0$

только если $a > b$ то есть $a - b > 0$

уже знаем, что $a - b > 0$

$\frac{ab}{4} + b \vee a$

$\frac{ab}{4} + b - a \vee 0 \mid \cdot 4$

$ab + 4(b-a) \vee 0$

$ab + 4(b-a) > 0$

только если $b > a$ то есть $b - a > 0$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такого треугольника не существует

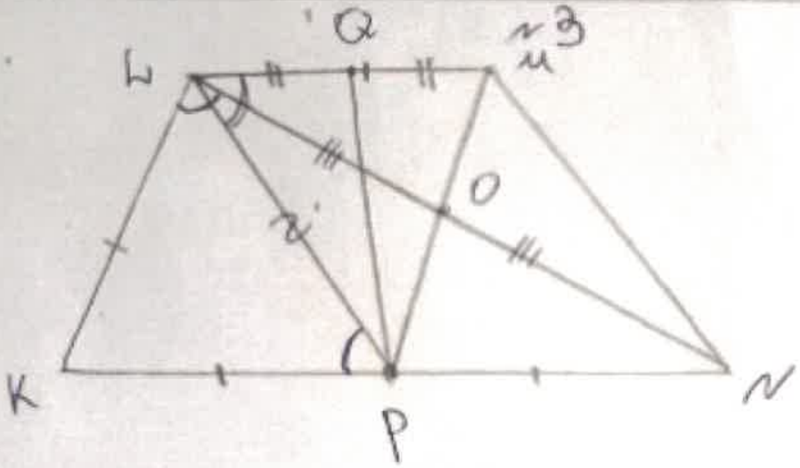
Ответ: такого треугольника не существует

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 2 | 5 | 4 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Дано:
KLMN - трапеция
KL = LM
P ∈ KN и KP = PN
Q ∈ LM и LQ = QM
P ∈ бис ∠L

Док-те:
LN = 2PQ

1) Доп. построение: LN, PM, PM ∩ LN = O

2) ∠KLP = ∠PLM (т.к. LP - бис.)
∠MLP = ∠KPL (как нак. леж. при ||-ных прям. LM и KN и сек. LP)
△KLP - р/б (по признаку) => KL = LM = KP = $\frac{1}{2}$KN

3) LPMN - пар-мм (по признаку LM = PN = $\frac{1}{2}$KN и LM || PN (т.к это основ. трап.)
MP и LN - диагонали в пар-ме LPMN, а => они делятся пополам (по св-ву пар-мма).

4) Из того, что LO = ON => PO - сред. линия (по опр.) => PO || KL и тогда ∠KLP = ∠LPM (как накр. леж. при ||-ных прямых LK и PO и сек. LP), значит △LPM - р/б (по признаку)

5) △LPM - р/б, тогда LM = PM, а т. O делит PM на два равных отрезка => OM = OP = LQ = QM

6) Рассмотрим △PLQ и △LPO у них:
1) OP = LQ (по п. 5)
2) LP - общая
3) ∠MPL = ∠KLP = ∠PLM (т.к. LP - бис и по п. 4)
Значит △PLQ = △LPO (по двум сторонам и углу между ними)

7) Из рав △PLQ и △LPO => QP = LO, LO = $\frac{1}{2}$LN => 2QP = LN

ч.т.д.

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ MA00017254222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

px^2+qx+r – имеет два корня

$px^2+px^2+px^2+2px+2qx+q+r$ вычтем их

qx

$2px^2+(2p+q)x+q$

$a=2p \quad b=2p+q \quad c=q$

$D=b^2-4ac=(2p+q)^2-4\cdot 2p\cdot q=4p^2+4pq+q^2-8pq=$

$=4p^2-4pq+q^2=(2p-q)^2 \quad D>0 \Rightarrow$ трехчлен имеет два корня. ч.т.д

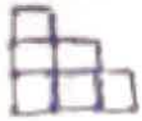
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ MA00017254 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4

1) Если нашу доску раскрасить в шахматную доску, то на каждую пару фигур  нужно 6 белых и 6 черных клеток, но их кол-во нечетно т.к. 333/2 => в 333-ей фигуре кол-во черных и белых клеток не будет равно ( 4 ч. и 2 б.  2 ч. и 4 б.) =>

=> оставшихся клеток разных цветов будет (примерно) разное кол. б.к. ≠ кол. ч.к.

2) на каждую фигуру  нужно 1 б. и 1 ч. клетка => кол-во черных и белых клеток должно быть равным но мы уже узнали у п. 1, что кол-во б.к ≠ кол-во ч.к.

=> такое быть не может

Ответ: кол-во фигур из шести клеток не может быть равно 333.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	2	0	2	3	6	2	2

Адрес площадки проведения ____________ Шифр

Вариант № 4

Фамилия Львова

Имя Алеся

Отчество Яновна

Дата рождения 17.03.2008 **Класс** 8

Предмет математика

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 16.03.2022

Номер телефона 8909 316 03 79 **Подпись** Львова

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	0	2	3	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

30

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

Задача 1

x – ширина

y – длина

1) Периметр 1: $2x+2y=2x\cdot1,3+2y\cdot0,8$

2) Периметр 2: $2x\cdot0,8+2y\cdot1,3$

1) Периметр 1: $2,6x-2x=2y-1,6y$

$0,6x=0,4y$

$2y=3x$

Подставим:

$P_1=2x+2y=2x+3x=5x$

2) Периметр 2:

$P_2=2x\cdot0,8+3x\cdot1,3=1,6x+3,9x=5,5x$

$\frac{P_2}{P_1}=\frac{5,5x}{5x}=1,1$ => Периметр увеличится на 10%

Ответ: увеличится на 10%

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 2 0 2 3 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2

1) x^2+ux+v имеет корни p и q, где $p\neq q\neq 0$

2) x^2+px-q имеет корни u и v, где $u\neq v\neq 0$

1) x^2+ux-v корни p и q

$p+q=-u$

$p-q=-v$

2) x^2+px-q корни u и v

$u+v=-p$

$u\cdot v=-q$

$$\begin{cases} p+q=-u & (1) \\ p\cdot q=-v & (2) \\ u+v=-p & (3) \\ u\cdot v=-q & (4) \end{cases}$$

(3)+(4): $u+v+u\cdot v=-p-q$

$p+q=-u-v-u\cdot v=-u$

$-v-u\cdot v=0$

$-v(1+u)=0 \quad |:-v\neq 0$

$1+u=0$

$u=-1$

(3)·(4): $p\cdot q=(u+v)\cdot u\cdot v=-v$

$u\cdot v(u+v)=-v \quad |:v\neq 0$

$u(u+v)=-1$

$u=-1 \Rightarrow -1\cdot(-1+v)=-1$

$v-1=1$

$v=2$

Продолжение на след. стр.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА000202 3622

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение Задача 2

Подставим u и v в (3) и (4)

(3): $-1+2=-p$

$p=-1$

(4): $-1\cdot 2=-q$

$q=2$

Ответ: $p=-1$; $q=2$; $u=-1$; $v=2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА0002023622

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4

n-масса яблока в шестой день

$221 \le n \le 230$, $n \ne 225$, $n \in \mathbb{Z}$

x-средний вес в 6-ой день

y-средний вес в 7-ой день

$\frac{6x+225}{7} = y$, $y \in \mathbb{Z}$

$\downarrow$

$225 \underset{7}{\equiv} 1$

$6x+225 \underset{7}{\equiv} 0$

$\downarrow$

$6x \underset{7}{\equiv} 6 \rightarrow x \underset{7}{\equiv} 1$

$221 \le x \le 230 \rightarrow$ Единственная масса, остаток которой при делении на 7 равен 1 это 225, значит $x = 225$

z-средний вес в 5-ый день

$\frac{5z+n}{6} = x$

$5z+n = 225 \cdot 6 = 1350$

Чтобы у суммы был 0 на конце, при этом первое слагаемое было кратно 5, надо, чтобы оба слагаемых заканчивались на 5, либо оба заканчивались на 0. Т.к. в диапазоне масс только 1 масса, заканчивающаяся на 5, и она была задействована в 7-ой день, то оба слагаемых оканчиваются на 0. Единственное число в диапазоне, заканчивающееся на 0 это 230.

Значит $n = 230$ г

Ответ: 230г.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА0002023622 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверятся только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5

Если $n=2$, то

$Б=2$

$x_1=0$

$2>0$ ⊖

Если $n=3$, то

Б как минимум 1 победа.

ни у x_1, ни у x_2 побед не может быть, т.к. число побед Бельчат должно быть больше

Если $n=4$, то

у Бельчат либо 1, либо 2, либо 3 победы

Если у Б 1 победа, то все остальные между собой играют вничью. Тогда у бельчат очков:

$2+1+1$, а у остальных меньше

Если у Б 2 победы, то у остальных может быть по одной победе и ничьи (по крайней мере между собой)

$x_1=1$

$x_2=2+1$

$x_3=2+1$

$Б=4$ ⊖

Вариант с 3 победами не подходит, т.к. остальные не наберут больше очков.

Если $n=5$ у Б побед может быть 1, 2, 3, 4

Если побед у Б 1, то у остальных только ничьи между собой и с Б. → Б набирают больше всех очков.

Если побед у Б 2, то у остальных может быть по одной победе и ничьи (одна победа, один проигрыш, ничьи)

Продолжение на след стр.

Продолжение Задача 5

$Б=4$

$x_1=2+2\cdot1=4$

$x_2=2+2\cdot1=4$

$x_3=2+2\cdot1=4$

$x_4=2+2\cdot1=4$

Но очков поровну $\ominus$

Если у Б побед 3 и более, то остальные команды не наберут больше очков

Если $n=6$ у Б может быть побед 1, 2, 3, 4, 5

Вариант с 1 победой Б не подходит, т.к. остальные не смогут набрать больше очков

Рассмотрим вариант с 2 победами Б. Если Б выиграли 2 раза, а остальные встречи проиграли, то у остальных может быть по одной победе, а остальные встречи вничью.

Рассмотрим турнирную таблицу:

	Б	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Б		0	0	2	2	2
x_1	2		1	0	1	1
x_2	2	1		1	0	1
x_3	0	2	1		1	1
x_4	0	1	2	1		1
x_5	0	1	1	1	1	
	4	5	5	5	5	6

Как видим, каждая из команд набрала больше очков, чем у Б, а побед одержали меньше. Данный пример подходит под условие. Кол-во команд меньше 6 не может быть, т.к. мы это доказали ранее.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

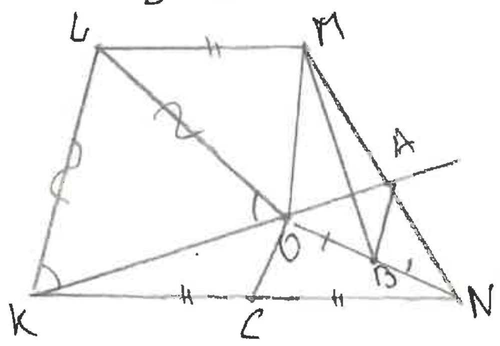
Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	0	2	3	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3



$\triangle KLO$ – равнобедр

OC – медиана $\triangle KON$

$S_{KOC} = S_{CON}$

т.к. MB – медиана $\triangle OMN$, то

$S_{OMB} = S_{NBM}$

AB – медиана $\triangle OAN$

$S_{OAB} = S_{BAN}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	2	0	3	5	4	2	2

КГЭУ

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Валушин

Имя Данис

Отчество Динарович

Дата рождения 02.09.2007 **Класс** 8

Предмет математика

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +79033888646 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 0 3 5 4 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	–	6	~~8~~ 12	~~52~~ 56

\+

1) Да, куб со стороной 2, сумма площадей граней $= 4\cdot6$, сумма ребер $=12\cdot2$, $4\cdot6=12\cdot2=24$

2) По Т Виета $u+v=-3p$, $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=4q$, $uv=p$, $\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}=q \Rightarrow$

$\frac{1}{uv}=q \Rightarrow \frac{1}{p}=q \Rightarrow p=\frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{4}{p}=\frac{v+u}{uv}=\frac{u+v}{p}$

пример: $x^2+3x+4=0$ $\quad x_1+x_2=-3$, $x_1\cdot x_2=+4$, но корней у многочлена нет, т.к. $D<0$

$\Rightarrow u+v=4 \Rightarrow -3p=4 \Rightarrow p=\frac{-4}{3}$, $q=\frac{-3}{4}$

а где проверка, что оба трехчлена имеют по два корня? $D>0$?

В критериях про это написано и это важно!

4) Пусть $a+b=c+d=100$ и $ab+cd=1001$. $a\le b$, $c\le d$. Тогда посмотрим на что заканчивается два числа и их произведение:

a/b	b/a	ab
0	0	0
1	9	9
2	8	6
3	7	1
4	6	4
5	5	5

Сумму, оканчивающуюся на 1 дает $0\cdot0+3\cdot7$ и $5\cdot5+2\cdot8$

При этом, заметим, что если $a+b=100$, то миним. ab при 1, 99, а макс при 50, 50, т.к. пусть $a\le b$

не умаляя общности, $a_1=a-x$, $b_1=b+x \Rightarrow a_1b_1=ab+ax-bx-x^2=ab-(b-a)x-x^2$, $b-a\ge0 \Rightarrow a_1b_1<ab$. Тогда если $12\cdot88>1001$, то и все большие а будут давать большее произведение. Переберем: $10\cdot90=900$, $8\cdot92=736$, $7\cdot93=651$, $5\cdot95=475$, $3\cdot97=291$, $2\cdot98=196$. Тут нет двух чисел, сумма которых 1001 $\Rightarrow$ такое невозможно.

По условию числа целые, т.е. среди них могут быть отрицательные, где Вы такие случаи рассматриваете? Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения – 6 баллов.

Лист 1 из 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0002035422

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рамке справа

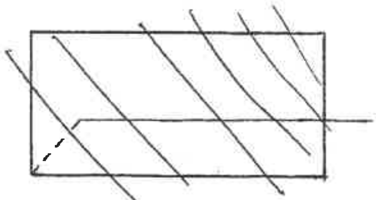
5) Заметим, что ничьи дают суммарно 2 очка, игр 15, а всего очков 35. Если число очков победы ≤ 2 то суммарно очков должно быть ≤ 30. ~~Тогда если за победу дают ≤ 3 очков, то 1-ая команда может выиграть 4 раза, след. 3 потом 2 а последние 2 по 1, итого 13 => 6 ничьей~~

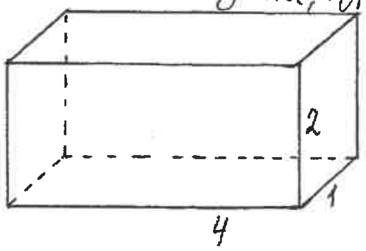
Если за победу дают больше 3 очков, то максимальное число выигранных матчей:
$$\frac{3,\ 3,\ 6,\ 6,\ 7,\ 10}{0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ =7}$$
. При этом минимальное проигрышей:
$$\frac{3,\ 3,\ 6,\ 6,\ 7,\ 10}{2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1\ =7}$$
. Значит ровно 7 ~~матчей~~ неничейных матчей. Но т.к. мы предположили что дают больше 3 очков суммарно будет > 35 очков. ~~Если дают ровно 3 очка а такая команда, которая~~ Если за победу дают ровно 3 очка, то 10-ой надо выиграть мин. 3 раза, седьмой − 1, шестым − 1 => Минимум 6 неничейных игр => больше 35 очков. Тогда дают от 2 до 3 очков невключительно. При этом команды с 6 очками должны выиграть минимум 1 раз и меньше 3. Если выиграют 1 будет нечетное число очков => выиграли 2 раза => за победу дают 2.5 очко.

Не приведен пример турнира! т.е. кто с кем играл и каков результат у всех матчей. (см. критерии) или таблица отображающая пример. 12б

№1

Да. Примером такого параллелепипеда может служить пар-д со сторонами 1; 2; 4. Тогда его площадь поверхности: $(1\cdot2)\cdot2+(1\cdot4)\cdot2+(2\cdot4)\cdot2=4+8+16=28$, а сумма длин всех ребер: $4\cdot1+4\cdot2+4\cdot4=4+8+16=28$. Тогда видим, что условие выполняется.

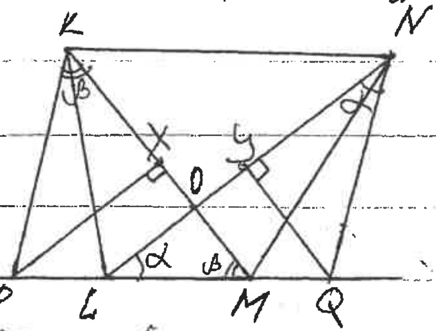




1	2	3	4	5	Σ
20	–	20	–	20	60

№2

① Заметим, что ΔKMP и ΔLNQ – равнобедренные, с основаниями KM и LN соответственно. Это следует из следующих фактов:



~~1) KX = XM по условию;~~

~~2) ∠KXP = ∠PXM по условию;~~

~~3) PX – общая у ΔKXP и ΔPXM;~~

~~значит, ΔKXP = ΔPXM по 2-м сторонам и углу между ними => все соотв. эл-ты равны => KP = PM.~~

~~Аналогичным образом доказывается, что ΔQNY = Δ~~

Рассмотрим ΔKXP и ΔMXP:

1) XP – общая

2) $\angle KXD = \angle MXP = 90°$ по условию

3) $KX = XM$ по условию

$\Rightarrow \Delta KXP = \Delta MXD \Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 0 4 8 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow$ все соотв. эл-ты равны $\Rightarrow KP = PM \Rightarrow \triangle KPM$ – равнобедр. Аналогичным образом доказывается равенство $\triangle QNY$ и $\triangle QLY$, а значит и равенство их соотв. эл-тов $\Rightarrow LQ = QN \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle LNQ$ – равнобедр.

② Теперь, для удобства, пусть $\angle PKM = \angle KMP = \beta$ и $\angle LNQ = \angle NLQ = \alpha$. Заметим, что $\angle KPC = \angle NQL$, как соответственные при прямых $KP \parallel NQ$ (по условию) и секущей PQ. Тогда $\angle KPC = \angle KMP = 180° - 2\alpha$.

③ По теореме о внешнем угле Δ-ка, $\angle CPK = \angle PKM + \angle KMP$, то есть $180° - 2\alpha = 2\beta \Rightarrow 180° = 2\beta + 2\alpha \Rightarrow$ $90° = \beta + \alpha$.

④ Рассмотрим $\triangle LOM$. $\angle O$ в нём $= 180° - \angle OLM - \angle OML$, то есть $\angle LOM = 180° - (\alpha + \beta)$. Из п. 3 мы знаем, что $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle LOM = 180° - 90° = 90°$; $\angle LOM = 90° \Rightarrow$ $KM \perp LN$, ч.т.д.

№5

Заметим, что всего было сыграно $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ матчей, а кол-во полученных очков за все матчи $3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 7 + 10 =$ $= 7 + 10 + 18 = 35$. Пусть x – кол-во очков, которое давали за победу. Тогда по результатам 1-го матча у двух команд в сумме могло быть или 2 или x очков. Пусть a матчей сыграно вничью. На

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00020488 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

основе этого составим ур-ние:

$2a + x(15-a)=35$

$2a + 15x - ax = 35$

Теперь рассмотрим возможные значения x. Если $x \geq 7$, то команды, набравшие по 6 очков все матчи сыграли все матчи вничью, при этом они сыграли по 6 матчей, чего быть не может. Если $x = 1$, то команды, набравшие ≥ 6 очков сыграли ≥ 6 матчей, чего быть не может. Из этого делаем вывод, что $x \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Подставим каждое значение x в ур-ние, при возможном x $a \leq 15$ и при этом целое:

$x=2$
$2a + 15\cdot 2 - 2a = 35$
$30 = 35 \Rightarrow$ нет

$x=3$
$2a + 3\cdot 15 - 3a = 35$
$a = 10 \Rightarrow$ да

$x=4$
$2a + 4\cdot 15 - 4a = 35$
$2a = 25 \Rightarrow$ нет

$x=5$
$2a + 15\cdot 5 - 5a = 35$
$3a = 40 \Rightarrow X$

$x=6$
$2a + 15\cdot 6 - 6a = 35$
$4a = 55 \Rightarrow$ нет

Получаем единственно возможный $x = 3$.

~~Ответ: за победу давалось 3 очка.~~

Лист 3 из 6

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Теперь переберём всевозможные значения a и соответствующие им значения x. Опустим расчёты, записывая только $a; x$ и кол-во побед, необход. для целого числа баллов (очевидно, что $a \neq 15$)

1) $a = 14 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow$ невозможно, т.к. тогда команда, набравшие по 6 баллов сыграли 6 матчей.

2) $a = 13 \Rightarrow x = 4{,}5 \Rightarrow$ надо 2 победы $\Rightarrow$ невозможно, ситуация аналог. пункту 1.

3) $a = 12 \Rightarrow x = 3\frac{2}{3} \Rightarrow$ 3 побед $\Rightarrow$ невозможно (пункт 1)

4) $a = 11 \Rightarrow x = 3\frac{1}{4} \Rightarrow$ 4 победы $\Rightarrow$ невозможно (п. 1)

5) $a = 10 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ хотя бы 1 победа $\Rightarrow$ возможно

6) $a = 9 \Rightarrow x = 2\frac{5}{6} \Rightarrow$ 6 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

7) $a = 8 \Rightarrow x = 2\frac{5}{7} \Rightarrow$ 7 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

8) $a = 7 \Rightarrow x = 2\frac{5}{8} \Rightarrow$ 8 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

9) $a = 6 \Rightarrow x = 2\frac{5}{9} \Rightarrow$ 9 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

10) $a = 5 \Rightarrow x = 2{,}5 \Rightarrow$ 2 победы $\Rightarrow$ возможно

11) $a = 4 \Rightarrow x = 2\frac{5}{11} \Rightarrow$ 11 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

12) $a = 3 \Rightarrow x = 2\frac{5}{12} \Rightarrow$ ~~нет~~ 12 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

13) $a = 2 \Rightarrow x = 2\frac{5}{13} \Rightarrow$ 13 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

14) $a = 1 \Rightarrow x = 2\frac{5}{14} \Rightarrow$ 14 побед $\Rightarrow$ нет (п. 1)

15) $a = 0 \Rightarrow x = 2\frac{1}{3} \Rightarrow$ 3 победы $\Rightarrow$ нет (п. 1).

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим п. 10. Заметим, что всего в таком случае было 10 побед, при этом их 2 мы „отдаём" командам с 6-ю очками ~~итого п.~~)
Остаётся 6 побед. Из них только 2 могут принадлежать команде с 7-ю очками.
Тогда 4 — команде с 10-ю очками.
~~Получаем турнирную таблицу.~~

	I	II	III	IV	V	VI	итог
I		2,5	2,5	2,5	2,5	0	10
II	0		2,5	2,5	1	0	6
III	0	0		1	1	1	
IV	0	0	1		1	1	
V	0	1	1	1			
VI	2,5	2,5	1	1			

	I	II	III	IV	V	VI	итог
I		2,5	2,5	1	0	0	6
II	0				0	0	
III	0				0	1	
IV	1				2,5	2,5	
V	2,5	2,5	2,5	0		2,5	
VI	2,5	2,5	1	0	0		

~~Рассмотрим п. 5. Всего тогда было 5 побед, но одну „отдаём" командам с 6-ю очками~~

~~Рассмотрим п. 5. Всего тогда 5 побед 2 „отдаём" команде с 10-ю очками (иначе она дважды будет сыграть не менее 8 матчей).~~
~~Осталось~~

~~Мы в таком случае у какой-то команды будет 2 очка, чего быть не может~~

Рассмотрим п. 5. Всего тогда сыграно 5 побед. Команда с 10-ю баллами тогда сыграла хотя бы 2 победы. Если побед 2, то всего у неё

6 партий, чего быть не могло. Если побед 3, то на другие команды остаётся 2 победы, но хотя бы одна победа должна быть у команд с 6-ю и 7-ю баллами ⇒ 3 не подходит.

Построим пример на 2,5 балла за победу

	1	2	3	4	5	6	итог
1	Ш						
2		Ш					
2н; 3			Ш				
2н; 4				Ш			
2н; 1н 5					Ш		
4н; 1п 6						Ш	

Ответ: 2,5 балла

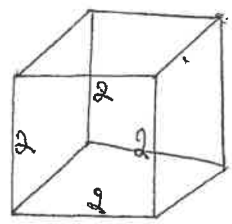
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	0	4	8	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



1	2	3	4	5	Σ
20	18	0	20	2	60

№1

Пусть ширина $=x$, длина $-y$, высота $-z$, тогда $4x+4y+4z=2xy+2xz+2yz$. ($x\neq0, y\neq0, z\neq0$) как длины.

$2x+2y+2z=xy+xz+yz$

$-2x+xy-2y+yz-2z+xz=0$

~~$x(y-2)-2$~~

$x(y-2)+y(z-2)+z(x-2)=0$. (1)

~~Т.к. x, y~~ Из равенства 1 сразу заметно решение при котором ~~x_1, y_1~~ $z=2$, $y=2$, $x=2$, а значит такой параллелепипед существует. ч.т.д.

Проверка:

$2\cdot12$ (ребер) $=24$.

6 (сторон) $\cdot 2\cdot2=24$

$24=24 \Rightarrow$ решение верное

Ответ: да, например куб со стороной 2

№4 (продолжение на листе 2)

Сумма двух чисел равна 100 в таких парах, как 1 и 99, 2 и 98, 3 и 97 и т.д. Т.к. сумма произведений $=1001$, значит произведение из пар $<302 \Rightarrow$ Возможны пары 90 и 10, 91 и 9, 92 и 8, 93 и 7, 94 и 6, 95 и 5, 96 и 4, 97 и 3, 98 и 2, 99 и 1. Т.к. 1001 – нечет $\Rightarrow$ оно явл. суммой четного и нечет. ~~чтобы~~ Чтобы на конце числа ~~было~~ "1" нужно чтобы ~~сумма~~ была $=1$ ~~тень~~ последн. цифра суммы последних цифр чисел из пар ~~произведени~~

(над парами: заканч. на 0, на 9, на 6, на 1, на 4, на 5, на 4, на 1, на 6, заканч. на 9)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | MA000204872 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 (продолжение, начало на листе 1)

~~Зато~~ Следовательно:

1) $9+2=1$
2) $10+1=1$
3) $8+3=1$
4) $7+4=1$
5) $6+5=1$

~~$91\cdot 9 + 99\cdot 1 = 819 + 99 =$~~

1) на 2 ничего не заканчивается.

2) $80\cdot 10 + 97\cdot 3 > 1001 \Rightarrow$ не подходит.

·) $90\cdot 10 + 93\cdot 7 > 1001 \Rightarrow$ не подходит

3) на 3 ничего не заканчивается

4) на 7 ничего не заканчивается.

5) $95\cdot 5 + 98\cdot 8 = 475 + 732 > 1001 \Rightarrow$ не подходит.

Путём обоснованного перебора можно ~~узн~~ увидеть что таких пар чисел нет.

№2 (продолжение на листе 3)

$x^2+3px+p$

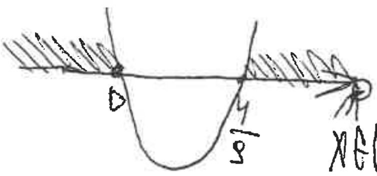
$D = 9p^2 - 4p \geq 0$

$9p^2 - 4p \geq 0$

$p(9p-4) \geq 0$

Нули л.ч.

$p_1 = 0 \quad p_2 = \frac{4}{9}$



$x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{4}{9}; +\infty)$.

$x^2 - 4qx + q$

$D = 16q^2 - 4q$

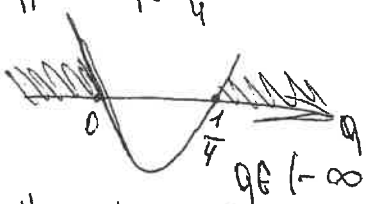
$D \geq 0 \Rightarrow$

$16q^2 - 4q \geq 0$

$4q(4q-1) \geq 0$

Нули л.ч.

$q_1 = 0 \quad q_2 = \frac{1}{4}$



$q \in (-\infty; 0] \cup [\frac{1}{4}; +\infty)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} q \in (-\infty; 0] \cup [\frac{1}{4}; +\infty) \\ p \in (-\infty; 0] \cup [\frac{4}{9}; +\infty) \end{cases}$$

продолжение на листе 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 | 8 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 продолжение (начало на листе 2)

q и p - взаимообратные

$$\begin{cases} q=\frac{1}{vu} \Rightarrow \\ p=vu \\ -3p=u+v \ (2) \\ 4q=\frac{1}{u}+\frac{1}{v} \ (1) \end{cases}$$

(1) $4q=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$

$4q=\frac{u+v}{uv}$ и $q=\frac{1}{uv}$

$4q=\frac{u+v}{uv}$ и $4q=\frac{4}{uv}$ $\Rightarrow$

$u+v=4 \Rightarrow$

$-3p=4$ (по (2))

$p=-\frac{4}{3}$.

Т.к q и p взаимообратные $\Rightarrow$

$q=-\frac{3}{4}$

Ответ: $p=-1\frac{1}{3}$; $q=-\frac{3}{4}$.

N5

$10+7+6+6+3+3=35$ очков набрали за все игры.

$\frac{6\cdot 5}{2}=15$ игр было сыграно

$15\cdot 2(1+1)=30$ очков можно было набрать за все игры, если они вничью

Максимальное за победу 10, минимальное - 2 ($\frac{10}{5}=2$),

~~на~~ но 2 очка быть не может

Т.к. за ~~нич~~ игру с ничьей дается 2 очка $\Rightarrow$

за победу дается нечетное, т.к $35:2$

продолжение на 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	0	4	8	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

„1" команда – 2 победы, 1 ничья

„2" команда – 2 победы, 1 ничьи

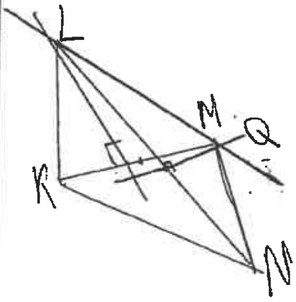
„3" команда – 2 победы

„4" ком. → 2 победы

„5" ком. – 3 ничьи

„6" ком – 3 ничьи

М 3



~~[illegible]~~ перпендикулярны по методу точного построения

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	0	2	1	4	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	6	20	2	20	68

N1

$2(0,8a+1,3b)=2(a+b)$

$0,2a=0,3b$

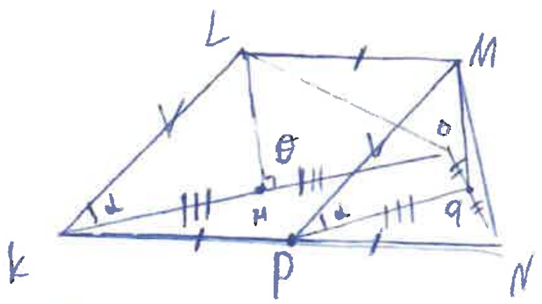
$a=1,5b \qquad 2(a+b)=5b$

$2(1,3a+0,8b)=5,5b$

$\frac{5,5\cancel{b}}{5\cancel{b}}=1\frac{1}{10}$

Ответ: увеличится в $1\frac{1}{10}$

N3



Q - середина ON, P - середина KN, H - середина OK

PQ - сред. линия в $\triangle KON$, $PQ=KH=OH$

$LM=PK$ и $LM \parallel KN \Rightarrow KLMP$ - параллелограмм, $KL=PM$

$KH \parallel PQ$ (как сред. линия), $KL \parallel PM \Rightarrow$ ~~∠LMKH~~ $\angle LKH=\angle MPQ$

$\triangle LKH=MPQ$ (2 стороны и угол между), $\angle LHK=90°=\angle PQM$, т.к (как медиана и высота в р/б $\triangle$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Количество очков команды Бельчата, меньше среднего кол-ва.

Всего: $\frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$ Среднее: $\frac{(n-1)(n)}{n} = n-1$

Если это не так, тогда:

1) Бельчата набрали больше $n-1$, тогда найдется команда набравшая меньше среднего, т.е. $< n-1$, но Бельчата последние

2) Бельчата набрали ровно $n-1$. Тогда либо все набрали $n-1$, либо ~~од~~ хотя бы одна больше и хотя бы одна меньше.

Но эти случаи противоречат условию, т.к. бельчата последние, а находятся другие команды с меньшим кол-вом очков.

Допустим, команд меньше 6 ($n < 6$), тогда $n \leq 5$

Бельчата набрали максимум $n-2$ очка $\Rightarrow$ всего 3 $\Rightarrow$ была всего 1 победа $\Rightarrow$ остальные команды вообще не выигрывали, но Бельчата сыграли 3 раза, 1 раз выиграли, 1 раз вничью, а оставшуюся партию они не могли проиграть (никто кроме них не выигрывал) и не могли сыграть результативно, т.к. всего 3 очка у них, ~~но~~ которые они уже набрали $\Rightarrow$ противоречие.

Пример на $n=6$.

номера команд	1	2	3	4	5	6	
1	x	1	1	1	1	2	6
2	1	x	1	0	1	2	5
3	1	1	x	~~0~~1	0	2	5
4	1	2	1	x	1	0	5
5	1	1	2	1	x	0	5
6	0	0	0	0	2	2	x	4

Бельчата под номером 6

Ответ: 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	2	0	2	1	4	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N4

Ответ: 230

221 222 223 226 228 230 225

N2

x^2+ux-v $\quad$ x^2+px-q

$\begin{cases} p+q=-u \\ pq=-v \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} u+v=-p \\ uv=-q \end{cases}$

$\begin{cases} u+v+uv=-u \\ (u+v)u\cancel{v}=-\cancel{v} \end{cases}$

$\begin{cases} v(u+1)=-2u \Rightarrow v=-\frac{2u}{u+1} \\ u^2-\frac{2u^2}{u+1}=-1 \end{cases}$

$u^3+u^2-2u^2=-1$

$u^2(u-1)=-1$

$u^2(u-1)+1=0$

$D=0-4u+4$

$u_1=\frac{+\sqrt{-4u+4}}{2u-2}$ $\quad$ $u_2=\frac{-\sqrt{-4u+4}}{2u-2}$

Лист 03 из 03

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

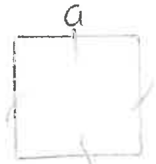
Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 5 3 1 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1 Решение: да существует квадрат 4×4 из сторон прибора

a



0б

20б

1	2	3	4	5	Σ
0	18	0	~~2~~ 20	20	~~4~~ 58

N2 Задача про прямоугольный параллелепипед. Причем тут квадрат? Решение неверное, продвижение отсутствуют.

Решение

$x^2+3px+p=0 \quad a=1 \quad b=3p \quad c=p$

$\begin{cases} u+v=-3p \\ uv=p \end{cases}$ (1)

$x^2-4qx+q=0$

$\begin{cases} \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=4q \\ \frac{1}{vu}=q \end{cases}$

(1) $u+v=-3vu=-3p$

(2) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{4}{uv}=4q$

$\frac{u+v}{uv}=\frac{4}{uv}$, где $u\neq0$, $v\neq0$, т.к. есть корни $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$

$u+v=4$

(1) $4=-3p \Rightarrow p=-1\frac{1}{3}$

$uv=-1\frac{1}{3}$

$\frac{1}{uv}=(uv)^{-1}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}=-\frac{3}{4}=q$

Ответ: $p=-\frac{4}{3} \quad q=-\frac{3}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 Решение: Пусть задуманы числа $x; y$ и $a; b$, тогда по условию

$$\begin{cases} x+y=100 \\ a+b=100 \end{cases}$$

Нам нужно ~~найти~~ узнать может ли

$xy+ab=1001$

$x(100-x)+a(100-a)=1001$

$100x+100a-x^2-a^2=1001$

$100(x+a)-(x^2+a^2)=1001 \Rightarrow x^2+a^2=\dots99$, т.к. $100(x+a)=\dots00$

Узнаем сумма квадратов каких чисел даёт 9 на конце это $5^2+2^2=\dots9$, $5^2+8^2=\dots9$, $7^2+10^2=\dots9$, $10^2+3^2=\dots9$

Рассмотрим варианты с 5^2, тогда заметим, что любое число оканчивающееся на 5 возведённое в квадрат оканчивается на $25=x^2$. $y^2=(99-25)=\dots74$. Заметим что ~~и~~ возводя во 2 степень число $\dots2$, то в разряде десятков всегда складываются одинаковые цифры, но тогда получаются чётные цифры, а 7 - нечётн. Например

$$\begin{array}{r} \times\ 32 \\ 32 \\ \hline 64 \\ 96\ \\ \hline 1024 \end{array}$$

Рассмотрим ситуацию уже с $(\dots8)^2$. Заметим что если мы переберём все двузначн. числа оканчив. на 8, то минуз. нам на что они все оканчив и если у ведущих не окажется ...74, то вариант с $(\dots5)^2$ не подходит.

$8^2=64$, $18^2=324$, $28^2=784$, $38^2=1444$, $48^2=2304$, $58^2=3364$, $68^2=4624$, $78^2=6084$, $88^2=7744$, $98^2=9604 \Rightarrow$ не подходит.

Рассмотрим вариант ситуацию с $(\dots10)^2+(\dots3)^2$

Она аналогична ситуации с 2 и 5, но в этот раз нужно получить 99, но ~~пере~~ складывая одинаковые числа нечётн не может получиться $\Rightarrow$ Рассматриваем вариант с $(\dots10)^2+(\dots7)^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	5	3	1	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Поступим аналогично с 8, переберём все двузначные числа с ...7

$7^2=49$ $27^2=729$ $47^2=2209$ $67^2=4489$

$17^2=289$ $37^2=1369$ $57^2=3249$ $77^2=5929$

$87^2=7569$ $97^2=9409$ => такая ситуация невозможно => нет, не может сумма быть 1001

Ответ: нет, не может

№5 Решение:

Пусть k-очков дают за победу, n-кол-во победных матчей, т.е. где ~~хотя бы~~ одна сторона выиграла. Составим уравнение:

$kn+2(15-n)=35$, 35-это всего очков, т.е.

$10+7+6\cdot 2+3\cdot 2=35$

$kn+30-2n=35$

$n(k-2)=5$ Всего матчей было: $\frac{6\cdot 5+1\cdot 5}{2}$... $=15$

~~=> 1 ≤ n ≤ 15 Переберём, пусть~~

~~n=1, n 0~~

~~k-2=5~~

~~k=7~~

$4\leq n<15$, т.к 6, 7, 10, 6 очков нельзя набрать только ничьями, т.к $5\cdot 1=5$, $5<6$ => $n\geq 4$

~~при n=4~~

~~k-2=1,25~~

~~k=3,25, но это невозможно, т.к везде целое число очков, а с k=3,25 нужно как минимум 4 выигранных игры, и еще чтоб у др. тоже было целое их (?) должно быть 4, но их всего 4 => нельзя~~

~~при n=5~~

~~k-2=1~~

~~k=3~~

Лист 3 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 3 | / | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пример

	1	2	3	4	5	6
1		2,5:0	2,5:0	2,5:0	2,5:0	0:2,5
2	0:2,5		1:1	1:1	0:2,5	1:1
3	0:2,5	1:1		1:1	1:1	0:2,5
4	0:2,5	1:1	1:1		2,5:0	2,5:0
5	0:2,5	2,5:0	1:1	0:2,5		2,5:0
6	2,5:0	1:1	2,5:0	0:2,5	0:2,5	

Пусть $n=14$, то $k=2\frac{5}{14}$, но заметим что все дробн. числа в знаменателе, которых числа не равны 10; 8; 4; 5; 2; 1 имеют не сокращающиеся множители в числителе поэтому надо использовать все выигранные партии, чтобы получить целое число. => Пусть $n=10$, то $k=2,5$, но тогда всё сходится

Ответ: 2,5

№3.

Решение: Н. Заметим, что если $KP \parallel NQ$, то $KPMR$, либо параллелограмм, либо трапеция +

решения нет, — продвижение тоже

0б

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	7	9	6	2	2	2

Адрес площадки проведения ______________ Шифр

Вариант № ________

Фамилия МАГОМЕДОВА

Имя КАРИНА

Отчество АРСЛАНОВНА

Дата рождения 25.12.2007 Класс 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 листах Дата выполнения работы 12.03.2022

Номер телефона 89124315996 Подпись ______

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______

М	А	0	0	0	1	7	9	6	2	2	2

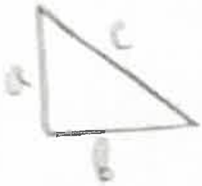
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	0	20	12	8	60

№1

Решение



$\frac{ab}{4} = c$

1) по th. Пифагора:

$a^2 + b^2 = c^2$

2) $S = \frac{a \cdot b}{2}$ || $\frac{1}{2}S = \frac{ab}{4}$

3) Если $c = \frac{ab}{4}$, то:

$\begin{cases} a^2+b^2 = c^2 \\ c = \frac{ab}{4} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2 = \left(\frac{ab}{4}\right)^2$

$a^2+b^2 = \frac{a^2b^2}{16}$

$a^2 - \frac{a^2b^2}{16} + b^2 = 0$

3б

4) Рассмотрим на примере равноб. прям. треуг. $a = b$

5) $a^2 - \frac{a^4}{16} + a^2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - \frac{a^4}{16} = 0$

$2 - \frac{a^2}{16} = 0$

$32 = a^2$

$a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = b$

6) $c = \sqrt{2(4\sqrt{2})^2} = 8$

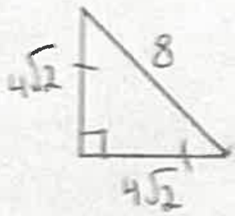
+

7) Проверим

$\frac{S}{2} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{4} = \frac{32}{4} = 8$

Ответ: может.

пример равноб. треуг. с катетами $4\sqrt{2}$.



№2

Дано

$px^2+qx+r=0$

имеет 2 корня

Док-ть

$3px^2+2(p+q)x+(q+r)$

имеет два корня

Док-во

1) $3px^2+2(p+q)x+(q+r)=0$

$3px^2+2px+2qx+q+r=0$

группируем

$x(3px+2q)+2px+q+r=0$

т.к. $3px+2q=2px+q+px+q$, то

$x(2px+q)+(2px+q)+px^2+xq+r=0$

$(2px+q)(x+1)+px^2+xq+r=0$

2) $px^2+xq+r=0$ – имеет два корня (условие)

$(2px+q)(x+1)=2px^2+2px+qx+q$ – квадратное $\Rightarrow$ имеет два корня

$\Rightarrow$ но так как исходное выражение квадратное корни совпадут и получится 2 корня.

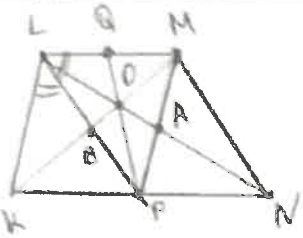
ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 | 6 | 2 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Док-ть
$2PQ = LN$

N3

Док-во

1) $\angle MLP = \angle LPK$ (накр. леж.), LP - бис-са, P - середина $\Rightarrow \triangle KLP$ - р/б $\Rightarrow LK = KP = PN = LM$

2) Проведем MP. $LM = KP$, $LM \parallel KB$ $\Rightarrow KLMP$ - парал-м (2 стороны равны и $\parallel$) $\Rightarrow KL = MP$ (св-во) $\Rightarrow KLMP$ - ромб

3) $LMNP$ - парал-м ($LM = PN$, $LM \parallel PN$)

4) По св-ву $\parallel$ диагонали пересечением делятся пополам $\Rightarrow LB = BP$ (диагонали парал-мов), $MA = PA$

5) $\triangle LMP$

$QL = QM$ (условие), $LB = BP$, $MA = PA$ $\Rightarrow PQ; MB; AL$ - медианы $\Rightarrow$ O - общая точка (медианы пересекаются в 1 точке в отношении 2 к 1)

6) По св-ву диагоналей ромба $KLMP$: $\angle LBK = 90° = \angle LBO$ (диагонали $\perp$)

7) $\triangle LOP$

OB - высота, $LB = BP$ $\Rightarrow \triangle LOP$ - р/б (мед-на = высота) $\Rightarrow LO = OP$

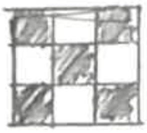
8) Из 5 и 7 $\Rightarrow$ $PQ = 1{,}5OP$ (2:1 от вершины), $LN = 3LO$ (2:1 от вершины), $LO = OP$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2PQ = 3OP = 3LO = LN$

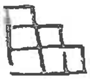
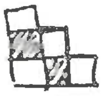
$2PQ = LN$

Ч.Т.Д.

№4

1) Раскрасим квадрат в шахматном порядке на белые и черные клетки, например: 

2) Тогда у каждой такой фигуры  будет два варианта:  или 

3) У такой фигуры :  (А) или  (Б)

4) При размещении 333 фигур вариантов А и Б будет неодинаковое количество (333 не делится на 2)

⇓

в оставшейся части будет разное число  и  квадратов

⇓

нельзя разбить на  такие фрагменты

Ответ: не получится

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № МА0001796222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

1) Т.к у победителей 7 очков, то min число игр = 4
3 победы + 1 ничья => min число команд = 5 (4 игры у победителя)

2) Для 5 команд всего ~~8~~ 4+3+2+1=10 игр

3) 10 игр, 2 очка за победу => разыграли всего 20 очков

4) всего очков 20, очки у призеров 7+5+3=15 => 5 очков вместе у 4 и 5 команды

5) Возможные варианты:

	№4	№5	
1	5	0	– нет, тк 5 > 3
2	4	1	– нет, тк 4 > 3
3	3	2	← подходит (тк команда №4 проиграла из-за разницы очков)

6) Если команд 6 и более:
⇓
матчей 15 и более
⇓
30 и более очков => у остальных команд очков столько же или больше => противоречие условию

Ответ: 2 очка

Лист 5 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	6	5	7	1	2	2

Новороссийск

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Буркин

Имя Юрий

Отчество Владимирович

Дата рождения 12.01.2008 **Класс** 8

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.2022

Номер телефона +79385050607 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	5	7	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

Ответ: да, существует. Например: со сторонами $6\times6\times6$. $6^3 = 216 = 6^2+6^2+6^2+6^2+6^2+6^2$.

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	20	20	98

№ 2

По теореме Виета:

$x_1x_2 = q$

$x_1+x_2 = -p$

$(x_1+3)(x_2+3) = -q$

$x_1+3+x_2+3 = 2p$

$\Downarrow$

$2p = x_1+3+x_2+3 = (x_1+x_2)+6 = 6-p \Rightarrow 3p = 6 \Rightarrow p = 2$

$-q = (x_1+3)(x_2+3) = x_1x_2+3x_1+3x_2+9 = q+3(x_1+x_2)+9 = q+3(-p)+9 = q-6+9 = q+3 \Rightarrow 2q = -3 \Rightarrow q = -1,5$

Ответ: $p=2$; $q=-1,5$.

№ 3

Пусть Q_2 — середина KM, P_2 — середина LN, C — пересечение KM и LN, $\angle MKQ = \alpha$, $\angle LNK = \beta$, тогда:

$KQ_2 = MQ_2$; $QQ_2 \perp KM \Rightarrow KQ = MQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KMQ = \angle MKQ = \alpha \Rightarrow \angle KQM = 180° - 2\alpha$

$LP_2 = NP_2$; $PP_2 \perp LN \Rightarrow LP = NP \Rightarrow \angle NLP =$

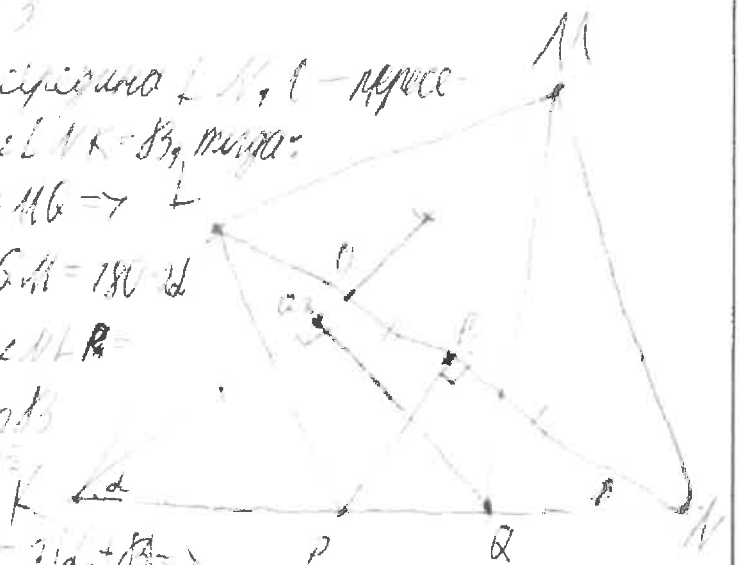
$= \angle LNP = \beta \Rightarrow \angle LPN = 180° - 2\beta$

$LP \parallel MQ \Rightarrow \angle MQK + \angle LPN = 180°$

$= 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 360° - 2(\alpha+\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(\alpha+\beta) = 180° \Rightarrow \alpha+\beta = 90° \Rightarrow \angle KCN = 180° - \angle CLN - \angle CNK =$

$= 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha+\beta) = 180° - 90° = 90° \Rightarrow LN \perp KM$ ч.т.д.



Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 5 7 1 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа ⇨

№ 7

~~Пусть~~ Если среди $S_1, S_2 \dots S_{10}$ нет 2, тогда: заметим что $S_1 = $ I число, $S_2 = S_1 + $ II число; $S_3 = S_2 + $ III число... $S_{10} = S_9 + $ X число. Также заметим что к чётному прибавляя нечётное число чётность меняется, у нас 5 нечётных чисел => среди чисел $S_1, S_2 \dots S_{10}$ есть хотя бы $\frac{5-1}{2} = 2$ чётных числа => нечётных максимум 8 => простых максимум 8, но $S_{10} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ нечётное, но не простое, значит простых чисел максимум 7. Если среди чисел $S_1, S_2 \dots S_{10}$ есть 2, то тогда $S_1 = 2$, т.к. $S_{10} > S_9 > S_8 \dots > S_2 \geq 1+2 = 3 > 2$, тогда у I число $= 2$, и тогда проведём аналогичные рассуждения для чисел $S_2, S_3 \dots S_{10}$ (аналогичные рассуждениям про числа $S_1, S_2 \dots S_{10}$): у нас так же остаётся так же 5 нечётных чисел => среди $S_2, S_3 \dots S_{10}$ максимум 7 простых, но $S_{10} = 55$ нечётное и не простое => максимум среди чисел $S_1, S_2 \dots S_{10}$ максимум 7 простых, т.к. $S_1 = 2$ — простое.

Ответ: 7. Пример: 2, 1, 4, 6, 10, 8, 3, 7, 5, 9; $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 7$, $S_4 = 13$, $S_5 = 23$, $S_6 = 31$, $S_7 = 34$, $S_8 = 41$, $S_9 = 46$, $S_{10} = 55$. $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8$ — простые.

№ 5

* Заметим что всего игр было $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, а всего очков $6+7+8+9+10+12 = 52$. Заметим что ~~за победу~~ дают $x > 3$ очков, т.к. если $x \leq 3$ => сумма очков ≤ 45, а она равна 52, противоречие. Пусть за победу дают x очков, тогда:

Заметим что команда набравшая 6 очков хотя бы один раз выиграла, т.к. в противном случае она набрала ≤ 5 очков, но она выиграла не более 1 раза, т.к. $6 = 2 \cdot 3 < 2x$, значит $6 = x + 1 \cdot a$ (где a число ничьей, b — проигрышей) => x целое; $x \leq 6$ => x — 4, 5 или 6. Изначально все игры сыграны вничью, и когда мы последовательно заменяем игру с ничьей на не ничейную игру мы прибавляем $x - 2$ очков. У нас изначально ~~[illegible]~~ 30 очков, нужно 52, значит мы прибавили $52 - 30 = 22$ очка => $22 \vdots x - 2$. Но $22 \not\vdots 3, 4$ => $x \neq 5, 6$ => $x = 4$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

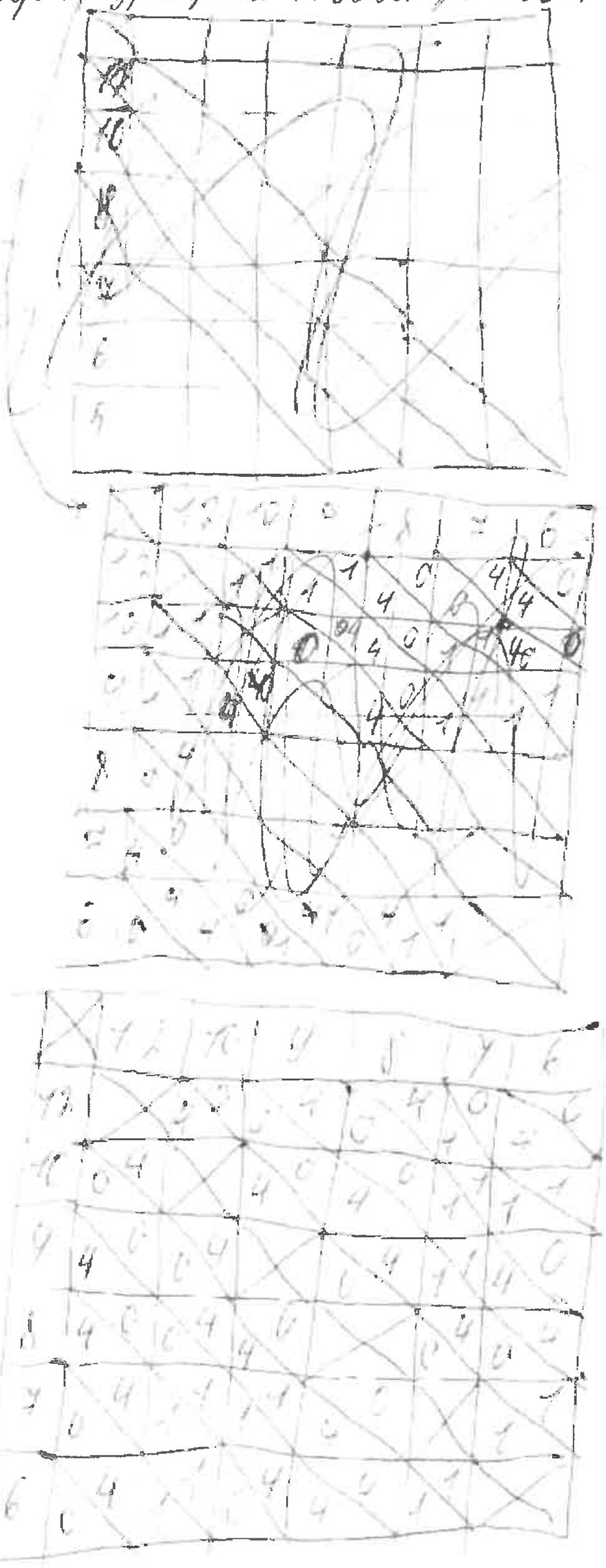
Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	6	5	7	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: 4. Пример: турнирная таблица очков.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Э ✓

КГУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	6	6	5	3	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Маборов

Имя Владимир

Отчество Алексеевич.

Дата рождения 28.04.2007 **Класс** 8

Предмет Математика

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 89176702405 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	6	5	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	2	6	20	20	68

№5

Ответ: 4 очка

Решение:

$12+10+9+8+7+6=52$ (очка) Общее число очков команд.

Кол-во очков за победу не может быть нецелым. Разберемся почему. Т.к. команды набрали по целому числу очков, а за ничью давали по 1 очку, то за победы они получили целое число очков.

Команды сыграли по 5 игр каждая (т.к. каждая играла с каждой по разу. Предположим, что за победу начисляли макс. возможное число очков - 6 (т.к. минимально было набрано среди команд 6 очков). Тогда команда, набравшая 12 очков, обязательно должна была выиграть 2 раза (т.к. сыграли по 5 игр, а за ничью дают 1 балл). То есть кол-во побед у разных команд будет хотя бы в 1 случаях различным. Кол-во побед - неодинаковое число для каждой команды, а число очков, полученных за победу каждой командой, - целое. И мы не можем подобрать такое нецелое число, чтобы при его умножении на различные целые числа, получалось целое число (~~у нас~~ каждая команда сыграла по 5 игр.)

Мы выяснили, что число очков за победу не может быть нецелым.

Выдан доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 6 6 5 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Предположим, что за победу начислялось 2 очка

$\frac{5\cdot 6}{2}=15$ (игр) было всего. Т.к. за ничью даётся 1 очко обеим командам, то в общий счёт идёт 2 очка ~~но~~ Значит, число очков за победу и за ничью, идущих в общий счёт равно

НО $15\cdot 2\neq 52$, что противоречит

Предположим, за победу давали 3 очка. x - игр было сыграно в ничью.

Получаем, что $(15-x)\cdot 3+2x=52$.

$45-3x+2x=52$.

$-x=7$

$x=-7$ — говорит о том, что было сыграно -7 игр в ничью. Тоже не подходит.

Предположим, за победу давали 4 очка. x-игр, сыграно в ничью

Получаем $(15-x)\cdot 4+2x=52$

$(15-x)\cdot 2+x=\cancel{52}\ 26 \Leftrightarrow 30-2x+x=\cancel{52}\ 26 \Leftrightarrow$

$x=30-26=4$ -игр сыграно в ничью

Этот вариант нам подходит

Но продолжим дальше

$\rceil$ за победу $+5$ очков. x-игр, сыграно в ничью.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000165322

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(15-x)\cdot 5+2x=52.$

$75-5x+2x=52$

$75-3x=52 \Rightarrow 3x=75-52=23 \Rightarrow x=\frac{23}{3}$ (число ничьих не может быть не целым

$\exists$ за победу + 6 очков, x-шт в ничью.

$(15-x)\cdot 6+2x=52.$

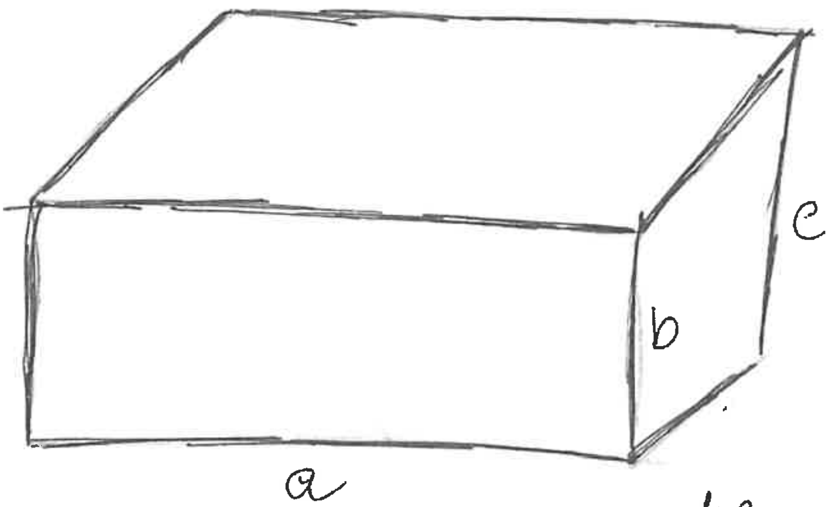
$45-3x+\cancel{2x}\,x=26$

$45-2x=26 \Rightarrow 2x=45-26=19 \Rightarrow x=\frac{19}{2}$ (число ничьих не может быть нечётным).

№1

Ответ: существует

Решение:



$a=6 \quad abc=108$

$b=6 \quad ac+bc+ab=108.$

$c=6.$

$abc=2(ac+bc+ab)$

$\frac{abc}{2}=ac+bc+ab.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00016653 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$x^2+px+Q=0$ $\quad D=p^2-4Q$

$x_1=\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}$

$x_2=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}$

$x^2-2px-Q=0$

$D=4p^2+4Q$

$x_1=\frac{2P-\sqrt{4P^2+4Q}}{2}$

$x_2=\frac{2P+\sqrt{4P^2+4Q}}{2}$

$\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}+3=\frac{2P-\sqrt{4P^2+4Q}}{2}$

$-P-\sqrt{P^2-4Q}+6=2P-\sqrt{4P^2+4Q}$

$-2P-P+6=\sqrt{P^2-4Q}-\sqrt{4P^2+4Q}$

$6-3P$ $\cancel{-3(P+2)}=\sqrt{(P-2\sqrt{Q})(P+2\sqrt{Q})}-\sqrt{4(P^2+Q)}$

$\cancel{6}3(2-P)=\sqrt{(P-2\sqrt{Q})(P+2\sqrt{Q})}-\sqrt{4(P^2+Q)}$

$\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}+3=\frac{2P+\sqrt{4P^2+4Q}}{2}$

$-P+\sqrt{P^2-4Q}+6=2P+\sqrt{4P^2+4Q}$

$6-3P=\sqrt{4P^2+4Q}-\sqrt{P^2-4Q}$

$\sqrt{4P^2+4Q}-\sqrt{P^2-4Q}=\sqrt{P^2-4Q}-\sqrt{4P^2+4Q}$

$2\sqrt{4P^2+4Q}=2\sqrt{P^2-4Q}$

$\sqrt{4P^2+4Q}=\sqrt{P^2-4Q} \Rightarrow 4P^2+4Q=P^2-4Q \Rightarrow 3P^2=-8Q.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00166 5322

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$8Q = -3P^2$

$Q = -\frac{3}{8}P^2$

$3P^2 = -8Q$

$P^2 = -\frac{8}{3}Q \quad \Rightarrow P = \sqrt{-2\frac{2}{3}Q}.$

(P = ~~√ / / /~~ $-\sqrt{\quad}$)

№4.

Ответ: 7.

Решение:

$1+2+3+4+5\ldots+10 = 55 \Rightarrow S_{10} = 55$ – непростое.

Значит простых сумм может быть ≤ 9.

$2 \overset{1}{\frown} 3 \overset{2}{\frown} 5 \overset{2}{\frown} 7 \overset{4}{\frown} 11 \overset{2}{\frown} 13 \overset{4}{\frown} 17 \overset{2}{\frown} 19$ и т.д.

Заметим, что ~~между про~~ разность любых двух простых чисел – чётная (кроме 2 и 3. $3-2=1$)

Мы имеем чётные числа: 2, 4, 6, 8, 10 и нечётные числа: 1, 3, 5, 7, 9. Единицу мы будем использовать для получения 3. (прост. числа.). Чтобы получить 9 простых чисел, нам нужно, чтобы каждый раз сумма изменялась на чёт число (кр. 2 и 3, где достаточно 1). Но тогда у нас

Выдан доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ M A 0 0 0 1 6 6 5 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

останутся числа 5, 7, 9, 3, которые нечётные и могут дать чётное только при сложении $\Rightarrow$ ~~что~~ У нас ещё на 2 меньше простых сумм, а значит максимально их может быть 7.

Например: 2146108 5793 или 2173649510.

Начинаем мы всегда с 21, чтобы получить макс. число простых чисел

№3.

Дано:

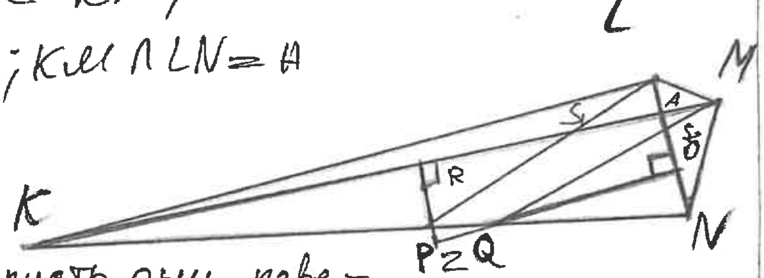
Выпуклый четырёхугольник KLMN.

$PR \perp KM$; $KR = RM$; $P \in KN$;

$OQ \perp LN$; $ON = LO$; $Q \in KN$;

$P \in KQ$; $PL \parallel QM$; $KM \cap LN = A$

Д-ть: $KM \perp LN$



Решение:

Продолжим RP и OQ, пусть они пересекаются в т. Z.

В чет. ~~Р~~ZRAO: $\angle ZRA = 90^\circ$ (т.к $PR \perp AK$); $\angle ZOA = 90^\circ$ (т.к. $QO \perp LN$); т.к. $\angle ZRA$ и $\angle ZOA$ - противолежащие в чет. ZRAO, то чет ZRAO - прямоугольник $\Rightarrow$ $\angle RAO = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $KM \perp LN$.

Проведём PM и QL $\Rightarrow$ $\triangle KPM$: PR - медиана и выс $\Rightarrow$ $\triangle KPM$-равноб $\Rightarrow$ $\angle PKM = \angle PMK$; $KP = PM$; $\triangle LQN$: QO - медиана и выс $\Rightarrow$ $\triangle LQN$-равноб $\Rightarrow$ $\angle QLN = \angle QNL$; $QN = QL$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ MA00016653222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle AMQ = \angle$

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ЛЕНИНА 16

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	5	3	1	9	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ВЕЛИЖАНИН

Имя Илья

Отчество Олегович

Дата рождения 02.08.2007 **Класс** 8

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 89923108525 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 3 | 1 | 9 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$x^2+px+q=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1\cdot x_2 = q \\ x_1+x_2=-p \end{cases}$ (по т. Виета)

$x^2-2px-q=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1\cdot x_2 = -q \\ x_1+x_2=2p \end{cases}$ (по т. Виета)

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	20	2	80

30

$+\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1+3+x_2+3=2p \end{cases}$

$\begin{cases} 2x_1+2x_2+6=p \\ 2(x_1+x_2+3)=p \Rightarrow \cancel{x_1+x_2+3=\frac{p}{2}} \end{cases}$

$2(3-p)=p$

$6=3p$

$p=2$

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=q \\ (x_1+3)(x_2+3)=-q \end{cases}$

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=q \\ x_1\cdot x_2+3x_1+3x_2+9=-q \end{cases}$

$q+3x_1+3x_2+9=-q$

$3(x_1+x_2+3)=-2q$

$3(3-p)=-2q$

$3=-2q$

$q=-1{,}5$

Ответ: $p=2$; $q=-1{,}5$

№1

$V=a\cdot b\cdot c$ (a,b,c - стороны параллелепипеда)

$S_{пов.}=2(ab+bc+ac)$

Пусть $a=b=c \Rightarrow V=a^3$; $S_{пов}=6a^2$, ~~$a\neq 0$~~ $a>0$.

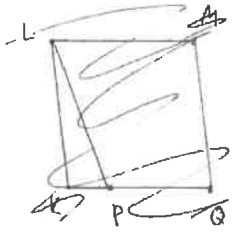
$a^3=6a^2$

$a^2(a-6)=0$

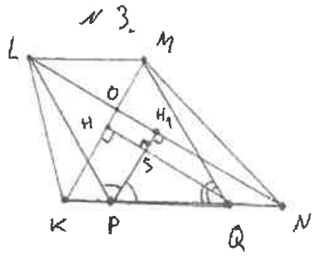
$a_1=0$; $a_2=6$

$a\neq 0$ $\quad a=6$

Ответ: да, существует ($6\times6\times6$)



№3



Дано: $LP \parallel MQ$; PH_1, QH_2 - сер. перп.

Док-ть: $LN \perp KM$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00015319 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Док-во: 1) Рассмотрим ΔKMQ:

QH - сер. пер. $\Rightarrow QH$ - мед., выс. $\Rightarrow \Delta KMQ$ р/б $\Rightarrow QH$ - бис.
($\angle KQH = \angle MQH$)

2) Рассмотрим ΔLPN:

PH_1 - сер. пер. $\Rightarrow PH_1$ - мед., выс $\Rightarrow \Delta LPN$ р/б $\Rightarrow PH_1$ - бис.
($\angle LPH_1 = \angle NPH_1$)

3) $LP \parallel MQ$ (по усл.) $\Rightarrow \angle LPQ + \angle MQP = 180°$ (как одн. $\angle$ при $LP \parallel MQ$ и сек. PQ)

4) $\angle LPQ = \angle LPH_1 + \angle NPH_1$ ($\angle LPH_1 = \angle NPH_1$ (п. 2))

$\angle MQP = \angle KQH + \angle MQH$ ($\angle KQH = \angle MQH$ (п. 1))

$\Downarrow$

$180° = \angle LPQ + \angle MQP = 2\angle \cancel{LPH_1}\, NPH_1 + 2\angle KQH$

$2(\angle NPH_1 + \angle KQH) = 180°$

$\angle NPH_1 + \angle KQH = 90°$

5) ~~Рассмотрим~~ ΔPSQ:

$\angle QPS + \angle SQP = 90°$ (п. 4) $\Rightarrow \angle PSQ = 180° - 90° = 90°$ (по сум. $\angle \Delta$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HSH_1 = \cancel{90°} = \angle PSQ = 90°$ (как верт.)

6) Рассмотрим HOH_1S:

$\left.\begin{array}{l} \angle OHS = 90° \text{ (}\cancel{\text{сер.}}\text{ QH-сер. пер.)} \\ \angle OH_1S = 90° \text{ (PH}_1\text{-сер. пер.)} \\ \angle HSH_1 = 90° \text{ (п. 5)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle HOH_1 = 360° - 3\cdot 90° = 90°$ (по сум. $\angle$ четырёхуг.) $\Rightarrow LN \perp KM$

ч.т.д.

№5

Допустим, что команда ~~набравшая~~ 6 очков, сыграла все матчи в ничью или проиграла $\Rightarrow$ максимальное кол-во балов 5, но она набрала 6 $\Rightarrow$ как минимум 1 матч она выиграла $\Rightarrow$ За победу дают < 6 балов. Допустим, что команда с 12 балами выиграла все матчи $\Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = 2,4 \Rightarrow$ за победу дают $\geq 2,4$ балов. Заметим, что если кол-во балов за победу нецелое (2,5), то последная команда победила минимум 2 раза, тогда кол-во балов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 5 3 1 9 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

≤ 3, => либо 2,5, либо 3. Всего очков 52, а игр 15 ~~$\frac{37}{15}$ очков, максимум может быть разыграно =>~~

При 2,5 первая команда может выиграть 4 раза, но тогда у неё будет 10 очков и одна игра где можно получить 0; 2,5 и 1 очко => такого не может быть => 3 очка начислялось за победу.

N 4.

Для максимального кол-ва простых чисел, надо складывать неч. с чет. (пр. число - неч., кроме 2 => $S_1 = 2$), второе число неч. => 3-е четн., ~~и т.д.~~ 4-е четн., 5-е четн и т.д. всего чет. чисел 5 => пр. сумм $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ с четн. числами, но неч. + неч. = чет => ~~2 неч.~~ ещё 2 S будут простыми => 8 простых сумм, но $S_{10} = 55$, а 55 : 5 => 7 простых сум - максимум. 2, 1, 4, 6, ~~8~~, 10, 8, 3, 7, 5, 9

+

2, 3 7 13 23

Ответ: 7

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	7	1	3	3	2	2

КГЭУ

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Борисов

Имя Илья

Отчество Александрович

Дата рождения 13.02.07 **Класс** 8

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +79178886353 **Подпись** Бор

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	–	20	8	66

30б

№1. Да существует.

Возьмём все стороны длиной 6

$S_п = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

$P_п = 2 \cdot (6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) = 2 \cdot 108 = 216$

$216 = 216$

№2

Пусть x_1 – 1 корень, x_2 – 2 корень, тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \quad x_1 x_2 = q \\ (x_1+3)+(x_2+3) = 2p \quad (x_1+3)(x_2+3) = -q \end{cases}$$

решим сист уравн

$x_1 + x_2 = -p \quad | \cdot -1$

$(x_1+3)+(x_2+3) = 2p$

$-x_1 - x_2 = p$

$x_1 + x_2 + 6 = 2p$ сложим

$6 = 3p \quad p = 2$

Теперь решим

$x_1 \cdot x_2 = q \quad | \cdot -1 \quad = \quad -x_1 x_2 = -q$ сложим

$x_1 x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9 = -q$

$3x_1 + 3x_2 + 9 = -2q \qquad x_1 + x_2 = -p = -2$

$3 \cdot (-2) + 9 = -2q$

$3 = -2q$

$q = -1{,}5$ Ответ: $p = 2 \quad q = -1{,}5$

Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Мы знаем что все простые число нечётные, кроме 2

Чтобы получилось нечётное, нужно сложить нечётное ч. нечётных чисел и любое число-чётных

Всего ~~ч~~ у нас 5 нечёт и 5 чёт

Последнее ~~число 55 оно не простое~~ если на 10 месте стоит чётное

Если мы возьмем 1 или 3 или 5 нечёт в сумму то число будет нечётное и чётные нам не помешают

Поэтому максимум 3ч+5=8

Но посмотрим на 5 10=55 ~~оно~~ на 10 месте стоит чётное или нечётное, если чётное то мы убираем его

3+4=7 макс

Если нечётное то это 5 нечёт в сумме

2+5=7 макс

Пример:

2 3 7 13 23 31 34 41 46 55

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Пусть x – начисляется за победу
y – количество побед.

За ничью – 2 команды $+1 = +2$ всего игр $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$

Можем составить уравнение на сумму очков

$(15-y)\cdot 2 + xy = 12+10+9+8+7+6 = 52$

$30 - 2y + xy = 52$

$xy - 2y = 22$ $\quad y(x-2) = 22$ $\quad y$ – целое $1 \le y \le 15$

y	x	y	x	y	x
1	24	6	$5\frac{2}{3}$	11	4
2	13	7	$5\frac{1}{7}$	12	$3\frac{5}{6}$
3	$9\frac{1}{3}$	8	4,75	13	$3\frac{9}{13}$
4	7,5	9	$4\frac{4}{9}$	14	$3\frac{4}{7}$
5	6,4	10	4,2	15	$3\frac{7}{15}$

Допустим команда набр 6 очк ни разу не выиграла, тогда максимум они сыграли 5 ничей = 5 очков < 6 противоречие

Любой возможный $x > 3$ значит команда набр 6 очков выиграла ровно 1 раз, за ничью +1 – целое, за пор +0 – целым, значит выигрыш тоже должен быть целым, иначе мы 1 раз прибавляем нецелое и остальные целые x = нецелое, а 6 – целое, подходит только 4, (13, 24 > 6), тогда

6 – 1 выигр 2 ничьи 2 пораж

7 – 1 выигр 3 ничьи 1 пораж.

$2+3 = 5$ ничей

Но при $x = 4$ $y = 11$ тогда ничей $15-11 = 4$

$4 \neq 5$ противоречие, значит быть не могло. Ответ: такое быть не могло.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ул. Ленина д. 16

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	4	8	3	6	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ПАВЛЕНКО

Имя ВЕРОНИКА

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 16.02.2007 **Класс** 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 5.03.2022

Номер телефона 8 922 791 69 07 **Подпись** ПВ

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 4 8 3 6 2 2 |

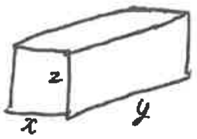
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

1	2	3	4	5	Σ
20	18	20	2	4	64

30



$S_{\square} = a \cdot b$

$S_п = xy \cdot 2 + yz \cdot 2 + x \cdot z \cdot 2$ – площадь поверхности

$l = 4x + 4y + 4z$ – сумма длин всех рёбер

Тогда:

$2xy + 2xz + 2yz = 4x + 4y + 4z$

$2xy + 2xz + 2yz - 4x - 4y - 4z = 0$

$2x(z-2) + 2y(x-2) + 2z(y-2) = 0$

~~Пусть $x=2$, $y=4$, $z=1$~~

~~$2 \cdot 2(1-2) + 2 \cdot 4(2-2) + 2 \cdot 1(4-2) = -4+0+4=0$~~

~~Ответ: существует~~

$x(z-2) + y(x-2) + z(y-2) = 0$

Пусть

$$\begin{cases} 2xy = 4y \\ 2yz = 4x \\ 2xz = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ yz = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ yz = 4 \end{cases}$$

Тогда

1) $\begin{cases} y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ или 3) $\begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

Проверка 1):

$2(4-2) + 1 \cdot (2-2) + 4(1-2) = 4+0-4=0$

Ответ: существует

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2   M A 0 0 0 1 4 8 3 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2

1) $x^2+3px+p$ 2) $x^2-4qx+q$

$\left[\begin{array}{l} x_1=u \\ x_2=v \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{u} \\ x_2=\frac{1}{v} \end{array}\right.$

~~Разложим на множители по т. Виета~~

По т. Виета:

1) $\begin{cases} x_1+x_2=-3p \\ x_1\cdot x_2=p \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2=4q \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$

$\begin{cases} u+v=-3p \\ uv=p \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=4q \\ \frac{1}{uv}=q \end{cases}$

$$\frac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\frac{1}{uv}}=\frac{4q}{q}$$

$$\frac{(v+u)\cdot uv}{u\cdot v}=4$$

$u+v=4 \Rightarrow$ $4=-3p$

$p=-\frac{4}{3}$

$$\frac{1}{uv}=q=\frac{1}{p}=-\frac{1\cdot 3}{4}=-\frac{3}{4}=-0,75$$

Ответ: $p=-\frac{4}{3}$ $q=-\frac{3}{4}=-0,75$

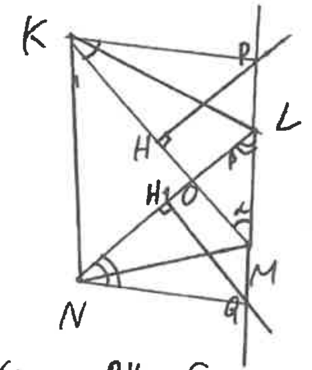
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 4 8 3 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3



KM пересекает LN в точке O

$PH \perp KM$, $KH = MH$

$QH_1 \perp LN$, $NH_1 = LH_1$

1) Проведём KP и ~~NM~~ NQ

(т.к. PH – общ., то $\triangle PHK = \triangle PHM$; QH_1 – общ., $\triangle QH_1L = \triangle QH_1N$) ~~KP ⊥~~ $KP \parallel NQ$ (по условию)

2) т.к. PH – серединный перпендикуляр, то $\triangle KPM$ – равнобедр., и QH_1 – серединн. перпендикуляр, след. $\triangle NQL$ – равнобедр.

3) Поэтому $\angle PMK = \angle PKM$, $\angle$ ~~ML~~ $NLQ = \angle LNQ$

4) пусть $\angle PMK = \alpha$, $\angle LNQ = \beta$

$KP \parallel NQ$, след. $\angle PKN + \angle KNQ = 180^\circ$ при секущей KN.

Тогда $\angle OKN + \angle ONK = 180^\circ - (\alpha + \beta)$,

а $\angle KON = 180^\circ - (\angle OKN + \angle ONK) = 180^\circ - 180^\circ + \alpha + \beta =$
$= \alpha + \beta = \angle LOM$ (как вертикальн.)

Значит $\angle LOM + \angle OLM + \angle LMO = \alpha + \beta + \beta + \alpha =$
$= 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, след. $\alpha + \beta = 90^\circ$,

т.е. $\angle KON = 90^\circ$, след. $KM \perp LN$

ЧТД

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 MA000148 3622

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

по условию:

$a+b=100$

$c+d=100$

$ab+cd=1001$?

Чтобы сумма заканчивалась на 0, нужно, чтобы последние цифры чисел были:

их произведение

1) ...1 и ...9 → ...9

2) ...2 и ...8 → ...6

3) ...3 и ...7 → ...1

4) ...4 и ...6 → ...4

5) ...5 и ...5 → ...5

Значит, чтобы сумма произведений заканчивалась на 1 (число 1001), возможна только одна пара: 2) ...6 и 5) ...5. Но т.к. при умножении таких двузначных чисел произведение получается больше 1001, то одно из чисел a, b, c, d может быть отрицательным.

Ответ: нет

№5

Пусть a – кол-во баллов за победу, x – кол-во побед (суммарное), оно же равно кол-ву проигрышей; y – кол-во „ничья". Тогда суммарное кол-во баллов у всех:

$x\cdot a+2y\cdot 1=10+7+\overset{12}{6\cdot 2}+\overset{6}{3\cdot 2}=35$

$xa+2y=35$

т.к. игроков 6, то общее кол-во партий:

$5+4+3+2+1=15$

$x+y=15$

при этом $a_{min}=2$, т.к. $10:5=2$

$\begin{cases} xa+2y=35 \\ x+y=15 \quad |\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$

$xa-2x+2y-2y=35-30$

$x(a-2)=5$

$x(a-1)+y=20$

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Ленина 16

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	4	3	4	6	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ИВАНОВ

Имя ~~ИР~~ ИВАН

Отчество ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 18.07.2007 **Класс** 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.22

Номер телефона +7 9 ~~32~~ 2 32 45105 **Подпись**

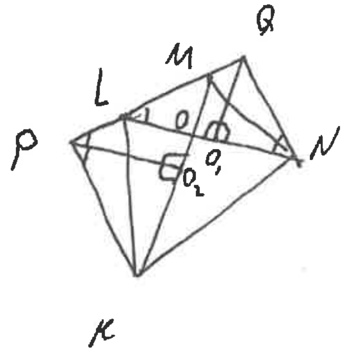
Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 4 3 4 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	Σ
20	8	20	~~16~~ 2	~~12~~ 20	~~76~~ 70



№3

Дано: $KLMN$

PO_2 и O_1Q – серед. перпендик-ры

$KP \parallel NQ$

Док-ть $KM \perp ~~KM~~ LN$

Док-во

PO_2 и QO_1 серед. пер-ры $\Rightarrow PO_2$ и QO_1 высоты и ~~медианы~~ медианы

$\Rightarrow \triangle KPM$ р/б и $\triangle LQN$ р/б $\Rightarrow PO_2$ и QO_1 бис-сы $\Rightarrow$

$\angle KPO_2 = O_2PM \quad \angle LQO_2 = \angle O_1QN$

$KP \parallel NQ \Rightarrow \angle KPQ + \angle PQN = 180$ (одност. углы)

$\left.\begin{array}{l}\angle KPQ + \angle PQN = 180 \\ \angle LQN + \angle QLN + \angle QNL = 180\end{array}\right\} \Rightarrow KPQ = QLN + \angle QNL$

$\left.\begin{array}{l}\angle KPQ = 2\angle KPO_2 \\ \angle QLN = \angle LNQ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle KPO_2 = \angle QLN \Rightarrow \angle QPO_2 = \angle QLN \Rightarrow$

$\Rightarrow PO_2 \parallel LN \Rightarrow \angle PO_2M = \angle LOM = 90° \Rightarrow KM \perp LN$

ч.т.д. ⊕

№4

Пусть ~~может~~ может, тогда

$a + b = 100 \quad x + y = 100$

$ab + xy = 1001$

$a = 100 - b \quad x = 100 - y$

$100b - b^2 + 100y - y^2 = 1001$ (*)

$100(b+y) - (b-y)(b+y) = 1001$ (**)

$(b+y)(100 - b - y) = 1001$

$7 \cdot (100 - 7) \neq 1001$

$11 \cdot (100 - 11) \neq 1001$

$13 \cdot (100 - 13) \neq 1001$

Противоречие, значит, такой суммы нет

$100(b+y) - (b^2+y^2) = 1001$

$$\begin{array}{r|l} 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$7 \cdot 143 = 1001$

$11 \cdot 91 = 1001$

$13 \cdot 77 = 1001$

2 балла

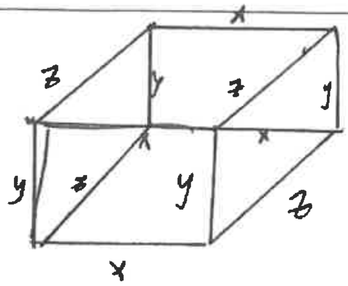
(*) и (**) не равны (**) $\rightarrow 100b + 100y - b^2 + y^2 = 1001$ это не тоже самое, что (*), там $(-y^2)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 4 3 4 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№1

$4x+4y+4z=2xy+2xz+2zy$

$2x+2y+2z=\cancel{2}xy+\cancel{2}xz+\cancel{2}zy$

По нер-ву Коши

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ $x+z\geq 2\sqrt{xz}$ $z+y \geq 2\sqrt{zy}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+2y+2z\geq 2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+2\sqrt{zy})$

$\cancel{2}xy+\cancel{2}xz+\cancel{2}zy = \cancel{2}x+\cancel{2}y+2z \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2}xy+\cancel{2}xz+\cancel{2}zy \geq 2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{zy})$

$xy+xz+zy=2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{zy})$ при $x=y=z \Rightarrow$

$\cancel{x^2+x^2+}3x^2=2\cdot 3x \Rightarrow x=2=y=z$

Аналогично

$2x+2y+2z = 2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+2\sqrt{zy})$ при $x=y=z=2$

Значит, если все ~~сторон~~ ребра равны 2.

Условие выполняется

№2

1) $x^2+3px+p$

$u^2+3pu+p=0$ $v^2+3pv+p=0$

$u(u+3p)+p=0$ $v(v+3p)+p=0$

$u(u+3p)=-p$ $v(v+3p)=-p$

$v(v+3p)=u(u+3p)$

$\frac{v}{u}=\frac{u+3p}{v+3p}$ ✓

$v+3p\neq 0$
$u\neq 0$

3) $\frac{u+3p}{v+3p}=\frac{4+u}{4+v}$ → тут минусы!

2) $x^2-49x+9=0$ ОДЗ $u\neq 0$, $v\neq 0$

$\frac{1}{u^2}-49\frac{1}{u}+9=0$ $\frac{1}{v^2}-49\frac{1}{v}+9=0$

?! $\frac{1}{u^2}-\frac{49u+9u^2}{u^2}=0$ $\frac{1}{v^2}-\frac{49v+9v^2}{v^2}=0$?!

$\frac{1-49u+9u^2}{u^2}=0$ $1-49v+9v^2=0$

$1-49u+9u^2=0$ → откуда + ? $9v(4+v)=1$

$9(4+u)u^2$

$9u(4+u)=1$ $9v(4-v)=1$

$v(4+v)=u(4+u)$

$\frac{v}{u}=\frac{4+u}{4+v}$

с минусами "проблеее"!

$1-49u+9u^2=0$

$1=49u-9u^2$

$1=9u(4-u)$

Лист 2 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00014346 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{4u+12p+uv+3pv}{(v+4)(v+3p)}=\frac{4v+uv+12p+3pu}{(v+4)(v+3p)}$$

$$\frac{4u-4v+3pv-3pu}{(v+4)(v+3p)}=0 \qquad v\neq 4,\ v\neq -3p$$

$$4(u-v)+3p(v-u)=0$$

$$\frac{(u-v)(4-3p)}{\cancel{(v+4)(v+3p)}}=0$$

$$(u-v)(4-3p)=0$$

1) $u=v$ ~~противоречие~~

2) $p=\frac{4}{3}$, а $q=$?

~~подставляем~~

$$\cancel{x^2+4x+\frac{4}{3}=0}$$

$$\cancel{D=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}}$$

$$\cancel{x_1=\frac{-4+\sqrt{\frac{32}{3}}}{2}=\frac{-4+\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}}{2}}$$

1) $D=0$ → чего D? $x^2+3px+p$? почему $D=0$?

$$D=9p^2-4p=0$$

$$p=\frac{4}{9}=p \quad p=0?$$

это случай $u=v$? сказано, что там два корня u и v!

$$x^2+\frac{12}{9}x+\frac{4}{9}=0$$

$$u=v=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{v}=-\frac{3}{2}$$

$$x^2-49x+q=0$$

$$\frac{9}{4}-49\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+q=0$$

$$-\frac{9}{4}+\frac{12}{2}q+q=0$$

$$q=\frac{9}{28}$$

Ответ: $p=\frac{4}{9}$ $\quad q=\frac{9}{28}$

$u+3p$ / $v+3p$ $=\frac{4-u}{4-v}$

$$\frac{(u+3p)(4-v)-(4-u)(v+3p)}{(v+3p)(4-v)}=0$$

$v\neq 4$, $v\neq -3p$

$$\frac{4u-uv+12p-3pv-4v-12p+uv+3pu}{(v+3p)(4-v)}=0$$

$$4u-4v-3pv+3pu=0$$

$$4(u-v)+3p(u-v)=0$$

$$(4+3p)(u-v)=0$$

$p=-4/3$; $u=v$ p найдено неверно!

Итог: Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, но с ошибками!

Вы же нашли $p=\frac{4}{3}$?! Куда оно делось?

Если $p=\frac{4}{9}$: $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=0$

Если $q=\frac{9}{28}$: $x^2-\frac{9}{7}x+\frac{9}{28}=0$

Вы проверяли, что они не подходят?

Лист 3 из 5

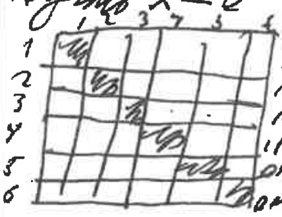
Пусть x кол-во баллов. N5

Заметим, что кол-во победных баллов $X \geq 2$ иначе 1 не получит 10.

Так же 3 и 4 по крайней мере 1 раз надо ~~надо получит~~ победить так как игр 5, если баллов $X \geq 3$ нецелое кол-во они получит уже не могут 3+3=6, ~~значит~~ а максимум тогда будет 6, иначе 3 и 4 получат больше 6 баллов. Тогда

$x \in [2;3) \vee \{4\} \vee \{5\} \vee \{6\}$

1) Пусть $x=6$



1п 4н 0пор.
1п 1н 3пор.
1п 0н 4пор
1п 0н 4пор
0п 3н ~~0н~~ 2пор
0п 3н 2пор

Тогда кол-во побед не равно кол-ву поражений

Противоречие

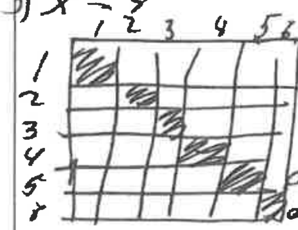
2) $x=5$

2п 0н 3пор
1п 2н 2пор
1п 1н 3пор
1п 1н 3пор
0п 3н 2пор
0п 3н 2пор

Аналогично: кол-во побед не равно кол-ву поражений

Противоречие

3) $x=4$



2п 2н 1пор
1п 3н 1пор
1п 2н 2пор
1п 2н 2пор
0п 3н 2пор
0п 3н 2пор

Аналогично 1 и 2 Противоречие

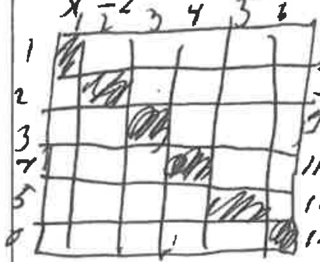
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 1 4 3 4 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

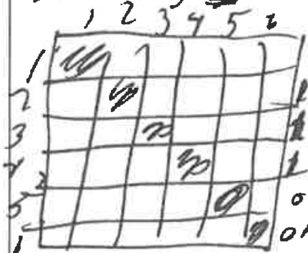
x=2



5п 0н 0пор
3п 3н 1пор
1п 4н 0пор
1п 4н 0пор
1п 3н 2пор
1п 1н 2пор

Аналогично 3 Противоречие

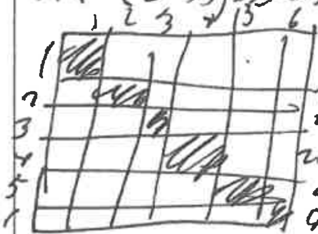
~~x∈(2;3]~~ x=3



3п 1н 1пор
1п 4н 0пор
1п 3н 1пор
1п 3н 1пор
0п 3н 2пор
0п 3н 2пор

Не совпадает кол-во ничей.

~~x∈(2;3)(2;3,5)~~ x=3,5



~~x= 4 поч п~~ 0н 1п
2п 2н 1пор
2п 1н 2пор
2п 1н 2пор
0п 3н 2пор
0п 3н 2пор

Кол-во побед совпадает с кол-вом поражений
кол-во ничей совпадает
Значит за победу давали 3,5 баллов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	8	4	3	3	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Тимофеев

Имя Владимир

Отчество Иванович

Дата рождения 01.10.2006г. **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022г.

Номер телефона 89659127473 **Подпись** ___

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	4	3	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	18	5	20	5	68

№1

пусть $|a^2-3a-6|=x$, где x - простое $(x\geq 0)$, тогда

$$\left[\begin{array}{l} a^2-3a-6=x \ (1) \\ a^2-3a-6=-x \ (2) \end{array}\right.$$

~~1) $a^2-3a-6=x$~~
~~$a^2-3a-6-x=0$~~
~~$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-6-x)=9+24+4x=33+4x$~~
~~$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{D}}{2}$~~
~~$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{33+4x}}{2}$~~

~~2) $a^2-3a-6=-x$~~
~~$a^2-3a-6+x=0$~~
~~$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-6+x)=9+24-4x=33-4x$~~
~~$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{D}}{2}$~~
~~$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{33-4x}}{2}$~~

~~по условию a должно быть целым, значит $3\pm\sqrt{D}$ - должно быть целым и чётным (потому что делим на 2), а значит $\sqrt{D}$ должен быть целым и нечётным, (чтобы $3\pm\sqrt{D}$ было чётным и целым), значит~~

~~1) $\sqrt{33+4x}$ - нечётное и целое~~
~~т.к. $\sqrt{33+4x}$ - нечётное, то и $33+4x$ - нечётное, зн.~~
~~x - чётное, а т.к. x - простое, то подходит только $x=2$, тогда~~
~~$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{33+4\cdot2}}{2}$~~
~~$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$~~
~~целых корней нет.~~

~~2) $\sqrt{33-4x}$ - нечётное и целое~~
~~т.к. $\sqrt{33-4x}$ - нечётное, то и $33-4x$ - нечётное, а значит $4x$ - ...~~

$a^2-3a-6=a(a-3)-6$, числа a и $a-3$ разной чётности, зн. $a(a-3)$ - чётное, а зн. и $a(a-3)-6$ - чётное, а значит и $|a^2-3a-6|=|a(a-3)-6|$ - чётное, а так, как $|a^2-3a-6|$ - простое число и чётное, то вариант только один:

$|a^2-3a-6|=2$

$a^2-3a-6=2$ или $a^2-3a-6=-2$

$a^2-3a-8=0$
$D=(-3)^2-4\cdot(1)\cdot(-8)=9-4\cdot(-8)=33$,
D - нецелый, зн. и a - нецелое
целых корней нет.

$a^2-3a-4=0$
$a^2-4a+a-4=0$
$(a+1)(a-4)=0$
$a=-1$ или $a=4$

Ответ: $a=-1$ или $a=4$

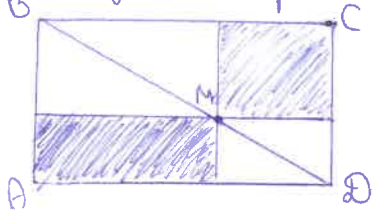
Вариант № 1 М А 0 0 0 1 8 4 3 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

обозначим вершины прямоугольника как A, B, C и D



пусть серыми прямоугольниками будут заштрихованные.

Проведём диагонали BM и DM незакрашенных прямоугольников, эти диагонали делят прямоугольники на 2 треугольника равной площади.
получается что площади фигур ABMD и CDMB - равны (каждая из этих фигур состоит из серого прямоугольника и двух половинок каждого из белых прямоугольников); но с другой стороны равны и площади треугольников ABD и CDB, ($\frac{1}{2} S_{ABCD}$)

а площади фигур ABMD и CDMB представляются как

$\underbrace{\frac{1}{2} S_{ABCD}}_{(S_{\Delta ABD} \text{ или } \Delta CDB)} + S_{\Delta BMD}$ и $\underbrace{\frac{1}{2} S_{ABCD}}_{(S_{\Delta ABD} \text{ или } \Delta CDB)} - S_{\Delta BMD}$, и $\frac{1}{2} S_{ABCD} + S_{\Delta BMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - S_{\Delta BMD}$, зн. $S_{\Delta BMD} = 0$, а значит

точки B M и D - лежат на одной прямой, ~~?~~ а т.к. BD - диагональ, то геометрическим местом точек M являются диагонали прямоугольника ABCD

Ответ: геометрическим местом точек M являются диагонали прямоугольника.

Не доказано, что если $M \notin$ диагонали, то равенство быть не может.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1.

М	А	0	0	0	1	8	4	3	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

пусть x - сумма чисел Алисы, y - произведение чисел Алисы, а z - Сашино число, тогда $\frac{x}{y} = 5\frac{x+z}{yz}$, причём $x, y \in N$; $x > z$

$\frac{xz}{yz} = 5\frac{x+z}{yz}$, y и $z \neq 0$

$xz = 5(x+z)$

$z = \frac{5(x+z)}{x}$

ур-е составлено, но не решено.

$z = 5 + \frac{5z}{x}$, известно, что z - целое, зн. и $5 + \frac{5z}{x}$ - целое, зн.

$\frac{5z}{x}$ - целое   если z - положительное, то $5z \geq x$, а $x > z$, тогда $5z < 5x$

$x \leq 5z < 5x$, $\frac{5z}{x}$ - любое число от $\frac{x}{x}$ до $\frac{4x}{x}$ от 1 до 4.

$z = 5 + \frac{5z}{x}$; $z \in [5+1; 5+4]$, $z \in [6; 9]$

если z - отрицательное (в условии сказано только что оно целое), то

$\frac{5z}{x}$ - целое отрицательное   и $z < x$, $|5z| \geq x$

$5z \leq -x$, тогда

$\frac{5z}{x}$ - любое число от $-\frac{x}{x}$ (-1) и до $-\infty$;

$z = 5 + \frac{5z}{x}$, $z \in [-\infty; 5-1]$, $z \in (-\infty; 4]$

Ответ: если z - положительное, то $z \in [6; 9]$, если z - отрицательное, то $z \in (-\infty; 4]$

Это только необходимые условия

Лист 3 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

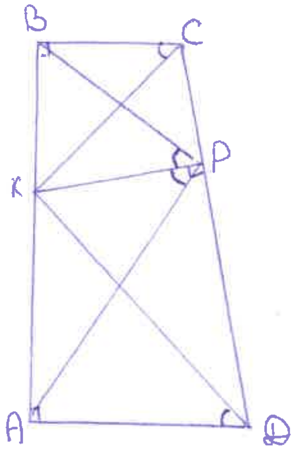
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	4	3	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Дано: $ABCD$ - трапеция
AD и BC - основания
$AD:BC = 3:2$; $K \in AB$
$KA:AB = 3:5$; $P \in CD$, $KP \perp CD$;
$AB \perp BC$ и $AB \perp AD$;

Доказать, что $\angle KPA = \angle KPB$.

Доказательство:

т.к. $\frac{KA}{AB} = \frac{3}{5}$, то $\frac{KB}{AB} = \frac{AB-AK}{AB} = 1 - \frac{AK}{AB} = \frac{2}{5}$

$\frac{AK}{AB} = \frac{3}{5}$, а $\frac{KB}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{3}{2}$; также $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{2}$, и $\angle ABC = \angle DAB = 90°$ (по усл.),

зн. $\triangle KAD \sim \triangle KBC$ по двум сторонам и углу между ними. ($\frac{AK}{KB} = \frac{AD}{BC}$ и $\angle ABC = \angle DAB$),

зн. $\angle KDA = \angle KCB$.

Рассм. четырёхугольник $KBCP$, он вписанный (т.к. $\angle KPC + \angle KBC = 2 \cdot 90° = 180°$), зн. $\angle KPB = \angle KCB$ (как опирающиеся на одну дугу).

Рассм. четырёхугольник $KPDA$, он вписанный (т.к. $\angle KPD + \angle KAD = 2 \cdot 90° = 180°$), зн. $\angle KPA = \angle KDA$ (как опирающиеся на одну дугу).

Из доказанных 3-х утверждений следует, что $\angle KPA = \angle KDA$, а $\angle KPB = \angle KCB$ и $\angle KDA = \angle KCB$, а значит и $\angle KPA = \angle KPB$ (ч.т.д.).

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00018433222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

В этой задаче числа разбиваются на цвета по чётности, синий + красный = красный (как чётный + нечётный = нечётный), а синий · красный = синий (как чётный · нечётный = чётный), следовательно способ раскраски может быть только один, так, чтобы числа чётные - были синими (а нечётные - красными), а число 546 как раз чётное и попадает под эту раскраску. С другой стороны можно покрасить все числа в 1 цвет, тогда ни одно условие нарушаться не будет, но в условии сказано, что покрасили в ДВА цвета, а не в ОДИН, значит такой вариант не подходит., следовательно существует только один способ раскраски, но как это доказать, я так и не придумал.

Ответ: 1 способ.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	8	8	2	6	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ХМЕЛЬНИЦКАЯ

Имя МАРИНА

Отчество БОГДАНОВНА

Дата рождения 27.04.2006 **Класс** 9

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 8-923-331-35-70 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Вариант № 1 МА000188262 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	10	20	5	75

№1.

Если a – чёт, то $a^2-3a-6=a(a-3)-6$ – чёт., т.к. $a(a-3)$ – чёт.
6 – чёт.
чёт. – чёт = чёт.

Если a – нечёт, то $a^2-3a-6=a(a-3)-6$ – чёт, т.к. $a-3$ – чёт, т.е. $a(a-3)$ – чёт.
6 – чёт.
чёт – чёт = чёт.

Единственное чётное простое число $=2$. =>

$\Rightarrow |a^2-3a-6|=2$

$a^2-3a-6=2$
$a^2-3a-8=0$
$D=b^2-4ac=$
$=9+32=41.$
$a_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{3+\sqrt{41}}{2}=1{,}5+\frac{\sqrt{41}}{2}$
$a_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{3-\sqrt{41}}{2}=1{,}5-\frac{\sqrt{41}}{2}$

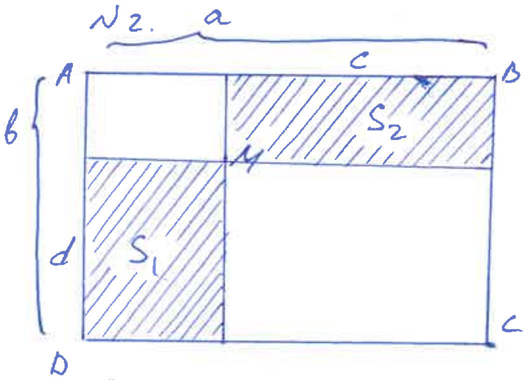
корни не целые =>
=> не явл. решениями исходного уравнения.

или

$-a^2+3a+6=2$
$-a+3a+4=0$
$D=b^2-4ac=9+16=25.$
$a_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3+5}{2}=1.$
$a_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3-5}{2}=-4.$

Ответ: $a_1=1$
$a_2=-4.$

№2.



Дано: $ABCD$ – прям. т. $M\in ABCD$.
$S_1=S_2$.
$AB=a=DC$
стор. прям с S_2, ~~прина~~ лежс. на $AB=c$.
$BC=AD=b$.
стор. прям. с S_1, леж. на $AD=d$.
Найти: гмт M.

Решение:

① $S_2=S_1 \Rightarrow c\cdot(b-d)=(a-c)\cdot d$
$cb-cd=ad-cd$
$cb=ad$
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

② Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$.

т.е. белые прямоугольники подобны исходному (т.к. прям. через M ∥ сторонам, ~~отн. сторон в~~ т.е. углы =, отн. сторон фиксированное)

③ Если белые прям ∽ ~~то~~ исходному, то все их элементы подобны =>

Вариант № 1   МА00018826 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

=> диагонали со сторонами обр. одинаковые углы. т.к. ~~угол~~ хотябы по 1 углу ~~угл~~ общ. с исх. прям, то диаг. AM и MC ∈ диаг. AC.

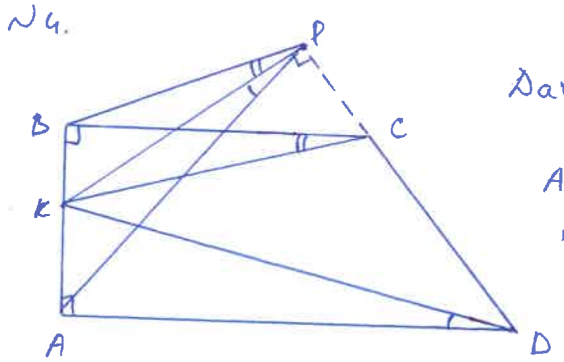
Иначе ∠BAM ≠ ∠BAC – противореч. } т.к прям. со исх, т.е

∠MCB ≠ ∠ACB – противореч } данные ∠ д равн.

⇓

ГМТ т.М – диаг AC (такая диаг., что серые прям. лежат по разные стороны от неё).

№4.



Дано: ABCD-трап. BC ∥ AD
BC : AD = 2 : 3.
AB ⊥ AD. K ∈ AB ; AK : AB = 3 : 5.
KP ⊥ CD P ∈ CD.
Док-ть: ∠KPA = ∠KPB.

① ∠KBC = ∠KPC – оп на общ. дугу => KBPC – впис => ∠BPK = ∠BCK. т.к оп. на общ. ∪BK

② ∠KAD + 90 + ∠KPD = 90° + 90° = 180° => AKPD – впис => ∠KPA = ∠KDA т.к оп. на общ. ∪KA.

③ $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{3}$ – поус.

$\frac{BK}{KA} = \frac{AB - KA}{KA} = \frac{AB}{KA} - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

∠CBK = ∠KAC = 90° – поус.

} △BCK ∼ △ADK – по 2м стор. и ∠ между => подоб.

=> ∠BCK = ∠KDA

⇓

∠BPK = ∠KPA

№5. Чтобы 546 было сил., послед. ~~оп. долж~~ операц. должно быть «*».

546 = 3 · 182

182 ⋮̸ 3, т.е. 182 невозможно получить из чисел ⋮3 (т.к. a + b = c, a ⋮3, b ⋮3 => c ⋮3; a · b = c, a ⋮3, b ⋮3 => c ⋮3)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МА0001882622

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Пусть Аня вписала числа $a_1\ a_2\ a_3 \dots a_n$, а Саша прибавил к ним a_0. Тогда:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n}=\frac{a_0+a_1+a_2+\dots+a_n}{a_0\cdot a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n}\cdot 5 \quad \Big|\cdot a_1\cdot\dots\cdot a_n$$

$$a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{a_0+a_1+\dots+a_n}{a_0}\cdot 5$$

Пусть $a_1+a_2+\dots+a_n=A$.

Тогда:

$$A=\frac{a_0+A}{a_0}\cdot 5$$

$$A=5+\frac{5A}{a_0} \Rightarrow 5=A\left(\frac{-5}{a_0}+1\right)=A\left(\frac{a_0-5}{a_0}\right)$$

$\Downarrow$

$\cancel{a\in[1;4]}$. $a_0>5$.

$$\frac{A}{5}=\frac{1}{\frac{a_0-5}{a_0}}$$

$$\frac{A}{5}=\frac{a_0}{a_0-5}$$

$A>a_0$ т.к. $a_0>5$ – min число, A – сумма чисел, $>a_0$.

или $a_0<0$

$$A(a_0-5)=5a_0$$

$$5a_0=A(a_0-5)>\cancel{(a_0+6)(a_0-5)}\ a_0(a_0-5)$$

$$a_0^2-5a_0<5a_0$$

$$a_0^2-10a_0<0 \quad |:a_0$$

$$a_0<10.$$

① $a_0=9$.

$\frac{A}{5}=\frac{9}{4} \Rightarrow A=\frac{9\cdot 5}{4}$ – не целое $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ против. $a_0\neq 9$.

② $a_0=8$

$\frac{A}{5}=\frac{8}{3} \Rightarrow A=\frac{5\cdot 8}{3}$ – не целое $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_0\neq 8$.

③ $a_0=7$

$\frac{A}{5}=\frac{7}{2} \Rightarrow A=\frac{5\cdot 7}{2}$ – не целое $\Rightarrow$ $a_0\neq 7$.

④ $a_0=6$

$\frac{A}{5}=\frac{6}{1} \Rightarrow A=30$, например $=10+9+11$.

$\Downarrow$

$\underline{\underline{a_0=6}}$

Найдено 1 значение, не произведен полный перебор в данной области.

Лист 3 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000188262 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Если число 546 – синее, то оно либо к·с
к+к
с+с

$546 = 3 \cdot 182$

$182 \not\vdots 3 \Rightarrow 546 \neq к \cdot с$.

Заметим, что как только появл. оба цвета, вся последовательность раскр. (после числа др. цвета) опр. образом. Тогда подходит раскр., где все однозвенные – к или с.

Также можно создать „последовательность". Заметим, что если начинать с синих, то ~~в.~~ как только появится хотябы 1 к., вся ост. посл. будет красной, тогда будет начинать с ~~синей посл.~~ красных. Если учитывать только сумму чисел, то посл. будет иметь вид кк...к с к...ккск. Но если посл. с не самым коэф „большим шагом" (пром. от 1го к до посл. перед с.), то будут возникать произведения, нарушающие ст. От 3 до 546 182 числа :3, ~~т.е.~~ т.е. возм. шаги – 2 – не подходит, т.к. нарушится умн.
– ~~18~~91 – подходит, т.к. перв. син. число = 273 $\left(\frac{546}{2}\right)$,

т.е. $273 \cdot 3 \neq 546$

$273+273 = с+с$, ум. не нарушено $\Rightarrow$ всего таких раскр. 3.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	7	4	6	7	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Лобацкий

Имя Илья

Отчество Юрьевич

Дата рождения 24.06.2006 **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 89138358363 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	4	6	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	10	20	20	90

№1

$|a^2-3a-6| = |a(a-3)-6|$, a - целое $\Rightarrow$ a и $(a-3)$ имеют разную чётность (т.к. 3 - нечётное, Ч-Н=Н, Н-Ч=Н, Н-Н=Ч).

(модуль)

$\Rightarrow$ ~~одно~~ из чисел a или $(a-3)$ — чётно $\Rightarrow$ $a(a-3)$ - чётно $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $|a(a-3)-6|$ - чётно (модуль числа), а единственное простое число $:2$ (чётное) это 2 $\Rightarrow$ $|a^2-3a-6|=2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^2-3a-6=2$ или $a^2-3a-6=-2$

$a^2-3a-6-2=0$

$a^2-3a-8=0$

$D=b^2-4ac=(-3)^2-4(-8)\cdot 1=9+32=41$ - не является квадратом $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\sqrt{D}$ - иррац. число $\Rightarrow$ корни не целые (сумма рац. и иррац. чисел - иррац.)

(т.к. $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$)

(иррац. - иррациональное)

$a^2-3a-6+2=0$

$a^2-3a-4=0$

$D=b^2-4ac=(-3)^2-4(-4)\cdot 1=9+16=25$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3+5}{2}=4$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3-5}{2}=-1$

Ответ: ~~-1, 4~~ $a_1=-1$, $a_2=4$.

№3.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n - натур. число) - числа, записанные Алисой, x - число записанное Сашей, $S_1=a_1+a_2+\ldots+a_n$ (S - сумма в записанных чисел)

$S_2=a_1+a_2+\ldots+a_n+x$, $N_1=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, $N_2=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot x$ $\Rightarrow$ (произв. натур. чисел - произв. пол. чисел)

$\Rightarrow$ $S_1=S$ $\quad S_2=S+x$, $N_1=N$ $\quad N_2=xN$ $(N>0, S>0)$

$\frac{S_1}{N_1}=5\frac{S_2}{N_2}$ $\quad \frac{S}{N}=5\frac{S+x}{N\cdot x}\Big|\cdot N \Rightarrow$ $\frac{S}{\cancel{N}}=5\frac{S+x}{x}$

$S=\frac{5}{x}S+5$ $\Rightarrow$ т.к. x, S - пол. цел. числа и $x<a_1,a_2,\ldots,a_n$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $x<S$

$S=\frac{5}{x}S+5$ $\quad S(1-\frac{5}{x})=5$ $\Rightarrow$ $x>5$, т.к. иначе $1-\frac{5}{x}\leq 0$.

$S=\frac{5}{1-\frac{5}{x}}$, при увеличении x $1-\frac{5}{x}$ увеличивается ($\frac{5}{x}$ становится меньше) $\Rightarrow$ при увеличении x S уменьшается, т.к. $S=\frac{5}{1-\frac{5}{x}}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если при каком-то значении x $x\geq\frac{5}{1-\frac{5}{x}}$, то при всех больших значениях x знак сохраняется („$\geq$") (т.к. $x\geq\frac{5}{1-\frac{5}{x}}$, $x-5\geq 5$)

$x\geq\frac{5}{1-\frac{5}{x}}$ $\Big|\cdot 1-\frac{5}{x}$ ($\neq 0$, т.к. $x>5$) $x-5\geq 5$ $\quad x\geq 10$ $\Rightarrow$ $5<x<10$. Переберём возможные значения x (целые):

x м.б. <0

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	4	6	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x=9$:

$S\left(1-\frac{5}{9}\right)=5$

$S=\frac{5}{\frac{4}{9}}=\frac{45}{4}=11{,}25$ – не целое число, S – целое (должно быть) ($45 \not\vdots 4$)

$x=8$:

$S\left(1-\frac{5}{8}\right)=5$

$S=\frac{5}{\frac{3}{8}}=\frac{40}{3}$ – не целое число ($40 \not\vdots 3$)

$x=7$:

$S\left(1-\frac{5}{7}\right)=5$

$S=\frac{5}{\frac{2}{7}}=\frac{35}{2}$ – не целое число ($35 \not\vdots 2$)

$x=6$:

$S\left(1-\frac{5}{6}\right)=5$

$S=\frac{5}{\frac{1}{6}}=30$ – целое.

~~Проверка~~

$\frac{S}{N}=\frac{30}{N}=\frac{(30+6)\cdot 5}{N\cdot 6}$ (N – произведение чисел записанных Алисой, S – их сумма)

$\frac{30}{N}=\frac{36\cdot 5}{N\cdot 6}=\frac{6\cdot 5}{N}=\frac{30}{N}$

$\frac{30}{N}=\frac{30}{N}$.

Пример: Алиса пишет 10, 10, 10, Саша пишет 6, $\frac{10+10+10}{10\cdot 10\cdot 10}=5\cdot\frac{10+10+10+6}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 6}$,

$\frac{30}{10\cdot 10\cdot 10}=\frac{\frac{5\cdot 36}{6}}{10\cdot 10\cdot 10}=\frac{30}{10\cdot 10\cdot 10}$.

Ответ: $x=6$.

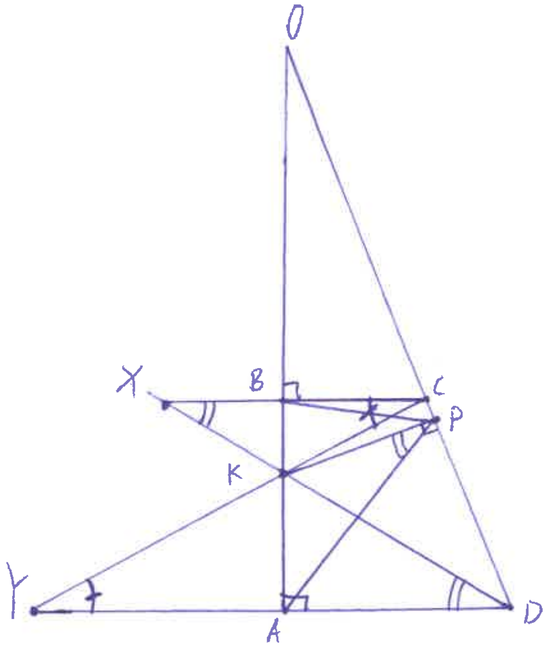
Найдено 1 значение.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 4 6 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Дано: $ABCD$ – трап. $AD \parallel BC$

$\frac{AD}{BC} = \frac{3}{2}$

$\frac{KA}{AB} = \frac{3}{5}$

$\angle BAD = \angle ABC = \angle KPC = \angle KPD = 90^\circ$

Док-ть: $\angle KPA = \angle KPB$.

Док-во:

$BC \parallel AD$, по ус. $\angle KAD = \angle KPD = \angle KPC = \angle KBC = 90^\circ$, по ус. $\Rightarrow \angle KAD + \angle KPD = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$, $\angle KPC + \angle KBC = 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ \Rightarrow KBCP$ – вписан в окр., $AKPD$ – вписан в окр., (сумма прот. углов $= 180^\circ$). $\Rightarrow \angle KPA = \angle KDA$, опир. на одну дугу AK., $\angle \cancel{BPK}\ KPB = \angle KCB$, опир. на одну дугу BK, $\angle KCB = \angle KPB = \angle KYD$, т.к. $BC \parallel AD$ (как накр. леж.)

$\frac{KA}{AB} = \frac{3}{5}$, по ус. $\Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{3}{2}$. $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{2}$, по ус., $AD \parallel BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OBC \sim \triangle AOD$, $AD \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{1}{2} = \frac{CD}{OC}$

$AK = \frac{3}{5}AB$, $KB = \frac{2}{5}AB$, $OB = 2AB \Rightarrow \frac{AK}{KO} = \frac{\frac{3}{5}AB}{OB + KB} = \frac{\frac{3}{5}AB}{(2+\frac{2}{5})AB} = \frac{AB}{AB} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{1}{4}$

Т.к. $C, K, Y \in YC$, то $\frac{AK}{KO} \cdot \frac{OC}{CD} \cdot \frac{DY}{YA} = 1$, по т. Менелая $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{DY}{YA} = \frac{1}{\frac{AK}{KO} \cdot \frac{OC}{CD}} = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$ т.к. $DY = YA + AD$, то $2YA = YA + AD \Rightarrow$

$\Rightarrow AY = AD \Rightarrow \triangle YKD$ – равнобедрен., т.к. KA – высота и медиана по ус. ($\angle KAD = 90^\circ$, $AY = AD$). $\Rightarrow \angle KYD = \angle KDY = \angle KDA$, по св. равн. $\triangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KYD = \angle KDA = \angle BCK = \angle KPB = \angle KPA \Rightarrow \angle KPA = \angle KPB$. ($\angle KPB = \angle KYD$, $\angle KDA = \angle KPA$, $\angle KDA = \angle KYD$).

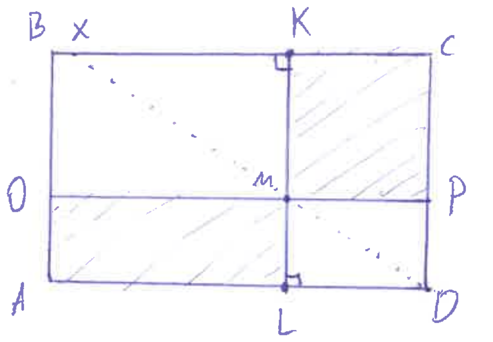
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000174672 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.



Ответ: на диагонали BD.

~~Проведём~~ Возьмём любой вертикальный отрезок KL внутри прямоугольника $\parallel CD$ и $\parallel AB$

На этом отрезке нужно выбрать точку M, так чтобы (пусть выбрали) $S_{OMLA} = S_{KMPC}$, S прямоугольника = произведение сторон.

$\Downarrow$

если $S_{OMLA} = S_{KMPC}$, то $\frac{KC}{BK} = \frac{ML}{KM}$, т.к. $KC \cdot KM = OM \cdot ML = BK \cdot ML$ (из-за паралл., $BK = OM$)

При этом $DL = KC$, $AL = BK$ $\Rightarrow$ Пусть DM пересекает BC в точке X, тогда т.к. $AD \parallel BC$, то $\triangle XMK \sim \triangle LMD$, по пр. подобия ($\angle KXM = \angle MDL$, накр. леж.; $\angle XKM = \angle MLD = 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{ML}{KM} = \frac{DL}{KX}$, но

$\frac{DL}{KX} = \frac{KC}{KX}$ ($DL = KC$) $\frac{ML}{KM} = \frac{KC}{KX} = \frac{KC}{BK} \Rightarrow X = B$, т.к. $X \in$ луч KB,

т.к. $\angle XMO = \angle XDA < 90^\circ$

$\Downarrow$

$M \in BD$

Надо еще д-ть, что если $M \in BD$, то площади равны для любой т. $M \in BD$. Поскольку ищем Г.М.Т. Но поскольку у вас любой отрезок KL, то засчитано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 4 6 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Если 3 - синее и в промежутке 6 - 546 есть число ~~x~~ $x \vdots 3$ красное, то $x+3$ - красн. $x+6$ - красн $(x+3)+3$, ..., 546 - красн. (противоречие ~~сумма~~ разных цветов - красное число) =>
=> все числа до 546 синие. пусть есть красное число y, тогда $y+3, y+6, \ldots, 3y$ - красн., но $3 \cdot y$ - синее, т. к. 3 - синее, y - красное (произведение (чисел разных цветов) ~~разных цветов~~ синее), противоречие. => когда 3 - синее есть только 1 вариант, где все числа синие.

Если 3 - красное: (красн. - красное число, син. - синее число)

$546 = 3 \cdot 182$ т.к. $182 \not\vdots 3$, то оно представимо только в виде суммы 2 чисел $\vdots 3$, т.к. сумма чисел разных цветов - красное число, то парах ~~чисел~~ чисел:
$1 \cdot 3, (182-1) \cdot 3; 2 \cdot 3, (182-2)3; 3 \cdot 3, (182-3)3; \ldots; 90 \cdot 3, (182-90)3$; имеют один цвет. (91 в паре само с собой, а затем пары повторяются).
⇓
$546 - 3 = 543$ - красн. $546 + 3 = 549$ - красн.

Т.к. 3 - красн., то если x - син., то $3x$ - син. => $3x = x + 2x$, т.к. x и $3x$ - син., то $2x$ син., ~~т~~.к. если A - син. то $3A$ - син, то $3 \cdot 3A$ - син., ..., $3^N A$ - син. => $3^N A - A$ - син., $3^N A - A - A$ - син. => (только суммы одноцветных может быть синей)
=> если A - син., то $N \cdot A$ - син. (при любом натурал. N)
Также если есть 2 син. числа, то их разность - син
(по тем же причинам: $A - B = C$ $\underset{\text{син.}}{A} = \underset{\text{син.}}{B} + C$, если B - красн., то A - красн.)
Если есть син. число $X \not\vdots 546$ ~~только~~ ~~[illegible]~~:
$|546 \cdot A - X \cdot B|$ - син. (при любых нат. A, B)
$546 \not\vdots 9$, ~~[illegible]~~, значит ~~если $x \not\vdots 6$, то~~ ~~[illegible]~~, ~~то~~ можно подобрать такие A и B, что $|546A - x \cdot B| < 546$, пусть это число - y, оно как и x - син., и $\not\vdots 546$, но при этом < 546. => $546 - y$ - син., т.к. $546 \not\vdots 9$, то с помощью умножения y на N (где N - любое натурал. число) можно получить число с любым (если ~~$y \not\vdots 6$~~ $НОД(546, y) \leq 3$) остатком при делении на 546, а т.к. можно отнимать $N \cdot 546$ (N - любое нат.), то можно получить любое число - противоречие, (3 - красн.)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М А 0 0 0 1 7 4 6 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Следовательно НОД(y, 546) > 1.

$546 = 2\cdot3\cdot7\cdot13$. => число способов - кол-во делителей 546 :3, но не 3 (т.к. произведение)

$3\cdot2$, $3\cdot7$, $3\cdot13$, $3\cdot7\cdot13$, $3\cdot2\cdot13$, $3\cdot2\cdot7$, $3\cdot2\cdot13\cdot7$,

Всего 7. +

Ответ: 1+7 = 8 (1, если 3-син.)

Если 3 синее, то все синие, а использовали 2 цвета.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Уфа, Космонавтов 1	М	А	0	0	0	1	6	7	1	5	2	2

Адрес площадки проведения — Шифр

Вариант № 2

Фамилия Куртлисов

Имя Артур

Отчество Маратович

Дата рождения 19.01.2006 **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 8987 5884147 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Выдан дополнительный лист N1
Выдан доп лист №2
Выдан доп лист №3
Выдан доп лист N4

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	20	5	83

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 6 7 1 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Пусть искомые числа — a и b. Тогда $a+b=2022$; $\frac{a-5}{10}+10b+1=2252$. Решим эту систему. Из второго уравнения вычтем 1, а первое умножим на 10 и получим $\begin{cases}10a+10b=20220\\ \frac{a-5}{10}+10b=2251.\end{cases}$ Вычтем из первого второе и получим $10a-\frac{a-5}{10}=17969 \Leftrightarrow 100a-a+5=179690 \Leftrightarrow 99a=179685 \Leftrightarrow a=1815$. Значит $b=2022-1815=207$. Ответ: числа 1815 и 207.

2. Знаем что $P=a+b+c=4$. Возведем в квадрат: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=16$. Предположим, что $a^2+b^2+c^2\leq 5$, тогда $2ac+2ab+2bc\geq 11$. Умножим первое неравенство на 2 и получим $2(a^2+b^2+c^2)\leq 10$. То есть мы утверждаем, что $2(a^2+b^2+c^2)<2(ac+ab+bc)$. Но при этом мы знаем, что $a^2+b^2\geq 2ab$; $b^2+c^2\geq 2bc$; $a^2+c^2\geq 2ac$. ~~Отсюда и~~ Просуммировав три этих неравенства мы получаем, что $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2ac+2bc$. Значит мы опровергли, что $2(a^2+b^2+c^2)\leq 10$. А значит $2(a^2+b^2+c^2)>10$, откуда $a^2+b^2+c^2>5$, что и требовалось доказать.

Доп. лист №1

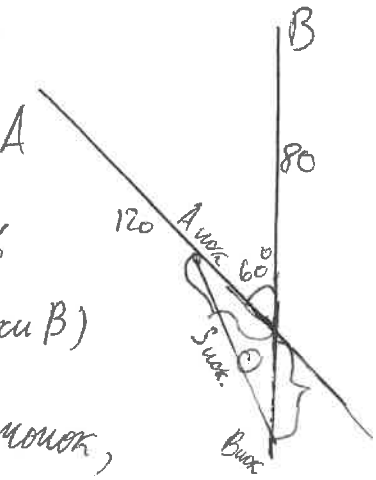
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 6 7 1 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 Для наглядности нарисуем рисунок:



Пусть a и b – это расстояние от бельчонков до точки O. Назовем бельчонков первый (из точки A) и второй (из точки B). Первым точку O пересечёт второй бельчонок, в этот момент расстояние между ними равно 40. В момент, когда точку O пересечёт первый бельчонок, расстояние так же равно 40. Во все остальные моменты времени расстояние равно $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ} = \sqrt{a^2+b^2-ab}$. Т.к. $a^2+b^2>ab$, то если хоть одна из величин a или b больше 40, то расстояние будет больше 40. Тогда нам нужно рассматривать только ~~этот промежуток~~ времени от пересечения O вторым бельчонком, до пересечения O первым бельчонком. В этом промежутке т.к. $a, b<40$, то a можно выразить как $40-b$. Получается $S_{иск.} =$

$$= \sqrt{(40-b)^2+b^2-(40-b)b} = \sqrt{1600-80b+b^2+b^2-40b+b^2} = \sqrt{3b^2-120b+1600}.$$

Найдём минимальное значение выражения под корнем. Это парабола, её $b_0 = \frac{-120}{2\cdot 3} = 20$. Подставим: $S_{иск} = \sqrt{3\cdot 20^2-120\cdot 20+1600} = \sqrt{400} = 20$.

Ответ: 20 метров.

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Доп лист № 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 6 7 1 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. При $n=2$ есть контрпример: $2^1+2^1=4$. При $n=3$ тоже есть контрпример: $3^2+3^3=36=6^2$. Разберем теперь 4. Нам нужно, чтобы не было такого 4^a+4^b, которое является квадратом натурального числа. Пусть без нарушения общности $a\leq b$. Тогда $4^a+4^b=4^a(1+4^{b-a})$. Будем рассматривать то, что находится в скобках. Так как 4^a - всегда квадрат $(4^a=(2^a)^2)$, то нам нужно, чтобы $1+4^{b-a}$ не было квадратом при любом $b-a\geq 0$. ~~Но любо~~ Проведем замену $f=b-a$. При любом f целом ≥ 0 4^f является квадратом натурального числа, а именно $4^f=(2^f)^2$. Но тогда при любом целом $f\geq 0$ выражение $1+4^f$ не является квадратом натурального числа. Доказательство - пусть $4^f=a^2$. Тогда следующий квадрат равен $(a+1)^2=a^2+2a+1$. Но при любом натуральном a выполняется $a^2<a^2+1<a^2+2a+1$. То есть $a^2+1=4^f+1$ лежит между двумя соседними квадратами и не является квадратом.

Ответ: $n=4$

Доп лист № 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 6 7 1 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. Начнём с того, что в пятиугольнике ~~в сетке~~ будет минимум одна горизонтальная или вертикальная сторона? Мы, не нарушая общность будем считать, что горизонтальная. Пусть n-длина стороны, а $a^2+b^2=n^2$, где a и b целые, $a<b$.

а и в – не единственные?

У нас есть горизонтальная сторона и 4 неизвестных стороны. Нам из левой точки горизонтального стороны нужно прийти в правую четырьмя рёбрами одной такой же длины и с вершинами на точках сетки. Также у нас не может быть три или более одинаково повёрнутых сторон т.к. иначе это уже не пятиугольник. Перепад высоты должен быть 0. Проекции сторон на вертикальную все могут быть a, b, 0 или n. Способы оставить перепад высот нулевым: $b-b+a-a$, $b-b+n-n$, $a-a+n-n$. Но также нужно уйти вправо на n, но можно использовать только стороны с вертикальной проекцией как в трёх выражениях выше. То есть $\pm a \pm a \pm b \pm b$, $\pm a \pm a$, $\pm b \pm b$. Но не один из этих вариантов не может быть равен n так как:

Лист 4 из 5

Доп. лист №4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 7 | 1 | 5 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Вся страница - продолжение задачи 5

1) $\pm a \pm a$ не подходит так как $2a \neq n$, потому что иначе было бы $a^2+b^2=2a$, а при $a \geq 1$ и $a \neq b$ это невозможно

2) $\pm b \pm b$ не подходит по ~~той же~~ аналогичной причине, а именно потому что $2b \neq n$.

3) $\pm a \pm a \pm b \pm b$ тоже не равно n т.к. возможные варианты больше нуля - это $2a+2b$, $2b$, $2a$, $2(b-a)$. Все они не равны n т.к. $n=a^2+b^2$; ~~$a \neq b, a, b > 0$;~~ $b > a > 0$;

Тогда ни при каком из вариантов не удастся добиться горизонтального перемещения вправо на n клеток. А значит и равносторонний пятиугольник мы составить не сможем.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Уфа, ул. Космонавтов 1

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	8	7	6	7	2	2

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ЗАЙБИНЕР

Имя Илья

Отчество ВЛАДИСЛАВОВИЧ

Дата рождения 16.01.2006 **Класс** 9

Предмет математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +79613610621 **Подпись** Зи

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Выдан дополнительный лист N1

Выдан доплист N2

Выход 11:56 - 12:00

Выдан доп. лист № 3

Выдан доп. лист № 4

1	2	3	4	5	Σ
18	20	15	10	5	68

Доп. лист N1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	8	7	6	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1.

Дробь < 1, ⇒ числит. < 50, знамен. и числ. взаимн. прост.
Если числ. ⋮ 2, то знам. ⋮ 2 ⇒ числ. неч. Если числ ⋮ 3, то знамен. = $\underset{1 \pmod 3}{100} - \underset{0 \pmod 3}{3X}$, не ⋮ 3. Выпишем ~~числит~~ числитель тех чисел N которых ⋮ 3, но не ⋮ 2 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99. Числитель < 50, тогда вычерк. > 50 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45. Если числитель ⋮ 5, то знамен ⋮ 5, так как $\underset{0 \pmod 5}{5X} + n = \underset{0 \pmod 5}{100}$. Вычеркиваем числа ⋮ 5; получ. 3, 9, 21, 27, 33, 39. Заметим, что нам будут подходить дальше все числ. вида mn, где n-простое число < 50, m-какое-то натур. число ⋮̸ 2, ⋮̸ 5. Так ~~как~~ как $100 = 2^2 \cdot 5^2$, то если оба числа ⋮ n ≠ 2, 5, то оно не может равняться 100. Получаем ещё 7, 21, 49, 11, 33, 13, 39, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. ~~Но 21, 33, 39 уже были в предыдущ. как~~.
Получаем в итоге: 3, 9, 21, 27, 33, 39, 7, 49, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 1

Ответ: 19

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 8 7 6 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2,

x-кол-во сосн. шишек изначально у 1

y-кол-во кедр. шишек изнач. у 2

$x+y<25$

$2x>y+26 \Rightarrow x>\frac{y}{2}+13$ сложим меньшее с меньшим, а большее

$2y>x-4 \qquad x<2y+4$ с большим

$$\cancel{x}+\frac{y}{2}+13<\cancel{x}+2y+4$$

$$\frac{y}{2}+9<2y$$

$$y\geq 7$$

$x>\frac{y}{2}+13 \Rightarrow$ минимальное возможн. знач. при $y=7$, $x=17$

следующ. после него при $y=8$, $x=18$,

но $x+y<25$, противор.

~~Отв~~ Тогда единственное возможное значение $x=17$ $y=7$,

делаем проверку, подходит

Ответ: 17 сосновых шишек и 7 кедровых

Доп лист №2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 8 7 6 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N3.

Рассмотрим остатки m последов. чисел при делении на m, каждый из остатков будет ровно 1 раз, поэтому БОО: они будут упорядочены. ~~Тогда сумма от 1 до~~ Если m - нечетн., то ~~тогда~~ не будем учитыв m, так как m⋮m и на деление на m остатка, не влияет. тогда их сумма будет $\frac{1+m-1}{2}\cdot(m-1)=\frac{m\cdot(m-1)}{2}$, заметим что числитель всегда ⋮m, а это значит что оно ~~только при m=2~~ простое, только когда m-простое, а m-1=1, но это только при m=2, а оно чет.

Если m - четн, то сумма будет $\frac{1+m}{2}\cdot m=\frac{m\cdot(m+1)}{2}$, это число ⋮ $\frac{m}{2}$, а это целое число. То есть это число имеет вид $\frac{m}{2}\cdot x$, где $x>1 \Rightarrow$ это возможно только при $m=2$.

Например $3+4=7$

Так же если $m=1$, то сумма может быть простой, например 7

Ответ: $m=1$, $m=2$

Пробелы в обосновании

Доп. лист. № 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

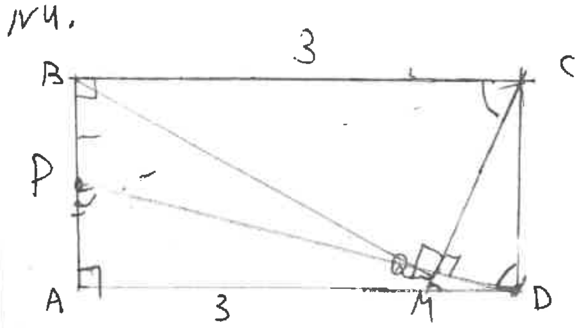
Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	8	7	6	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Т.к. 4-х угольник BCQP - впис., ($\angle B+\angle CQP=180°$) $\Rightarrow \angle BPQ+\angle BCQ=180°$.

$\angle BPQ+\angle APD=180° \Rightarrow$

$\angle BCQ=\angle APD$.

$\angle BCQ+\angle QCD=90°$, $\angle PQD+\angle CDQ=180°-90°=90° \Rightarrow$

$\angle CDQ=\angle BCQ$. Продлим перпенд. CQ до пересеч. с AD, обозначим эту точку за M, 4-х угольник PAMQ - впис., так как $MQP+\angle PAM=180° \Rightarrow QMA+\angle APQ=180° \Rightarrow \angle QMA=\angle BPQ \Rightarrow \angle CMD=\angle BCQ$

Если $\angle CMB=\angle BCQ$, то BC=BM.

BC=BQ, тем как $\triangle BQC$ - р/б

А равенство $\angle BCQ=\angle CMD$ и так очевидно

Ответ не записан.

Доп. лист № 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | N | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 7 | 6 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N5.

Так как при перемнож. двух отриц. будет плюс, а при двух полож. - полож., а при полож. и отриц. - отриц., то заменим отриц. числа на значок „–", а полож. на значок „+".

~~Допустим, мы расставили эти знаки~~

Возьмём момент времени, когда у нас в ~~каждом~~ заполнен полностью один столбец и одна строка, то тогда, у нас в каждой строке и столбце нет пилич. „–" => произв. отриц. А чтобы мы могли поставить следующ. плюс, мы должны поставить как ~~минимум один~~ ~~минус~~ в строку или столбец. Если там уже был минус в этот момент, то у нас ~~будет не~~ в любом случае будет как минимум 1 минус в строке или столбце, кроме 1. 49-6=3.

Так же ~~заметим~~, что между двумя +, мы можем заполнить все пространство +. Но мы не можем делать так в каждой строке, так как через 1 ~~столбец~~ строчку будут + сосед +, а другой –, ~~также~~, ~~чтобы мы могли так заполнять~~. Но если мы в 1 стр. поставим + и – при данн. расстановк., то у нас собьется четность + и –, и мы получим меньше +. Тогда правильн. расстановка будет иметь 3 стр. с 2 – => 49 - 3·2 = 43

Пример на 43

	–	–	–	–	–	–	–	
–	+	+	+	+	+	+	+	–
–	–	+	+	+	+	+	–	–
–	+	+	+	+	+	+	+	–
–	–	+	+	+	+	+	–	–
–	+	+	+	+	+	+	+	–
–	–	+	+	+	+	+	–	–
–	+	+	+	+	+	+	+	–
	–	–	–	–	–	–	–	
	1						7	

Сначала заполняем 1 столб., потом 7 столб., затем 1 и 7 строку заполн. +, затем, так как все ост. клетки между +, выставл. везде плюсы.

Ответ: 43

Условия не те: табл. 7×7, а не 8×8, но это несущественно. Существенно, что последовательность заполнения не оптимальная.

Лист 5 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	5	7	5	6	2	2

г. Уфа ул Космонавтов 1.

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Кинзябаева

Имя Алина

Отчество Радиковна

Дата рождения 14.06.2006. **Класс** 9

Предмет математика

Работа выполнена на 11 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 8 917 769 3004 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Выдан дополнительный лист N1
Выдан дополнительный лист N2
Выдан дополнительный лист N3
Выдан дополнительный лист N4
Выдан дополнительный лист N5
Выдан дополнительный лист N6
Выдан доп лист №7
Выдан доп лист №8
Выдан доп лист N9
Выдан доп лист N10

1	2	3	4	5	Σ
20	20	5	20	~~10~~ 10	~~75~~ 75

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 7 | 5 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. Всё что в скобках и не зачёркнуто допол. информация.

Сумма числителя и знаменателя должна равняться 100.
Но дробь должна быть правильной.
(~~Максимальная дробь подходящая под эти условия~~
~~это $\frac{50}{50}$ т.к. $50+50=100$, а $\frac{51}{49}$ уже неправильная.~~)

Пусть x это числитель
Тогда y это знаменатель
$\frac{x}{y}$ это дробь
$x<y$ | т.к. дробь правильная и несократимая
$y \not\vdots x$

Наименьшее возможное x - это 1, тогда $y=100-1=$
$=99$.
Дробь равна $\frac{1}{99}$.
Для того чтобы $\frac{x}{y}$ был несократимым, ~~они~~ x и y не должны быть чётными и. Т.к. 100 чёт. число, либо и x, и y равны чёт, либо и x, и y должны быть нечёт. Из-за этого если x будет чёт, то и y будет чёт, тогда оба сократятся на 2. Это не подходит по условию.

Число 100 кратно 5, если x или y также будут кратны 5, то дробь будет сократима.
Т.к. если сумма двух слагаемых кратна чему-то и одно из слагаемых кратно тому же числу, ...
(этот знак говорит о продолжении на другом листе) →

Доп. лист № 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | NA00015756 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 →

... то второе слагаемое так же кратно этому числу. Это правило выходит из правила про то, что если каждое из слагаемых делится на какое-то число, то и их сумма будет кратна этому числу. $a+b = xa' + xb' = x(a'+b') = c = x(c') = x(a'+b')$

Значит x и y не должны быть кратны пяти.

Т.к. 100 не кратно 3, 7 и др. нечёт числам или x, или y могут ~~ра~~ быть кратны им.

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Правильная дробь - это дробь где числитель меньше знаменателя.

При каждом увеличении x на число, y будет уменьшатся на то же число, т.к. $x+y=100$. $\Rightarrow (x+c)+(y-c)=100$

Максимально возможная дробь $\frac{x}{y}$ при выполнении всех условий равна $\frac{49}{51}$. (т.к при $x=50 \Rightarrow y=50 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{50}{50}$ они сокращаются и вообще это неправильная дробь) Значит кол-во дробей (без учёта кратности) от $\frac{1}{99}$ до $\frac{49}{51}$ $\Rightarrow$ всего 50 штук.

При этом x не должен быть кратен 2.

$50:2=25$ $\quad 50-25=25$ штук осталось.

А ещё x не должен быть кратен 5, но есть числа, которые делятся на 2 и на 5, их мы не учитываем. То есть мы вычитаем числа $\underbrace{\frac{5}{95}, \frac{15}{85}, \frac{25}{75}, \frac{35}{65}, \frac{45}{55}}_{5 \text{ штук}}$ из общего множества

... →

Доп. лист № 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 5 7 5 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 ооо →

25 − 5 = 20 штук. − кол-во дробей, которые не ~~сократимы~~ сократимы.

Ответ: 20.

№2

Пусть x − кол-во сосновых шишек

Тогда y − кол-во кедровых шишек.

Тогда по условию, мы можем сделать такие уравнения (или сравнения).

$$\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>26+y \\ 2y>x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y<25 \\ 2x>26+y \\ (2y+4)\cdot 2>2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x+y<25 \\ (2x-26)\cdot 2>2y \\ 2y>x-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$(2y+4)\cdot 2>2x>26+y$

$4y+8>26+y$

$3y>16$

$(2x-26)\cdot 2>2y>x-4$

$4x-52>x-4$

$3x>48$

$x>16$

т.к. y и x не могут быть дробью (т.к. целые шишки)

$3y>15+1 \Rightarrow y>5+\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y>6$

$y+x>16+6$

$y+x>22$

$$\begin{cases} x+y<25 \\ x+y>22 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x+y<25 \\ x+y>23 \end{cases}$$

но т.к. и $x>16$ и $y>6$ к $x+y$ нужно добавить ещё один, т.к. шишки целые (а то можно сказать что $x+y=23>22$ тогда только одна переменная выполняет условие)

⇒ ооо продолжение

Дом. мест №3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 5 7 5 6 2 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

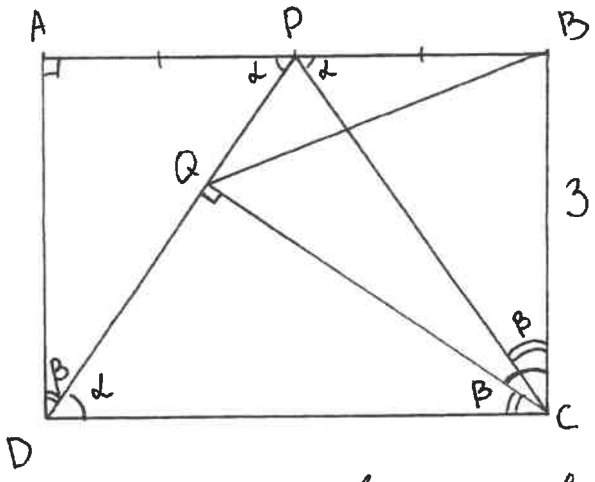
=> ... №2

$$\begin{cases} x+y>23 \\ x+y<25 \end{cases} \Rightarrow x+y=24$$

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x>16 \\ y>6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=7 \end{cases}$$ – других вариантов нет.

Ответ: кол-во сосновых шишек – 17
кол-во кедровых шишек – 7.

№4



Пусть $\angle APD = \alpha$.
Тогда $\angle ADP = \beta$.

$AP = PB$ (по условию)

1) В $\triangle$ сумма всех углов = $180° \Rightarrow \angle DAP + \alpha + \beta = 180°$
$\angle DAP = 90°$ (т.к. угол прямоугольника)

$\Downarrow$

$90° + \alpha + \beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

2) Сумма углов в $\angle ADC = 90°$
~~$\angle ABD$~~ $\angle ADP = \angle\beta$
Тогда $\angle PDC = 90° - \beta = \alpha$

... ⟹

Доп. лист № 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 5 7 5 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 (продолжение)

... →

3) $\triangle DQC \Rightarrow \angle QDC + \angle DQC + \angle QCD = 180°$

$\angle CQD = 90°$ (по условию задачи, перпендикуляр)

$\angle QDC = \alpha$ (доказано ранее)

$\alpha + 90 + \angle DCQ = 180°$

$\angle DCQ = 180 - 90 - \alpha = \beta$

4) $\angle DCB = 90°$ (угол прямоугольника, по условию задачи)

$\angle DCB = \angle DCQ + \angle QCB$

$90 = \beta + \angle QCB$ ($\angle DCQ = \beta$, доказано выше)

$\angle QCB = 90 - \beta = \alpha$.

5). $\triangle ADP$ и $\triangle PBC$

$\angle DAP = \angle PBC$ (т.к. это углы прямоугольника)

$AP = PB$ (по условию задачи)

$AD = BC$ (стороны прямоугольника, лежащие напротив)

$\Rightarrow \triangle ADP = \triangle PBC$ по ~~углу и~~ сторонам и углу, лежащего между ними

6.) $\triangle ADP = \triangle PBC$ (доказано выше)

⇓

$\angle ADP = \angle PCB = \beta$ (т.к. треугольники равны)

$\angle APD = \angle BPC = \alpha$

7) Смежные углы.

$\angle APD$ смежен с углом DPB

$\angle APD + \angle DPB = 180$

$\angle DPB = 180 - \angle APD = 180 - \alpha$

$\angle DPB = 180 - \alpha = 90 + \beta$ (т.к. $\alpha + \beta = 90$, доказано выше)

... ⇒

Доп. лист №5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 7 | 5 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

=> ... №4

8) четырёхугольник CQPB.

Чтобы описать окружность вокруг четырёхугольника, нужно чтобы его два противолежащих угла при сумме давали 180°.

Рассмотрим четырёхугольник CQPB.

Его противолежащие углы - это $\angle QPB$ (это $\angle DPB$) и $\angle QCB$.

$\angle QCB = \alpha$ (доказано выше, 4 действие)

$\angle QPB$ (это $\angle DPB$) $= 90 + \beta$ (доказано выше)

$\angle QCB + \angle QPB = \alpha + (90 + \beta) = 180°$ (т.к. $\alpha + \beta = 90$, доказано выше)

Значит вокруг четырёхугольника CQPB можно описать окружность.

9). Вписанные углы.

Вписанные углы, что опираются на одну дугу равны.

Есть окружность, описанная вокруг CQPB.

Также есть дуга CB, на которую опираются два вписанных угла, $\angle CQB$ и $\angle CPB$. По теореме о вписанных углах эти углы равны. То есть

$\angle CPB = \angle CQB = \angle\alpha$.

Значит $\angle CQB = \angle\alpha$

10) $\triangle BCQ$.

$\angle BCQ = \alpha$ (доказано выше, 4 действие)

$\angle CQB = \alpha$ (доказано выше)

=> $\triangle BCQ$ - равнобедренный → ...

Доп. лист №6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3   М А 0 0 0 1 5 7 5 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

→ ...

△BCQ – равнобедренный

⇓

BC = BQ (стороны при основании равнобедренного треугольника)

11) BC = 3 (по условию задачи)
BC = BQ (доказано выше) | => BQ = 3

Ответ: BQ = 3.

№5 (в клетке сначала номер строки, потом номер столбца) ↓

−	−	−	−	−	−	−
−						−
−						−
−						−
−						−
−						−
−	−	−	−	−	−	−

Квадрат 7×7.

По рамке расставляются отрицательные числа

При умножении положительного числа на отрицательное получается отрицателоное.

Пусть отрицательные числа будут писаться как „−"
Тогда положительнне числа будут писатся как „+"
При умножинии: „−" на „+" будет „−"
„−" на „−" будет „+"
„+" на „+" будет „+"

⟹

...

Доп лист №7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 7 | 5 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 => ...

Для того чтобы сделать наибольшее кол-во „+" чисел, нужно чтобы появились первые „+" числа для ~~начала~~. Т.к. мы смотрим либо по вертикали ближайшие числа, либо по горизонтали, нам нужна такая ситуация $\begin{array}{|c|}\hline - \\ \hline \\ \hline - \\ \hline\end{array}$ или такая $\begin{array}{|c|c|c|}\hline - & & - \\ \hline\end{array}$, чтобы посерёдке получилось положительное. Это легко сделать. Мы берём уголок 2×3, пусть будет верхний левый, и вставляем в клетку (2:3) минус (т.к. мы вставляем произведение ранее вставленных чисел, а там вставлен только „-")

	1	2
1	-	-
2		
3	-	-

← вот то, что поставим

Теперь у нас есть ситуация для получения первого плюса.

Мы рассматриваем ближайших по столбцу и перемножаем, и на клеточку (2;2) мы можем поставить „+". Далее рассмотрим вторую строку. У нас уже есть:

	1	2	3	4
2	-	+		

Посмотрим на клеточку (2;3). Если ~~Рассматривать~~ вставить число туда по столбцу, то оно будет „-", но если по строке (т.к. нет ещё второго соседа) оно будет „+". Таким образом мы можем продолжать до тех пор дальше по строке пока у ~~него~~ клетки не появится второй сосед. Это будет выглядеть как:

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	-	-	-	-	-
2	-	+	+	+	+		-
3	-	-					

Но вот у него появился сосед „-" и теперь он может стать „-"... →

Доп лист № 8

№5 ... →

Но не будем спешить. Пока не трогаем эту клетку. Теперь у нас есть несколько плюсиков, т.к. мы не можем двигаться в бок (сторону), мы пойдем вниз. Будем использовать ту же логику, что и в строках. Есть столби 3, 4, 5 у них нет припятствий в виде минусов. И по логике одного соседа, мы двигаемся вниз, до ~~появлени~~ появления второго соседа. Картина будет такая:

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	-	-	-	-	-
2	-	+	+	+	+		-
3	-	-	+	+	+		-
4	-		+	+	+		-
5	-		+	+	+		-
6	-						-
7	-	-	-	-	-	-	-

Рамка из „–"
Первый „+" ~~и его~~
„+" что поставим с помощью стратегии
Теперь, если продолжим двигаться с помощью этой логики, все остальные буду „–", но это не ~~наибольшее~~ будет ситуацией с наибольшим кол-вом „+".

Если не смотреть на 2 строку, кажется, что ситуация патовая. Но если рассмотреть её, то мы заметим выход из ситуации. Для этого повторим манёвр 2 строки; в клеточку (2; 5) поставим „–", тогда расматривая по вертикам, можно поставить плюсы в 2 клетки: (2; 4) и (2; 6)

... →

Доп.лист №9

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

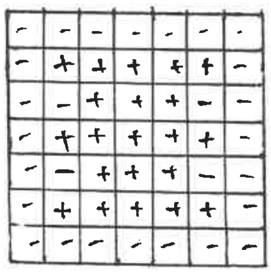
Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 5 7 5 6 2 2

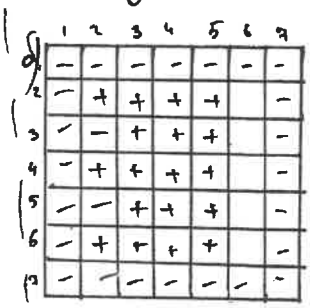
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5... →

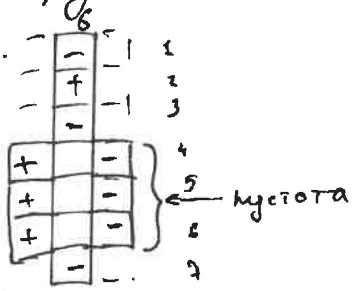
Также в 6 строке по нашей стратегии (логике) заполним её „+" до 5 столбца. Теперь ситуация выглядит так. (рисунок б))

а) 

б) 

Теперь у нас остался лишь один пустой столбец. И его с одной стороны окружил минус.

~~Теперь~~ Значит теперь нельзя заполнять по произведению по строке. Значит будем смотреть по столбцу. Но у нас нет ни единого плюса в этом столбце, значит теперь мы по первоначальной логике ставим минус в клетку (3;6). Тогда по соседям по вертикали в клеточку (2;6) ставится „+". Но его с трёх сторон окружают „–". И теперь столбец выглядит как.



И снова с 4 по 6 строчку пусто и ни одной возможности просто стать „+" (из-за соседства)

Поэтому нам придётся поставить „–" в клетку (5;6). Тогда, учитывая соседство по вертикали, мы сможем поставить „+" в две клетки: (4;6) и (6;6) ... →

Доп. лист №10.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 7 | 5 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5... →

И теперь таблица заполнена как на рисунке (а, стр. 10) Больше невозможно поставить „+".
Т.к. отклоняясь от этой стратегии вы только потеряете „+".

Другая последовательность заполнения позволяет поставить больше "+"

Всего 49 клеток
24 клетки с „–" по рамке
и внутри 4 „–".
$49 - 24 - 4 = 21$ клетка.
Ответ: 21

–	–	–	–	–	–	–
–		4	5	6	1	–
–	7				10	–
–	8				11	–
–	9				12	–
–	3	13	14	15	2	–
–	–	–	–	–	–	–

указан номера клеток, в которых ставится "+".

№ 3

$m = 2$. p – всегда нечёт число, т.к. чёт делятся на 2 и не могут быть простыми

При $m = 1$ $p = p$

При $m = 2$ $p = x + y$

где $x = p : 2 +$ остаток
$y = p : 2$; без остатка (минус остаток).

(+)

← x и y должны быть последовательными

$m \neq 3$.

Д-ва нет для $m > 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. УФА, КОСМОНАВТОВ, 1

М	А	0	0	0	1	5	4	2	8	2	2

Адрес площадки проведения Шифр

Вариант № 3

Фамилия МИНГАЗОВ

Имя АРТЁМ

Отчество ИЛЬШАТОВИЧ

Дата рождения 16.12.2005 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 9 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 8 927 338 68 57 **Подпись** Мин

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Выдан дополнительный лист N1

Выдан доп лист №2

Выдан доп. лист N3

Выдан доп. лист N4

Выдан доп лист №5

Выход 12:14 – 12:18

Выдан доп. лист. №6

Выдан доп. лист №7

Выдан доп. лист №8

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	4	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2.

Пусть вначале у каждого бельчонка было x сосновых шишек и y кедровых, тогда $x+y<25$. По условию у первого бельчонка стало $2x$ сосновых шишек и $y+26$ кедровых, тогда $2x>y+26$. По условию у второго бельчонка стало $x-4$ сосновых шишек и $2y$ кедровых, тогда $2y>x-4$.

$$\begin{cases} x+y<25 & (1) \\ 2x>y+26 & (2) \\ 2y>x-4 & (3) \end{cases}$$

из второго и третьего неравенства получаем, что

$2x+2y>x+y+22 \Rightarrow x+y>22 \Rightarrow \begin{cases} x+y<25 \\ x+y>22 \end{cases}$

так как $x+y$ – нат. число, то $\left[\begin{array}{l} x+y=23 \\ x+y=24 \end{array}\right.$

1) Если $x+y=23$, то $y=23-x$

из неравенства (2) $2x>23-x+26 \Rightarrow 3x>49 \Rightarrow$

$\Rightarrow x>\frac{49}{3}$

из неравенства (3) $2(23-x)>x-4 \Rightarrow 46-2x>x-4$

$\Rightarrow 3x<50 \Rightarrow x<\frac{50}{3}$

Но нет такого нат. числа, которое лежит в промежутке $\left(\frac{49}{3};\frac{50}{3}\right)$, т.к. $16=\frac{48}{3}$, а $17=\frac{51}{3}$.

Значит, этот случай невозможен.

2) Если $x+y=24$, то $y=24-x$.

из неравенства (2) $2x>24-x+26 \Rightarrow 3x>50$

$\Rightarrow x>\frac{50}{3}$

из неравенства (3) $2(24-x)>x-4 \Rightarrow 48-2x>x-4$

$\Rightarrow 3x<52 \Rightarrow x<\frac{52}{3}$

Доп. лист N1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	4	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

т.к. $16 = \frac{48}{3}$, $17 = \frac{51}{3}$, $18 = \frac{54}{3}$, то в промежутке $\left(\frac{50}{3}; \frac{52}{3}\right)$ есть только одно нат. число — это 17.

Значит, $x = 17$, $y = 24 - 17 = 7$.

Ответ. 17 сосновых, 7 кедровых.

Задача 1

x — числитель, y — знаменатель, тогда $x + y = 100$, $x < y$ и НОД$(x, y) = 1$.

Тогда $y = 100 - x \Rightarrow x < 100 - x \Rightarrow 2x < 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < 50$
$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, поэтому если $x \vdots 2$ или $x \vdots 5$, то y тоже будет делиться на 2 или 5 соответственно. Но тогда НОД$(x, y) \neq 1$, что противоречит условию, значит $x \not\vdots\, 2$ и $x \not\vdots\, 5$.

Тогда x может быть любым нечётным числом в промежутке $[1; 49]$, которое не делится на 5.

Все нечётных чисел в промежутке $[1; 49]$ 25 штук, но 5 из них делится на 5: это 5; 15; 25; 35; 45. Значит, всего их $25 - 5 = 20$ штук. Значит, и дробей 20.

Ответ. 20.

Задача 4.

K — середина отрезка CD, т.к. $\triangle QCD$ — прямоугольный, а QK — медиана, то $QK = CK = KD$
$\Rightarrow \triangle QCK$ и $\triangle QKD$ — равнобедренные.

Лист 2 из 9

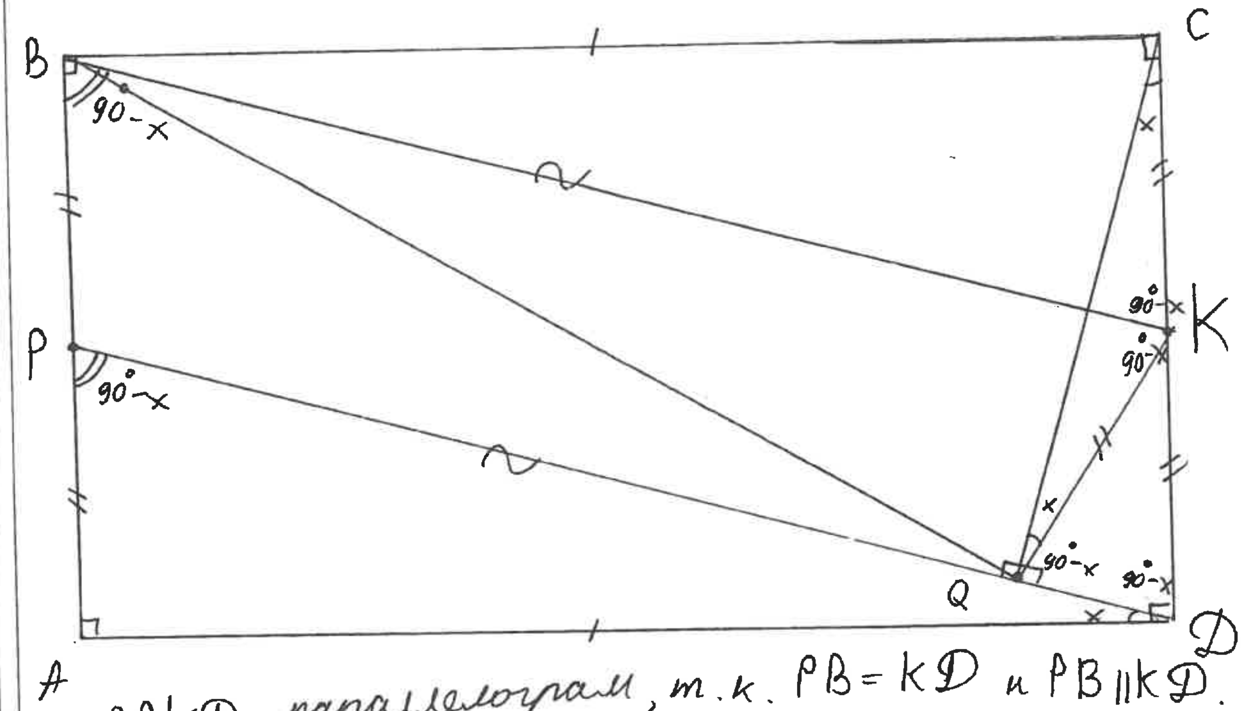
Доп мет № 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 5 4 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



PBKD − параллелограм, т.к. $PB = KD$ и $PB \parallel KD$.

$\Rightarrow BK = PD$

Пусть $\angle CQK = x$, тогда $\angle QCK = x \Rightarrow \angle CKQ = 180° - 2x$.

$\angle KQD = 90° - \angle CQK = 90° - x \Rightarrow \angle KDQ = 90° - x$

$\angle CDA = \angle CDP + \angle PDA \Rightarrow \angle PDA = \angle CDA - \angle CDP$

$\Rightarrow \angle PDA = 90° - (90° - x) = x \Rightarrow \angle APD = 90° - x$

$\angle APD = \angle ABK$ (как соответственные при параллельных прямых PD и BK)

$\Rightarrow \angle ABK = 90° - x$

т.к. $AB \parallel CD$, то $\angle ABK = \angle CKB$ (как накрест лежащие)

$\angle BKQ = \angle CKQ - \angle CKB = 180° - 2x - (90° - x) = 90° - x$

$\Rightarrow \angle BKQ = \angle CKB$, тогда $\triangle BKQ = \triangle BCK$

Доп. лист №3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	5	4	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(т.к. $CK = QK$, BK – общая сторона,
$\angle BKQ = \angle CKB$)
Тогда $BC = BQ = 3$.
Ответ. 3.

Задача 3.

m может равняться 1. Например, последо-
вательность $\{5\}$. Здесь $m=1$, а сумма равна
5. 5–это простое число, поэтому p-простое,
что и требуется в условии.
Теперь рассмотрим $m > 2$.
т.к. это m последовательно идущие нату-
ральные числа, то каждое число дает раз-
личный остаток на число m (т.к. если
они дают одинаковый, то ~~разность~~ разность
между ними как минимум m, но тогда у
нас минимум $m+1$ последовательно идущих
натуральных чисел. противоречие)
Тогда давайте упорядочим эти остатки,
т.к. их m штук, то мы получим все остатки,
которые можно получить при делении на m.
То есть от 0 до $m-1$.
их сумма равна $\frac{m-1}{2} \cdot m$.
m может равняться 2. Например, последователь-
ность $\{1,2\}$. Здесь $m = 2$, а сумма равна 3.

доп. лист №4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 5 4 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 — это простое число, поэтому p — простое, что и требовалось в условии.

Вернёмся к тому случаю, когда $m>2$. сумма остатков равна $\frac{m-1}{2}m$. Рассмотрим два случая: когда $m \vdots 2$ и когда $m \not\vdots 2$.

~~[illegible]~~

1) Если $m \not\vdots 2$, тогда $\frac{m-1}{2} \vdots 2$ (т.к. $m>2$)

Значит, сумма остатков делится на m.

Но тогда $p \vdots m$, т.к. $m>2$, $p=m$ (потому что $p \vdots 1$ и $p \vdots p$, других делителей у p нет)

но минимальная сумма m подряд идущих нат. чисел равна $\frac{m(m+1)}{2}$ (если мы начинаем с 1 и идем до m)

~~[illegible]~~ Но тогда $p \geq \frac{m(m+1)}{2}$

$m \geq \frac{m(m+1)}{2} \Rightarrow 2m \geq m^2+m \Rightarrow m^2-m \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(m-1) \leq 0$, но тогда $m-1 \leq 0 \Rightarrow m \leq 1$.

Противоречие, т.к. $m>2$.

2) Если $m \vdots 2$, представим m в виде $2k$, то $k>1$.

то есть $m=2k$, т.к. $m>2$,

сумма остатков равна $\frac{(2k-1)2k}{2} = (2k-1)k$

Значит, сумма остатков делится на k.

Но т.к. $m=2k$, то тогда $p \vdots k$, т.к. $k>1$,

то $p=k$ (потому что $p \vdots 1$ и $p \vdots p$, других дели-

Доп лист №5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 2 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

телей у p нет).
Но минимальная сумма $2k$ подряд идущих нат. чисел равна $(2k+1)2k$ (если мы начинаем с 1 и идем до m). 2

Но тогда $p \geq \frac{(2k+1)2k}{2} \Rightarrow k \geq \frac{(2k+1)2k}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow k \geq (2k+1)k \Rightarrow 1 \geq 2k+1 \Rightarrow k \leq 0$. Противоречие, т.к. $k > 1$.

Значит, все $m > 2$ не подходят.

Ответ. 1 и 2.

Задача 5.

Ответ. 24.

Пример:

y \ x	0	1	2	3	4	5	6
0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
1	−1	+1	+1	+1	+1	+1	−1
2	−1	+1	+1	+1	+1	+1	−1
3	−1	+1	+1	+1	+1	+1	−1
4	−1	+1	+1	+1	+1	+1	−1
5	−1	+1	+1	+1	+1	−1	−1
6	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

Всего в таблице $7 \cdot 7 = 49$ клеток, в рамке таблицы их $7 \cdot 4 - 4 = 24$. Значит внутри их $49 - 24 = 25$ клеток. Предположим, что ~~[illegible]~~ можно сделать так, что все 25 клеток будут в себе иметь положн. числа.

Доп. лист №6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 2 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Для удобства введём систему координат
левый верхний угол будет иметь координа-
ты (0;0), а правый нижний (6;6), то
есть ось x идёт слева направо по горизонтали,
а ось y идёт сверху вниз по вертикали.
(на примере оси есть). Если у нас 25 клеток
имеют положительные числа, то мы
не можем ставить отрицательные.
Посмотрим угловые клетки
в квадрата 5 на 5, где ещё нет
чисел. Рассмотрим угловую клетку).
с координатами (1;1), она стать
полож. числом, только если на промежутке
от (1;2) до (1;5) не будет чисел или
на промежутке от (2;1) до (5;1) не
будет чисел. Их там нет. Поэтому там
будет полож. число. Рассмотрим клетку
(5;1), она может быть полож. числом,
только если на промежутке от (5;2)
до (5;5) не будет чисел. Их там нет.
Поэтому там будет полож. число. Рассмот-
рим клетку (1;5), она может быть
полож. числом, только если на проме-
жутке от (2;5) до (5;5) не будет чисел.
Их там нет. Поэтому туда ставим. Но
тогда в клетке (5;5) не будет полож.

Лист 7 из 9

Доп.лист № 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА00015428 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

числа, т.к. в строке у неё всегда будет лишь 1 отриц. число и в столбце всегда будет лишь 1 отриц. число (т.к. мы ставить отрицательные не можем).

Если же после того как мы поставили полож. число на клетку (1; 1), мы выбрали клетку (1; 5), а не (5; 1), то ситуация была бы аналогичной. Если же после того как мы поставили полож. число на клетку (5; 5), а не (5; 1), то тогда бы нельзя было бы поставить полож. число на клетки (1; 5) и (5; 1). Ставить полож. числа на другие клетки не имеет смысла, т.к. это не поможет поставить угловые клетки в квадрате 5 на 5.

Значит, максимальное количество полож. чисел это 24. Давайте его построим. Как раньше поставим полож. числа на клетки (1; 1), (1; 5) и (5; 1). В клетку (5; 5) мы положим отрицательное число. В клетку (5; 2) поставим полож. число, т.к. произведение строк полож. Тоже самое для клетки (5; 3), тоже самое для клетки (5; 4)

Доп. лист № 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 5 4 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

В клетку (2; 5) поставим полож. число, т.к. произведение столбцов положн. тоже самое для клетки (3; 5), тоже самое для клетки (4; 5). Поставим положн. число для клетки (1; 2), т.к. произведение столбца положн. тоже самое для клетки (1; 3), тоже самое для клетки (1; 4). Поставим положн. число в клетку (2; 1), т.к. произведение строк положн., тоже самое для клетки (3; 1), тоже самое для клетки (4; 1) ~~[illegible]~~ и для всех оставшихся клеток (произведение в строке будет положн.)

В итоге только в клетку (5; 5) мы поставили отриц. число, а в другие 24 клетки мы поставили положн. число.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	5	85

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	1	5	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть x - первое число; y - второе.
после данной (первой) операции (удаления 5) первое число примет вид $\frac{x-5}{10}$ (последнюю убрали и поделили на 10, т.к остался нолик ($\overline{...x5} = (10x+5-5):10$), а второе приняло вид $10y+1$ (т.к $10y = \overline{y0}$; $\overline{y0}+1 = \overline{y1}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ имеет место система:

$$\begin{cases} x+y=2022 \\ \frac{x-5}{10} + (10y+1) = 2252 \end{cases}$$

$x = 2022 - y$
↓ подставим во 2-е:

$$\frac{2022-y-5}{10} + 10y = 2251 \quad |\cdot 10$$

$$2022 - y - 5 + 100y = 22510$$

$$99y = 20493$$

$y = 207$

$x = 2022 - 207 = 1815$

одно решение!

$22510 - 2022 = 20488$; $20488 + 5 = 20493$

$20493 : 99 = 207$

1815 и 207

Пр-ка!

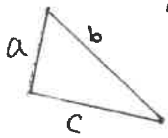
$1815 + 207 = 2022$

$181 + 2071 = 2252$

ч.т.д.

Ответ: 1815 и 207

№2



Пусть a, b, c стороны этого $\Delta^{ка}$ тогда $P = a+b+c = 4$.

Д-ть: $a^2+b^2+c^2 \overset{!}{>} 5$

Д-во:

т.к стороны $\Delta^{ка}$ положительные (не отр.), то $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$, т.к

$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}c^2$; По н-ву Коши (о средних) $\rightarrow$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2 \geq 2\cdot\frac{1}{2}ab = ab$, аналогично $\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2 \geq bc$

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ и $\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a^2 \geq ac \Rightarrow$ сумма $\geq ab+bc+ac$.

Тогда, т.к $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = 16$

$2(ab+bc+ac) \leq 2(a^2+b^2+c^2)$ (по д-му выше) $\Rightarrow$

$(\leq 3)^*(a^2+b^2+c^2) = 16 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{16}{\leq 3} \geq 5\frac{1}{3} > 5$ ч.т.д.

пояснение: $2(ab+bc+ac) \leq 2(a^2+b^2+c^2)$, заменив это на большее, я получу
*(т.к какое наиб. число по $(a^2+b^2+c^2)$ может стоять слева (получу ≤ 3)

Лист 1 из 6

Доп. лист №1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 1 5 6 2 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2 (пояснение)

получив, что в $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ содержится не больше 3х множителей $(a^2+b^2+c^2)$ $(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=x(a^2+b^2+c^2)$, т.к $2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ac)$ получаем, что $x\leq 3$ $\to$ из этого находим, что $a^2+b^2+c^2=\frac{16}{x}$ $(16=(a+b+c)^2)$, а т.к x не больше ~~3х~~ трёх, то $a^2+b^2+c^2\geq\frac{16}{3}$, что >5.

ч.т.д.

№ 4

пусть степени равны p и q.

$n^p+n^q\neq a^2$

Д-м, что нет чисел <4, и >1 $\to$ удовл. условию.

При $n=2$: $2^2+2^5=36=6^2$ $\varnothing$

При $n=3$: $3^2+3^3=9+27=36=6^2$ $\varnothing$

(один нельзя)

Д-м, что при $n=4$ мы никогда не получим квадрат.

Заметим, что квадрат числа $(\in N)$ даёт остаток 0 или 1, при делении на 3 (т.к $(3k)^2\overset{3}{\equiv}0$; $(3k+1)^2=9k^2+6k+1\overset{3}{\equiv}1$; и $(3k+2)^2=9k^2+12k+4=9k^2+12k+3+1\overset{3}{\equiv}1$).

А т.к $4=3+1$, то $4^k\overset{3}{\equiv}\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdots1}_{k}=1$ $\Rightarrow$ 4 в любой степени имеет остаток один по mod. 3.

(остатки умн-ся, а $4\overset{3}{\equiv}1$, $1\cdot1\cdots1=1$)

Поэтому $4^p\overset{3}{\equiv}1$; $4^q\overset{3}{\equiv}1$ но тогда сумма $\overset{3}{\equiv}2$.

$4^p+4^q\overset{3}{\equiv}1+1=2$ (ост.ки слаг-ся), а число $\overset{3}{\equiv}2$ (вида $3k+2$) квадратом быть не может (выше д-л) $\Rightarrow$ сумма 4^p+4^q $(p,q\in N)$ $\to$ не квадрат $(\in N)$

Ответ: 4 наименьшее такое число. ч.т.д.

Доп лист №2

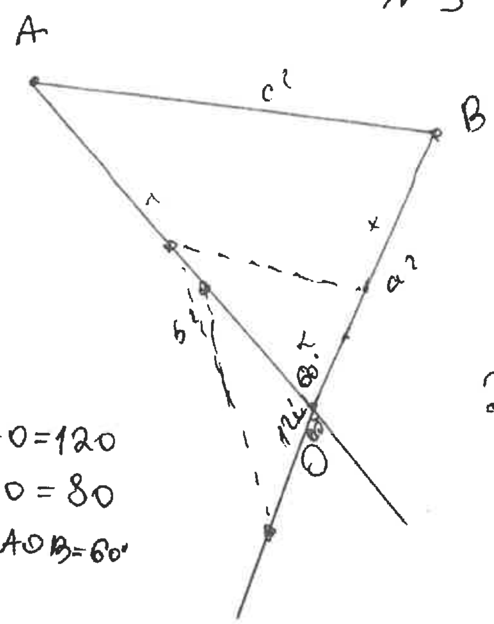
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 1 | 5 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



$AO=120$
$BO=80$
$\angle AOB=60°$

Теорема косинусов:

$c^2=b^2+a^2-2\cdot b\cdot a\cdot\cos\alpha$

Рассмотрим три ситуации (три пр-ка времени); 1: пока второй бежит до O из B (пока не выше за O) → и расстояние м/ду ними.
2: первый (пока 1ый не выбежал за O) ~~до бегает~~ бежит до O, а второй бежит за O.;
3: оба бегут за пределами O (на продолжениях AO и BO), т.е когда 1ый (из AВО) пробежал O и т.д.

В первой ситуации (т.к их скорости =, то за равное время, они пр-тот = расстояния); Пусть они пробежали x $(0\le x\le 80)$, тогда до O → первому ост. ев $120-x$, второму $80-x$, по теореме косинусов найдём расстояние между ними:

$(S\text{ м/ду})^2=(120-x)^2+(80-x)^2-2\cdot(120-x)(80-x)\cdot\frac{1}{2}$ $(\cos 60°)$

$(120-x)^2+(80-x)^2-(120-x)(80-x)=$

$14400-240x+x^2+6400-160x+x^2-(9600-200x+x^2)=$

$=14.400-\underset{200x}{\cancel{240}x}+x^2+6400-\cancel{160x}+x^2-9600+200x-\cancel{x^2}=$

$2x^2+20800-9600-200x=2x^2+11.200-200x$

$=(x-100)^2+x^2+1.200\ ;\ >1200;\quad (S\text{ м/ду})^2>1200.$

т.к $x\le 80$, >0 ⟹

рассмотрение 2 и 3 ситуации → на сл. стр.

,Д, оп. лист №3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 1 5 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3 (продолжение)

2 ситуация → Теперь пока первый доходит до О (по АО). – второй уходит за О по лучу ВО → посчитаем также по т. косинусов расстояние между (когда второй был в О, первому оставалось 120 − 80 = 40). Пусть они прошли по y → тогда первому до О осталось 40 − y ($0 \le y \le 40$), тогда по т. косинусов:

$$(S\,\text{м/ду})^2 = (40-y)^2 + y^2 - 2y\cdot(40-y)\cdot -\tfrac{1}{2} \;\; (\cos 120^\circ) =$$

$$= (40-y)^2 + y^2 + y(40-y) = 1600 - 80y + y^2 + \cancel{y^2} + 40y - \cancel{y^2} =$$

$$= 1600 - 40y + y^2 = (y-20)^2 + 1200,$$ т.к. $0 \le y \le 40$, а $(y-20)^2 \ge 0 \Rightarrow$ сумма ≥ 1200 (наименьший рез-т достигается при $y=20$, т.к. квадрат ≥ 0).

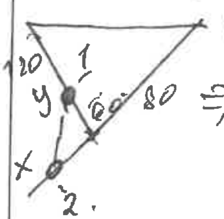
3 ситуация → Первый выбежал за О и бежит по лучу АО → вдаль, как и второй по ВО (второй уже пробежал 40м) → пусть прошли z →

$$(S\,\text{м/ду})^2 = z^2 + (40+z)^2 - \cancel{2}\cdot z\cdot(40+z)\cdot \tfrac{1}{\cancel{2}} \;\; (\cos 60)$$

$$= z^2 + 1600 + \cancel{z^2} + 80z - 40z - \cancel{z^2} = (z+20)^2 + 1200 \rightarrow$$
$+40z$

т.к $0 \le z$ $\Rightarrow (z+20)^2 \ge 400 \Rightarrow (S\,\text{м/ду})^2 \ge 1600$.

Получаем, что наименьшее расстояние достигается, когда первый ещё добегает луч АО, а второй бежит за О по ВО лучу (ху) наим. S, кроме того это д-ся минимум при $y = 20$, т.е. когда второй пробежал 20 от точки О (за о).



$\Rightarrow S^2 = 20^2 + (40-20)^2 + 20^2 = 400 \cdot 3 = 1200$ → по т. косинусов.

$S = \sqrt{1200} = 10\sqrt{12} = 20\sqrt{3}$ (≈ 34)

Ответ: наименьш. расстояние $= 20\sqrt{3}$

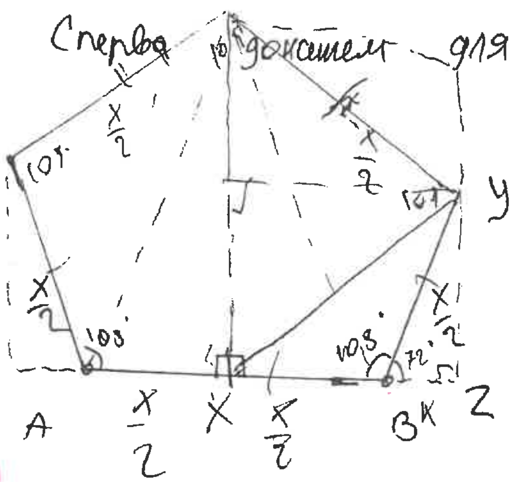
Доп. лист № 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 1 5 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N.5



Сперва докажем для „правильного пятиугольника. Выделим произвольную сторону, т.к все углы в прав. 5-ке по 108°. ⇒ и в этом случае прямые будут сост. с A и B по 108.

Заметим тогда, что по теореме косинусов и синусов $XZ = ZY$ у пр-го пятиугольника

~~пример на выпукл. п-ик.~~

Тогда, заметим, что должно быть число, что

$b^2 = a^2 + a^2$; $b^2 = 2a^2$ $b\ 2 = \frac{b^2}{a^2}\ \sqrt{2} = \frac{b}{a}$ $\sqrt{2} \notin R$

а т.к b и a целые $\Rightarrow \varnothing$

Доп. мат. №5

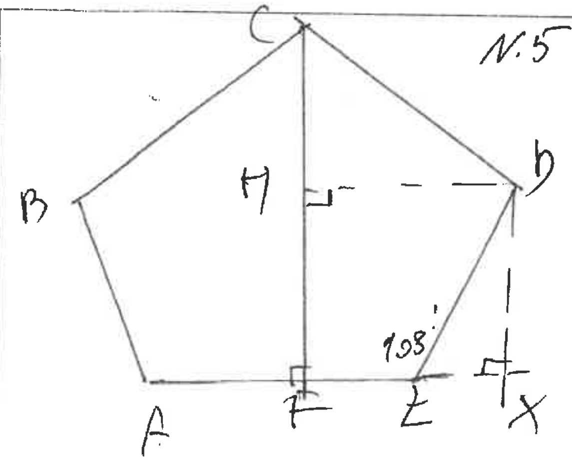
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 1 5 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N.5



Рассмотрим „правильный пятиугольник ABCDE все углы = $\frac{540}{5} = 108°$;

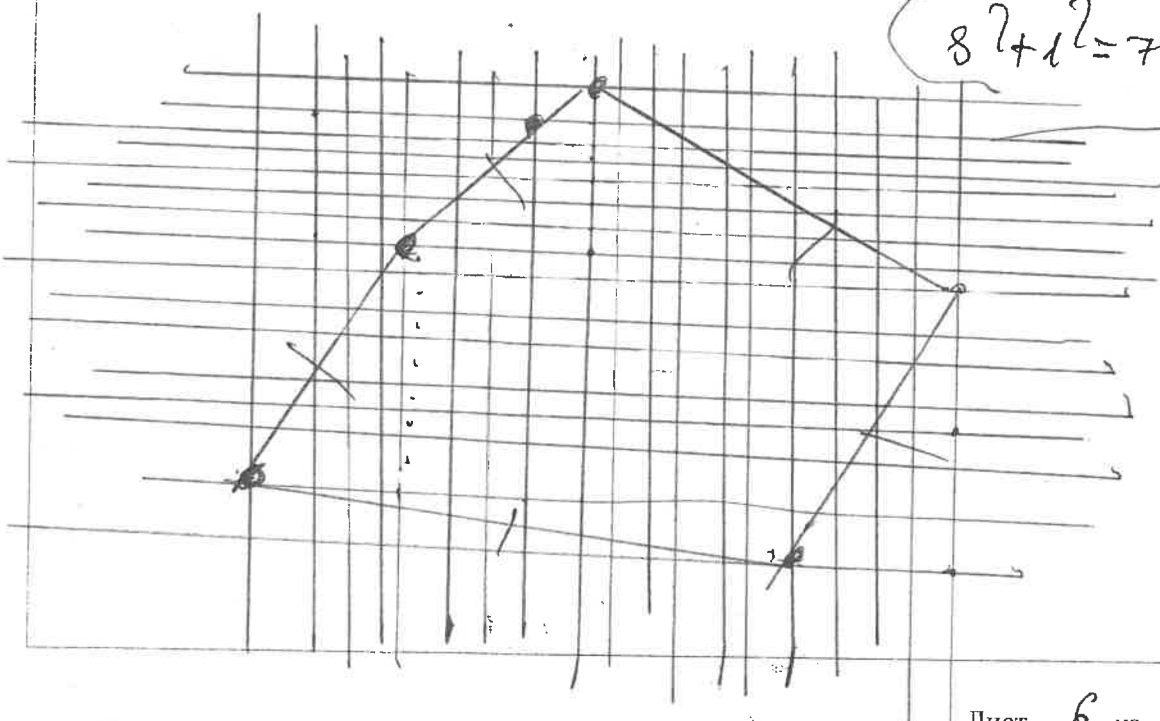
Т.к

Т.е по теореме (или можно - д-ть по косинусам (синусам)) = $FX = XD$, т.е это квадрат (HDFX)

Тогда заметим, что должно быть, числа a и b, что $b^2=a^2+a^2$ $b^2=2a^2$ $2=\frac{b^2}{a^2}$ $\sqrt{2}=\frac{b}{a}$, а т.к $\sqrt{2}$ иррац. - нет таких чисел a и b $\in Z$.

Пример для выпукл. п-ка

$8^2+1^2=7^2+4^2$



1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	20	20	98

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______

М	А	0	0	0	2	0	0	6	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть $\frac{a}{b}$ – вид нужных дробей. Тогда $\frac{a}{b}$ – правильная дробь, т.е. $a < b$; $a + b = 100$, т.е. $b = 100 - a$. При этом НОД$(a, b) = 1$, т.е. НОД$(a, 100-a) = 1$. Т.к. $a < b$, то $a < 100 - a$,

$2a < 100$

$a < 50$

Рассмотрим все $a < 50$.

Пусть НОД$(a, 100-a) = d$. Тогда $a = a_1 d$; $100 - a = 100 - a_1 d$, НОД$(a, 100-a) = \cancel{a_1 d}$ НОД$(a_1 d, 100 - a_1 d) = d$.

Значит $a_1 d \vdots d$ и $100 - a_1 d \vdots d \Leftrightarrow 100 - a_1 d = kd$,

$100 = (k + a_1) d \Rightarrow$

$100 \vdots d$. При этом $100 \vdots 2$ и $100 \vdots 5$ из простых делителей. Значит для подходящих a нужно, чтобы $\cancel{d \vdots}$ $a \not\vdots 2$ и $a \not\vdots 5$. При этом a может равняться 1, потому что тогда $d = 1$.

Рассмотрим все подходящие ~~дроби, в которых~~ числа a

~~$\frac{0}{100}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{3}{}$~~

$a \in \{\cancel{0}, 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49\}$. Всего возможных a 20, значит существует 20 правильных несократимых дробей, у которых сумма числителя и знаменателя равна 100.

Ответ: 20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА000200006822

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть изначально у каждого бельчонка было n сосновых и m кедровых шишек. По условию, $n+m<25$

Про первого бельчонка известно, что у него изменилось количество шишек и теперь у него $n+n$ сосновых и $m+26$ кедровых, при этом $2n>m+26$. Аналогично у второго бельчонка стало $m+m=$ $=2m$ кедровых и $n-4$ сосновых, откуда $n>4$, при этом $2m>n-4$

Имеем 2 неравенства

$$\begin{cases}2n>m+26\\2m>n-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4n>2m+52\\2m>n-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4n-52>2m\\2m>n-4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$4n-52>2m>n-4 \Rightarrow 3n>48 \Rightarrow n>16$. Кроме того,

$$\begin{cases}2n>m+26\\2m>n-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2n>m+26\\4m>2n-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2n>m+26\\4m-8>2n\end{cases} \Leftrightarrow$$

$4m+8>2n>m+26 \Rightarrow 3m>18 \Rightarrow m>6$

Это значит, что $n>16$ и $m>6$. Т.к. n и m - ~~целые~~ целые числа, то $n\geqslant 17$ и $m\geqslant 7$, откуда $m+n\geqslant 24$. Но вначале дано условие, что $m+n<25$, значит ~~Изначаль~~ сумма шишек изначально была равна 24, что возможно лишь при $n=17$ и $m=7$

Ответ: 17 сосновых и 7 кедровых

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 6 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Сумма m последовательных натуральных чисел, начиная с какого-то n, представляет собой:

$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+m-1) = \frac{(2n+m-1)m}{2}$ по формуле суммы арифметической прогрессии. При этом

$\frac{(2n+m-1)m}{2} = p$ простое

Рассмотрим 2 случая:

1) $m \vdots 2$, т.е. $m=2k$.

Тогда $p = k(2n+2k-1)$. Т.к. числа p, m, n, k - натуральные, то $k(2n+2k-1)$ может быть только произведением 1 и простого числа p (p - простое и делится только на $\pm$себя и на ± 1).

Если $k=1$, то $2n+2k-1 = 2n+2-1 = 2n+1 = p$. Такое возможно, например $p=3$ $n=1$.

Если $2n+2k-1=1$, то $2n+2k=2$, $n+k=1$, чего не может быть т.к. $n \geq 1$ и $k \geq 1$, $n+k \geq 2$.

Значит при $m \vdots 2$ возможен лишь случай, когда $k=1$ и $m=2$

Нет примера реализации.

2) $m \not\vdots 2$, т.е. $m = 2k+1$, $k \geq 0 \in \mathbb{Z}$

Тогда $p = \frac{(2k+1)(2n+2k+1-1)}{2} = \frac{2(2k+1)(n+k)}{2} = (2k+1)(n+k)$ — это тоже произведение 1 и p аналогично со случаем 2).

Если $2k+1=1$, то $k=0$, $n+k=n=p$. Такое очевидно возможно

Если $n+k=1$, то т.к. $k \geq 0$ и $n \geq 1$, то ~~$n+k \neq 1$ толь~~ $n+k \not> \geq 1$ и $n+k=1$ только при случае $n=1, k=0$, тогда $2k+1=p=1$, но 1 - не простое число

Значит, при $m \not\vdots 2$ возможен лишь случай $k=0, m=1$. Ответ: m может равняться 2 и 1.

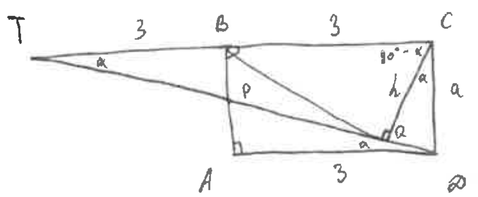
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 6 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4



Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $BC = 3$, т. P – середина AB, $CQ \perp PD$

Найти: BQ

Решение:

Пусть $AB = a$, тогда $AP = PB = \frac{a}{2}$. $CD = a$. $BC = AD = 3$.

Пусть $\angle QCD = \alpha$ тогда $\angle QDC = 90° - \alpha$ ($\angle CQD = 90°$).

$\angle PDA = 90° - \angle CDQ = 90 - 90 + \alpha = \alpha$ ($ABCD$ – прямоугольник).

Обозначим CQ за h.

Продлим PD за точку P до пересечения с BC в точке T.

Т.к. $BP \parallel CD$, $BP = \frac{a}{2} = \frac{CD}{2}$ $\Rightarrow$ BP – средняя линия в $\triangle CTD$.

Т.к $\angle TCD = 90°$, $\angle CDC = 90° - \alpha$, то $\angle T = 90° - 90° + \alpha = \alpha$.

~~$\sin\alpha$~~ =

Таким образом, треугольники TCQ, TDC, CDQ подобны по 2 двум углам.

Т.к. BP – ср. линия в $\triangle CTD$, то $BT = BC = 3$. $\sin\alpha = \frac{h}{6}$ в $\triangle TCQ$.

По теореме косинусов

$$BQ^2 = BC^2 + CQ^2 - 2\,BC\cdot CQ\cdot\cos\angle BCQ =$$

$$= 9 + h^2 - 2\cdot 3\cdot h\cdot\cos(90-\alpha) =$$

$$= 9 + h^2 - 6h\cdot\sin\alpha = 9 + h^2 - 6h\cdot\frac{h}{6} =$$

$$= 9 + h^2 - h^2 = 9,$$ откуда $BQ^2 = 9$,

то есть $BQ = 3$

Ответ: $BQ = 3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА000200068222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

	A	B	C	D	E	F	G
7	–	–	–	–	–	–	–
6	–	+	+	+	+	+	–
5	–	+	+	+	+	+	–
4	–	+	+	+	+	+	–
3	–	+	+	+	+	+	–
2	–	–	+	+	+	+	–
1	–	–	–	–	–	–	–

Пусть „–" - это отрицательное число, а „+" - положительное.
Обозначим номера строк и столбцов так, как показано на рисунке.
Сначала поставим „+" в B6, F6, F2, ~~т.к.~~ мы можем это сделать, т.к. B1 и B7 = „–", F7 и F1 = „–", G2 и A2 = „–".
Затем поставим „–" в B2 (B6 = „+", B1 = „–")
Далее поставим „+" в C2 и B3 (C1 = C7 = A3 = G3 = „–"). После этого можно заполнить „+" клетки между B3 и B6, B6 и F6, F6 и F2, F2 и C2, и заполнить квадрат C3 – E5 „+" (все окружающие клетки – „+"). Таким образом, количество положительных чисел в таблице 24. Один „–" обязательно надо поставить, докажем почему. Рассмотрим последнюю крайнюю клетку квадрата B2 – F6 из {B2, B6, F6, F2}, которая не заполнена „+" (предположительно до этого „–" в ~~квадрате~~ B2 – F6 не находятся). Пусть для определенности это B2. Тогда B1 = „–", A2 = „–", и все ~~клетки~~ ближайшие клетки в B3 – B6 и C2 – F2, если заполнены (а клетки B6 и F2 точно заполнены по нашему предположению), содержат положительное число. Таким образом, B2 = „–", и ~~в клетке~~ таблице не более 24 положительных чисел.

Ответ: 24

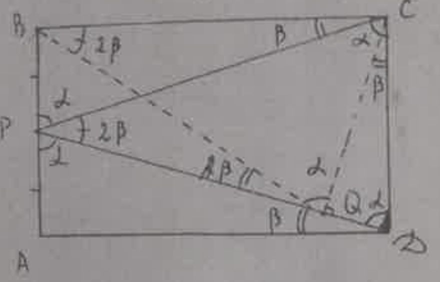
Вариант № ______

M	A	0	0	0	2	0	3	1	9	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. По условию $BC = AD = 3$



Пусть $\angle BPC = \angle APD = \alpha$, $\angle BCP = \angle PDA = \beta$ ($\triangle BPC = \triangle APD$, $BP = PA$, $BC = AD$, $\angle PBC = \angle PAD = 90°$).

$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle DPC = 180° - 2\alpha = 2\beta \Rightarrow$

$\angle PCD = \angle PDC = \alpha$. $(2\alpha + 2\beta = 180°)$

Из прямоугольного $\triangle CQD$: $\angle CDQ = \alpha \Rightarrow \angle QCD = \beta$.

Заметим, что $PBCQ$ - вписанный $(\angle PBC + \angle CQP = 90° + 90° = 180°)$.

$\angle BQP = \angle BCP = \beta$, $\angle DPC = \angle QBC = 2\beta$. (как опирающиеся на дуги PB и CQ соотв).

$\angle BCQ = 90° - \beta = \alpha$. $\angle CQP = 90° \Rightarrow \angle BQC = 90° - \beta = \alpha$.

Следовательно, $\angle BCQ = \angle CQB = \alpha$, $\angle QBC = 2\beta$ $(2\alpha + 2\beta = 180°) \Rightarrow$

$\triangle BQC$ - равнобедренный, $BQ = BC = 3$.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	19	20	5	84

Ответ: $BQ = 3$.

№1.

Пусть дробь $\frac{a}{b}$ удовлетворяет условию. Тогда $a + b = 100$, $0 < a < b$, НОД $(a; b) = 1$. Пусть $a = 50 - t$, $b = 50 + t$.

$0 < t < 50$, $t \in \mathbb{N}$. Отсюда $\frac{a}{b} = \frac{50-t}{50+t}$. Заметим, что если $t \vdots 2$, ~~то НОД (a; b)~~ = то $a \vdots 2$ и $b \vdots 2 \Rightarrow \frac{a}{b}$ - сократимая.

Если $t \vdots 5$, то $a \vdots 5$ и $b \vdots 5 \Rightarrow \frac{a}{b}$ - также сократимая.

Заметим, что больше ~~более~~ ни при каких t $50 - t$ и $50 + t$ не являются не взаимно простыми, т.к. $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

Например, если $50 - t$ и $50 + t \vdots 3$, то и $(50 - t) + (50 + t) \vdots 3 \Rightarrow 100 \vdots 3$, что невозможно. То же самое работает и с остальными простыми числами < 100, кроме 2 и 5. Значит, таких несократимых дробей ровно $\underset{\text{число чётных чисел}}{50 - 25} - \underset{\text{число нечёт чисел} \vdots 5}{5} = 20$

Вариант № ____ МА00020319222
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. Продолжение.

Нетрудно проверить, что условию задачи удовлетворяют несократимые дроби:

1) $\frac{43}{51}$ НОД $(43;51)=1$; 2) $\frac{47}{53}$ НОД $(47;53)=1$; 3) $\frac{43}{57}$ НОД $(43;57)=1$;

4) $\frac{41}{59}$ НОД $(41;59)=1$; 5) $\frac{31}{61}$ НОД $(31;61)=1$; 6) $\frac{37}{63}$ НОД $(37;61)=1$;

7) $\frac{33}{67}$ НОД $(\cancel{37}\ 33;67)=1$; 8) $\frac{31}{69}$ НОД $(31;69)=1$; 9) $\frac{29}{71}$ НОД $(29;71)=1$;

10) $\frac{27}{73}$ НОД $(27;73)=1$; 11) $\frac{23}{77}$ НОД $(23;77)=1$; 12) $\frac{21}{79}$ НОД $(21;79)=1$;

13) $\frac{19}{81}$ НОД $(19;81)=1$; 14) $\frac{17}{83}$ НОД $(17;83)=1$; 15) $\frac{13}{87}$ НОД $(13;87)=1$;

16) $\frac{11}{89}$ НОД $(11;89)=1$; 17) $\frac{9}{91}$ НОД $(9;91)=1$; 18) $\frac{7}{93}$ НОД $(7;93)=1$;

19) $\frac{3}{97}$ НОД $(3;97)=1$; 20) $\frac{1}{99}$ НОД $(1;99)=1$;

Ответ: 20 дробей.

№3. $n, m > 0$.

Пусть $\underbrace{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+m-1)}_{m\ \text{чисел}} = n\cdot m + \frac{m(m-1)}{2} =$

$= m\left(n+\frac{m-1}{2}\right) = p$. Отсюда, p представляется в виде ~~суммы~~ произведения двух чисел. Если $n+\frac{m-1}{2}$ - ~~чётное~~ целое, то $m=1$ (т.к. у простого числа есть только два натуральных делителя: 1 и p). Пусть $n+\frac{m-1}{2}$ - нецелое. ~~То~~ Это возможно только в случае, если m - чётное. Тогда $\frac{2n+m-1}{2}$ будет иметь вид $k\frac{1}{2}$, где k - натуральное число. Следовательно, $m=2$, иначе p будет представляться в виде произведения $t(2n+m-1)$, где $t=\frac{m}{2}$, что противоречит простоте p.

Ответ: при $m=1$, $m=2$.

Нет примеров, что это реализуется.

№2.

Пусть у бельчат было по x сосновых и по y кедровых шишек. Тогда после у первого бельчонка оказалось $2x$ сосновых и $y+26$ кедровых шишек, а у второго $x-4$ сосновых и $2y$ кедровых шишек. $x+y<25$.

По условию:

$$\begin{cases} 2x > y+26 \\ 2y > x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 2x-26 \\ y > \frac{x}{2}-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2}-2 < y < 2x-26 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2}-2 < 2x-26$$

$$-1{,}5x < -24$$

$$x > 16$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x > \frac{y}{2}+13 \\ x < 2y+4 \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{2}+13 < x < 2y+4$$

$$-1{,}5y < -9$$

$$y > 6.$$

Но используя условие $x+y<25$ получаем:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} y>6 \\ x>16 \end{matrix}\right] + \\ x+y<25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>22 \\ y>6 \\ x>16 \\ x+y<25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 24 \\ x \geq 7 \\ x \geq 17 \\ x+y<25 \end{cases} \Rightarrow$$

Отсюда мы видим, что система имеет единственное решение $x=17$, $y=7$.

~~Провер~~ Проверим:

$$\begin{cases} 2\cdot 17 > 7+26 \\ 2\cdot 7 > 17-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34 > 33 \\ 14 > 13. \end{cases}$$

Ответ: по ~~17~~ 17 сосновых и по 7 кедровых шишек у каждого бельчонка.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

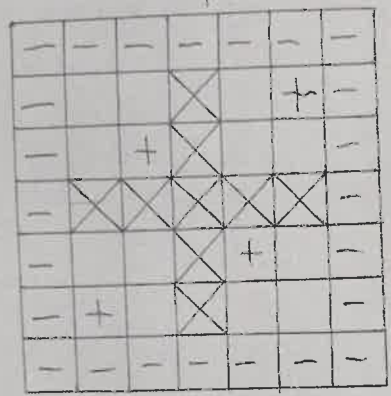
Вариант № ____ МА00020З/922

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

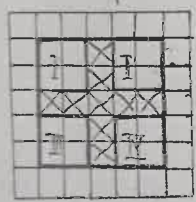
№5. Ответ: 19 положительных клеток.

рис. 1.



Пусть — в клетках означает отрицательное число, а + – положительное. Расставим + так, чтобы они симметрично отражались относительно центра, и никакие 2 не стояли в одном столбце или строке. Тогда каждое следующее число, поставленное в клетку, кроме ~~центральной~~ отмеченных крестиком, будет отрицательным. (рис. 1)

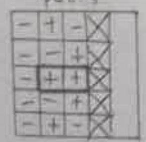
рис. 2.



Если поставить ~~числа~~ по одному числу в каждый из квадратов по числу, то все они будут отрицательными. Повторяя эту операцию в каждом квадрате получим по 2 + и по 2 –. (рис. 2)

Рассмотрим зачёркнутые клетки таблицы. Сначала будем ставить числа в клетки кроме центра. В лучшем случае эти клетки будут заняты плюсами. Например: (рис. 3)

рис. 3



Но в таком случае и центр будет положительным. Тогда положительных клеток будет:

$25 - 8 = 17$.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	~~X~~ 5	~~8~~ 85

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ М А 0 0 0 1 3 9 1 9 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

1. Заметим, если числитель кратен 5, то знаменатель тоже кратен 5, и наоборот. Аналогично если числитель кратен 2, то знаменатель тоже кратен двум, и наоборот. Значит, ни в числителе, ни в знаменателе не должно быть чётных чисел и чисел, кратных 5.

2. Рассмотрим ~~не~~ правильные дроби, сумма числителя и знаменателя которых 100 и они несократимы. ~~а также числитель меньше знаменателя~~.
Поскольку числители и знаменатели таких дробей не могут быть чётными и кратными 5, то они могут оканчиваться только на 1, 3, 5 или 7. Выпишу все эти дроби:

$\frac{1}{99}, \frac{3}{97}, \frac{7}{93}, \frac{9}{91}, \frac{11}{89}, \frac{13}{87}, \frac{17}{83}, \frac{19}{81}, \frac{21}{79}, \frac{23}{77}, \frac{27}{73}, \frac{29}{71},$
$\frac{31}{69}, \frac{33}{67}, \frac{37}{63}, \frac{39}{61}, \frac{41}{59}, \frac{43}{57}, \frac{47}{53}, \frac{49}{51}$ ~~Все эти~~

Таких дробей получилось 20.

~~3. Дробей, у которые удовлетворяют условию, но их числитель больше знаменателя, ровно ещё на одну меньше, чем дробей, удовлетворяющих условию, но у которых числитель меньше знаменателя: это все дроби, которые я выписал в пункте 2, только перевёрнутые, кроме дроби $\frac{99}{1}$, потому что её можно сократить.~~ ~~все эти дроби правильные~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 9 | 1 | 9 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Таких дробей получается 20-1=19.~~

~~Всего дробей: 20+19=39.~~

Ответ: [redacted] 20.

№2

Пусть у каждого бельчонка было c сосновых шишек и k кедровых шишек. Тогда по условию можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2c > k+26 \\ c-4 < 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c > k+26 \ (1) \\ 2k > c-4 \ (2) \end{cases} \Rightarrow 2c+2k > k+26+c-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c+2k > k+c+22 \Rightarrow c+k > 22$$

По условию всего шишек у каждого бельчонка было меньше 25, т.е. $c+k=23$ или $c+k=24$.

Можно вычесть из 1-го ур-ия 2-е:

$2c-2k > k+26-c+4$

$3c-3k > 30$

$c-k > 10$

То есть разница между кол-вом сосновых и кедровых шишек у каждого бельчонка хотя бы 10.

Единственный подходящий пример:

17 сосновых шишек и 7 кедровых, тогда:

$17\cdot 2 > 7+26$, т.е. $34 > 33$ — верно

$17-4 < 2\cdot 7$, т.е. $13 < 14$ — верно

Ответ: 17 сосновых и 7 кедровых

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 9 | 1 | 9 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1. Если $m=1$, то есть подходящий вариант, например: 7 – одно натуральное число, и оно равно простому $p=7$.

2. Если $m=2$, то есть пример: ~~натуральных~~ 1, 2 – 2 последовательных натуральных числа, их сумма равна простому $p=3$.

3. Если m – нечётное число, большее 2, то ~~есть 2 случая~~:
~~1) m последовательных натуральных чисел начинаются с чётного числа. Тогда в последовательности~~
m чисел будут представлять из себя арифметическую прогрессию, в которой нечётное кол-во членов. Значит их сумма будет делиться, как минимум, на средний член этой прогрессии, то есть сумма этих m чисел не будет простым числом.

4. Если m – чётное число, большее 2, то сумма этих m чисел будет состоять из чётного ~~числа чисел~~ кол-ва нечётных чисел и чётного ~~числа~~ кол-ва нечётных чисел, т.е. сумма будет кратна 2 и не будет простым числом, т.к. простое число, кратное 2 всего одно – это 2, а сумма

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ MA000139192 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

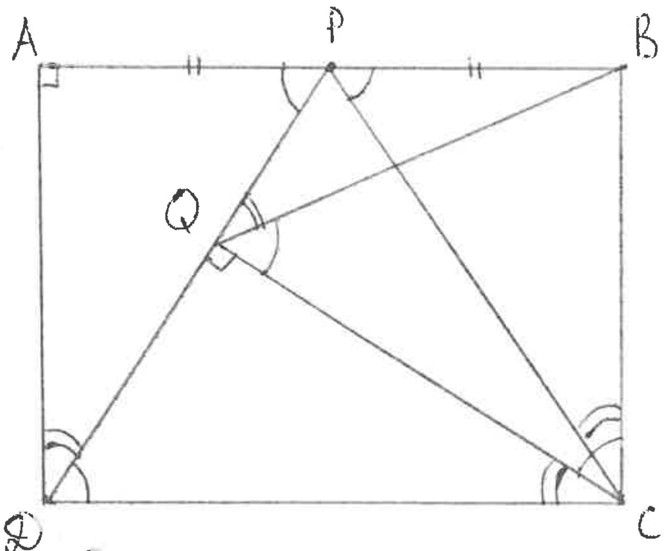
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

m последовательных чисел, где $m > 2$ и $m \vdots 2$ всегда больше 2.

В итоге я доказал, что m не может принимать значения больше 2.

Ответ: $m = 1$ или $m = 2$

№4



1. Проведём отрезок PC.

2. Пусть $\angle QCB = \alpha$, а $\angle QCD = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 90$.

В $\triangle QCD$ $\angle DQC = 90°$ по условию, значит $\angle QDC + \angle QCD = 90°$, известно, что $\angle QCD = \beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle QDC = \alpha$.

$\angle ADC = 90°$, $\angle QDC = \alpha$, $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle ADP = \beta$

$\angle APD + \angle PDA = 90°$, т.к. в $\triangle APD$ $\angle PAD = 90°$,
$\angle ADP = \beta$, $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle APD = \alpha$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА000139192 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Рассмотрим $\triangle DAP$ и $\triangle CBP$:
$AP = BP$ по условию, $AD = BC$, т.к. $ABCD$ - прямоугольник, $\angle DAP = \angle CBP = 90°$, т.к. $ABCD$ - прямоугольник $\Rightarrow \triangle DAP = \triangle CBP \Rightarrow \angle CPB = \angle DPA = \alpha$, $\angle PCB = \angle PDA = \beta$.

4. Рассмотрим четырёхугольник $QPBC$:
$\angle PBC = 90°$, т.к. $ABCD$ - прямоугольник, $\angle PQC = 90°$ по условию ($CQ \perp DP$) $\Rightarrow \angle PQC + \angle PBC = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow QPBC$ можно вписать в окружность.
Тогда $\angle PCB = \angle PQB = \beta$, т.к. они опираются на одну дугу.

5. $\angle PQC = 90°$, $\angle PQB = \beta$, $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle BQC = \alpha$
Рассмотрим $\triangle BQC$:
$\angle BQC = \angle BCQ = \alpha \Rightarrow QB = BC$. Известно, что $BC = 3$, значит, $BQ = 3$.

Ответ: 3.

№5

В таблице 7×7 сделали рамку из отрицательных чисел. Внутри этой рамки осталось 25 клеток (таблица 5×5). Если в этой таблице 5×5 попробовать сделать рамку из ~~полож~~ только положительных чисел, то это не получится, потому что расставив ~~16 положительных чисел~~ из 16

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

клеток этой рамки половину (8) положительных чисел придётся поставить хотя бы 2 отрицательных, т.к. в рамке 4 стороны. и в двух из них поменяется знак следующего числа на ~~лу~~ минус. ~~а нам надо плюс, который можно получить, умножив минус на минус.~~

То есть как минимум 2 числа из 25, которые надо поставить в таблицу, отрицательные. Положительных не больше 25 − 2 = 23.

Приведу пример на 23 положительных числа:

− отрицательные числа

+ положительные числа

	A	B	C	D	E	F	J
1	−	−	−	−	−	−	−
2	−	+	+	+	+	−	−
3	−	+	+	+	+	+	−
4	−	+	+	+	+	+	−
5	−	+	+	+	+	+	−
6	−	−	+	+	+	+	−
7	−	−	−	−	−	−	−

Сначала ставим + в клетки ~~B2, C2, D2, E2, F3, F4, F5, F6~~ B2 и F6, затем ставим − в клетки F2 и B6. Потом ставим + в клетки ~~[illegible]~~ E2, F3, B5, C6. Затем дополняем всю рамку минусами, а потом ставим все плюсы внутри рамки.

Ответ: 23.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	-	80

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА00015643 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 Пусть $\frac{a}{b}$ — правильная несократимая дробь, у которой $a+b=100$.

Р-ие $\frac{a}{b}=\frac{a}{100-a}$ Нам нужно исключить все значения, которые [illegible] a.

если $a:2$ и $b:2$, поэтому $a/2$

если $a:3$ и $b:3$, поэтому [illegible]

если $a:5$ и $b:5$, поэтому $a/5$

т.к. дробь $\frac{a}{b}$ — правильная, то $a<b$; $a<100-a$; $2a<100$; $a<50$

Из натуральных чисел a меньше [illegible] только 49 [illegible] 49. 24 из них — четные числа, их надо вычеркнуть.

Остаются:

$\frac{49}{51}$ $\frac{47}{53}$ $\frac{45}{55}$ $\frac{43}{57}$ $\frac{41}{59}$ $\frac{39}{61}$ $\frac{37}{63}$ $\frac{35}{65}$ $\frac{33}{67}$ $\frac{31}{69}$ $\frac{29}{71}$ $\frac{27}{73}$ $\frac{25}{75}$ $\frac{23}{77}$ $\frac{21}{79}$ $\frac{19}{81}$ $\frac{17}{83}$ $\frac{15}{85}$ $\frac{13}{87}$ $\frac{11}{89}$ $\frac{9}{91}$ $\frac{7}{93}$ $\frac{5}{95}$ $\frac{3}{97}$ $\frac{1}{99}$

Из них каждая 5 будет сокращаться на 5

Остаются 25 − 5 = 20 штук дробей:

$\frac{49}{51}$ $\frac{47}{53}$ $\frac{43}{57}$ $\frac{41}{59}$ $\frac{39}{61}$ $\frac{37}{63}$ $\frac{33}{67}$ $\frac{31}{69}$ $\frac{29}{71}$ $\frac{27}{73}$ $\frac{23}{77}$ $\frac{21}{79}$ $\frac{19}{81}$ $\frac{17}{83}$ $\frac{13}{87}$ $\frac{11}{89}$ $\frac{9}{91}$ $\frac{7}{93}$ $\frac{3}{97}$ $\frac{1}{99}$

~~Ответ~~

Ответ: существует 20 правильных несократимых дробей, у которых сумма числителя и знаменателя 100.

34

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 Пусть у каждого Бельчонка сначала было a сосновых шишек и b кедровых, тогда по условию $a+b<25$

1 набрал столько же сосновых и 26 кедровых и сосновых оказалось больше

$2a > b+26$.

2 набрал столько же кедровых и съел 4 сосновые, кедровых оказалось больше

$2b > a-4$

$2a > b+26$
$+\ 2b > a-4$

$2(a+b) > a+b+22$

$25 > \boxed{a+b > 22}$ Значит, всего сосновых и кедровых шишек у каждого было 23 или 24

$2a > b+26 \Rightarrow 2a-b > 26$
$+\ a+b > 22$

$3a > 48$
$a > 16$

$2b > a-4 \Rightarrow 2b-a > -4$
$+\ a > 16$

$2b > 12$
$b > 6$

Значит, минимальное количество сосновых шишек 17, а кедровых — 7.

Тогда их минимальное количество у каждого из бельчат вместе 24. А по условию их было меньше 25, значит это единственный возможный случай, больше сосновых или кедровых шишек быть не может, т.к. из неравенства $25 > a+b > 22$ следует, что их могло быть 24 или 23, 23 быть не может, т.к. в этом случае было бы меньше какого-то вида шишек, чем нужно. Значит, всего было 24 шишки: 17 сосновых и 7 кедровых.

Ответ: у каждого Бельчонка изначально было 24 шишки: 17 сосновых и 7 кедровых.

31 ~~7~~

1+2=3

3+4=2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА0001564322

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 Возьмём 3 подряд идущих нат числа, их можно представить как $3k, 3k+1, 3k+2$ (если они могут идти в другом порядке по своей кратности 3, например $3k+1, 3k+2, 3k+3$, или $3k+2, 3k+3, 3k+4$, то кратность суммы от этого не изменится) их сумма будет $9k+3$ ($3(3k+1)$) $\vdots 3$.

Возьмём $n = 2n+1$ подряд идущих нат числа, где n натурц. их сумма будет равна $(2n+1)k + (2n+1)k+1 + \ldots + (2n+1)k + 2n =$

$= (2n+1)(2n+1) + \underbrace{(1+2+3+\ldots+2n)}_{\text{четное количество чисел можно разбить по парам с общей суммой } 2n+1} =$

$= (2n+1)\frac{2}{2} + (2n+1)\cdot\frac{2n}{2} = (2n+1)((2n+1)+n)$

Значит, для $\forall n \neq 2$ сумма n последовательных натуральных чисел будет кратна n. Поэтому n не может быть равен нечетным числам

Возьмём 4 подряд идущих числа

$4k + 4k+1 + 4k+2 + 4k+3 = 4\cdot 4k + 6 = 4(4k+2)$

Возьмём 6 подряд идущих числа

$6k + 6k+1 + \ldots + 6k+5 = 6k\cdot 6 + (1+2+3+4+5) = 6k\cdot 6+15$

~~[illegible]~~

~~Любое четное число можно представить либо как сумму [illegible] (2k+1), с суммой (2k+1) подряд идущих чисел будет [illegible], сумма следующих [illegible]~~

Для любого n, которое кратно 4, т.е. $n = 4n$, не $\vdots$

$4nk + 4nk + \ldots + 4nk + 4n - 1 = 4nk\cdot 4n + \underbrace{(1+2+\ldots+4n-1)}$

эта сумма будет состоять из пар чисел с суммой $4n$ и центрального числа равного $2n$,

В этом случае сумма будет $\vdots 2$, поэтому n будет кратным при любом $n \vdots 4$ то $n \neq 4n$.

Но если $n \vdots 4$, как $\vdots 2$, то ~~[illegible]~~ $n = 4n-2$.

~~сумма [illegible]~~

~~$(4n-2)k + (1+2+3+\ldots+4n-2)$ эта сумма будет состоять из пар [illegible] и центрального числа, которое будет [illegible]~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МЛ000156 4322

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Предположим~~
Любое такое число $n:2$, но $\not{:}4$ можно представить, как $2(2n-1)$
Сумма $n+2(2n-1)$ чисел будет состоять из суммы [illegible]
$2n-1$ числа и [illegible] $2n-1$ последующих чисел [illegible]
первых $(2n-1)$ чисел будет $:(2n-1)$ т.к. это [illegible],
сумма вторых $(2n-1)$, следующих за первыми, тоже будет $:(2n-1)$, т.е не
будет $(2n-1)$ и их сумма [illegible]
будет простым числом. Значит, $n \neq 2(2n-1)$
~~Однако среди таких чисел, что $n:2$, но $\not{:}4$ есть простое число 2, его надо рассмотреть отдельно,~~

Среди таких чисел, что $n:2$, но $\not{:}4$ есть
число 2. Его надо рассмотреть отдельно, т.к.
~~оно [illegible] нельзя представить так. [illegible] I число [illegible]~~
оно не попадает под общее правило, его
можно представить, как сумма двух сумм
I сумма -1 число, II -1 число.
если взять 2 числа $\in N$ и подряд идущих, то
~~[illegible]~~ их сумма будет $2a+1$ - нечетное число

Значит, n может равняться 2.

$1+2=3$
$2+3=5$
$3+4=7$
~~4+5~~

n также может равняться 1. В этом случае
будет равен исходному числу, если
оно ~~целое~~ новое, как и p тоже
например, ~~2~~ $p=2$ $p=3$ $p=5$

Ответ: $n=1$ или 2.

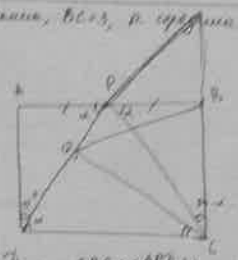
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 Дано ABCD - прямоугольник, $BC=3$, P - середина AB,
$CQ \perp DP$, $Q \in DP$
Найти BQ
Решение

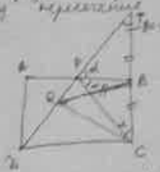


пусть $\angle APD = \alpha$, тогда
$\angle ADP = 90-\alpha \Rightarrow \angle CDP = \alpha$
$\angle DCQ = 90-\alpha$
проведем отрезок CP
$AP = BP$
$AD = CB$
$\angle DAP = \angle CBP$ $\Rightarrow \triangle APD = \triangle BPC$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow \angle BPC = \angle APD = \alpha \Rightarrow \angle BCP = 90-\alpha$

$\angle PCQ = 90-(90-\alpha)-(90-\alpha) = 90-90+\alpha-90+\alpha = 2\alpha-90$

$\angle BCQ = 2\alpha-90+90-\alpha = \alpha$

продлим прямые QP за т. P и CB за т. B до их пересечения, точку пересечения назовем точкой T.



$\angle BCQ = \alpha \Rightarrow \angle QTC = 90-\alpha$
$\angle TPB = \angle APD = \alpha$
(верт.)
$\angle TPB = \angle CPB = \alpha$, $PB \perp TC$ | ⇒ PB - биссектриса ⇒ △CPT -
$\Rightarrow$ PB - медиана в $\triangle CPT \Rightarrow BC = TB$
BQ - соединяет середину отрезка CT и вершину прямого угла CQT ⇒ BQ - медиана в прямоугольном △CQT, выходящая из прямого угла
$\Rightarrow BQ = BT = BC$
$BQ = BC = 3$

Ответ: $BQ = 3$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 6 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	10	20	5	75

№1

$\frac{x}{y}$

$x+y=100$

1) $x=1,\ y=99$
$x=2,\ y=98$
$x=3,\ y=97$
.....
$x=49,\ y=51$

все возможные случаи, $x<y$.
Сразу можно убрать случаи, когда x и y – числа четные, т.к. есть делимость на 2

2) $x=1,\ y=99$
$x=3,\ y=97$
$x=5,\ y=95$ – не удв. есть делимость на 5.
$x=7,\ y=93$
$x=9,\ y=91$
$x=11,\ y=89$
$x=13,\ y=87$
$x=15,\ y=85$, так же убираем все $x \vdots 5$, т.к. в этом случае $y \vdots 5$
.....
$x=49,\ y=51$.

Все $x \vdots 3$ подходят, т.к. если при этом $y \vdots 3$, то и 100 должно делиться на 3, что неверно.

~~50~~ = 25 − $\underset{\vdots 5}{\cancel{9}}^{5}$ = ~~14 чисел~~ 20 чисел
(нечёт и $\vdots 5$)

т.к. $100 = 5^2 \cdot 2^2$, то нам не подходят чёт и кратные 5.

Аналогично для всех ост. простых делителей

Лист 1 из 8

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Проверка

$x=17$, $y=83$.

$x=19$, $y=81$

$x=21$, $y=79$

$x=23$, $y=77$

$x=25$, $y=75$ – не удв.

$x=27$, $y=73$

$x=29$, $y=71$

$x=31$, $y=69$

$x=33$, $y=67$

$x=35$, $y=65$ – не удв.

$x=37$, $y=63$

$x=39$, $y=61$

$x=41$, $y=59$

$x=43$, $y=57$

$x=45$, $y=55$ – не удв

$x=47$, $y=53$

$x=49$, $y=51$

20 вариантов – верно!

Ответ: 20 дробей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 6 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

1 бельчонок

Сосновые кедровые

x y

$z = x+y < 25$

$2x$ $y+26$

$2x > y+26$

2 бельчонок

Сосновые кедровые

x y

$x+y<25$

$x-4$ $2y$

$2y > x-4$

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x+y<25 \to x<25-y \\ 2x>y+26 \to x>\frac{y+26}{2} \\ 2y>x-4 \quad x<2y+4 \end{cases}$$

$x > \frac{y}{2}+13 \to x$ точно ≥ 14.

1) Если $x=14$, то $\begin{cases} 14<25-y \\ 14>\frac{y+26}{2} \\ 14<2y+4 \end{cases}$ $\begin{cases} y<\cancel{9}\,11 \\ y<2 \\ y>5 \end{cases}$ – противоречие

2) Если $x=15$, то $\begin{cases} y<10 \\ y<4 \\ y>5{,}5 \end{cases}$ – противоречие

Лист 8 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант №______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 6 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) $x=16$: $\begin{cases} y<9 \\ y<6 \\ y>6 \end{cases}$ – противоречие.

4) $x=17$: $\begin{cases} y<8 \\ y<8 \\ y>6{,}5 \end{cases} \to y=7$, т.к. $y \in Z$.

5) $x=18$: $\begin{cases} y<7 \\ y<10 \\ y>7 \end{cases}$ – противоречие

6) $x=19$ $\left.\begin{matrix} y<6 \\ y<12 \\ y>7{,}5 \end{matrix}\right\}$ – противоречие

7) $x=20$ $\begin{cases} y<5 \\ y<14 \\ y>8 \end{cases}$ – противоречие

8) $x=21$ $\begin{cases} y<4 \\ y<16 \\ y>8{,}5 \end{cases}$ – противоречие

9) $x=22$ $\begin{cases} y<3 \\ y<18 \\ y>9 \end{cases}$ – противоречие

10) $x=23$ $\begin{cases} y<2 \\ y<20 \\ y>9{,}5 \end{cases}$ – противоречие

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 6 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

11) $x=24$: $\begin{cases} y<1 \\ y<2 \\ y>10 \end{cases}$ ~ противоречие

$x \ne 25$, т.к. кедровые тоже были.

Ответ: ~~x=17~~ 17 сосновых и 7 кедровых.

Рассмотрим остатки от деления на 3.

$x=3n$

$x=3n+1$

$x=3n+2$

$x+x+1+x+2 = 3n+3n+1+3n+2 = 9n+3 = 3(n+1) \vdots 3$ - для $m=3$

для $m=4$: $3n+3n+1+3n+2+3n+3 = 12n+6 = 3(n+2)$

для $m=5$: $3n+3n+1+3n+2+3n+3n+1 = 15n+4$

для m

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1) Если $m=3$, то

$x+x+1+x+2=3x+3=3(x+1)$

2) Если $m=4$, то

$3x+3+x+3=4x+6=2(x+3)$

И так далее для каждого m будет выноситься какой-то множитель, это исходит из суммы арифмет прогрессии: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

Не рассмотрели варианты.

Значит, все $m\geq 3$ не подходят, т.к. общий множитель говорит о том, что полученная сумма - число составное.

3) Если $m=2$, то есть много примеров:

$1+2=3$ - простое

~~m=~~ $m<2$ уже быть не может, т.к. число не одно.

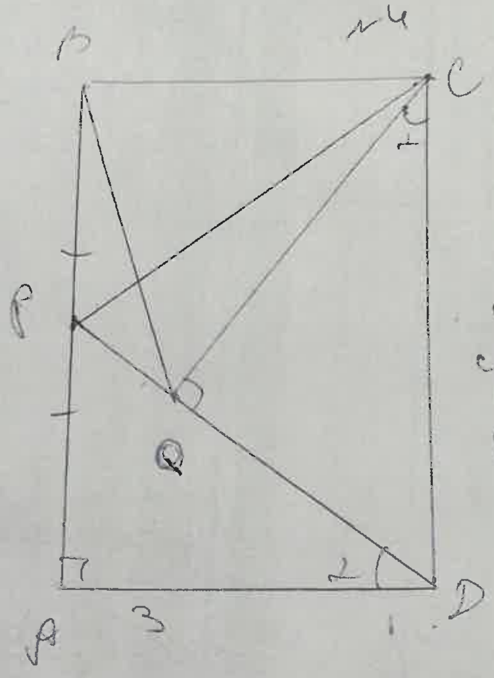
?

Ответ: $m=2$.

Нет условия $m>1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



1) Д.п. PC.

2) Пусть $\angle PDA = \alpha$.

Тогда $\angle CDQ = 90° - \alpha$ (по сумме углов $\triangle CQD$) $\to \angle QCD = \alpha$

3) В PBCQ сумма противолежащих углов 180°, значит вокруг него можно описать окр.

4) $\triangle BQC$ - вписанный в туже окр.

По т. sin:

$\frac{BQ}{\sin\angle BCQ} = 2R$. Т.к. $\angle PQC = 90°$, то PC - диаметр, т.к. прямой угол опирается на диаметр.

5) $\triangle PBC = \triangle PAD$ (по двум катетам), т.к.

$AD = BC$, как противоп. стороны прямоуг.

$BP = AP$, ~~т.к.~~ по усл.

Значит $CP = PD$.

6) Из (4) и (5): $BQ = PD \sin(90° - \alpha) = PD \cos\alpha = 3$ (из $\triangle APD$).

Ответ: 3.

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 6 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

	1	2	3	4	5	6	7
7	−	−	−	−	−	−	−
6	−	+	−	+	−	+	−
5	−	+	+	+	+	+	−
4	−	+	+	+	+	+	−
3	−	+	+	+	+	+	−
2	−	+	+	+	+	+	−
1	−	−	−	−	−	−	−

1) Заполним нижнюю строчку. Она вся „−", исползуя произведение в столбцовах.

2) Заполним верхнюю. Клетка 2x6 „+", а дальше идёт чередование знаков, т.к. „+" нельзя поставить все из-за нижней строчки.

3) С 5 по 3 ~~столб~~ строки столбцы 2 и 6 можно закрасить „+", как произведение в строке

4) внутри получившегося квадрата все „+", как произведение ~~столбцов~~ в строке

5) Получаем 34 „+".

Больше быть не может, т.к. иначе будет произведение (

Ответ: 34

На рисунке 23 "+"

Это не оптимальный способ

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	10	2	72

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

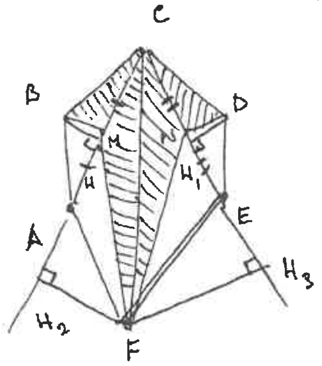
Вариант № 4 | М | Н | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

Дано: ABCDEF – выпуклый ~~четырехугольник~~ шестиугольник.
M – середина AC т.е AM = MC
N – середина CE т.е CN = EN
Доказать, что площадь закрашенной фигуры равна половине площади шестиугольника.



Док-во.

1) $S_{ABCDEF} = S_{BMFNDC} + S_{ABMF} + S_{DNFE}$
Т.е нам нужно доказать, что площадь $S_{BMFNDC} = S_{ABMF} + S_{DNFE}$.

2). Д.П. проводим высоты: BH, H ∈ AC; DH_1; $H_1 \in CE$, FH_2, $H_2 \in CA$; FH_3 $H_3 \in CE$; FH_2 – высота в △CMF и △AMF, FH_3 – высота в △CNF и △FNE

3) $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot CM$
$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AM$, т.к CM = AM, будь BM – медиана, то $S_{\triangle BMC} = S_{\triangle ABM}$.

4). $S_{\triangle CDN} = \frac{1}{2} \cdot DH_1 \cdot CN$
$S_{\triangle EDN} = \frac{1}{2} \cdot DH_1 \cdot NE$ т.к CN = NE будь DN медиана, то $S_{\triangle CDN} = S_{\triangle EDN}$

5). $S_{\triangle CMF} = \frac{1}{2} \cdot FH_2 \cdot CM$
$S_{\triangle AMF} = \frac{1}{2} \cdot FH_2 \cdot AM$ | т.к CM = AM, то $S_{\triangle CMF} = S_{\triangle AMF}$

6). $S_{\triangle CNF} = \frac{1}{2} \cdot FH_3 \cdot CN$
$S_{\triangle FNE} = \frac{1}{2} \cdot FH_3 \cdot NE$ | т.к CN = NE то $S_{\triangle CNF} = S_{\triangle FNE}$

Т.е $S_{ABCDEF} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMF} + S_{\triangle MCF} + S_{\triangle CNF} + S_{\triangle FNE} + S_{\triangle NDE} + S_{\triangle CND}$,

а по доказанному $S_{\triangle BMC} = S_{\triangle ABM}$
$S_{\triangle CDN} = S_{\triangle EDN}$
$S_{\triangle CMF} = S_{\triangle AMF}$
$S_{\triangle CNF} = S_{\triangle FNE}$

$S_{AMFF} = S_{\triangle FMA} + S_{\triangle BMH}$
$S_{FNDE} = S_{\triangle FNE} + S_{\triangle DNE}$

т.е, поскольку $S_{BMFNDC} = S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CMF} + S_{\triangle CNF} + S_{\triangle CDN}$, то получается что

каждый треугольник составивший закрашенную фигуру имеет равный ему, среди незакрашенных, по площади, т.е $S_{BMFNDC} = S_{ABMF} + S_{DNFE}$
равновеликий
и соответственно площадь закрашенной фигуры равна половине площади всей фигуры.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МН 0 0 0 2 0 0 4 0 2 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Обозначим результаты бельчат цифрами от 1 до 9: 1, 2, 3 … 9. Чем больше число, тем выше результат.

Разобьем бельчат на группы: 1; 4; 7 – 1 группа
3; 6; 9 – 3 группа.
5; 2; 8 – 2 группа.

I тур: 1 против 2 группы
1гр. 1 4 7
2гр 8 2 5
– Если разбить бельчат таким образом, то выиграет 1ая группа.

II тур. 2 против 3
2гр 2 5 8
3гр 9 3 6
– Если разбить бельчат так, то выиграет 2 группа.

III тур 1 против 3 1гр 1 4 7
3гр 3 6 9
– Если разбить бельчат ~~так~~ ~~[illegible]~~ таким образом, что 3 я группа победит 1ую.

Т.е если разбить бельчат подобно этому примеру, то условие задачи будет соблюдено, и 1ая группа выиграет 2ую, 2ая выиграет 1 ую и 3я группа выиграет 1ую.
Те такое действительно возможно.

№5.

Возьмем гирю массой 50 г и взвесим с орехом массой 50 г, чтобы доказать что его масса действительно равна 50г. Затем берем гирьку в 1г, складываем на одну чашу весов вместе с гирькой 50г, а на другую кладем орех массой в 51 г, чтобы доказать что его вес действительно 51 г. Затем берем орех с массой в 51г и рядом с ним кладем гирьку в 1 г. На другую чашу весов положим орех массой 52 г. Тк мы уже знаем, что вес первого ореха равен 51 г, то 51 г + 1г = 52 г; второй орех действительно весит 52 г. Далее мы поочередно повторяем эти действия, каждый раз на одну чашу весов кладя орех с весом на грамм меньше и гирьку в 1 г. Таким образом доказываем массу ореха 53г (это орех 52 г + 1г), 54 г и тд до 64.
Т.е в итоге нам потребуется всего две гири массой 50 г и 1 г.
Меньше гирек быть не может тк с одной гирькой мы не сможем достаточно определить вес каждого ~~гирьки~~ ореха – сможем либо достоверно определить вес одного ореха (взяв гирю массой в 50г … 64г) либо найти какое разное между массой двух любых орехов (взяв, к примеру, гирьку в 1г.) Тк для того чтобы точно определить вес нужно две гирьки как минимум: одна для того, чтобы установить точную массу одного ореха, а другая – чтобы установить разницу между этим орехом и другими.

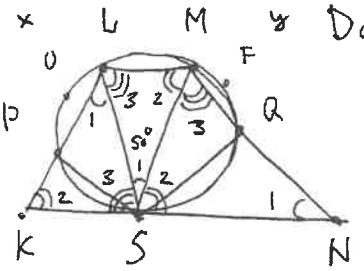
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА000200400 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: KLMN - трапеция Окр(O;R).
KL ∩ Окр = P KN и LM - основания
MN ∩ Окр = Q KL и MN - боковые стор.
KN ∩ Окр = S ∠LSM = 50°
∠KLS = ∠SNM.

Найти: ∠PSQ.

Решение:

1). Тк LM и KN основания трапеции, то они параллельны, значит
∠KSL = ∠MLS = ∠3 как ~~секущие~~ накрест лежащие углы при LM || KN и секущей LS
и ∠LMS = ∠NSM = ∠2 как накрест лежащие углы при LM || KN и секущей MS.

2). ∠1 = ∠KLS = ∠MNS по условию.
Тк ∠KLM = ∠1 + ∠3, то поскольку ∠KLM и ∠NKL = ∠2 ~~соот~~ односторонние при LM || KN и сек MS, то
∠1 + ∠2 + ∠3 = 180°. (*)
(∠NKL + ∠MLK)

∠KSL + ∠LSM + ∠NSM = 180°, а ∠NSM = ∠2
∠KSL = ∠3, т.е ∠LSM из (*) = ∠1,
и ∠1 = 50°

3) Обозначим ∪LOP = x.
∪MFQ = y

∠LMS опирается на ∪LPS = ∪LOP + ∪PS = ∪PS + x.
∠MLS опирается на ∪MQS = ∪MFQ + ∪QS = ∪QS + y.
∠PLS опирается на ∪PS, ∪PS = 2·∠PLS = 2·50 = 100°.
(∠PLS = ∠1 = 50°)
∠QMS опирается на ∪QS.

~~∠2+∠3 = 180° - ∠1 = 180° - 50° = 130° т.е дуги на которые они опираются будут равн. 260°.~~
~~Значит x + y + 100 = 260~~
~~Значит x + y = 180°~~ ~~∪LM = 100 т.к на нее опирается угол 50° (∠LSM).~~
~~∠PSQ опирается на дугу PLMQ,~~
~~значит ∠PSQ = $\frac{x+y+\cup LM}{2} = \frac{180°+100°}{2} = \frac{280°}{2} = 180°$~~
~~Ответ: ∠PSQ = 130~~

∠2 + ∠3 = 180° - ∠1 = 180° - 50° = 130°, они опираются на дугу 260°.
x + y = 130°, тогда $\frac{x+y+\cup LM}{2} = \frac{130+100°}{2} = \frac{230}{2} = 115°$

Лист 3 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

$a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ac)$

Предположим, что права Настя. Тогда $a^4+b^4+c^4 \le 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$ равенства.

Возведем (1) выражение в квадрат.

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2c^2b^2 \le 4a^2b^2+4b^2c^2+4a^2c^2+$
$+8a^2bc+8b^2ac+8c^2ab.$

т.е $a^4+b^4+c^4 \le 2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2+8a^2bc+8b^2ac+8c^2ab.$

Видно, что (2) и (1) не равносильны, тогда Настя не права.

Предположим, что прав Петя и из (1) следует (2). (это значит, что если верно 1, верно и 2). Тогда чтобы доказать что он не прав достаточно будет привести контр-пример.

возьмем $a=3 \geq b \geq 1 \geq c = 1$

~~Тогда (1) будет иметь вид $4+1+1 \le 2(1+2+2)$ — это верно. $6 \le 10$~~

~~(2) будет иметь вид $16+1+1 \le 2(4+4+1)$ $16+1+1$~~

Тогда (1) будет иметь вид $9+1+1 \le 2(3+3+1)$

$11 \le 14$ — верно

(2) будет иметь вид $81+1+1 \le 2(9+9+1)$

$84 \le 38$ — неверно,

т.е из (1) не следует (2) и Петя не прав.

~~Вернемся к выражению. $a^4+b^4+c^4 \le 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$ $a^4+b^4+c^4 \le 2(a^2b^2$~~ Если оно верно, то.

Предположим, что права Нина и из (2) следует (1).

Тогда чтобы доказать что она не права нужно всего лишь привести контр-пример.

возьмем $a=1$; $b=-1$; $c=-2$.

$1 \geq -1 \geq -2$.

(2) будет иметь вид $16+1+1 \le 2(4+4+1)$

$18 \le 18$ — верно.

(1) будет иметь вид $4+1+1 \le 2(-2-1+2)$

$6 \le -2$ — неверно,

т.е из (2) не следует (1) и Нина не права.

+

Получаем, что никто из ребят не прав.

Т.е Даня говорит правду.

Ответ: Данила. высказывание истинно.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	20	20	98

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 8 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

1) Наибольшая правильная дробь $= \frac{49}{51}$ => дробей точно не больше 49 (от $\frac{1}{99}$ до $\frac{49}{51}$).

2) Т.к число 100 - чет => чтобы сумма числителя и знаменателя была = 100 они должны быть одной четности.

3) от 1 до 49. $\frac{49-1}{2} = 24$ чет числа значит еще 24 дроби будут сократимы хотя бы на 2

4) Т.о дробей не более 25.

5) 100 : 5 => если числитель + знам = 100 => ~~если один~~ числ $\equiv$ знам (mod 5) => все числители от 1 до 49 кратные 5 не подх, но т.к мы убрали все чет числители => надо убрать нечет : 5, т.е 5; 15; 25; 35; 45. Еще 5 штук.

6) Дробей не более 20.

7) $100 = 2^2 \cdot 5^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ МА0001968722

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Теперь заметим, что $\frac{x}{100-x}$ - наша дробь если она сократимая, тогда ~~100-x~~ ⋮ ~~x~~ ~~тогда~~ ~~100-~~ Пусть $x=ka$, $100-x=100-ka$ пусть мы можем сократить на k.

Тогда $100-x=100-ka \vdots k$

$ka \vdots k \Rightarrow 100$ должно быть $\vdots k \Rightarrow$

$k=2^a \cdot 5^b$, где $0\leq a\leq 2$ и $0\leq b\leq 2$.

То $k \vdots 2$ или $k \vdots 5$. Но мы уже убрали все $x \vdots 2$ или 5.

Значит мы убрали все x при которых могло быть сокращ $\Rightarrow$ остались несократимые дроби.

Ответ: 20.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 8 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2

Пусть изначально у каждого было x сосновых и y кедровых.

Тогда. 1) $x+y<25$.

2) $2x>26+y$ (т.к I набрал еще x сосновых и 26 кедровых.

3) $x-4<2y$ (II 4 сосн съел, и набрал еще y кедр)

4) $\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>26+y \\ x-4<2y \end{cases}$ $\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>26+y \\ 2y>x-4 \end{cases}$ $+ \Rightarrow \begin{cases} x+y<25 \\ 2x>26+y \\ x+y>22 \end{cases}$

Т.о $22<x+y<25$, т.к x и y - кол-во шишек $\Rightarrow x;y\in\mathbb{N} \Rightarrow x+y=23$ или 24.

$2x>26+y$, $y>0$, т.к иначе $2y>x-4$

$x\geq 4$ (т.к II смог съесть 4 $\Rightarrow 2y>x-4 \Rightarrow 0>0$ против)

т.е $y\geq 1 \Rightarrow 2x>27 \Rightarrow x>13{,}5 \Rightarrow x\geq 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y\overset{(\text{по усл})}{<}25 \Rightarrow y<11 \Rightarrow y\leq 10$.

Т.о $1\leq y\leq 10$; $x\geq 14$ и $x\leq 24$, т.е

$23\geq x\geq 14$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА000196872 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~$2y > x-4 \Rightarrow$~~

$2y > x-4$

$y > \frac{x-4}{2}$

$2x > 26+y \Rightarrow$

$y < 2x-26.$

Т.е

$2x-26 > y > \frac{x-4}{2} \Rightarrow 3x > 48 \Rightarrow$

$x > 16 \Rightarrow x \geq 17.$

~~$x+y > 2$~~

$x+y < 25 \Rightarrow y < 8 \Rightarrow y \leq 7$

Т.о $7 \geq y \geq 1$; $23 \geq x \geq 17.$

Т.к $x; y$ кол-во шишек, то

$x; y \in N \Rightarrow$ $x+y < 25 \Rightarrow (1)\ x+y \leq 24$

$2x > 26+y \Rightarrow (2)\ 2x \geq 27+y$

(3) $x-4 < 2y \Rightarrow (3)\ x-4 \leq 2y-1$

(Т.к отлич хотя бы на 1)

сложим (1) и (3) $\Rightarrow x+y+x-4 \leq 24-2y-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x-y \leq 27 \Rightarrow$ (1)+(3) $2x-y \leq 27$

(2) $2x-y \geq 27$ $\Rightarrow 2x-y = 27$ (4)

~~сложим 2 и (3)·(-1) получим~~

(3) $2y-1 \geq x-4$

(2) $2x \geq 27+y$ $+ \Rightarrow x+y \geq 24.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ М А 0 0 0 1 9 6 8 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

из (4) $2x-2y=y$

$x+2x-2y \geq 24 \Rightarrow x \geq 17$ и $x \leq 23$.

Пусть $x=17 \overset{(из\ 4)}{\Rightarrow} y=7 \Rightarrow$ подставив во все нер-ва все хорошо

Пусть $x=18 \overset{(из\ 4)}{\Rightarrow} y=9 \Rightarrow x+y=27$ - против (1).

Ясно, что при увеличении x, (из 4) y будет расти $\Rightarrow$ $x+y$ будет расти $\Rightarrow$ оно будет >24 - против (1) Т.о ответ единственный $x=17$; $y=7$

Ответ: изначально сосновых было 17, кедровых 7.

Лист 5 из 10

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 8 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3.

$S_m = \frac{2a_1 + (m-1)}{2} \cdot m$, т.к $d=1$ (т.к числа последов.)

$(2a_1 + (m-1)) \cdot m = 2p$ по усл

1) $m = 2k \Rightarrow \cancel{2}a_1 \cdot \cancel{2}k + \cancel{2}k \cdot (2k-1) = \cancel{2}p \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_1 \cdot k + k \cdot (2k-1) = p \Rightarrow$ $p \vdots 1$ и $p \Rightarrow$ один из них обяз $=1$.

$k(2a_1 + 2k - 1) = p \Rightarrow$

1.1) $k = 1 \Rightarrow m = 2$

1.2) $2a_1 + 2k - 1 = 1 \Rightarrow$

$2a_1 + 2k = 2$

$a_1 + k = 1$ - против

т.к a_1 и $m \in N$; $m = 2k$

$a_1 + k \geq 2$.

2) $m = 2k+1 \Rightarrow$

$(2a_1 + 2k) \cdot (2k+1) = 2p$.

$2a_1 \cdot (2k+1) + 2k(2k+1) = 2p$

$(2k+1)(a_1 + k) = p$.

$2k+1 \geq 3$ $a_1 + k \geq 2 \Rightarrow$ ни $2k+1$ ни $a_1 + k$ не $=1$ -

$k=0$?

$\Rightarrow$ в этом случае против.

Т.о ед. $m = 2$. прим $1+2=3$

$m = 2$ и $p = 3$

Ответ: $m = 2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

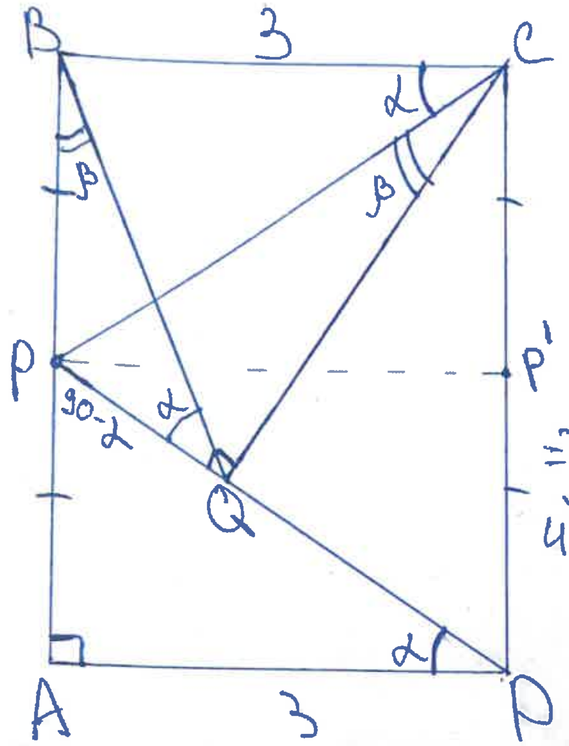
Вариант №

M	A	0	0	0	1	9	6	8	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4



1) т. P' - середина CD.

2) Картинка симметрична отн PP' (~~$P'C=P'D$, PB~~) т.к ABCD - прямоуг

3) из (2) => $PC = PD$ => треуг CPD - р.б => $\angle PCD = \angle PDC$

4) $\angle BCP = 90 - \angle PCD$; $\angle ADP = 90 - \angle PDC$ => $\angle BCP = \angle ADP$

5) четырехуг PBCQ - впис т.к $\angle PQC + \angle PBC = 180$ (по усл).

6) $\angle BCP = \angle BPQ$; $\angle PCQ = \angle PBQ$ (опир на одну и ту же дугу).

7) $\angle APD = 90 - \alpha$ (по Σ углов $\triangle APD$).

8) $\angle APD$ - внеш для $\triangle PBQ$ для угла BPQ => $\angle APD = \angle PBQ + \angle PQB = \alpha + \beta$.

9) $\angle BQC = \angle PQC - \angle PQB = 90 - \alpha$.

10) из 4 и 8 п => $90 - \alpha = \alpha + \beta$

11) $\angle BQC = \angle BCQ$ => $\triangle QBC$ - р.б => $BQ = 3$

Ответ: $BQ = 3$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1						-1
-1						-1
-1						-1
-1						-1
-1						-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

1) Т.к нам нужен только знак чисел, пусть в рамке все числа это −1.

2) Пусть ~~могут быть~~ в оставшейся части таблицы все могут быть положительными, т.е в нашем случае по п 1 это 1.

3) Рассм 4 угловые клетки нашего кв 6×6.

4) Каждая из них должна быть первой либо в своем столбце либо в своей строке, т.к иначе её будут окружать и в столбце и в строке 1 и −1 (−1 и в строке и в столбце уже есть, а по нашему предполож все клетки в кв 6×6 это 1) => она станет −1.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА000196 8722

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) ~~Заметим, что~~ Заметим что „независимы" друг от друга диагонально противополож кл => одна из них влияет на 2 другие.

Пусть в верхнем левом углу кл первая в своем столбце, тогда левая нижн должна быть первой в своей строке (потому, что она не 1 в столбце), тогда пр нижн должна быть первая в своем столбце (потому, что она не 1 в строке) тогда пр верхняя первая в своей строке, но это не так (в её строке уже есть 1). Значит одна из этих клеток точно станет (−1).

Т.о предположив, что все кл в табл 6x6 полож мы пришли к против. Т.о полож не более 35

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 8 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Приведём пример на 35.

	a	b	c	d	e	f	g
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	1	1	1	1	-1
3	-1	1				1	-1
4	-1	1				1	-1
5	-1	1				1	-1
6	-1	1	1	1	1	1	-1
7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

как было сказано ранее в качестве отриц исп −1, положит исп 1

1) $b_6 = 1$ $(b_1 \cdot b_7)$

2) $f_6 = 1$ $(f_1 \cdot f_7)$

3) $f_2 = 1$ $(a_2 \cdot g_2)$

3) $b_2 = -1$ $(a_2 \cdot f_2)$

5) $c_2 = 1$ $(c_1 \cdot c_7)$

4) $b_3 = 1$ $(a_3 \cdot g_3)$

ясно, что $b_4; b_5 = 1$ (по столбцу)

ясно, что $f_3; f_4; f_5 = 1$ (по столбцу)

ясно, что $c_6; d_6; e_6 = 1$ (по столбцу)

ясно, что $d_2; e_2 = 1$ (по строке) ~~$b_2 = -1$~~

оставшийся кв 3×3 ($c_3; e_3; e_5; c_5$) будет из 1, т.к. его окружно только 1 (в строках и столбцах)

P.S выражение „первой в своём столбце или строке" означает должна быть заполнена первой в строке или столбце. Заполнена как сказано в условии.

+

Ответ: max кол-во положительных = 35.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______

М	А	0	0	0	1	9	7	3	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Пусть a - начальное кол-во сосновых шишек; b - начальное кол-во кедровых шишек. Тогда $a+b<25$; a, b ~~натуральные~~ целые неотрицательные,

$a+b \le 24$

1	2	3	4	5	Σ
10	20	19	~~20~~	20	69

1 бельчонок:

$a+a > 26+b$

$2a > 26+b$

2 бельчонок. $b+b > a-4$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a > 26+b \\ 2b > a-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a-26 > b \\ 2b > a-4 \end{cases}$

$\Downarrow$

$2(2a-26) > a-4$

$4a-52 > a-4$

$3a > 48$

$a > 16$

$a \ge 17$

$2b > 16-4$

$2b > 12$

$b > 6$

$b \ge 7$

$a+b \le 24$

$a \ge 17$ $b \ge 7$

$17+7=24$

$\Downarrow$

$a=17$

$b=7$.

Проверка:

$17 \cdot 2 > 26+7$

$34 > 33$

$14 > 17-3$

$14 > 13$

Ответ: изначально было 7 кедровых и 17 сосновых у каждого бельчонка.

Лист 1 из 4.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 7 | 3 | 5 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

m, p - натуральные. Все переменные, вводимые в ходе решения - натуральные (кроме a_i - они только целые)

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_m = p$.

$p = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_m = a_1 + a_1 + 1 + a_1 + 2 + \ldots a_1 + m - 1 = a_1 \cdot m + \frac{m(m-1)}{2}$

1) Пусть m - нечетное. Тогда: $\frac{m-1}{2}$; 2 $\quad p = m(a_1 + \frac{m-1}{2})$

~~а) m = 1~~

т.к. p - простое,

а) то или $m = 1$ - здесь понятно, при a_1 будет простое число

б) или $a_1 + \frac{m-1}{2} = 1$

$2a_1 + m - 1 = 2$

$2a_1 + m = 3$.

$m = 1$, $a_1 = 1$; $m = 3$, $a_1 = 0$; $m = 5$, $a_1 = -1$; $m = 7$, $a_1 = -2$.

$m = 2k+1$

~~$a_1 = 2k$~~ 1

$a_1 = 1 - k$.

$2k + 1 + 2 - 2k = 3$.

m - любое нечетное число, кроме положит. $m=1$

2) Пусть m - четное. Тогда:

$m = 2k$

$a_1 \cdot 2k + k(m-1) = k(2a_1 + m - 1) = 1$

$k = 1$ ⇒ $m = 2$.

$2a_1 + m - 1 = 1$

$2a_1 + 2k - 1 = 1$

$2a_1 + 2k = 2$

$a_1 + k = 1$

k - любое натур.

$a_1 = k - 1$

m - любое ~~четное~~ число ⇒ m - любое натуральное число

но в этом случае $p = k$, так что k - любое простое положительное число, которое больше нуля.

⇒ $m = 2k$. ⇒ m - любое простое положительное, умноженное на 2. ⇒ $m = 2$.

(2a₁ ≠ 2)

Нет примера для $m = 2$.

Ответ: $m = 1$; $m = 2$; $m = k$; $m = 2k$, где k ~~[illegible]~~ натуральное простое число

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 7 | 3 | 5 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№5

	a	b	c	d	e	f	g
7	−	−	−	−	−	−	−
6	−	+	+	+	+	+	−
5	−	+				+	−
4	−	+				+	−
3	−	+				+	−
2	−	+	+	+	+	−	−
1	−	−	−	−	−	−	−

Заметим, что в поле b6 плюс ставится тогда тогда, когда или b или 6 не имеет плюса

В f6 можно ставить + тогда, когда нет плюсов в 6 или f

В f2 можно ставить + тогда, когда нет + в f или 2

В b2 можно ставить + тогда, когда нет + в 2 или в b

Очевидно, что можно поставить + только в 3 из них. => 1 клеточка останется с минусом

~~Всего~~ Мы можем заполнить оставшиеся 24 клетки плюсами по алгоритму!

номер шага	Куда ставим «+»
1)	b6
2)	b2
3)	f6
4)	e2
5)	f3
6,7	f5,f4
8,9	c2,d2
10,11,12	b5,b4,b3
13,14,15	c6,d6,e6
15-24	c5,c4,c3,d5,d4,d3,e5,e4,e3

«+» — положительное число в таблице

«−» — отрицательное число

24 положительных числа

Ответ: 24

Лист 3 из 4

Page 1/1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______

M	A	0	0	0	/	9	7	3	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке страницы

№1

Пусть $\frac{a}{b}$ – правильная несократимая дробь. Заметим, что –

Тогда $a+b=100$.

Пример: $\frac{49}{51} \to \frac{47}{53}$

$\frac{1}{99} \to \frac{-1}{101}$

Пусть у нас есть число k такое, что $\frac{a-k}{b+k}$ – правильная несократимая дробь.

Докажем, что также работает и для $k+2$.

$\frac{1+k}{99+k}$ – правильная несократимая

$\frac{-k-1}{101+k}$ – Пусть есть d такое, что $k+1 \vdots d$

$\frac{k+1}{k+101}$

и $k+101 \vdots d$

Тогда $100 \vdots d$

$d=2,4,10$ не подходят

$k+1 \vdots 2$

$d=5$ может подойти

$\frac{100}{5}=20$

5 будет кратно 5.

Но остальные не будут кратны.

⇓

Таких дробей бесконечно много.

Числа и знам. положительные!

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М А 0 0 0 1 9 9 1 1 2 2
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Пусть числитель дроби равен „a", a знаменатель „b"

Тогда $\begin{cases} \frac{a}{b}<1 \\ a+b=100 \\ (a;b)=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a<b \\ a+b=100 \\ (a;b)=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 100-b<b \Rightarrow b>50 \\ a=100-b \\ (a;b)=1 \end{cases}$

Нод

1	2	3	4	5	Σ
20	20	19	20	5	84

Т.к. Нод$(a;b)=1$, то ни одно из чисел не является четным и не заканчивается на 5

Выпишем пары, которые нам подходят: (a - первое число, b - второе число)

1; 99	21; 79	41; 59
3; 97	23; 77	43; 57
7; 93	27; 73	47; 53
9; 91	29; 71	49; 51
11; 89	31; 69	
13; 87	33; 67	
17; 83	37; 63	
19; 81	39; 61	

Получилось 20 пар, значит существует 20 таких дробей.

P.s. Правильная дробь - дробь в которой числитель и знаменатель являются натуральными числами, где числитель меньше знаменателя.

Ответ: 20 дробей

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 9 | 1 | 1 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Пусть изначальное кол-во шишек равно x~~

~~$x + x < 25$~~

~~$2x < 25$~~

~~$x < 12{,}5$~~

2. Пусть изначальное кол-во сосновых шишек равно x, а изначальное кол-во кедровых шишек равно y

$$\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>y+26 \\ x-4<2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x<25-y \\ x>\frac{y+26}{2} \\ x<2y+4 \end{cases}$$

Т.к. максимальный $y=7$, то $x<18$, значит максимальный $x=17$

$25-y>x>\frac{y+26}{2}$

$25-y>\frac{y+26}{2}$

$50-2y>y+26$

$24>3y$

$y<\frac{24}{3}$

$y<8$

$2y<16$

$2y+4<20 \Rightarrow x<20$

При $x=17$

$17<25-7$

$17>\frac{7+26}{2} \quad 17>\frac{33}{2}$

$7<18$

~~Обратим внимание на второе уравнение~~

~~Или учитывать знаки~~

Значения 17 и 7 подходят, но являются ли они единственными? Давайте построим график и посмотрим, как ведут себя функции:

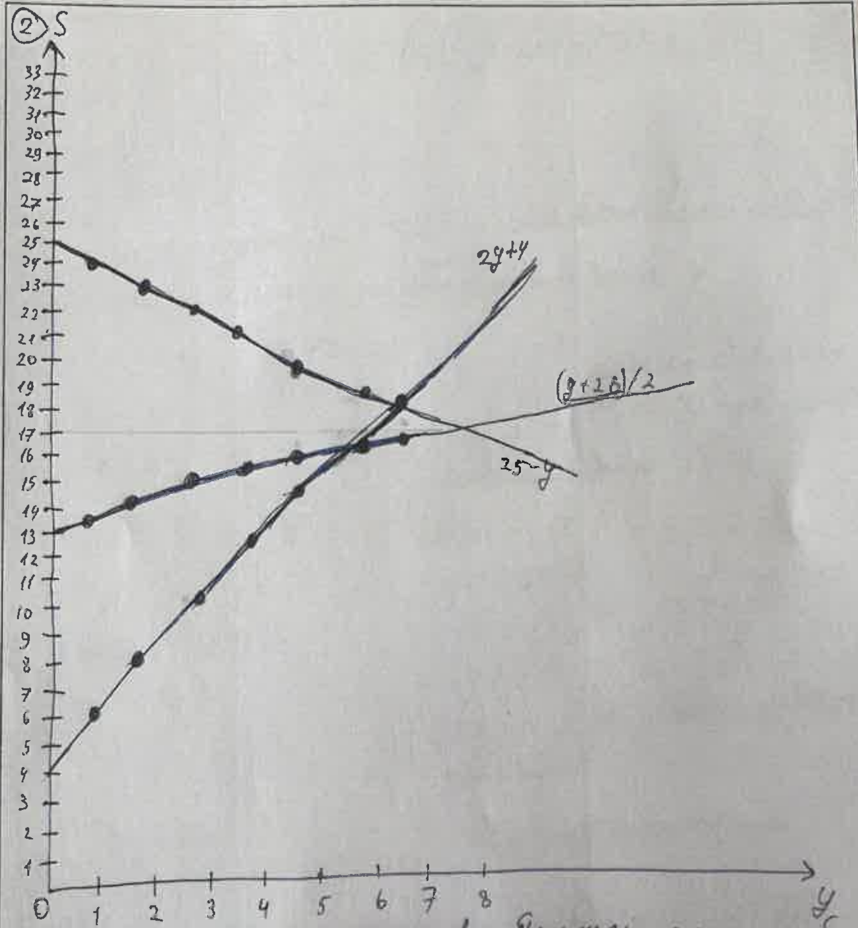
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____ MA000199112 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(2)



~~Кик~~ График условный, он нарисован ~~Валька~~ для того, чтобы понять, как ведут себя функции. Чтобы условие задачи выполнялось, нужно, чтобы ~~между~~ ниже прямых $25-y$ и $2y+4$ и выше прямой $\frac{y+26}{2}$ находилось целое значение (x)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 9 | 1 | 1 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) До $y = 6$ прямая $\frac{y+26}{2} > \frac{2y+4}{1}$, значит, там нам ничего не подойдет. При $y=6$ значения этих функций равны, это нам тоже не подходит, т.к. неравенство строгое. Значит, подходящий x при $y<7$ не найдется, следовательно, нам подойдет только пара $x=17$; $y=7$

Ответ: 17 сосновых шишек; 7 кедровых шишек было изначально.

3. $\Sigma_m = \frac{(a_1+a_m)m}{2}$, где a_1 - первое число послед., a_m - последнее

Заметим, что $(a_1+a_m)m \vdots 2$, т.к. получается целое число.

Первый случай m - четно ($m=2n$)

Тогда $\Sigma_{2n} = \frac{(a_1+a_{2n})\cdot 2n}{2} = (a_1+a_{2n})\cdot n$

Нетрудно догадаться, что в таком случае сумма чисел кратна n (n - один из множителей). Тогда, если $n>1$, получиться составное число. Значит $n_{max}=1 \Rightarrow m=2$ и n единственное

Второй случай $m=2n+1$ (нечет)

$\Sigma_{2n+1} \left(\frac{a_1+a_{2n+1}}{2}\right)\cdot(2n+1)$, т.к. разность между двумя членами арифметической прогрессии равна 1 (послед. натур. числа) мы можем узнать, чему равно a_{2n+1}

$a_{2n+1} = a_1 + 1\cdot 2n$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 9 | 1 | 1 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(3) $a_1 + a_{2n+1} = a_1 + a_1 + 1 \cdot 2n = 2a_1 + 2n = 2(a_1 + a_n)$

$\Sigma_{2n+1} = \dfrac{2(a_1+a_n)\cdot(2n+1)}{2} = (a_1+a_n)(2n+1)$

При любом натуральном n значение 2n+1 будет больше единицы, значит Σ_{2n+1} будет являться составным числом.
В случае, когда m является ~~...~~ нечетным числом ~~...~~ подойдёт только единица, но мы не складываем число, когда оно одно, т.е. учитывая здравый смысл, когда идёт речь про сумму, чисел должно быть минимум два.
m = 2 нам подходит (как мы поняли, оно единственное).
Значит только оно и подойдёт.

Нет условия $m > 1$!

Примеры на два: 3+4
1+2
2+3
8+9
и т.п.

Ответ: m=2

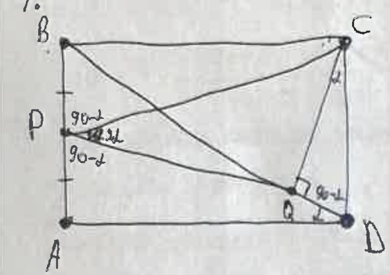
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 9 | 1 | 1 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.



Дано: ABCD - прямоугольник, ~~четырёхуг~~
$BC=3$, $P \in AB$ $AP=BP$
$CQ \perp DP$
т.н.: BQ

Решение: Проведём CP

Рассмотрим $\triangle PBC$ и $\triangle PAD$

$PA=PB$
$BC=AD$ (прямоуг.)
$\angle PBC=\angle PAD=90°$

$\Rightarrow \triangle PBC=\triangle PAD \Rightarrow PC=PD \Rightarrow \triangle PCD$ - равноб.

Пусть $\angle ADC=\alpha$, $\Rightarrow \angle PDC=90-\alpha \Rightarrow \angle APD=\angle BPC=90-\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CPD=2\alpha \Rightarrow \angle BCQ=90-\alpha$

Рассмотрим четырехугольник PBCQ. $\angle PBC=\angle CQP=90° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ PBCQ - впис. четырехугольник (два впис. угла, опир на диам)
$\Rightarrow \angle BPC=\angle BQC$ (опир на дугу BC)

$\angle BCQ=90-\alpha$ (т.к. $\angle BCQ+\angle QCD=90°$)
$\angle BQC=90-\alpha$ (т.к. $\angle BQC=\angle BPC=\angle APD$ из рав-ва $\triangle PAD$ и $\triangle PBC$)
$\Rightarrow \triangle BCQ$ - равнобедренный $\Rightarrow BC=BQ=3$

Ответ: $BQ=3$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(5) Т.к. по рамке уже расставлены отриц. числа, максимальное кол-во положительных чисел равно 25. То есть, больше этого числа мы получить уже не сможем. Рассмотрим нашу таблицу: Снова хочу сказать, что, как и в третьей задаче, для операции умножения нужно как минимум 2 числа. Значит, как бы мы не старались, всё равно числа, которые мы сможем получить, это четыре 1 по краям таблицы.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1				1	-1
-1						-1
-1						-1
-1						-1
-1	1				1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Я взял единицы и −1, чтобы было легче. (числа всё равно случайные, а у единиц легко считать произведение.) Сможем ли мы получить ~~бо~~ больше трех единиц в одной строчке 1×5? Нет, т.к. для этого понадобится −1 в середине, а её мы никак не сможем получить. ~~Но~~ Но как получить ~~и~~ по три полож. числа в каждой из строчек? Нужно заполнять строчку от 1 края к другому, а не двигаться с двух краев в середину (так получится только два положительных числа.

То есть, вот так: (см. рис.)

1)

1			-1	1
-1	-1	-1	-1	-1

2)

1		1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1

3)

1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1

Но если что, крайние клетки (диагональ) мы заполняем с самого начала.

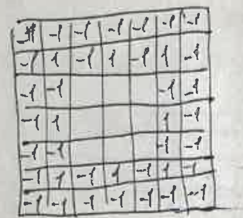
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА0001991122

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

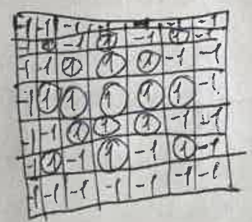
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(5) После 4 повторений такого заполнения ~~мы~~ у нас останутся только 9 незаполненных клеток:



Тут мы тоже заполняем сначала крайние клетки, а затем все остальные, тут получится сделать положительными все числа, поэтому ~~одно~~ этот способ заполнения даст нам самое большое кол-во положительных клеток.

В строке 5×1 я объяснил, почему больше трёх клеток мы не сможем получить, а 3×3 таблицу мы полностью заполнили положит. числами.



Получилось 17 положительных чисел.

Ответ: 17

20 | 18 | 8 | 18 | 5 | 69

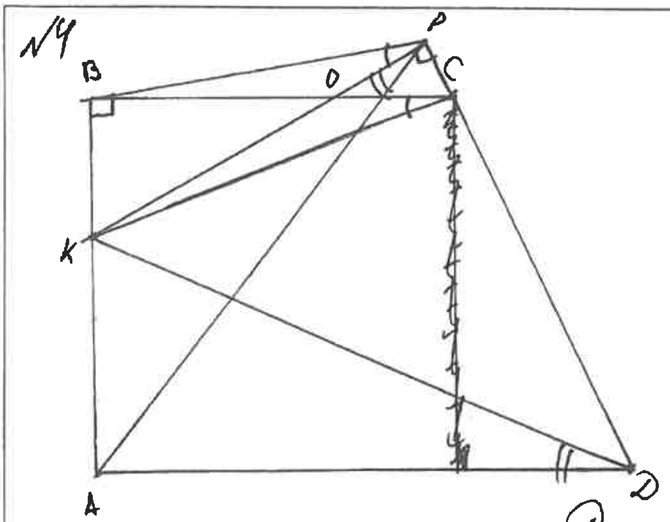
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 — М А 0 0 0 1 5 0 6 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: ABCD – прямоуг. трап.
AB⊥AD, AB⊥BC;
AD∥BC; AD : BC = 3 : 2
K∈AB; KA : AB = 3 : 5;
KP⊥CD, P∈DC

Док-ть: ∠KPB = ∠KPA

Рисунок не вполне соответствует условию (т. P ∈ CD)

Док-во:

1. Пусть KP ∩ BC = O, тогда рассм. △KBO и △CPO

∠KBO = ∠CPO = 90° по усл. | ∠KOB = ∠COP как вертик. | → △KBO ~ △CPO по 2-м углам

и $\frac{BO}{PO} = \frac{KO}{CO}$ как соотв. в подобных треуг.

и $\frac{BO}{KO} = \frac{PO}{CO}$

3. В △BOP и △KOC

∠BOP = ∠KOC как вертик. | $\frac{BO}{KO} = \frac{PO}{CO}$ из выше сказ. | → △BOP ~ △KOC по 2 пропорц. ст. и углу м. ними

∠BPO = ∠OCK, как соотв. в подобных треуг.

4. Рассм. В △KPD ∠KAD + ∠KPD = 90° + 90° = 180°, а они противол., значит около AKPD можно описать Окр (O; R), тогда ∠KPA = ∠KDA как впис., опирающиеся на одну дугу

5. Пусть x – коэф. пропорц., тогда AD = 3x, BC = 2x
Пусть y – коэф. пропорц., тогда KA = 3y, AB = 5y; AB = KA + KB
5y = 3y + KB
KB = 2y

6. $tg\angle BPK = tg\angle BCK = \frac{KB}{BC} = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}$ (из (3)) | $tg\angle KPA = tg\angle KDA = \frac{3y}{3x} = \frac{y}{x}$ (из (4))

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$tg \angle KPB = tg \angle KPA = \frac{4}{x}$

$\angle KPB = \angle KPA$.

№1

~~$|a^2-3a-6| = |a^2-2\cdot a\cdot 1{,}5+2{,}25-6-2{,}25| = |(a-1{,}5)^2-8{,}25| =$~~

~~$= |(a-1{,}5)^2-0{,}25-8| = 1$~~

$|a^2-3a-6| \overset{=p}{}$; $a \in \mathbb{Z}$, p - простое

при $a \,\vdots\, 2$: $a^2 \,\vdots\, 2$; $-3a \,\vdots\, 2$ $\Rightarrow (a^2-3a-6) \,\vdots\, 2$;

при $a \not\vdots\, 2$: $a^2 \not\vdots\, 2$; $-3a \not\vdots\, 2$ $\Rightarrow (a^2-3a) \,\vdots\, 2 \Rightarrow (a^2-3a-6) \,\vdots\, 2$;

Т.е. при любом целом a значение выражения под модулем будет чётно, а единственное чётное простое число - 2

$|a^2-3a-6| = 2$

$$\left[\begin{array}{l} a^2-3a-8=0 \ (1) \\ a^2-3a-4=0 \ (2) \end{array}\right.$$

(1) $D = 9+32 = 41$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \frac{3+\sqrt{41}}{2} \\ a = \frac{3-\sqrt{41}}{2} \end{array}\right. \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$$

(2) $D = 9+16 = 25$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \frac{3+5}{2} \\ a = \frac{3-5}{2} \end{array}\right. \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a \in \varnothing \\ a = 4 \\ a = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \{-1; 4\}$.

№3 Саша мог взять число -20.

Например: если Алиса написала две двойки, то отношение их суммы к произведению будет $\frac{2+2}{2\cdot 2} = 1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 5 0 6 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

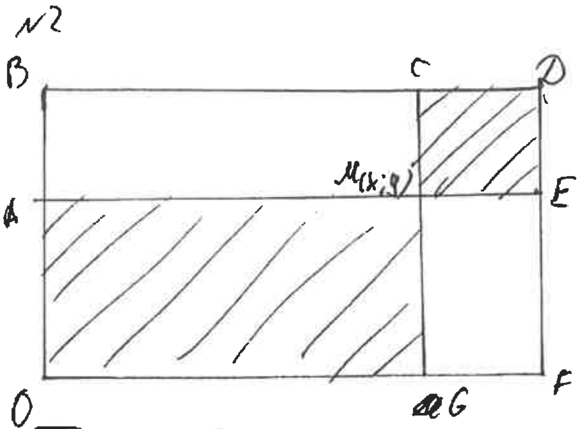
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда т.к. сумма принимает -20, то его отношение суммы к произведению всех чисел будет $\frac{2+2-20}{2\cdot2\cdot(-20)}=\frac{-16}{-80}=\frac{1}{5}$

$1=5\cdot\frac{1}{5}$ верно, причем $-20<2$ верно

Ответ: -20.

№2



Пусть „a“ - длина прямоуг., а „b“ - его ширина.
Введем систему координат так, что $O(0;0)$, $M(x;y)$;
$A(0;y)$, $B(0;b)$, $C(x;b)$, $D(a;b)$, $E(a;y)$, $F(a;0)$, $G(x;0)$.

Тогда ГМТ(M): $S(OAMG)=S(MCDE)$

$$xy=(a-x)(b-y)$$
$$ab-bx-ay=0$$
$$ay+bx-ab=0$$
$$\frac{ay+bx}{ab}=1$$
$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1$$
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$ – ур. прямой в отрезках;

В другую сторону не доказано

~~a – ординат т. пер.~~ т.е. $l:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ пересекает Oy в точке с коорд. $(0;a)$, т.е. в точке B; пересекает Ox в точке с коорд. $(b;0)$, т.е. в точке F; отсюда т.к. $B, F\in l$ и $\forall M$ – внутри прямоуг., то ГМТ(M): диагональ BF.

№5 Если сумма чисел одного цвета произвольна (т.к. в задаче ничего не сказано), то возможно бесконечное кол-во способов, т.к. если мы первые n чисел, включая 1 и 6, раскрасим в синий, а начиная с $(n+1)$-го некоторые

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	5	0	6	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

числа раскрашивать в красный, а чётные в синий, то условие задачи будет выполнятся, т.к. сумма нечётного и чётного всегда нечётна (красная), а их произведение чётно (синее). Причём т.к. n - произвольное, ~~больше~~ ($3n \geq 546$; $n \geq 183$) не меньшее 183, то при каждом увеличении n на 2 кол-во синих чисел до n-го ~~будет~~ расти на 2, т.е. изменяться, т.е. будет получатся новый способ раскраски, а т.к. n мы можем увеличивать ~~бесконечно~~ неограниченно, то и способов раскраски бесконечно много.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 6 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	–	80

① Итак, по усл. задачи нам надо найти такие числа вида $\frac{p}{q}$, что

$$\begin{cases} p<q \\ p\in N, q\in N \\ p+q=100 \\ НОД(p;q)=1 \end{cases}$$

② Скажем сразу, что p и q - нечётные, т.к., если они чётные, то дробь $\frac{p}{q}$ сократима, а если p - чёт, а q - неч., то p+q - нечёт.

③ ~~Pга крайнюю возможную дробь~~ Теперь скажем, что

НОД(p; 100)=1 и НОД(q; 100)=1, т.к.

если хотя бы одно из этих чисел дел. на делитель 100, то и сумма будет дел. на это число, т.е. из пар (p; q) исключаем те, где p и q кратны делит. 100: 5, ~~10~~ 25 (запис. только нечет. делит., т.к. p и q - нечёт.)

④ Значит, дроби $\frac{5}{95}$, $\frac{15}{85}$, $\frac{25}{75}$, $\frac{35}{65}$ и $\frac{45}{55}$ нам не подходят

⑤ Теперь найдём кол-во таких дробей

всего возможно от $\frac{1}{99}$ до $\frac{49}{51}$, т.е. 25 дробей (дальше идут дроби, где $p>q$), но, учитывая п. ④, получим 25-5=20 дробей

Ответ: 20 дробей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 6 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть у каждого бельчонка было x сосновых шишек и y кедровых тогда по усл.

$$\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>y+26 \\ 2y>x-4 \end{cases} + \quad \begin{cases} x+y<25 \\ 2x+2y>x+y-4+26 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y<25 \\ x+y>22 \end{cases} \Rightarrow x+y\in\{23;24\}$$

I $x+y=23 \Rightarrow x=23-y$

$$\begin{cases} x=23-y \\ 46-2y>y+26 \\ 2y>23-y-4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y<20 \\ 3y>19 \end{cases} \quad \begin{cases} y<6\frac{2}{3} \\ y>6\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y\notin\mathbb{Z},$$ что противоречит усл., т.к шишек не может быть нецелое кол-во

II $x+y=24 \Rightarrow x=24-y$

$$\begin{cases} 48-2y>y+26 \\ 2y>24-y-4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y<22 \\ 3y>20 \end{cases} \quad \begin{cases} y<7\frac{1}{3} \\ y>6\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow y=7, \text{ т.к } y\in\mathbb{Z}, \text{ т.е. } x=17$$

Ответ: 17 сосновых и 7 кедровых

№3

Пусть $a \in \mathbb{N}$ - первое число из данной послед., тогда

$$\underbrace{a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+m-1)}_{m \text{ чисел}}=p$$

Запишем эту сумму, как сумму членов а.п.:

$$\frac{a+a+m-1}{2}\cdot m=\frac{1}{2}m(2a+m-1)=p\text{ - прост., т.е.}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{2}m=1\\ m+2a-1=p\end{cases}(1)\\ \begin{cases}m=1\\ \frac{1}{2}(m+2a-1)=p\end{cases}(2)\\ \begin{cases}\frac{1}{2}m=p\\ m+2a-1=1\end{cases}(3)\\ \begin{cases}m=p\\ \frac{1}{2}(m+2a-1)=1\end{cases}(4)\end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases}m=2\\ 2-1+2a=p \Rightarrow 2a=\underbrace{p+1}_{\text{чёт.}} \Rightarrow p\text{ - неч.}\end{cases}$

это возможно, например, при $a=1$

(2) $\begin{cases}m=1\\ 1-1+2a=2p \Rightarrow a=p\text{ - неч.}\end{cases}$

это возм. при люб. простом $a \in \mathbb{N}$

(3) $\begin{cases}m=2p\\ 2p+2a=2 \Rightarrow a+p=1\end{cases}$ - не может быть, т.к. a и $p \in \mathbb{N}$ и $a \geq 1$, $p \geq 1$, т.е. $a+p \geq 2$

(4) $\begin{cases}m=p\\ p+2a-1=2 \Rightarrow 2a=\underset{\text{чёт.}}{3-p}\end{cases}$, причём $3-p>0 \Rightarrow p<3$, а т.к. p - прост., то $p=2$, но $3-2=1$ - нечёт.

<u>противоречие</u>

Значит, $m=1$ или $m=2$

Ответ: $m \in \{1;2\}$

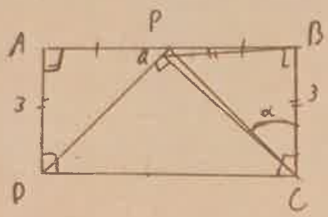
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

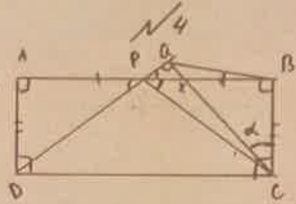
Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 6 | 6 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4





Дано: ABCD – прямоуг.
BC = 3, P – серед. AB
$CQ \perp DP$
Найти: BQ

Решение:

I) Q – внутри ABCD

1) Пусть $\angle BC\overset{P}{Q} = \alpha$, тогда
$\angle BPC = 90° - \alpha$

2) $\triangle APD = \triangle BPC$ (по 2-м катетам), тогда
$\angle ADP = \alpha$, $\angle APD = 90° - \alpha$, $PD = CP$

3) $\angle CPD = 180° - 2\angle APD = 180° - 180° + 2\alpha = 2\alpha$

4) BPQC – впис., т.к. $\angle CQP + \angle CBP = 90° + 90° = 180°$, тогда
$\alpha = \angle BQP = \angle BCP$, как впис. и опир. на одну дугу, тогда
$\angle BQC = 90° - \alpha$

5) $\angle PCQ = 90° - \angle CPQ = 90° - 2\alpha \Rightarrow \angle BCQ = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha = \angle BQC$, т.е.
$\triangle CBQ$ – равнобедр. $\Rightarrow BQ = BC = 3$

II) Q – вне ABCD

1) $\angle BCQ = \alpha$, тогда
$\angle BXC = 90° - \alpha$ ($CQ \cap BP = X$) $\Rightarrow \angle PXQ = 90° - \alpha$, как верт. $\Rightarrow \angle QPX = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle APD = \alpha$, как верт.

2) $\angle BPQ = \angle BCQ \Rightarrow$ CBQP – впис. (по приз.) $\Rightarrow \angle BQP + \angle BCP = 180°$

3) $\triangle APD = \triangle BPC$ (по 2-м катетам), тогда
$\angle BPC = \angle APD = \alpha \Rightarrow$ ~~$\angle BPD = 180° - 2\alpha$~~ $\angle CPQ = \angle QPX + \angle CPB = 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PCQ = 90° - 2\alpha \Rightarrow \angle BCP = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha \Rightarrow \angle BQP = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CQB = 90° + \alpha - 90° = \alpha \Rightarrow \angle BQC = \angle BCQ = \alpha$, т.е.
$\triangle BCQ$ – равнобедр. $\Rightarrow BC = BQ = 3$

Ответ: BQ = 3.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	5	20	1	66

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	2	0	3	4	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $\frac{1}{99}$ максимальная дробь в знаменатель фиксирован от числителя $\Rightarrow x < 100$ (~~1 не берём~~) знаменатель и с этим знаменателем 36 будет одна числитель не чёт. $\Rightarrow x \leq 50$ дроби со знаменателем меньше 50 неправильные $\Rightarrow x \leq 25$ также дроби $\frac{45}{55}$ $\frac{35}{65}$ $\frac{25}{75}$ $\frac{15}{85}$ $\frac{5}{95}$ не подходят $\Rightarrow$

$x \leq 20$ $\frac{49}{51}$ $\frac{47}{53}$ $\frac{43}{57}$ $\frac{41}{59}$ $\frac{39}{61}$ $\frac{37}{63}$ $\frac{33}{67}$ $\frac{31}{69}$ из этого понимаем что 4 дроби на десяток, а их у нас $5 \Rightarrow 5 \cdot 4 = 20$

ответ: 20

Не обяз. с 1!

③ $\frac{(a_m + a_1)m}{2} = p$ но раз числа последовательны $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ ... $a_m = m \Rightarrow$

$\frac{(m+1)m}{2} = p$ $\frac{m^2+m}{2} = p$ $m^2 + m = 2p$ $m^2 + m - 2p = 0$ $D = 1 + 2p \cdot 4 = 1 + 8p$

$m_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+8p}}{2}$ $m_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+8p}}{2}$ ОДЗ $p \geq 0$ но m_2 не подходит т.к. при $p \geq 1$ ответ отриц

⑤ если мы поставим числа по координатам $(2;2)(3;3)(4;4)(5;5)(6;6)$ то все они будут положительные и мы сможем выставлять числа по координатам $(3;2)$ и $(2;3)$ они тоже будут положительные. после ставим числа в $(4;3)(4;2)(5;4)(5;3)(5;2)(6;5)(6;4)(6;3)(6;2)$ то все будут положительны

уже отриц.

если поставим их именно в этом порядке после ставим числа в $(3;4)(2;4)$ $(4;5)(3;5)(2;5)(5;6)(4;6)(3;6)(2;6)$ из это следует максимальное кол положит. 25

② в первом уравнении $x + y < 25$ $x \in [14; 23]$ и при в зависимости от x
$x > 0$ $y > 0$ $4x > y + 26$ y колеблется от 1 до 7 относительно этого решаем второе уравнение $x + y < 25$ но с помощью подставления
$x - 4 < 2y$

возьмём $14 = x$ из 1 уравнения $y = 1$ $14 - 4 < 2$ ~~не подходит~~ нехватает y

возьмём $x = 16$ из 1 уравнения $y_{max} = 5$ $16 - 4 < 10$ снова нехватает y

возьмём $x = 17$ из 1 уравнения $y_{max} = 7$ подставляем $17 - 4 < 7 \cdot 2$ $7 + 17 = 24$
если будем брать 18 и далее y будет уменьшаться $13 < 14$

значит ответ сосновые шишки 17, кедровые шишки 7

Лист 1 из 2

Доп лист №1

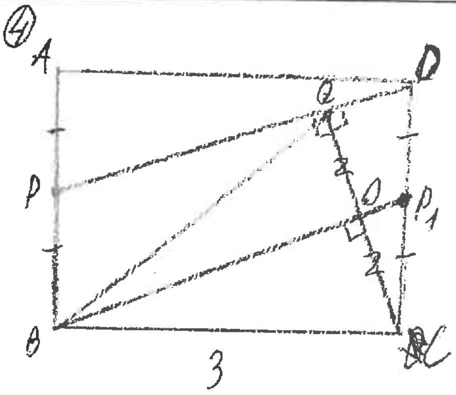
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 4 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4



проводим параллельную прямую PD BP_1 к PD она делит DC поровну по теореме Фалеса понимаем что $QO = OC$, а $\angle PQO = \angle BOC$ ($PD \parallel BP_1$) $\Rightarrow$ что BO это и медиана и высота $\triangle BQC$ $\Rightarrow$ $\triangle BQC$ равнобедренный с равными сторонами BQ и BC а $\Rightarrow$ $BC = 3 = BQ$

Ответ $BQ = 3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | / | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пусть ~~1 число~~ числитель $= a$, а знаменатель $= b$, тогда **1 задача**

$\frac{a}{b}$ - несокр и $a+b=100$ => $b = 100 - a$ => Т.к. $\frac{a}{b}$ - несокр, то $a \% b$ и $b \% a \neq 0$ => $(100-a) \% a \neq 0$ (и как что мы можем рассматривать до половины, т.е. только $(100-a) \% a \neq 0$, т.к. после 50 случаи повторяются) $(100-a) \% a \neq 0$ значит, что $\frac{100-a}{a}$ - нецелое => $\frac{100}{a} - 1$ нецелое => $\frac{100}{a}$ нецелое и несокр.

$a \leq 50$ => ~~$\frac{100}{13}$~~ $100 = 2^2 \cdot 5^2$ => не подходят чётные и кратные 5 => чисел, кратных 2 = 25, кратных 5 = 10, кратных 10 = 5 => чисел, кратных либо 2, либо 5 = 25+10-5 = 30, значит a может быть 20 числами, т.к. мы ~~взяли~~ ~~только~~ дробей 40, а т.к. $\frac{1}{100}$ несокр, а $\frac{100}{1}$ сократима (100 целое 100), то дробей несократимых, 39 =>

Дроби правильные!

1	2	3	4	5	Σ
5	20	18	20	20	83

Ответ: 39 дробей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

№2. Пусть кол-во сосновых шишек вначале a, а кедровых b, тогда

$a+b<25$ $\quad 2a-26>b \Rightarrow 2a \geq 28 \Rightarrow a\geq 14$

$2a>b+26 \Rightarrow a\leq 24$, т.к. $b\geq 1 \Rightarrow b<2a-26 \Rightarrow b\leq 22$

$2b>a-4$ $\quad b>\frac{a-4}{2} \Rightarrow b\geq 6 \Rightarrow 6\leq b\leq 22$

$a<25-b$ $\quad$ при $b=6$: $a<19$, $a>16$, $a<16$ не подходит

$a>\frac{b}{2}+13 \Rightarrow$

$a<2b+4$ $\quad$ при $b=7$: $a<18$, $a>16{,}5 \Rightarrow a=17 \Rightarrow$, $a<18$

Ответ: $a=17$; $b=7$ (кедровых шишек 7, а сосновых 17).

№3

Рассмотрим эту сумму, пусть 1 число будет равно a, тогда

$S=a+a+1+a+2+a+3+\dots a+m-1=m\cdot a+\frac{m(m-1)}{2}=p \Rightarrow m\left(a+\frac{m-1}{2}\right)=p$, а

т.к. мы умножаем на m и получаем простое число, то

$a+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}=\frac{p}{m}$, то есть $a+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}$ = нецелое число, а т.к. m - ~~целое~~ натур

и a - ~~целое~~ натур, то $\frac{2a+m-1}{2}=\frac{p}{m} \Rightarrow$ в $\frac{2a+m-1}{2}$ мы не можем

изменить знаменатель, как и в $\frac{p}{m}$ (р-прост, а знам. несокр. дробь) $\Rightarrow m=2$, а $2a+m-1=p \Rightarrow 2a+1=p \Rightarrow a=1$, например.

Вернёмся к $\frac{2a+m-1}{2}$, мы можем сделать знам $=1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow$

$2a+m-1=p \Rightarrow 2a=p$, а т.к. р - прост, а a - натур, то $m\neq 1 \Rightarrow$

$m=1$?

Ответ: $m=2$.

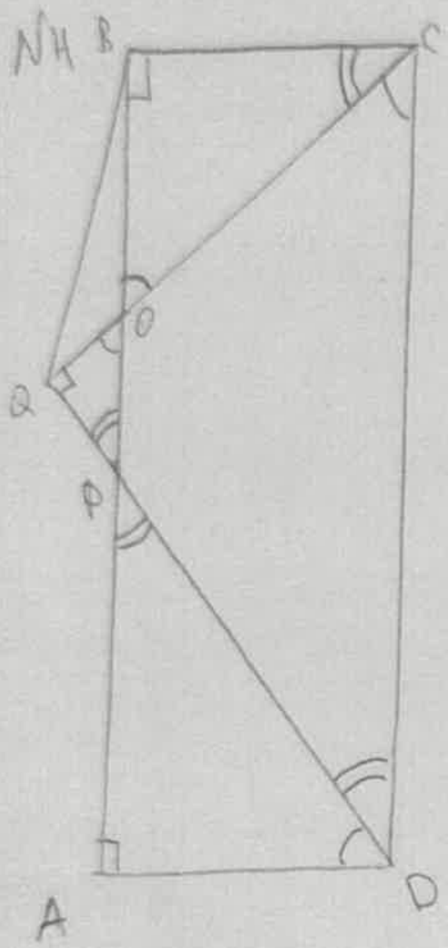
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: $BC=3$

P-середина AB

$CQ \perp DP$

Найти:

BQ-?

Решение:

Пусть $CD = 2a = BA = 2AP = 2PB \Rightarrow$

$AP = PB = a \Rightarrow$ по теореме Пифагора:

$AP^2 + AD^2 = DP^2 \Rightarrow DP = \sqrt{a^2+9}$

Пусть $\angle PDA = \alpha$, тогда $\angle APD = 90^\circ - \alpha =$

$= \angle CDP = \angle QCB$ и $\angle QCD = \alpha \Rightarrow$

$\triangle CQD \sim \triangle DAP$ по 2 углам $\Rightarrow$

$\frac{CQ}{DA} = \frac{CD}{PD} \Rightarrow CQ = \frac{6a}{\sqrt{a^2+9}}$

Рассмотрим $\triangle APD$:

$\angle PDA = \alpha \Rightarrow \cos(90-\alpha) =$

$= \frac{3a}{\sqrt{a^2+9}} \Rightarrow$ по теореме

косинусов ($\triangle CQB$): $BQ^2 = BC^2 + CQ^2 - 2\,BC \cdot CQ \cdot \cos(90-\alpha) =$

$= 9 + \frac{36a^2}{a^2+9} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot a \cdot a}{\sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{a^2+9}} = 9 + \frac{36a^2}{a^2+9} - \frac{36a^2}{a^2+9} = 9 \Rightarrow$

$BQ = 3$.

Ответ: $BQ = 3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

	1	2	3	4	5	6	7
1	−	−	−	−	−	−	−
2	−	+	+	+	+	−	−
3	−	+	+	+	+	+	−
4	−	+	+	+	+	+	−
5	−	+	+	+	+	+	−
6	−	+	+	+	+	+	−
7	−	−	−	−	−	−	−

Обозначим за − − отриц. числа, а за + − положительные, тогда макс. кол-во плюсов = 24, т.к. мы ставим + либо, когда у нас 2 − либо, когда у нас 2 +, тогда макс = 24 =>

Последовательность действий:

(6; 6) +

(2; 6) +

(2; 2) +

(5; 2) +

(6; 3) +

~~(5; 2) +~~

(6; 2) −

остальные поле в любом порядке заполняется плюсами.

Ответ: 24

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА000148722 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 2

Пусть изначально у каждого бельчонка было x сосновых и y кедровых шишек.

Тогда получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>26+y \\ 2y>x-4 \end{cases}$$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

$2x>26+y$

$x>13+0{,}5y$

$x-13>0{,}5y$

$4\cdot(x-13)>4\cdot0{,}5y$

$4x-52>2y$

$4x-52>2y>x-4$

$4x-52>x-4$

$3x>48$

$x>16$

т.к. x-натуральное число, $x\geq17$

$2y>x-4$

$y>0{,}5x-2$

$y+2>0{,}5x$

$4\cdot(y+2)>4\cdot0{,}5x$

$4y+8>2x$

$4y+8>2x>26+y$

$4y+8>26+y$

$3y>18$

$y>6$

т.к. y-натуральное число, $y\geq7$

$$\begin{cases} x+y\geq17+7=24 \\ x+y<25 \end{cases} \Rightarrow x+y=24;\ x=17;\ y=7$$

Ответ: у бельчат было по 17 сосновых и по 7 кедровых шишек.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | МА000148 7222 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3

Пусть ряд m последовательных натуральных чисел выглядит как $a_1; a_2; a_3; \dots a_m = a_1; a_1+1; a_1+2; a_1+3; \dots a_1+m-1$.

По формуле Гаусса сумма чисел такого ряда равна $\frac{(a_1+a_m)\cdot m}{2} = \frac{(a_1+a_1+m-1)\cdot m}{2} = \frac{(2a_1+m-1)\cdot m}{2} = (2a_1+m-1)\cdot m\cdot\frac{1}{2}$. По условию, эта сумма является простым числом, то есть имеет только один делитель, отличный от 1. Тогда остальные 2 множителя должны взаимно сократиться до 1.

Имеем два случая: $m\cdot\frac{1}{2}=1$ или $(2a_1+m-1)\cdot\frac{1}{2}=1$

1 случай: $m\cdot\frac{1}{2}=1$; $m=1:\frac{1}{2}=2$ – пример действительно существует, например $2+3=5$.

2 случай: $(2a_1+m-1)\cdot\frac{1}{2}=1$; $2a_1+m-1=2$

$2a_1+m-1=2$

$m-3=-2a_1$

a – натуральное число; $a_1\geq1 \Rightarrow 2a_1\geq2 \Rightarrow -2a\leq-2$

~~$m-3\geq-2$~~ ~~$m-3$~~ $m-3=-2a$

~~$m\geq$~~ $m-3\leq-2$

$m\leq1$ m – натуральное число; $m\geq1$

$\begin{cases} m\leq1 \\ m\geq1 \end{cases} \Rightarrow m=1$. Пример: $5=5$

Ответ: $m=1$ или $m=2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ М 1 0 0 0 1 4 8 7 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1

Пусть ~~дробь~~ дробь имеет вид $\frac{x}{y}$ тогда для верности условия должны выполняться следующие ~~усло~~ отношения: $\begin{cases} x+y=100 \text{ (по условию)} \\ x<y \text{ (правильная дробь)} \end{cases}$

Отсюда $x < \frac{100}{2}$; $y > \frac{100}{2}$; $x < 50$; $y > 50$. Все возможные $x \in [1; 49]$; все возможные $y \in [51; 99]$. Итого существует $(49-1+1)=49$ простых дробей вида $\frac{x}{y}$, где $x+y=100$.

Теперь проверим, какие из этих дробей несократимы:

Если дробь $\frac{x}{y}$ сократима, значит она имеет вид $\frac{Kx_1}{Ky_1}$ $\Rightarrow Kx_1+Ky_1=100$

$K\cdot(x_1+y_1)=100=2^2\cdot5^2$. Значит $K=2^n\cdot5^m$, ~~n∈ m~~; где $n=\{0;1;2\}$; $m=\{0;1;2\}$

Отсюда, дроби $\frac{x}{y}$ могут сокращаться только на 2 и на 5 (из простых множителей). Среди $x\in[1;49]$ есть 24 чётных числа; 100-чёт=чёт $\Rightarrow$ при чётном x дробь $\frac{x}{y}$ будет сократима; уберём из рассмотрения все чётные x, тогда вариантов остаётся $49-24=25$ вариантов $x\in\{1;3;5;7;9;\ldots 47;49\}$. Среди этого множества есть ещё 5 чисел, кратных 5 (5;15;25;35;45).

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ (\text{mod } 5)}}{100} - \underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ (\text{mod } 5)}}{x} = y \Rightarrow \text{при } x \vdots 5 \quad y \equiv_5 0.$$

При x, кратном 5, y будет кратен 5 и дробь сократится. Уберём эти 5 чисел из рассмотрения, осталось $25-5=20$ дробей, все они подходят условию ($\frac{1}{99}$; $\frac{3}{97}$; $\frac{7}{93}$; $\frac{9}{91}$; $\frac{11}{89}$; $\frac{13}{87}$; $\frac{17}{83}$; $\frac{19}{81}$; $\frac{21}{79}$; $\frac{23}{77}$; $\frac{27}{73}$; $\frac{29}{71}$; $\frac{31}{69}$; $\frac{33}{67}$; $\frac{37}{63}$; $\frac{39}{61}$; $\frac{41}{59}$; $\frac{43}{57}$; $\frac{47}{53}$; $\frac{49}{51}$)

Ответ: существует 20 дробей, удовлетворяющих условию.

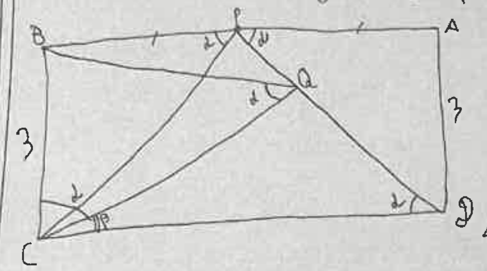
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 8 | 7 | 2 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4



Решение: пусть $\angle QDC = \alpha$,

$\angle QCD = 90 - \alpha = \beta$

$\angle APD = \angle QDC$ (накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей PD) $= \alpha$

$\angle BCQ = 90° - \angle QCD = 90 - \beta =$

$= 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

В четырёхугольнике PBCQ внешний угол QPA = противолежащему внутреннему углу BCQ $= \alpha$ => PBCQ – вписанный

$AD = BC = 3$ (ABCD - прямоугольник)
$AP = BP$ (по условию)

} по двум катетам прямоугольные треугольники $\triangle ADP = \triangle BCP$ => $\angle BPC = \angle APD = \alpha$

Во вписанном четырёхугольнике BCQP углы BPC и BQC опираются на одну дугу BC => $BQC = BPC = \alpha$

$\angle BCQ = \angle BQC = \alpha$ => $\triangle CBQ$ – р/б; $BQ = BC = 3$

Ответ: $BQ = 3$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | МА000148 7222 | Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3

~~Докажем, что~~ Всего в таблице осталось $5\times5=25$ свободных клеток, докажу, что не могут быть содержать положит. число все 25 клеток:

Допустим, что такой вариант существует, все 25 клеток содержат положительные числа. Тогда, по мере заполнения произойдёт ситуация, когда 3 угловые клетки уже будут заполнены, а четвёртая — нет:

$\boxed{-}$ – отрицательное число

$\boxed{+}$ – положительное число

$\boxed{}$ – пустая клетка

$\boxed{?}$ – положит. число, либо пустая клетка (отрицат. числа быть не может, потому что хотим, чтобы все 25 чисел были положительными.)

Получим, что незаполненная клетка и по вертикали, и по горизонтали находится между отрицательным и положительным числом $\Rightarrow$ в ней обязательно будет знак −. Противоречие.

24 клетки с положительными числами можно получить, приведу пример:

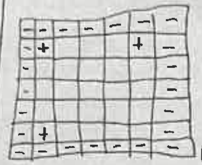
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 8 | 7 | 2 | 2 | 2 |

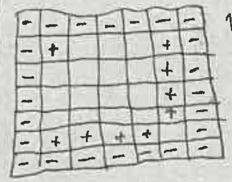
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

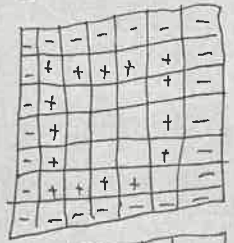
Задание 5 (продолжение)



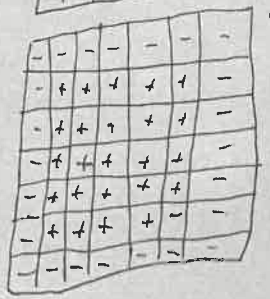
Шаг 1: заполняем положит. числами все верхние угловые клетки (по столбцам они расположены между двумя отрицат. числами) и нижнюю одну нижнюю угловую (по строке она расположена между числами <0)



Шаг 2: заполняем 3 нижних клетки (не включая угловую, по столбцу между двумя <0) и 3 правых клетки (не включая угловую, по строке между двумя <0)



Шаг 3: заполняем 3 верхних (по строке между двумя положит.) и 3 крайних левых (по столбцу между двумя положит.)



Шаг 4: заполняем 9 центральных клеток (и по столбцу и по строке между положит.)

Шаг 5: в угловую клетку ставим отрицат. число.

Получили таблицу с 24 положит. числами.

Ответ: может быть максимально 24 положительных числа.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	5	1	66

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА000140832 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Рассмотрим все правильные дроби у которых сумма числителя и знаменателя 100, кроме дробей, чей числитель делится на 2 и 5.

$\frac{1}{99}$ $\frac{3}{97}$ $\frac{7}{93}$ $\frac{9}{91}$ $\frac{11}{89}$ $\frac{13}{87}$ $\frac{17}{83}$ $\frac{19}{81}$ $\frac{21}{79}$ $\frac{23}{77}$

$\frac{27}{73}$ $\frac{29}{71}$ $\frac{31}{69}$ $\frac{33}{67}$ $\frac{37}{63}$ $\frac{39}{61}$ $\frac{41}{59}$ $\frac{43}{57}$ $\frac{47}{53}$ $\frac{49}{51}$

Мы исключили дроби те, которые сократимы (делятся на 2 и 5), рассмотрим оставшиеся. Дроби, чей знаменатель или числитель - простое число, несократимы. Таких дробей много: $\frac{1}{99}$, $\frac{3}{97}$, $\frac{7}{93}$, $\frac{11}{89}$, $\frac{13}{87}$, $\frac{17}{83}$, $\frac{19}{81}$, $\frac{23}{77}$, $\frac{29}{71}$, $\frac{31}{69}$, $\frac{37}{63}$, $\frac{41}{59}$, $\frac{43}{57}$, $\frac{47}{53}$, $\frac{39}{61}$, $\frac{33}{67}$, $\frac{27}{73}$, $\frac{21}{79}$, $\frac{9}{91}$ и осталась дробь $\frac{49}{51}$, но она несократима: $\frac{49}{51} = \frac{7 \cdot 7}{17 \cdot 3}$. Значит все выписанные ~~25 выписанных~~ 20 дробей - несократимы.

Ответ: существует 20 таких дробей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 8 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Пусть сосновые шишки – a, кедровые – b. Тогда по условию:

$a+b<25$

$2a>b+26$

$2b>a-4$

$a>4$

Из второго уравнения при минимальном b следует, что $a>13$, в ином случае неравенство, заданное условием было бы неверно. Тогда $b<11$, ведь $a=14$ – минимально возможное значение, а $a+b<25$. Рассмотрим 3 неравенство при a_{min}: $2b>14-4$, $2b>10 \Rightarrow b>5$

Раз $b>5$, то $a<20$, ведь $a+b<25$. Получим 2 новых неравенства $5<b<11$ $14<a<20$. При $b=6$ $2a>6+26$ $2a>32$ $a>16$. При $a>17$:

$2b>17-4$ $2b>13$ $b>6$. Вот мы и нашли подходящую пару a и b. $a=17$, $b=7$: $17+7=24$ $24<25$;

$17\cdot 2=34$ $7+26=33$ $34>33$; $2\cdot 7=14$ $17-4=13$ $14>13$;

$17>4$. Значит изначально было по 17 сосновых и по 7 кедровых шишек у каждого бельчонка.

Ответ: 17 сосновых, 7 кедровых.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 8 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3). Пусть a_1 – первое натуральное число, тогда $a_m = a_1 + m - 1$, ведь числа, по условию, последовательные, тогда $p = \frac{(a_1 + a_1 + m - 1)m}{2} = \frac{2a_1 m + m^2 - m}{2} = a_1 m + \frac{m^2}{2} - 0{,}5m$, раз p должно быть простым, то $a_1 m + \frac{m^2}{2} - 0{,}5m$ – делится только на 1 и само на себя, но $\frac{a_1 m + \frac{m^2}{2} - 0{,}5m}{m} = a_1 + 0{,}5m - 0{,}5$, значит $a_1 + 0{,}5m - 0{,}5$ – нецелое. Но a_1, m – натуральные, значит $0{,}5m - 0{,}5$ – нецелое, что возможно лишь при четном m. Однако если m четное и больше 2, то $a_1 + a_1 + 1 + a_1 + 2 + a_1 + 3 \dots + a_1 + m - 1$ делится на 2 (например $10 + 11 + 12 + 13 = 46 = 2 \cdot 23$), поскольку будет четное количество четных и нечетных чисел. Остается $m = 1$, $m = 2$, при которых p может быть простым. 3 – простое ($m = 1$), $1 + 2 = 3$ 3 – простое ($m = 2$), однако при $m = 1$ нет суммы.

Ответ: $m = 2$.

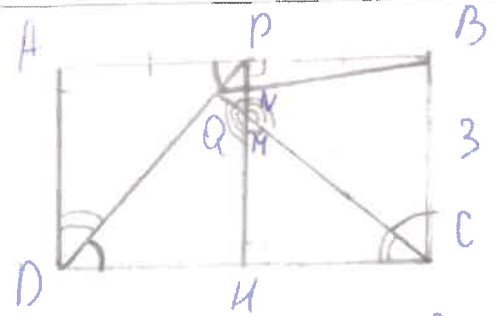
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | 8 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

4) Дано:
ABCD □
BC = 3
AP = PB
CQ ⊥ DP
BQ − ?



∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90°, т.к прямоугольник. ∠ADP = 90° − ∠QDC, ∠APD = 90° − ∠ADP, так как сумма углов треугольника 180. 90° − ∠QDC = 90° − ∠ADP ⇒ ∠QDC = ∠ADP ⇒ ∠ADP = ∠QCD, ведь ∠A = ∠DQC = 90°, поскольку CQ − перпендикуляр. Проведем перпендикуляр PH к DC. ∠APH = 90° ∠DPH = ∠ADP, как накрест лежащие. ∠HMC = ∠APD, ведь ∠MCH = ∠APD (DP), ∠MHC = ∠A = 90°. Тогда ∠NMQ = ∠HMC как вертикальные, аналогично ∠QMH = ∠NMC, ∠QNP = ∠BNM ∠PNB = ∠QNM. Тогда ∠BQC = 90° − ∠PQB (P), где ∠PQN = ∠PDA, как соответственные, тогда ?
∠BQC = ∠APD = ∠BCQ ⇒ △BQC − равнобедренный с основанием QC ⇒ BQ = BC = 3

Ответ: 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) По условию близлежащие для числа к поставленному по строке или столбцу — произведение этого поставленного числа. 4 числа точно будут отрицательными, поскольку по 1 соседу ~~буду~~ по строке и столбцу будут отрицательными, а значит для положительного произведения придется поставить для каждого из этих 4 „угловых" поставленных чисел по одному отрицательному. Значит наибольшее количество положительных чисел — 49 − N − 4, где N — числа расставленные по периметру, N = 24.

Ответ 21.

Пример:

−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	1	1	1	1	1	−1
−1	−1	1	1	1	−1	−1
−1	1	1	1	1	1	−1
−1	−1	1	1	1	−1	−1
−1	1	1	1	1	1	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	0	0	0	1	7	4	3	8	2	2

Вариант № ______ Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача N1

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Пусть у нас дробь вида $\frac{a}{b}$ тогда по условию $a+b=100$, $a<b$, НОД$(a,b)=1$

т.к. $a<b$ и $a+b=100$ тогда a обязательно меньше 50. Если a делится на какое-то число и 100 делится на это число, тогда и b будет делится на это число $\Rightarrow$ a не может делится на числа на которые делится 100

100 делится на 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 $\Rightarrow$ a это числа от 1 до 49 не делящиеся на 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50.

а это числа 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49. Все эти значения a подходят, т.к. если a делится на какое-то число, ~~не дели~~ на которое не делится 100, то b не может делится на это число, т.к. иначе 100 будет делится на это число. $\Rightarrow$ во всех значениях a которые мы написали, будет ~~a b~~ НОД$(a,b)=1$ и $a+b=100$ $a<b$ всего таких a 20 это такая что дробь вида $\frac{a}{b}$ и будет кол-во дробей.

Ответ: 20

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2

Пусть изначально у каждого бельчонка было a кедровых и b сосновых шишек. Тогда по условию

$2b > a + 2b$

$2a > b - 4$ сложим эти неравенства получим что

$2a + 2b > a + b + 2b - 4$

$\Rightarrow a + b > 22$

по условию $a + b < 25$ и мы получили что $a + b > 22$

$\Rightarrow$ либо $a + b = 23$ либо $a + b = 24$ (т.к. число натуральное)

1 случай $a + b = 23 \Rightarrow a = 23 - b$

$\Rightarrow a + 2b = 23 - b + 2b = 49 - b$

$\Rightarrow 2b > 49 - b \Rightarrow 3b > 49$

$2a = 2(23 - b) = 46 - 2b$

$\Rightarrow 46 - 2b > b - 4 \Rightarrow 3b < 50$

тогда получается что $49 < 3b < 50$ а такого быть не может т.к. b натуральное число. $\Rightarrow$ не может быть что $a + b = 23$

2 случай $a + b = 24 \Rightarrow a = 24 - b$

$\Rightarrow a + 2b = 24 - b + 2b = 50 - b$

$\Rightarrow 2b > 50 - b \Rightarrow 3b > 50$

$2a = 2(24 - b) = 48 - 2b$

$\Rightarrow 48 - 2b > b - 4 \Rightarrow 3b < 52$

$\Rightarrow 50 < 3b < 52 \Rightarrow 3b = 51 \Rightarrow b = 17$

$\Rightarrow a = 7$

Ответ: 17 сосновых шишек и 7 кедровых шишек

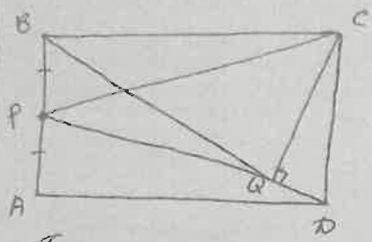
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ MA00017438 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4



$\angle PBC = 90°$ по условию

$\angle CQP = 90°$ по условию

$\Rightarrow \angle PBC + \angle CQP = 180$

$\Rightarrow PBCQ$ – вписанный четырехугольник

Пусть $\angle ADP = x$ тогда $\angle APD = 90 - x$

$\Rightarrow \angle BPQ = 90 + x$

$\angle BPQ + \angle BCQ = 180$ т.к. $BPQC$ - вписанный

$\Rightarrow \angle BCQ = 90 - x$

$\angle BPC = \angle BQC$ т.к. $BPQC$ - вписанный

$BC = AD$ по условию

$BP = AP$ по условию

$\angle CBP = \angle PAD$ по условию

$\Rightarrow \triangle PBC = \triangle PAD$ по двум сторонам и углу между ними

$\Rightarrow \angle BPC = \angle DPA = 90 - x$

$\Rightarrow \angle BQC = 90 - x$

$\Rightarrow \angle BQC = \angle BCQ$

$\Rightarrow \triangle CBQ$ - равнобедренный

$\Rightarrow BC = BQ$

$\Rightarrow BQ = 3$

Ответ: 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 4 | 3 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №3

Ответ: 2; 1

Пример: числа 21 и 22 при $m=2$, их сумма равна 43 это простое число.
число 19 при $m=1$

Оценка: если m равно какому-то простому числу (не равному 2)
тогда среди последовательных m натуральных чисел
обязательно встретятся все остатки при делении на m
причем все остатки кроме 0 мы можем разбить на пары
так что сумма в этих парах будет делиться на m
$\Rightarrow$ сумма m последовательных чисел будет делиться на m
тогда чтобы эта сумма была простым числом
нужно чтобы она равнялась m, а такого быть не может
т.к. у нас среди этих чисел есть число $\geq m$ и
еще хотя бы одно число, $\Rightarrow$ сумма обязательно больше
m. ~~$\Rightarrow m$ не может простым~~ $\Rightarrow m$ не равно простому
числу большему 2.

если $m \vdots 4$ тогда среди m последовательных натуральн.
чисел будет четное кол-во нечетных чисел, тогда
сумма всех чисел будет четной и она обязательно
больше 2, $\Rightarrow$ не будет являться простым числом
$\Rightarrow m$ не делится на 4.

осталось разобрать случай если m равно произведению
нескольких простых, при этом среди этих простых
есть хотя бы одно не равное 2. пусть это простое будет x
В этом случае среди m последовательных натуральных
чисел встречаются все остатки при делении на x, причем
каждый одинаковое число раз. $\Rightarrow$ мы можем все
остатки кроме 0 разбивать на пары ~~т.к. в них~~ так
что в каждой паре сумма делится на ~~m~~ x
тогда сумма m последов. натуральн. чисел делится
на ~~m, но при этом~~ на x (но при этом она обязательно
больше x, $\Rightarrow$ сумма m последовательных натуральных
чисел ~~да~~ не простое число $\Rightarrow$ такое m быть не может.

Заметим что любое число большее 2 относится к
какому-то из 3-х случаев $\Rightarrow m$ не может быть больше 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М А 0 0 0 1 7 4 3 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

Ответ: 24

Пример:

							y
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
-1						-1	2
-1						-1	3
-1						-1	4
-1						-1	5
-1						-1	6
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7
1	2	3	4	5	6	7	x

во все клетки рамки мы ставим -1 / нумерация идет как (x, y)
дальше в клетку (2, 6) ставим 1 как произведение (2, 7) и (2, 1)
затем в клетку (2, 2) ставим 1 как произведение (1, 2) и (7, 2)
дальше в клетку (6, 2) ставим 1 как произведение (6, 1) и (6, 7)
потом в клетку (6, 5) ставим 1 как произведение (1, 5) и (7, 5)
потом в клетку (5, 6) ставим 1 как произведение (5, 2) и (5, 1)
Затем мы заполним клетки (2, y) 1, как произведение чисел в этом столбце, затем заполним клетки (x, 2) 1, как произведение чисел в этой строке, затем заполним клетки (6, y) 1, как произведение чисел в этом столбце (кроме клетки (6, 6)). Затем заполним клетки (x, 6) 1, как произведение чисел в этой строке (кроме клетки (6, 6)). в клетку (6, 6) мы ставим -1. а в оставшиеся клетки поставим только 1. Это пример на 24.

<u>Оценка:</u> Заметим что в рамке 24 клетки, а во всех них числа отрицательные => положительных чисел не более $7 \cdot 7 - 24 = 25$

~~Пусть во всех 25 клетках будут положительные числа, тогда посмотрим на клетки~~

Докажем что 25 положительных чисел мы получить не можем. Посмотрим на клетки (2, 6) (2, 2) (6, 2) (6, 6). Пусть мы поставили в какие-то 3 из них положительные числа. Заметим что число в 4 клетке это будет произведение числа из рамки и числа не из рамки. Но тогда у нас число из рамки отрицательное а число не из рамки должно быть положительным*, но тогда число в этой клетке будет отрицательным => 25 ~~чисел~~ полож. чисел мы получить не можем.
* чтобы было 25 полож. чисел.

т.к. либо число в какой-то клетке (2, 6) (2, 2) (6, 2) (6, 6) будет отрицат. либо какое-то другое число во внутреннем квадрате 5×5 будет отрицат.
=> максимум 24 положительных числа.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

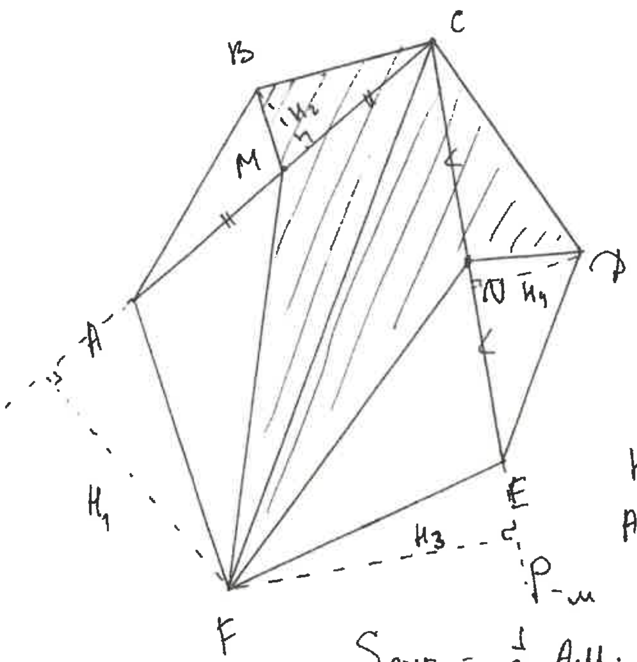
Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 7 | 9 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	14	20	1	75

№1



Дано:

ABCDEF

AM = MC

CN = NE

$S_{BMFNDC} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$

Опустим из т. F высоту H на продолжение отрезка AC за т. A.

Р-м $\triangle AMF$ и $\triangle MCF$:

$S_{AMF} = \frac{1}{2} AM \cdot H$

$S_{MCF} = \frac{1}{2} MC \cdot H$

$AM = MC$ (по условию т.к. M - середина AC) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AMF} = S_{MCF}$.

То есть, медиана делит треугольник на 2 равных по площади треугольника (FM, BM, FN, DN - медианы)

Пусть $S_{BMC} = S_1$, тогда $S_{ABC} = 2S_1$. Пусть $S_{CMF} = S_2$, тогда $S_{ACF} = 2S_2$. Пусть $S_{FNC} = S_3$, тогда $S_{FCE} = 2S_3$. Пусть $S_{CND} = S_4$, тогда $S_{CDE} = 2S_4$.

Тогда $S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{AFC} + S_{FCE} + S_{CDE} =$

$= 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 2(S_{BMC} + S_{CMF} + S_{FNC} + S_{CND}) =$

$= 2 S_{BMFNDC}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

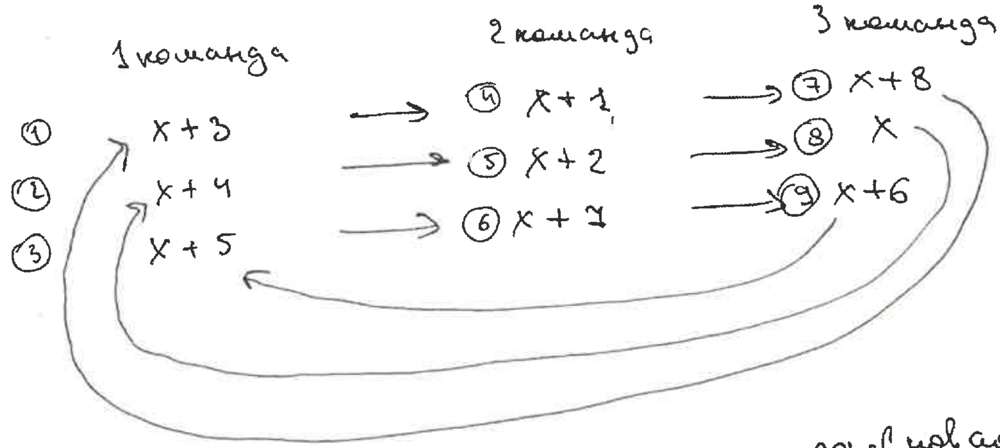
Вариант № 4　　　　МА0001974622

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Ответ: да, это может быть.

Пусть бельчата показали такие результаты: (по условию, они вначале были такими же, как и когда их уже распределили по командам. У всех различные). (Результаты одинаковые, т.к. скорость не менялась)



Стрелками показано кто с кем соревновался. То есть в соревнованиях между 1 и 2 командами выиграли ①, ⑥, ② бельчата. Значит выиграла 1 команда. В соревнованиях между 2 и 3 выиграли ⑤, ⑥ и ⑦ бельчонок, Значит выиграла 2 команда. В соревнованиях между 1 и 3 командой выиграли ⑦, ②, ⑨ бельчата. Значит выиграла 3 команда.

При этом у всех бельчат результат различный.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	9	7	4	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

(1) $a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ac)$

$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac \le 0$

~~...~~ $(a-b-c)^2-4bc \le 0$

$(a-b-c)^2 \le 4bc$

(2) $a^4+b^4+c^4 \le 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$

$(a^2-b^2-c^2)^2 \le 4b^2c^2$

$|a^2-b^2-c^2| \le |2bc|$

$a^2-b^2-c^2 \le 2bc$

$a^2 \le (b+c)^2$

$|a| \le |b+c|$

~~...~~ (1) $(a-b-c)^2 \le 4bc$

$|a-b-c| \le |2\sqrt{bc}|$

$a-b-c \le 2\sqrt{bc}$

$a \le (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$|\sqrt{a}| \le |\sqrt{b}+\sqrt{c}|$

(2) : $|\sqrt{a}| \le |\sqrt{b}+\sqrt{c}|$ (1) : $|a| \le |b+c|$

Их решения не найдены.

уравнение 1 не равносильно уравн. 2 т.к. решения у них разные. Петя и Нина тоже неправы, т.как $(2)^2 \ne (1)$ и $\sqrt{(1)} \ne (2)$. Значит прав Рана.

Ответ: Рана

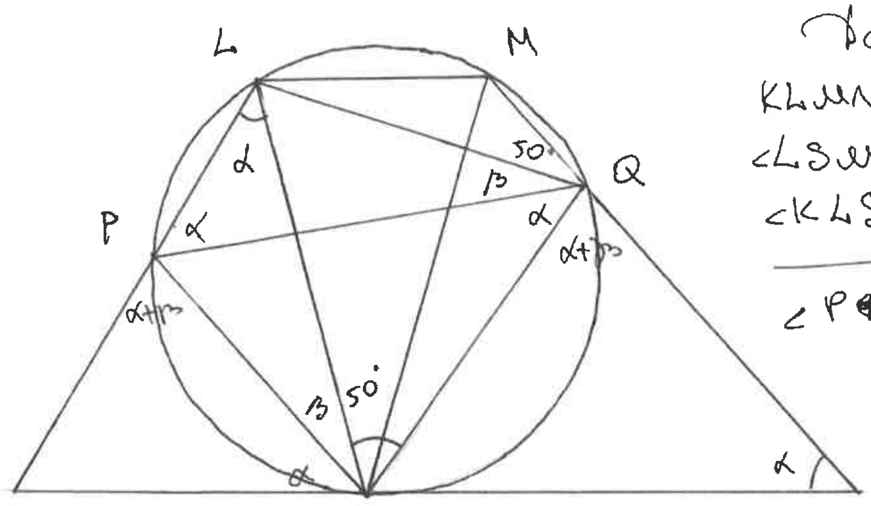
Лист 3 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 1 9 7 4 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4



Дано:
KLMN - трапеция
$\angle LSM = 50°$
$\angle KLS = \angle SNM$

$\angle PSQ$ - ?

N

Пусть $\angle KLS = \angle SNM = \alpha$

Т. к. KLMN - трапеция, то $\angle LMN = 180 - \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle LSQ = \alpha$ (Окружность $= 180°$) $\Rightarrow$ $KL \parallel SQ$

($\angle KLS = \angle LSQ$, они вертикальные).

Пусть $\angle PSL = \beta$. Тогда $\angle PSL = \angle PQL$ (опираются на одну дугу) $= \alpha$. $\angle PLS = \angle PQS = \alpha$ (опираются на одну дугу. $\angle LSM = \angle LQM = 50°$ (опираются на одну дугу).

$\angle PSK = \angle KLS = \alpha$ (оба равны половине дуги $\cup PS$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $PS \parallel MN$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KPS = \angle SQN = \alpha + \beta$ (т.к. $\angle KPS$ - внешний для $\triangle PLS$). Тогда $\angle MQL + \angle LQP + \angle PQS + \angle SQN = 180°$

Т. е. $50 + 2(\alpha+\beta) = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 65°$

$\angle PSQ = \alpha + \beta = 65°$

Ответ: $65°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00019746 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Минимум гирек мы можем использовать с 1-м орехом – 1 гирька, равная его весу, лежащая на другой чаше весов. Но мы можем использовать каждую гирьку несколько раз. Возьмём гирьку, равную по весу одному из орехов. Тогда в зависимости от веса орехов мы будем докладывать гирьки других масс на чашу с орехом или с той, самой первой гирькой (назовём её основной.)

Выгоднее всего взять основную гирьку, весом ~~58 г.~~ 57 г. Тем как эта масса как бы посередине и мы сможем использовать набор „маленьких" гирек 2 раза. То есть мы кладём, увеличивая вес по мере увеличения веса орехов, гирьки на чашу весов с орехами. А потом, доказав, что орех, весом 58 г, весит 58 г, положив на другую чашу весов гирьку того же веса, будем их, пользуясь тем же набором гирек, будем подкладывать их уже на чашу весов с гирькой 58 г.

Итого, нам нужно кол-во гирек, с помощью которых можно получить любой вес от 1 до 57 – 50 = 7 включительно. Мы сможем сделать это с помощью гирек, весом 1, 2 и 4 г.

3 = 1 + 2   6 = 4 + 2

5 = 1 + 4   7 = 4 + 1 + 2

Итого, нам всего понадобилось 3 + 1 = 4 гирьки.

–

Ответ: 4

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	1	81

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______

M	A	0	0	0	1	8	9	6	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Заметим что $100 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5 \Rightarrow$ если числитель будет $\vdots 2$ или $\vdots 5$ то и знаменатель будет $\vdots 2$ или $\vdots 5$ соответственно $\Rightarrow$ дробь будет сократимой, если же в числителе не будет простого множителя 2 или 5, то числа x (числитель) и $100-x$ (знаменатель) ~~будут~~, где x - числитель и $x<100$, будут взаимно простые, т.к. $x \vdots k$ $(k\neq 2,5;\ k\in N)$ (4, 25, 10, 20 и т.д.), $100 \not\vdots k \Rightarrow 100-x \not\vdots k$, заметим что если $x<100-x \Rightarrow x\le 49 \Rightarrow$ всего правильных дробей с числ. $\vdots 2$ ~~...~~ и суммой знаменателя и числителя $=100$ — $\frac{49-1}{2}=24$; $\vdots 5 \rightarrow \frac{49-4}{5} = 9$; а $\vdots 10 \rightarrow \frac{49-9}{10} = 4 \Rightarrow$ всего правильных несократимых дробей где сумма знаменателя и числителя $=100 \rightarrow 49-24-9+4 = 20$

Ответ - 20.

Лист __ __ из __

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 9 | 6 | 2 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

x – сосн.
y – кедр. $\Rightarrow$ $\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>y+26 \\ 2y>x-4 \end{cases}$ +

$2(x+y)>x+y+22$

$x+y>22 \Rightarrow x+y=23$ I сл.
$x+y=24$ II сл.

I сл. $y=23-x$

$\begin{cases} 2x>23-x+26 \\ 46-2x>x-4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x>49 \\ 3x<50 \end{cases} \Rightarrow$ т.к. $x\in\mathbb{N} \Rightarrow x\in\varnothing$, $\Rightarrow$ не подходит

II сл. $y=24-x$

$\begin{cases} 2x>24-x+26 \\ 48-2x>x-4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x>50 \\ 3x<52 \end{cases} \Rightarrow 3x=51$
$x=17 \Rightarrow y=7$

Ответ: 17 сосновых; 7 кедровых.

Лист ___ из ___

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 9 | 6 | 2 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Заметим, что если $m \geq 3$ и $m \not\vdots\, 2$, то все m чисел дают все возможные остатки от деления на m $(1, 2, \dots, m-1, m \equiv 0 \bmod m)$ в каком-то порядке, тогда сумма всех этих чисел $\vdots\, m$, т.к. ~~число~~ 1 число $\vdots\, m$, а оставшихся чёт кол-во и они делятся на пары чисел сумма которых $\vdots\, m$ ($m-1$ и 1, $m-4$ и 4, и т.д.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ сумма всех чисел $\vdots\, m$, если m - составное, то значит сумма всех чисел тоже составное, если m - простое, то сумма всех чисел будет $> m$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ будет кратно какому-то k_1 $\Rightarrow$ составное $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ не подходит. Если $m \,\vdots\, 4$, то в таких последовательных числах будет чёт кол-во нечёт чисел $\Rightarrow$ их сумма будет $\vdots\, 2$ $\Rightarrow$ не подходит.

Если $m \geq 3$ и $m \,\vdots\, 2$ но $m \not\vdots\, 4$, то $m = 2 \cdot n$, где $n \not\vdots\, 2$ тогда числа ~~б~~ будут давать все возможные остатки от деление на число m $(1, 2, 3, 4, \dots m)$, тогда заметим что чисел $\not\vdots\, m$ - нечёт кол-во, т.к. только 1 число $\vdots\, m$ $\Rightarrow$ будем разбивать на пары по остаткам $m-1$ и ~~m~~ 1, $m-2$ и 2, и т.д. тогда без пары останется ~~число~~ остаток $\frac{m}{2}$, но т.к. $m \,\vdots\, 2$ - это число $\in N$, а также можно заметить что сумма всех оставшихся чисел $\vdots\, m$ $\Rightarrow$ сумма всех остальных чисел и числа с остатком $\frac{m}{2}$ будет $\vdots\, n$ $\Rightarrow$ эта сумма будет составное число $\Rightarrow$ $m < 3$ $\Rightarrow$ $m = 2$ (пример $1+2=3$) и $m = 1$ $(2 = 2)$

Ответ: $m = 2$ и $m = 1$.

Лист __ __ из __

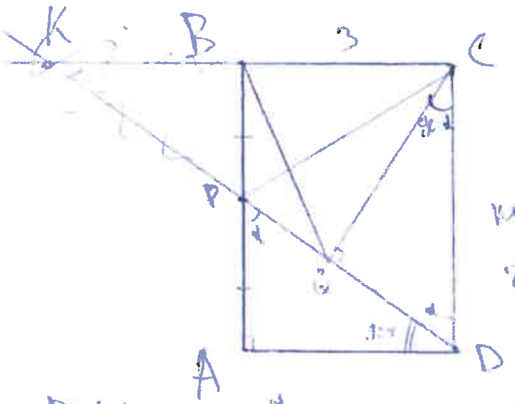
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 9 | 6 | 2 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N4



~~Пусть продлим DP до пересечения~~ Продлим DP до пересечения с BC, пусть ~~точка пересечения~~ K. Заметим что $\angle APD = \angle QDC$, а $\angle PAD = \angle CQD$ (накрест.) (по усл.) Пусть $\angle APD = \alpha$

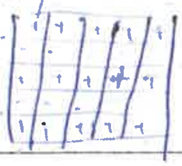
$\Rightarrow \triangle PAD \sim \triangle DQC \Rightarrow \angle QCD = \angle ADP \Rightarrow \angle QCB = \alpha$, а так же $\angle QPB = 180 - \alpha \Rightarrow BCQP$ - впис., проведем PC и заметим что $\angle BCP = \angle PQB$ - как углы вписанные, так же заметим что $\triangle APD = \triangle PBC$ ($BC = AD$, $BD = AP$, $\angle PAD = \angle PBC$) $\Rightarrow \angle BCP = \angle ADP = 90 - \alpha = \angle PQB$, тогда $\angle BQC = 90 - (90 - \alpha) = \alpha \Rightarrow$ т.к. $\angle BCQ = \alpha$ то $\triangle QBC$ - р/б $\Rightarrow BQ = BC = 3$

Ответ: 3.

N5

Ответ: 15

Д-во: все ... положительных чисел ≥ 1, ... по принципу Дирихле в каком-нибудь столбце будут 4 положительных числа (т.к. ~~отрицательных~~ отрицательных чисел не хватит) - противоречие ... 5x5 ... max 15 Пример:



— порядок расстановки

Вариант № ______ МА00019862222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	5	5	68

№1

$\frac{x}{y}$; $x<y$; $x+y=100$.

Так как $y>x \to \boxed{y \geq 51}$. $y \neq 100 \to \boxed{y \leq 99}$

Заметим, что $y=100-x$. Получим: $\frac{x}{y}=\frac{x}{100-x}$.

Так как дробь несократимая, то

$(100-x) \nmid x \to 100 \nmid x \to 100 \nmid y \to y \nmid 2; y \nmid 5$ (т.к $100=2^2\cdot 5^2$). При соответствующих ограничениях всего возможных дробей будет 20:

~~от 51 до 59 будет~~ от $y\in[51;59]$ будет 4 возможные дроби ($\frac{49}{51}; \frac{47}{53}; \frac{43}{57}; \frac{41}{59}$). Аналогично и при $y\in[61;69]$; $y\in[71;79]$ ... $y\in[91;99]$.

Получим, что $4\cdot 5=20$ дробей

Проверим, все ли 20 дробей нам подходят:

$\frac{1}{99}$ V; $\frac{3}{97}$ V; $\frac{7}{93}$ V; $\frac{9}{91}$ V; $\frac{11}{89}$ V; $\frac{13}{87}$ V; $\frac{17}{83}$ V;

$\frac{19}{81}$ V; $\frac{21}{79}$ V; $\frac{23}{77}$ V; $\frac{27}{73}$ V; $\frac{29}{71}$ V; $\frac{31}{69}$ V; $\frac{33}{67}$ V; $\frac{37}{63}$ V;

$\frac{39}{61}$ V; $\frac{41}{59}$ V; $\frac{43}{57}$ V; $\frac{47}{53}$ V; $\frac{49}{51}$ V. Все 20 вариантов подходит → существует 20 дробей

Ответ: 20

Вариант № ______ | М А 0 0 0 1 9 8 6 2 2 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

~~Пусть~~ ~~x-...~~ x-сосновых, y-кедровых шишек у каждого

$x+y<25$. ~~Тогда...~~ Из условия о ~~...~~ первом бельчонке получим, что $2x>y+26$, а из условия о втором бельчонке $2y>x-4$

~~Получаем~~: $\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>y+26 \\ 2y<x-4 \end{cases} \Rightarrow y<25-x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y<50-2x \Rightarrow 2x>50-2y$.

$2x>50-2y>y+26 \Rightarrow 24>3y \Rightarrow 3y<24 \Rightarrow y<8$

~~Получаем~~, что $y_{max}=7$; $x_{max}=17$.

$x+y<25 \Rightarrow x<25-y=25-7=18 \Rightarrow x<18 \Rightarrow$

$\Rightarrow y\in[0;7]$; $x\in[0;17]$. Чтобы $2y>x-4$ и ~~$2x>y+26$ — выполнялось, нужно чтобы~~ выполнялось, нужно чтобы $[0;14]>[9;13] \Rightarrow 2y=14 \Rightarrow y=7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=17$. Получаем, что ~~7 сосновых и 17 кедровых~~.

17-сосновых, 7 кедровых

Ответ: 17 сосновых и 7 кедровых у каждого

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Приведем пример при $m=2$: $1+2=3$

В буквенном виде условие задачи выглядит так:
$x+x+1+x+2 \ldots + x+n = p$, где x – самое маленькое число среди всех последовательных чисел

$x+x+1 \ldots + x+n = x(n+1) + 1+2 \ldots + n = x(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} =$

$= \frac{2x(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2x+n)}{2} = p \Rightarrow$

$\Rightarrow 2p = (n+1)(2x+n)$. Заметим, что $m = n+1$, поэтому
$2p = m(2x+m-1) = m^2+2xm-m = 2p \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2+2xm-m-2p=0 \Rightarrow m^2+(2x-1)m-2p=0$.

Одним из корней этого уравнения является $m=2$.
Подставим и получим $4+2(2x-1)-2p=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~4+8x+1=2p~~ $\Rightarrow 4+4x-2=2p \Rightarrow p=2x+1$.

Теперь подставим в $m^2+(2x-1)m-2p$, $p=2x+1$.
Получим: $m^2+(2x-1)m-2(2x+1)$. При $m=2$, получим:
$4+4(2x-1)-2(2x+1)=0 \Rightarrow 4+8x-4-4x-2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Подставим $x=\frac{1}{2}$ в выражение $m^2+(2x-1)m-2(2x+1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$. m не может быть равен $-2 \Rightarrow m=2$. $(\underbrace{1+2}_{m=2}=3)$

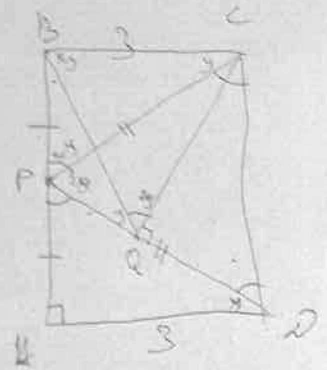
Ответ: $m=2$, 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ MA0001986222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



(·)P равноудалена от (·)C и (·)D → PC = PD

Пусть $\angle PDA = y$ →

→ $\angle PDC = 90 - y$ →

→ $\angle CPD = 2y$.

$\Delta BCP = \Delta PAD$ →

→ $\angle BCP = \angle PDA = y$.

$\angle PQC + \angle PBC = 180$ → BCPQ – вписанный →

→ $\angle PQB = \angle BCP = y$

$\angle CDP = 90 - y = \angle BPC$. Получаем, что ΔBPQ имеет углы: y; $90-2y$; $90+y$

$\angle PQB = \angle DQC$ → $3y - 90 + y = 30$ →

→ треугольник имеет углы 30, 30, 120

Если $PD = x$, то $AP = \frac{x}{2}$ → $9 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$ →

→ $9 + \frac{x^2}{4} = x^2$ → $\frac{3}{4}x^2 = 9$ → $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ → $AP = \sqrt{3}$

$BQ = \sqrt{BP^2 + PQ^2 - 2BP \cdot PQ \cdot \cos 120} = \sqrt{3 + 3 - 18 \cdot -\frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$

Ответ: $\sqrt{15}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант №

МА0001986222

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Заметим, что любое положительное число должно быть окружено в столбце или в строке либо двумя положительными, либо двумя отрицательными. Предположим, что во внутреннем квадрате ~~хотя одно~~ 5×5 лишь одно отрицательное. Тогда, найдутся 3 угла этого квадрата, что в них будут стоять положительные числа. Тогда, какое ~~число будет~~ положительное число будет окружено минимум одним отрицательным, а значит отрицательных чисел 5, а не 1 — противоречие. Аналогичное повторится и при количестве отрицательных чисел в квадрате 5×5 равном от 1 до 3. А вот при 4, если положительные числа стоят в уголках квадрата, это возможно. ~~Пример~~ Пример расстановки:

«0» — отрицат-ое.

«П» — положит-ое.

0	0	0	0	0	0	0
0	П	П	П	П	П	0
0	0	П	П	П	0	0
0	П	П	П	П	П	0
0	0	П	П	П	0	0
0	П	П	П	П	П	0
0	0	0	0	0	0	0

Тогда, положительных чисел будет $25-4=21$. Приведем конкретный пример

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____ М А 0 0 0 1 9 8 6 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	1	1	1	1	-1
-1	-1	1	1	1	-1	-1
-1	1	1	1	1	1	-1
-1	-1	1	1	1	-1	-1
-1	1	1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Ответ: 21

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ МА00018226 22
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Заметим, что знаменатель ~~меньше~~ больше либо равен 50, иначе дробь будет неправильная. Также если знаменатель делится на 2 или 5, то числитель также будет делится на это число, т.к. сумма числителя и знаменателя 100. Заметим, что любые пары числителя и знаменателя, где знаменатель не делится на 2 и на 5 подходят. Допустим такая пара будет сократима. Тогда они оба делятся на простое число отличное от 2 и от 5. Тогда их сумма тоже делится на это простое число. Но 100 делится только на 2 и 5 (из простых). Посчитаем кол-во подходящих пар. Чисел от 50 до 99 ~~делящ~~ делящихся на 2 – 25, делящихся на 5 – 10, делящихся на 10 – 5. Тогда нам не подходит 25+10-5 = 30 пар. Значит подходит 50-30 = 20

Ответ: 20

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	1	81

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 2 | 2 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Допустим изначально у белкая было по x сосновых и y кедровых шишек
Тогда из условия мы можем составить неравенства

$x+y>25$

$2x>26+y$

$2y>x-4$

Из второго неравенства следует, что $x\geq 14$. Тогда
$2y>10 \Rightarrow y\geq 6$. Тогда $2x>32$, $x\geq 17$.
Тогда $2y>13 \Rightarrow y\geq 7$.
$x+y\geq 24$ и $x+y<25$.
Значит $x=17$, $y=7$.
Подставим:

$17+7<25$

$34>33$

$14>13$

Ответ: 17 сосновых и 7 кедровых

№3

Допустим m делится на нечетное простое число. Допустим это число x. Тогда разобьем наши числа на блоки по x подряд идущих чисел. Заметим, что в каждом из блоков будут встречаться все остатки при делении на x ровно по одному разу. Посчитаем сумму этих остатков. Она равна $\frac{x\cdot(x+1)}{2}$. Т.к. x - нечетное число, то $\frac{x(x+1)}{2}$ делится на x. Значит сумма в каждом блоке делится на x, значит вся сумма делится на x. Очевидно вся сумма не могла быть равна x, а значит m не делится на x.

Допустим m делится на 4. Тогда кол-во нечетных чисел четно, а значит вся сумма четна. Значит m не делится на 4.

Остаются варианты 1 и 2.

Пример для 1 - 7

Пример для 2 - 3,4

Ответ: $m = 1,2$

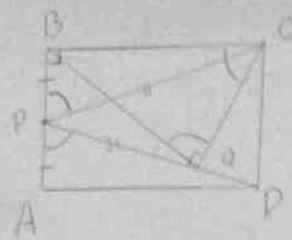
Вариант № ____

M	A	0	0	0	1	8	2	2	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

№4



Решение. Заметим, что четырехугольник PBCQ вписанный, т.к. $\angle PBC + \angle CQP = 180°$. Значит $\angle BCQ + \angle BPQ = 180°$. Также $\angle APD + \angle BPQ = 180°$, как смежные.

Значит $\angle BCQ = \angle APD$. Также заметим, что $\triangle APD = \triangle BPC$, по двум сторонам и углу между ними. Значит $\angle APD = \angle BPC$. Из вписанности PBCQ следует что $\angle BPC = \angle BQC$. Значит $\angle BCQ = \angle BQC$. Значит $\triangle CBQ$ - равнобедренный. Значит $BQ = BC = 3$.

Ответ: 3

Олимпиада школьников «

Вариант № ______

М	А	0	0	0	1	8	2	2

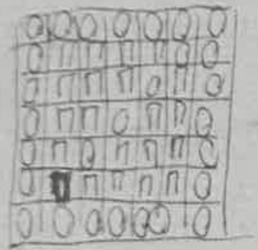
622

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Ответ: 421

Пример:



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	8	0	9	3	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия РЫБИН

Имя МАКСИМ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 17.01.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 890924948 00 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	0	9	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1) Пусть скорость проверки работ в день у i-ого человека = v_i. Так же пусть S – объем работ, тогда

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1+v_2+v_3+v_4+v_6} = 6 \\ \frac{S}{v_2+v_4+v_5+v_6} = 10 \\ \frac{S}{v_1+v_3+v_5} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 6(v_1+v_2+v_3+v_4+v_6) \\ S = 10(v_2+v_4+v_5+v_6) \\ S = 12(v_1+v_3+v_5) \end{cases} \Rightarrow$$

30б

1	2	3	4	5	Σ
20	20	~~2~~ 8	20	~~8~~ 16	~~68~~ 84

$$\Rightarrow \begin{cases} (v_1+v_2+v_3+v_4+v_6) = 2(v_1+v_3+v_5) \\ 6(v_1+v_3+v_5) = 5(v_2+v_4+v_5+v_6) \\ 5(v_2+v_4+v_5+v_6) = 3(v_1+v_2+v_3+v_4+v_6) \end{cases}$$

Пусть $v_1+v_3 = x$, $v_5 = y$, $v_2+v_4+v_6 = z$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x+z = 2(x+y) \\ 6(x+y) = 5(z+y) \\ 5(z+y) = 3(x+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x+2y \\ 6x+y = 5z \\ 2z+5y = 3x \end{cases} \Rightarrow 5(x+2y) = 6x+y \Rightarrow 5x+10y = 6x+y \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 9y$, обр. замена $v_1+v_3 = 9v_5$.

Процент работ, проверенных 1 и 3 за 4 дня равен:

$$\frac{4(v_1+v_3)}{12(v_1+v_3+v_5)} = \frac{4(9v_5)}{12(v_5+9v_5)} = \frac{\cancel{36}^{3}\cancel{v_5}}{\cancel{12}_{1}\cdot 10\cdot \cancel{v_5}} = \frac{3}{10} \Rightarrow$$

За 4 дня 1ый и 3ий проверили 30% работ.

Ответ: 30%

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

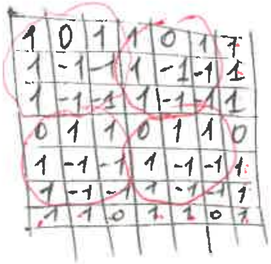
Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 0 9 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

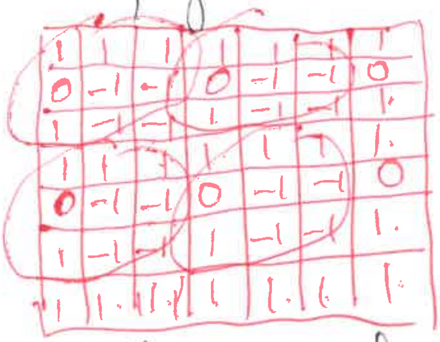
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Ответ: 10, докажем, почему это так.

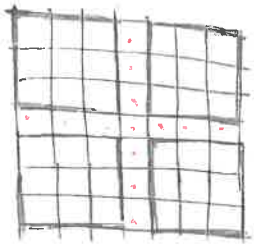


10

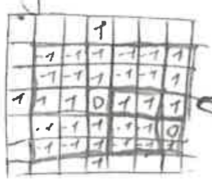


11

Док-во:



В каждом из обведенных квадратов сумма будет равна 0, по условию, значит чтобы ~~максимизировать~~ сумму, нужно максимизировать сумму чисел в центральном кресте. Поскольку клеток в этом кресте 13, то сумма ≤ 13. Равно 13 она не может быть равна, т.к. тогда получается, что в центральном квадрате 3×3 таблицы, будет находиться 5 единиц, а значит сумма в нем уже точно не будет равна 0. Так же, 0 стоит в центральной клетке (если предположить, что максимальная сумма = 12), т.к. если он там не стоит, то в каком-то квадрате, содержащем 5 клеток центрального креста и центральную клетку (она входит в эти 5 клеток), найдется 5 единиц, что противоречит условию. Значит если максимум суммы = 12 и он достигается =>



Проставим (−1), чтобы сумма была равна 0 в мини-квадратах 3×3. Тогда в фиолетовом квадрате 3×3, БУО (т.к. можно просто зеркально снизу вверх отразить квадрат), в клетке (7;5) стоит 1 а в клетке (7;3) 0, поставим 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 9 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

в клетки (7;6) и (7;2), что суммы в кв. 3×3 были равны 0. Тогда в ~~...~~ нижнем условии правом кв. 3×3 незаполненная цифра это 1. Но тогда в квадрате ~~...~~ с верш. (4;1); (4;3); (6;1); (6;3) находится 5 единиц. Что противоречит условию. Значит 12 не достигается.

~~...~~

При этом мы рассмотрели только часть квадрата справа от центральной линии, но ведь слева также же ситуация. ~~Значит и слева и справа от центральной линии~~ Значит, нужно зачеркнуть еще одну единицу и поставить в этой клетке 0. Значит, теоретически возможный максимум сумм теперь равен $12-2=10$

Доказаны вспомогат. утверждения. $12-1=11$?

8б

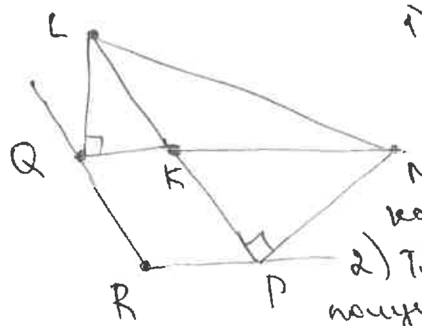
Пример на 10 приведен.

А вдруг 11 нельзя?

Ответ: 10

Оценка на 10, но на самом деле не 11. Но пример только на 10, а 11 невозможно?

4) То, что нужно доказать в задаче невозможно и сейчас я это докажу:



1) ~~Так как ∠LKM > 90°~~ Т.к на LM как на диаметре построена окружность, то $\angle LQM = 90° = \angle LPM$, при этом точки Q и P расположены точно как на картинке, в силу того, что $\angle LKM > 90°$.

2) Т.к нас просят док-ть, что $LR \perp KM$, то получается, что нас просят док-ть, что LR и LQ — одна прямая, т.к LQ уже $\perp KM$ (или, что Т. L, Q, R — лежат на одной прямой 1)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА00018093 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Но если предположить, что L;Q;R – лет. на 1 прямой, то LR – это и касательная и секущая и окружность. Очевидно такое невозможно. Поэтому, т.к возможна только такая картинка, то, что требуется док-ть некорректно, поэтому задачу невозможно решить.

5 | Пусть шоколадных – Ш штук, малиновых – М, а апельсиновых – А. =>

$A+Ш+М=20$, $2 \le A \le 12$; $3 \le M \le 14$, т.к

$A \geq 2$ и $M \geq 3$ => $Ш \le 15$, но $Ш \geq 1$, т.к все сорта есть.

1). ~~Если $1 \le Ш \le n \le 3$, то вариантов для каждого А:~~

~~n+7, т.к~~

$3 \le Ш \le 14$!

1) Если $Ш=1$ => $M+A=19$, значит

М принимает знач. от 7 до 14, т.к $A \le 12$, значит вариантов 8. + Аналогично для Ш=2 и Ш=3, Ш=4, при Ш=2, будет 9 вар, + при Ш=3 + 10 вар, Ш=4 => 11 вар. +

2) Если $Ш=5$, уже идет сверху ограничение на М, т.к при большем М, не будет выполняться условие $2 \le A \le 12$. При Ш=5, $3 \le M \le 13$ => 11 вар. + Аналогично при Ш=6, 7, ..., 15. при Ш=6 => 10 вар, + при Ш=7 => + 9 вар, ..., при Ш=15 => 1 вар.

Ш=8 8в.
Ш=9 7в
Ш=10 6в
Ш=11 5в
Ш=12 4в
Ш=13 3в
Ш=14 2в
~~Ш=15~~

Зачем Вы считаете Ш=1, Ш=2, Ш=3, Ш=15?

Тоесть суммарно: $3 \le Ш \le 14$

$(1+2+...+11)+(11+10+9+8) = \frac{12\cdot 11}{2} + 38 = 66+38 = 104$ вар.

Значит всего возможно 104 различных набора.

168

P.S. В случае 1) общая формула ~~...~~ кол-ва ~~...~~ вариантов равна Ш+7, т.к при $1 \le Ш \le 4$,

$10+11+11+10+9+8+7+6+5+4+3=$
$=10+11+\frac{3+11}{2}\cdot 9 = 63+21 = 84$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0001809322

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

учитывая условие задачи, М может принимать значения для каждого Ш: $8+Ш \le M \le 14$, т.к $A \geq 12$, => кол-во вар. $= 14-8+Ш+1 = 7+Ш$.

(Понятно, что если выполнено все условие, а к тому же определено М и Ш, то единств. обр. опред. А)

2) Для второго случая идет ограничение сверху, т.к кол-во оставшихся мандарин $<$ суммы max(M) и min(A). Общая формула кол-во случаев это $16-Ш$, т.к $A+M = 20-Ш$, и чтобы выполн. условие

$3 \le M \le 20 - \min(A) - Ш = 18-Ш$, => кол-во вариантов равно $18-Ш-3+1 = 16-Ш$.

Ответ: 104

N.2 т.к трехчлены не имеют корней, то их дискриминант отриц.:

$b^2-4ac<0$

$q^2-4pr<0$, при том сумма трехчленов имеет корень =>

$(b+q)^2-4(a+p)(c+r) \geq 0$. Понятно, что $c \cdot r \neq 0$, т.к если так, то либо c либо $r=0$. Тогда у одного из трехчленов точно есть корень $x=0$

~~Понятно что $c \cdot r$ может быть положительным, пример: x^2+x+1~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	1	0	0	0	1	8	0	9	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Понятно, что $c \cdot r$ может быть <0 пример:

$-x^2-6x-10$ $D_1=36-40<0$ $x^2=4$

$2x^2-6x+6$ $D_2=36-48<0$ $x=\pm 2$

Предположим, что $c \cdot r>0 \Rightarrow c$ и r – одинаков. знаков, БЧО $c>0$ и $r>0 \Rightarrow$ т.к дискриминанты отриц $\Rightarrow a>0, p>0$

$2bq-4(ar+pc) \geq 4ac-b^2+4pr-q^2>0 \Rightarrow$

$bq>2(ar+pc)>0 \Rightarrow b$ и q – одного знака.

Ну и т.к в задаче у нас спрашивают какой знак, значит есть только 1 вариант, значит $cr<0$

Ответ: отрицательный

Лист 6 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	2	0	1	0	1	2	2

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № _________

Фамилия Исупова

Имя Ольга

Отчество Петровна

Дата рождения 30.11.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 12.03.2022

Номер телефона +7 985 286 98-78 **Подпись** Исуп

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	16	76

N1

За 1 час совместной работы 2 трубы заполнят бассейн на $\frac{2}{3}$. $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Производительность 1-ой трубы – $\frac{1}{3}$ б/час, а 2-ой – $\frac{1}{6}$ б/2 $\Rightarrow$ на 2-ом отрезке времени бассейн заполнялся со скоростью $\frac{1}{2}$ б/час

$\frac{1}{2}\cdot x=\frac{1}{3}$

x – время за которое заполнится бассейн

$x=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ ч $\frac{2}{3}$ часа $=40$ минут.

30б

Ответ: 40 минут.

N2.

Дано: $f(x)=x^2+px+q$, $D=p^2-4q>0$.

Доказать: $f(x)=x^2+(p-x_1)x+2q$, $D=(p-x_1)^2-8q\geq 0$

Доказательство:

Рассмотрим несколько возможных случаев:

$p>0$:
- $q>0$ оба корня отрицательны
- $q<0$ больший по модулю корень отрицательный

$p<0$:
- $q<0$ меньший по модулю корень отриц.
- $q>0$ оба корня положительны

Заметим, что при $q<0$ D всегда >0 т.к. $(p-x)^2\geq 0$

$(p-x_1)^2=\left(-(x_1+x_2)-x_1\right)^2=(-2x_1-x_2)^2=4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$

т.к. $-8q=-8x_1x_2$, то $(p-x_1)^2=4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-8x_1x_2=4x_1^2-4x_1x_2+x_2^2=(2x_1-x_2)^2$

$(2x_1-x_2)^2\geq 0$

$D\geq 0$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ МА0002010122

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Заметим, что площади прямоугольников могут быть только делителями числа 1000, а количество не равных между собой прямоугольников не превышает количества вариантов разложения числа клеток на множители.

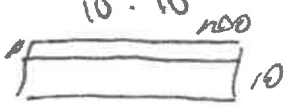
Для начала докажем, что число различных прямоугольников n меньше 5.

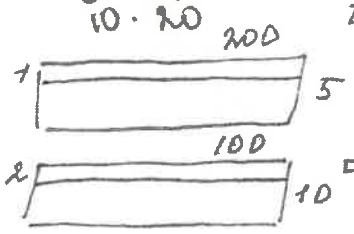
Из всех возможных площадей данному условию удовлетворяют только 2.

$S=100$ (5 не равных прямоугольников) и $S=200$ (6 не равных прямоугольников). Попытаемся разместить их в сетке прямоугольника из 1000 кл.

$1\cdot 100$, $2\cdot 50$, $4\cdot 25$, $5\cdot 20$, $10\cdot 10$

$1\cdot 200$, $2\cdot 100$, $4\cdot 50$, $5\cdot 40$, $8\cdot 25$, $10\cdot 20$





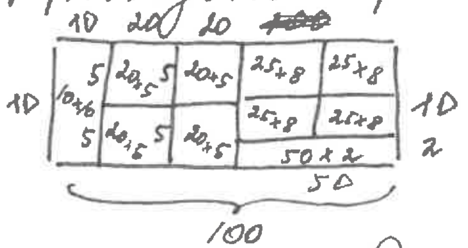
▭ $10\cdot 20$ и ▭ $8\cdot 25$ уже невозможно разместить в данной сетке

▭ $10\cdot 20$ и ▭ $1\cdot 200$ невозможно разместить в этой сетке

Прямоугольники, имеющие сторону 100 или 200 не подходят

$n < 5$

Приведем пример, когда $n = 4$.



ч.т.д.

Ответ: 4

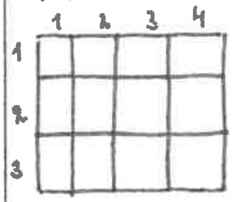
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ MA000201010122

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

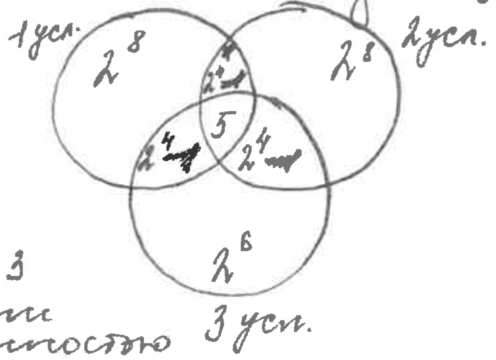
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 5



1 условие — незакрашенная 1-ая строка
2 усл. — незакрашенная 2-ая строка
3 усл. — незакрашенные столбцы 2 и 3

Есть 2^8 способов выполнить первое условие и 2^8-1, чтобы выполнить второе. Эти два множества способов имеют пересечение, когда закрашена только строка 2. В это пересечение входит 2^4-1 способов. Чтобы выполнить 3-е условие есть 2^6 способов, то есть когда закрашены столбцы 1 и/или 4. ~~Пересечение происходит, когда полностью не закрашены либо столбец 1, либо клетки 1;1 и 1;4 или 3;1 и 3;4, но есть закрашенные только~~ Совпадающих способов $2(2^4-1)$



$2^8 + 2^8 + 2^6 - 3\cdot 2^4 - 5 =$

$= 2^4(2^4+2^4+2^2-3)-5 =$

$= 16(16+16+4-3)-5 =$

$16\cdot 33 - 5 = 528 - 5 = 523$

(если полностью незакрашенный прямоугольник считается за способ) или 522 (если должна быть закрашена хотя бы 1 клетка)

Ответ: 523.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

________________	МА0001756522
Адрес площадки проведения	Шифр

Вариант № ________

Фамилия Дмитриева

Имя Марина

Отчество Евгеньевна

Дата рождения 17.02.2005 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 12.03.2022

Номер телефона 89029675257 **Подпись** ________

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант №_____ МА000175652 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1. Изначально одна труба заполняет бассейн за 3ч. => ~~в первый час~~ за 1 час одна труба заполняет $\frac{1}{3}$ бассейна. В первый час работы две трубы вместе заполнили $\frac{2}{3}$ объема бассейна. Т.е. осталось заполнить $\frac{1}{3}$ бассейна.

После поломки: ~~ск~~ производит-ность первой трубы неизменна = $\frac{1}{3}x$, второй трубы - в 2 р меньше = $\frac{1}{6}x$ (где x - время работы, часов)

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	20	80

Зач

Тогда $V_{ост.} = (v_{первой} + v_{второй}) \cdot время$

$$\frac{1}{3} = \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{2}}x \qquad x = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} ч$$

$\frac{2}{3}$ ч. = 40 мин.

Ответ: через 40 минут. $\left(\frac{2}{3} ч.\right)$

Задача 2. По условию, ~~многочлен~~ уравнение $x^2+px+q=0$ имеет 2 корня, Значит, если x_1 и x_2 - корни этого уравнения, то, по теореме Виета, справедливы равенства:

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -p \\ x_1x_2 = q \end{cases} \Rightarrow p = -x_1-x_2$$

Тогда новое уравнение: $x^2 + (-x_1-x_2-x_1)x + 2x_1x_2 = 0$

$x^2 - (2x_1+x_2)x + 2x_1x_2 = 0$

$D = (2x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 8x_1x_2 = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 =$

$= (2x_1 - x_2)^2 \geq 0$ (квадрат ~~к~~ любого числа неотрицателен)

Знагит, полученный квадратный трехчлен будет иметь корень чтд.

Задача 3. ~~Чтобы получить наибольшее число не равных прямоугольников, нужно меньшие прямоугольники (как можно больше) [illegible]~~

Площадь прямоугольника 1000, ~~мы~~ значит, раз мы разрезаем его на прямоугольники равной площади, необходимо, чтобы площадь ~~каждого~~ ~~[illegible]~~ маленького прямоугольника ~~[illegible]~~ была делителем 1000.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ___ | MA0001756522 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3 (продолжение). Причем мы ищем такую площадь прямоугольника, ~~котор~~ численное значение которой раскладывается на произведение двух чисел наибольшим количеством вариантов (это будут стороны прямоугольников, так мы получим не равные прямоугольники)

Любое действительное число раскладывается на произведение простых единственным способом. Чтобы число имело как можно больше представлений в виде произведения двух чисел, нужно, чтобы оно в своём разложении на простые множители имело как можно больше различных чисел.

Так как мы ищем значение площади среди делителей 1000, разложим 1000 на простые множители:

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$1000 = 2^3 \cdot 5^3$.

То есть в разложении искомой площади на простые должны быть только 2 и 5.

- Итак, если мы разделим 1000 на 2, т.е. будет разложение $2^2 \cdot 5^3$, то получится всего 2 прямоугольника с $S = 500$.
- Если на 4, то получится 4 прямоуг-ка с $S = 250$, их стороны: $2 \cdot 125$, $1 \cdot 250$, $10 \cdot 25$, $50 \cdot 5$.
- Если на 8, то у нас получится 8 прямоуг-ков, но с различной площадью всего 2, $(25 \cdot 5$ и $125 \cdot 1)$, т.к. в разложении остались только числа 5, 5 и 5.
- Если разделим на 5, то у нас получится максимально 5 разных прямоуг-ков с $S = 200$ (любые 6 из набора $4 \cdot 50$, $2 \cdot 100$, $5 \cdot 40$, $10 \cdot 20$, $8 \cdot 25$, $1 \cdot 200$)
- Если разделим на 10, то у нас получится максимально 5 разных прямоуг-ков (если считать квадрат прямоугольником): $2 \cdot 50$, $4 \cdot 25$, $20 \cdot 5$, $100 \cdot 1$, $10 \cdot 10$.

Деление на большее кол-во простых чисел рассматривать не имеет смысла, т.к. меньше множителей = меньше комбинаций.

~~Ответ~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

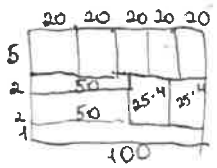
Вариант № ______ MA0001756522

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3. (продолж-е 2.) Итак, сложить из 5 таких прямоуг-ков прямоугольник невозможно, т.к. сумма длин сторон маленьких прямоуг-ков образует слишком длинную сторону, т.е. S > 1000. (т.к. нужно использов. или 1·200, или 1·100 в 1 вар., а во втором обяз. 100·1, т.е. из ост 4х не склад. стор.д)

А из 4 можно:



Ответ: 4.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 5 | 6 | 5 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Задача ~~№4~~ 5.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Кол-во таких раскрасок, чтобы незакрашенной оставалась первая строка = = кол-во раскрасок, чтобы незакрашенной оставалась последняя строка = 2^8, т.к. ~~для~~ каждую из 8 оставшихся клеток можно либо закрасить, либо нет.

Кол-во раскрасок, чтобы 2 средних столбца оказались не закрашены, = 2^6 (аналогично).

По формуле включений и исключений (так как нам необходимо выполнение одного из условий - именно):

$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$.

Пусть A - ~~[illegible]~~ множество способов ~~[illegible]~~ раскрасить прямоугольник так, чтобы незакрашенной оставалась первая строка, B - последняя, C - 2 средних столбца.

$A = 2^8 = 256$; $B = 2^8 = 256$; $C = 2^6 = 64$

$A \cap B = 2^4$ (закрашиваем/нет только 2 строку) $= 16$

$A \cap C = 2^4$ (закрашиваем/не закраш. только клетки 5, 9, 8, 12) $= 16$

$B \cap C = 2^4$ (~~[illegible]~~ выбираем раскраску только клеток 1, 5, 4, 8) $= 16$

$A \cap B \cap C = 2^2$ (выбир раскраску только клеток 5 и 8) $= 4$

$A \cup B \cup C = 256 + 256 + 64 - 16 - 16 - 16 + 4 = \overbrace{512 + 64}^{576} - \overbrace{16 \cdot 3}^{48} + 4 = 580 - 48 =$

$= 532$.

Ответ: 532

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Якутск, СВФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	2	0	5	5	4	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ПИНИГИН

Имя МАКАР

Отчество НИКИФОРОВИЧ

Дата рождения 01.02.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 896441996748 **Подпись** М.Пин

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	0	5	5	4	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	-	20	80

30б

1) a, b, c, d, e – это скорости проверки жюри

$(a+b+d)20=(b+c+e)15=(a+c+d+e)10=S$ Скажем что S это ра колво работ участников.

$(a+c+d+e)\cdot 20 = 2S$

$20a+20c+20d+20e-(a+b+d)20=S$

$\cancel{20a}+20c+\cancel{20d}+20e-\cancel{20a}-20b-\cancel{20d}=S$

$20c+20e-20b=S$

$20c+20e-20b-(b+c+e)15=0$

$20c+20e-20b-15b-15c-15e=0$

$5c+5e-35b=0$ Давайте переведем b направо.

$5c+5e=35b$ Из этого выходит что, $c+e=7b$

Давайте подставим это в выражение $(b+c+e)15$.

выйдет $8b\cdot 15=S$ $120b=S$, то есть второй жюри проверил бы все работы за 120 часов.

Скажем, что $a+c+d+e=x$, тогда $x\cdot 10=b\cdot 120=S$

Преобразуем и выйдет $x=\frac{S}{10}$, а $b=\frac{S}{120}$.

$x+b=\frac{S}{10}+\frac{S}{120}=\frac{12S+S}{120}$. Время за которое все жюри ~~б~~ закончат проверять работы равно

$S:\frac{13S}{120}=\frac{8\cdot 120}{8\cdot 13}=\frac{120}{13}$ часов. И теперь найдем насколько быстрее все жюри проверят работы нежели один второй.

$120:\frac{120}{13}=\frac{120\cdot 13}{120}=13$. Отв: в 13 раз быстрее

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 5 | 5 | 4 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Так как p, q, r члены арифметической прогрессии, то их можно представить как $q = p + d$, а $r = p + 2d$. Подставим в уравнение.

$px^2 + 2\sqrt{2}(p+d)x + (p+2d) = 0$

Найдем дискриминант.

$D = 8p^2 + 16pd + 8d^2 - 4p^2 - 8pd = 4p^2 + 8pd + 8d^2$. А это у нас равно $(2p+2d)^2 + 4d^2$. Это сумма квадратов значит она не отрицательна, а так как все числа ненулевые то наше выражение $(2p+2d)^2 + 4d^2 > 0$, а значит у нас Дискриминант положительный значит у нас есть два решения.

5) Назовем кол-во фисташковых – a, ванильных – b, а карамельных – c. Тогда $2 \leq a \leq 12$, $2 \leq b \leq 12$ и $3 \leq c \leq 14$. Давайте расмотрим случаи когда a равно 2 и т.д до 12.

Когда $a = 2$ тогда $b + c = 18$. Когда это возможно? Тогда когда b от 4 до 12, а c от 6 до 14. (это следует из того что $2 \leq b \leq 12$ и $3 \leq c \leq 14$). А кол-во случаев равно $\frac{12-4+1+14-6+1}{2} = 9$.

Когда $a = 3$ тогда $b + c = 17$. Это возможно когда b от 3 – 12, а c от 5 – 14. Кол-во случаев ~~12-3+1~~ $\frac{12-3+1+14-5+1}{2} = 10$.

При $a = 4$ тогда $b + c = 16$. Это возможно когда b от 2 до 12 и c от 4 – 14. Кол-во случаев $\frac{12-2+1+14-4+1}{2} = 11$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 0 5 5 4 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) При $a=5$ $b+c=15$. Это возможно когда b от 2 до 12 а, c от 3 до 13.

$$\frac{12-2+1+13-3+1}{2}=11.$$

При $a=6$ $b+c=14$: b от 2-11 а c от 3-12.

$$\frac{11-2+1+12-3+1}{2}=10.$$

При $a=7$ $b+c=13$ b от 2-10 а c от 3-11.

$$\frac{10-2+1+11-3+1}{2}=9$$

При $a=8$ $b+c=12$ b от 2-9 а c от 3-10

$$\frac{9-2+1+10-3+1}{2}=8$$

При $a=\cancel{7}9$ $b+c=11$ b от 2-8 а c от 3-9

$$\frac{8-2+1+9-3+1}{2}=7$$

При $a=10$ $b+c=10$ b от 2-7 а c от 3-8

$$\frac{7-2+1+8-3+1}{2}=6$$

При $a=11$ $b+c=9$ b от 2-6 а c от 3-7

$$\frac{6-2+1+7-3+1}{2}=5$$

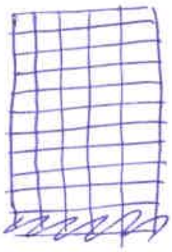
При $a=12$ $b+c=8$ b от 2-5 а c от 3-6

$$\frac{5-2+1+6-3+1}{2}=4$$

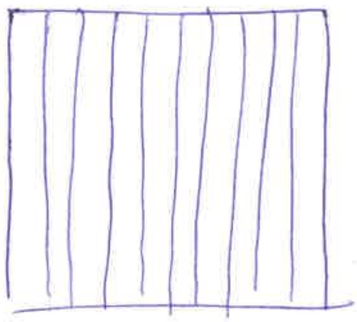
Это все прибавляем $9+10+11+11+10+9+8+7+6+5+4=$ 90 Отв: 90°.

3) Давайте найдем самое маленькое число в 6 столбце. Оно будет самое нижнее в 6 столбце. Давайте сделаем таблицу 5 на 10.

3)



число стоящее на левом нижнем углу будет самое маленькое из всей таблицы, так как числа правее и числа выше больше него. Вернемся на таблицу 10 на 10.



Так как ~~число~~ самое нижнее число в 6 столбце самое меньшее то оно меньше чем 49 чисел, а значит оно максимум 51. ~~(Макс это 100 Нам нужен максимум значит 51 самое нижнее число в стол-бце номер~~ 6. Для числа выше на один чем число 51. Есть 44 числа больше чем оно значит оно максимум 56. Для числа выше на 1 числа 56 есть 39 чисел больше него значит это число 61. И так далее и самое большое число в 6 столбце число 96. Их сумма равна 735. Теперь нужен пример. (Макс сумма 735)

Пример:

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

Отв: Макс сумма равна 735.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КГАНОУ КЦО
Павла Морозова 92 Б

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	2	0	5	5	9	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия СОКОЛОВ

Имя АРТЁМ

Отчество МИХАЙЛОВИЧ

Дата рождения 18.01.2006 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +7924 3088125 **Подпись** Соколов

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	2	0	5	5	9	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть скорости проверки работ членами жюри 1, 2, 3, 4, 5 равны x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 соответственно, а кол-во работ $= S$.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	18	20	20	98

Тогда:

(1) $\frac{S}{x_1+x_2+x_4}=20$ ч; (2) $\frac{S}{x_2+x_3+x_5}=15$ (3) $\frac{S}{x_1+x_3+x_4+x_5}=10$

(4) $\dfrac{\left(\frac{S}{x_2}\right)}{\left(\frac{S}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}\right)}=?$

Выразим из выражений 1, 2, 3 сумму скоростей:

(1) $x_1+x_2+x_4=\frac{S}{20}=C_1$

(2) $x_2+x_3+x_5=\frac{S}{15}=C_2$

(3) $x_1+x_3+x_4+x_5=\frac{S}{10}=C_3$

Выразим x_2: $x_2=\frac{C_1+C_2-C_3}{2}=\frac{\frac{S}{20}+\frac{S}{15}-\frac{S}{10}}{2}=$

$=\frac{\frac{3S}{60}+\frac{4S}{60}-\frac{6S}{60}}{2}=\frac{S}{120}$

Выразим $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{C_1+C_2+C_3}{2}=\frac{\frac{S}{20}+\frac{S}{15}+\frac{S}{10}}{2}=\frac{\frac{3S}{60}+\frac{4S}{60}+\frac{6S}{60}}{2}=$

$=\frac{13S}{120}$

выражение 4

$\dfrac{\left(\frac{S}{x_2}\right)}{\left(\frac{S}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}\right)}=\frac{S}{x_2}\cdot\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{S}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{x_2}=$

(подставим знач. найденные выше)

$=\dfrac{\frac{13S}{120}}{\frac{S}{120}}=\frac{13S}{120}\cdot\frac{120}{S}=13$

Ответ: в 13 раз

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 5 | 5 | 9 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

p, q, r – ненулевые последовательные члены арифм. прогрессии,

Док-ть, что

т.е. (1) $q = p + c$

$r = p + 2c$

$px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$ имеет 2 корня

$$px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$$

Если $D > 0$, то существует 2 различных действит. корня.

$$D = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2}q)^2 - 4pr = 8q^2 - 4pr = 4(2q^2 - pr)$$

$D = 4(2q^2 - pr)$ Подставим значения из п. 1.

$$D = 4(2(p+c)^2 - p(p+2c)) = 4(2\cdot(p^2+2pc+c^2) - (p^2+2pc)) =$$

$$= 4(2p^2 + 4pc + 2c^2 - p^2 - 2pc) = 4(p^2 + 2pc + 2c^2)$$

$+$ $p^2 + 2pc + 2c^2$ $a = 1 \Rightarrow$ ветви параболы напр. вверх.

$D_1 = (2c)^2 - 4\cdot 1\cdot(2c^2) = 4c^2 - 8c^2 < 0 \Rightarrow p^2 + 2pc + 2c^2$ всегда $> 0 \Rightarrow D = 4(p^2 + 2pc + 2c^2) > 0 \Rightarrow$ всегда есть 2 решения. Ч.Т.Д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	0	5	5	9	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Заметим, что в таблице в ~~к~~ ячейке [illegible] лежит число, ~~которое меньше~~ ~~[illegible]~~ всех чисел, кроме числа в самой ячейке, входящих в прямоугольник, ~~образованный ячейкой и правой верхней ячейки.~~ ~~Кроме числа в самой ячейке~~ образованной этой ячейкой и правой верхней ячейкой.

Тогда в ячейке i в строке (нумерация с 1, сверху вниз) и в шестом столбце, содержится число, которое не более чем

$100-(i\cdot 4+i-1) = \cancel{5i-1}\ 100-(5i-1)$ => сумма чисел шестого столбца не более чем сумма $100-(5i-1)$ для $i \in [1;10] = S$

$$S = 100\cdot 10 + 1\cdot 10 - 5\cdot\frac{1+10}{2}\cdot 10 = 1010-275 = 735$$

(оценка сверху)

Пример: Будем заполнять таблицу от правого верхнего, до самого нижнего в столбце №6 строками из последовательных чисел

96	97	98	99	100
91	92	93	94	95
...				
51	52	53	54	55

Далее заполним оставшиеся ячейки аналогично строками из послед. чисел.

Сумма чисел в столбце №6 $= \frac{51+96}{2}\cdot 10 = 735$

Ответ: 735

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	0	5	5	9	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5

фисташковые – не менее 2, не более 12
ванильные – не менее 2, не более 12
карамельные – не менее 3 и не более 14

всего 20 шт.
Сколько наборов? В каждом наборе есть минимальное число макарунов. Тогда варианты отличаются только комбинациями оставшихся макарунов. Переопределим условие: всего 20-2-2-3 макарунов нужно выбрать. Из них: фисташковых не более 10, ванильных не более 10, а карамельных не более 11.
~~Из~~ Заметим, что по кол-ву двух видов однозначно определяется кол-во макарунов третьего вида.
Переберём варианты по кол-ву карамельных макарунов и фисташковых

кол-во карамельных	кол-во вариантов для фисташ. не нарушая условия
11	3
10	4
9	5
8	6
7	7
6	8
5	9
4	10
3	11
2	10
1	9
0	8

(11–3): фисташковых от 0 до 13 – n (n – кол-во карамель.); ванильных хватит в каждом случае

(2–0): фисташковых от 13 – (10 + n) до 10; (n – кол-во карамел.) ванильных хватает в каждом случае

Тогда кол-во наборов = сумме чисел во втором столбце.
т.е. 3+4+5+6+7+8+9+10+11+10+9+8 = 90 вариантов

Ответ: 90

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 0 5 5 9 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Дано

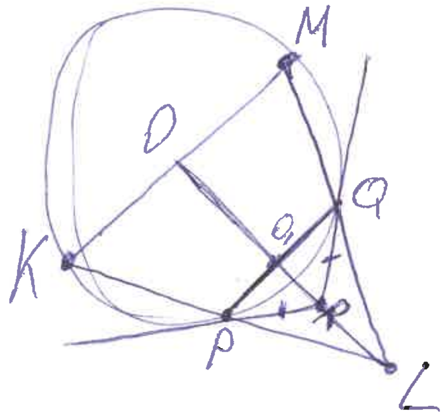
$\triangle KLM$ - остроугольный

окр. O, постр. на KM

O пересек. $\triangle KLM$ на стороне KL в т. P и на стор. LM в т. Q

Касательные PR и QR

Док-ть, что $LR \perp KM$



PR = QR, т.к. это касательные из одной точки

$PR = QR \Rightarrow \triangle PQR$ - равнобедренный, тогда

~~RO - медиана~~ Проведём медиану RO_1, тогда

$\triangle O_1QR = \triangle PRO_1$ по трём равным сторонам.

Тогда $\angle QRO_1 = \angle PRO_1$ (лежат напротив равных сторон)

$\Downarrow$

$\angle QRL = \angle PRL$ (смежные с углами)

$QR = PP$ (док. выше)

RL - общ.

по двум стор. и $\angle$ между ними $\Rightarrow \triangle QRL = \triangle PRL$

Тогда, т.к. $\angle QRL = \triangle PRL$, $\triangle PQL$ - равнобедренный.

Значит $\angle QPL = \angle PQL$ (т.к. $\triangle PQL$ - равноб.) $\Rightarrow \angle MQP = \angle KPQ$ (смежные углы с углами) $\Rightarrow KMPQ$ - трапеция и $KM \parallel PQ$

$\Downarrow$

т.к. $\angle PO_1L = 90°$, то (высота совпадает с медианой)

$\angle KOL = 90°$ ЧТД

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	6	0	0	3	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Трепогин

Имя Юрий

Отчество Александрович

Дата рождения 13. 04. 2005 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 12 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +7 979 4400565 **Подпись** ЮАТ

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 0 0 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

№1

Пусть $U_{р/ч}$ - производительность

U_1 - производительность первого члена жюри, U_2 - второго, U_3 - третьего, U_4 - четвертого, U_5 - пятого.

Пусть все работы - есть вся работа, и равны одной условной единице,

тогда $\frac{1}{U_1+U_2+U_4} = 20^{(1)}$, по условию, где $20 - t_ч$, т.к. $\frac{A}{U} = t$, и

общая производительность равна сумме производительностей каждого

$\frac{1}{U_2+U_3+U_5} = 15$ (2)

$\frac{1}{U_1+U_3+U_4+U_5} = 10^{(3)}$, т.к. всего 5 членов жюри, по условию

(1),(2) => $2 = 35U_2 + 20U_1 + 20U_4 + 15U_3 + 15U_5$ (4)

(3) => $2 = 20U_1 + 20U_3 + 20U_4 + 20U_5$ (5)

(4),(5) => $35U_2 + 15U_3 + 15U_5 = 20U_3 + 20U_5$

$5(U_3+U_5) = 35U_2$

$\frac{U_3+U_5}{U_2} = 7$

$\frac{U_2}{U_2} = 1$, по условию нужно найти отношение

$\frac{1}{U_2} : \frac{1}{U_2+U_3+U_4+U_5+U_1} = \frac{U_2+U_3+U_4+U_5+U_1}{U_2} = 1+7+\frac{U_1+U_4}{U_2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

по выгодок.

(3) => $1,5 = 15(U_1 + U_3 + U_4 + U_5)$ (6)

(1),(2) => $1,5 = 15(U_2 + U_3 + U_5) + 10(U_1 + U_2 + U_4)$ (7)

(т.е. $20(U_1 + U_2 + U_4) = 1$, то $10(U_1 + U_2 + U_4) = 0,5$

(6),(7) => $15U_1 + 15U_3 + 15U_4 + 15U_5 = 25U_2 + 15U_3 + 15U_5 +$

$+ 10U_1 + 10U_4$

$$5U_1 + 5U_4 = 25U_2$$

$$\frac{U_1 + U_4}{U_2} = 5$$

тогда, по выгодок., $\frac{U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_1}{U_2} = \frac{U_2}{U_2} + \frac{U_3 + U_5}{U_2} + \frac{U_1 + U_4}{U_2} =$

$= 1 + 7 + 5 = 13$

Ответ: в 13 раз быстрее.

№2

Если p, q, r - три последовательных члена арифметической прогрессии, то возьмем q за a, тогда $p = a - t$, а $r = a + t$, по определению арифметической прогрессии, где t - разность между ~~|…|~~ (A) членами арифм. прогрессии.

Дискриминант этого уравнения равен $D = (2\sqrt{2}q)^2 + (-4pr)$,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

по вышедзяющи q, r и p расси

$8a^2 - 4(a+t)(a-t)$

$8a^2 - 4a^2 + 4t^2$

$D = 4a^2 + 4t^2$

~~$D > 0$ если~~

Если $a = 0$ и $t = 0$, то уравнение $px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$ имеет бесконечное кол-во решений, т.к. $r = p = q = 0$, и $px^2 + 2\sqrt{2}qx + r$ равно 0 при любом значении x, значит уравнение имеет и два решения.

При a и t не равных одновременно 0, $D > 0$, т.к.

$4a^2 \geq 0$, ноль достигается при $a = 0$, аналогично $4t^2 \geq 0$

$4t^2 = 0$, при $t = 0$

Т.к. дискриминант больше 0, то уравнение имеет 2 решения, по св-ву дискриминанта (если считать уравнение квадратным).

Если уравнение линейное, то оно имеет не более одного корня. (пример, при $p = 0$, $q = 2$, $r = 4$) $4\sqrt{2}x = -4$

$x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Доказано, что уравнение имеет 2 решения, если уравнение квадратное

№3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7 | М А 0 0 0 1 6 0 0 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим все возможные варианты:

Сначала положим фисташковые макаруны, от 2 до 12, по условию, затем ванильные от 2 до 12, по условию, а остальное заполним один оставшимся вариантом карамельных, по условию, если можем заполнить, если не можем, то не учитываем этот вариант. Всего вариантов, сколько фисташковых и сколько ванильных макарун мы можем положить без учёта переполнения или невозможности заполнить коробку: $((12-2)+1)((12-2)+1)=121$ вариант.

Рассмотрим варианты, когда коробку невозможно заполнить из-за нехватки карамельных макарун: $20-14=6$, т.е. кол-во фист. и ван. в сумме должно быть меньше 6.

Если ван. мак. две, то фист. 2 или 3, при любом большем числе их общее кол-во больше 6

Если ван. мак. три, то фист. 2, т.к. при любом большем числе их общее кол-во больше 6, а фист. и ван. мак. не менее 2.

Если ван. мак. [4] или более, то их общее кол-во с фисташковыми больше 6, т.к. фист. не меньше 2, по условию.

Остаётся $121-3=118$ вариантов, без учёта переполнения.

Если произошло переполнение, то $20-3=17$, т.е. общее кол-во фист. и ван. мак. ~~больше~~ больше 17.

Составим таблицу фист. и ван. макарун, перебирая все возможные значения от 2 до 12 фист. и от такого числа до 12 ван. мак., что их общее кол-во с фист. больше 17

Лист 4 из 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 0 0 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При кол-ве фист. мак. меньше или равном 5 переполнение невозможно, т.е. ван. мак. не более 12, и 5+12 = 17

Кол-во фист. мак.	Кол-во ван. мак.	Общее кол-во
6	12	18

(при любом другом знач. ван. мак. меньше 12 переполнения нет, т.к. они меньше 18)

7	12	19
7	11	18

(при любых других знач. кол-ва ван. мак. переполнения нет, т.к. они меньше 18)

8	12	20
8	11	19
8	10	18

аналогично 7 10 - минимальное кол-во ван. мак. для переполн.)

9	12	21
9	11	20
9	10	19
9	9	18

аналогично 8

10	12	22
10	11	21
10	10	20
10	9	19
10	8	18

аналогично 9

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

11	12	23
11	11	22
11	10	21
11	9	20
11	6	19
11	9	18

аналогично 10

12	12	24
12	11	23
12	10	22
12	9	21
12	8	20
12	2	19
12	6	18

аналогично 17 других вариантов нет, т.к. 6 ~~минимальное~~ (минимальное число, при котором происходит перемножение, и все меньшие), а 72 – (наибольшее) максимально возможное.

Всего невозможных по условию вариантов, при которых возникает переполнение равно $1+2+3+4+5+6+7=28$

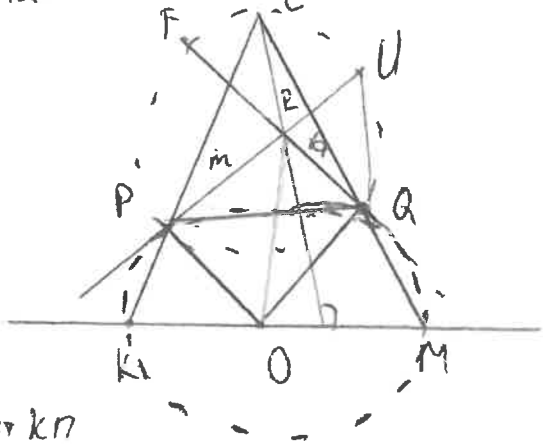
$118-28=90$

Ответ: 90 наборов можно составить.

Дано: △ KLM – остроугольный

окр-ть (O; R = ...).

Обозначим т. O – центр окружности. Т.к. окр-ть построена, как на диаметре на стороне KM, то O принадлежит KM окр. и пересекает LK в точке P.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7 | М А 0 0 0 1 6 0 0 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Окр. w пересекает LM в т. Q

m - касательная к окружности w, пересекающая её в т. P.

n - касательная к окружности, пересекающая её в т. Q

n пересекает m в точке R. Док-ть, что $LR \perp KM$

Док-во: Обозначим $\angle M$ за α, а $\angle K$ за $\angle \beta$, тогда, т.к. $OK = OP = OQ = OM$, как радиусы окружности w, $\angle OPK = \beta$, по св-ву равнобед. треугольника, $\angle KOP = 180^\circ - 2\beta$, по св-ву суммы углов треугольника $\triangle KOP$

Аналогично $\angle OQM = \alpha$, по св-ву равнобедренного треугольника, $\angle QOM = 180^\circ - 2\alpha$

У углов $\angle KOP$ и $\angle POQ$ общий ~~луч~~ луч PO, у углов $\angle POQ$ и $\angle QOM$ общий луч OQ, и $\angle KOM$ - развернутый, по вывод, т.к. $O \in KM$ и O лежит между K и M, тогда $\angle KOP + \angle POQ + \angle QOP = 180^\circ$, т.к. величина развернутого угла равна 180°

$\angle POQ = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta)$

$\angle POQ = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$

$\angle RPO = 90^\circ$, по св-ву касательной, т.к. OP - радиус, а RP - касательная

аналогично для радиуса OQ и касательной RQ $\angle RQO = 90^\circ$

$\angle RPO + \angle RQO + \angle PRQ + \angle POQ = 360^\circ$, по св-ву суммы углов четырехугольника.

$\angle PRQ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (2\alpha + 2\beta - 180^\circ)$

$\angle PRQ = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 0 0 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle PRQ = 180^\circ - 2 - \beta \cdot 2$

$\angle KLM = 180^\circ - \angle LKM - \angle LMK$, по св-ву суммы углов треугольника KLM

$\angle KLM = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\angle PRQ = 2 \cdot \angle KLM$.

Построим описанную окружность w_1 около $\triangle LPQ$ (по св-ву описанной окружности, можно описать окружность около любого треугольника)

По св-ву угла внутри окружности величина угла равна полусумме двух дуг, образованных при пересечении лучей угла с окружностью и их продолжений за точку R.

$\angle PRQ = \frac{1}{2}$, дополненная на величину дуги PQ и дуга FU, где U – точка пересечения прямой PR с окружностью w_1, а F – точка пересечения QR и окружности.

Т.к. $\angle PLQ$ – вписанный, то величина дуги PQ равна $2\angle RQ$, но тогда, но вывод., величина дуги FU равна $2\angle PLQ$

$\angle FQU = \angle PLQ$, как вписанный

$RP = QR$, как отрезки касательных, по св-ву, тогда $\triangle PRQ$ равнобедренный, по определению, в котором $\angle RPQ = \angle RQP$, по св-ву. $\angle RQP = \frac{180^\circ - 2\angle PLQ}{2}$, по вышеописанному, по св-ву суммы углов треугольника.

$\angle RQP = 90^\circ - \angle PLQ$

Лист 8 из 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 0 0 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle PQR$ и $\angle FQU$ составляют угол $\angle PQU$

$\angle PQP + \angle FQU = 90^\circ$,

следовательно PU – диаметр окружности W_1

аналогично FQ – диаметр окр. W_1,

тогда R – точка пересечения диаметров, т. е. центр. описанной окружности W_1, т. е. $LR = RR = RQ$, по определению описанной окружности.

$\angle OQM = \alpha$, по вышедоказанному

$\angle OQP = 90^\circ$, по выше доказанному.

$\angle OQP$; $\angle OQM$ и $\angle LQR$ составляют развернутый угол LQM, следовательно

$\angle LQR = 90^\circ - \alpha$, по св-ву развернутого угла.

$LR = RQ$, по вышедоказанному, следовательно $\triangle LRQ$ – равнобедренный, по определению, в котором $\angle QLR = \angle RQL = 90^\circ - \alpha$ по св-ву

Пусть F – точка пересечения LR и KM, тогда в $\triangle FLM$ $\angle M = \alpha$, $\angle FLM = 90^\circ - \alpha$, по вышедок., следовательно $\angle F = 90^\circ$, т. е $LF \perp KM$ или $LR \perp KM$, что и требовалось доказать.

Стоит отметить, что точка R лежит внутри треугольника, потому что касательные пересекаются внутри треугольника, потому что угол в 90° между ними и радиусом такой, и то о/а луча пройдут через треугольник, так как он прямоугольный.

№3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7 | М А 0 0 0 1 6 0 0 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Число 100 может находится только в правой верхней клетке, потому что иначе у него были бы соседи больше него справа или сверху, что невозможно по условию.

2) Для каждого числа из 6 столбца справа от него должно быть три числа больших него ~~таких, что они все меньше числа, стоящего выше в этом столбце, потому что~~

При этом не имеет смысла делать хотя бы больше из

3) ~~Для~~ этих 4 чисел больше числа, стоящего выше в 6 столбце для достижения максимальной суммы, потому что в этом случае возможно поменять первое большее из этих чисел и число выше, тем самым увеличив сумму в 6 столбце.

Или, при надобности, поменять 4 числа, стоящие после данного числа в этой строке, и только после этого поменять число.

4) Таким образом наибольшее число, которое можно поставить в 6 столбце — 96, так как если поставить число больше, то после него невозможно будет поставить 4 числа так, чтобы в этой строке сумма шла по возрастанию и каждое из чисел было меньше 100. Очевидно, ставим это число в верхнюю строку, было меньше 100. Очевидно, ставим это число в верхнюю строку по выгоде. Тогда по указанному алгоритму в пункте 3 мы не можем поставить на предпоследнюю снизу строку число не более, чем 91, тогда в столбец будет выглядеть так: сверху вниз: 96, 91, 86, 81, 76, 71, 66, 61, 56, 51, и сумма чисел в нем будет равна 735.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Один из возможных примеров:

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

Опишу чуть подробнее алгоритм. 3) Или точнее просто жадный алгоритм. Пусть в верхней строке стоит не 96, но тогда оно может стоять либо среди первых 5 столбцов, что не имеет смысла, мы можем опустить на 1 все числа верхнего столбца, заменив ближайшее подходящее на 96, и произведя обмен с первым из 5 столбцов.

Либо если оно стоит среди последних 5 столбцов, то это значит, что строка не оптимальна, то есть числа не являются идущими подряд по возрастанию, если до этого была произведена аналогичная операция по перемещению 97, 98, 99, 100 в правые 5 столбцов из левых 5, то есть можно из чисел этой же самой группы составить строку с большим числом, заменив её на строку 96, 97, 98, 99, 100, в столбце 6, оставив те же числа на позициях с 1 по 9 сначала, что были ранее. И т.д. для каждого столбца.

3) Или!!! На месте числа 96 не может стоять числа больше него, т.к. должны быть 4 числа (в этой строке) больших него, не считая большего, т.е. На месте числа 97 не может стоять числа большего в 6 строке, т.к. там уже должно быть 4 числа больше него в этой строке, по условию, и 4 числа больше числа, число больше него в этом столбце, и 4 числа больше того числа, что больше него в этом столбце, превыше что больше того числа, что больше него в этом столбце, аналогично в строке того числа, что больше него в этом столбце, аналогично для всех чисел с 86 по 81, т.е. данное расположение с максимально

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	0	0	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

возможных чисел на каждой из позиций столбца 6, а значит и максимально возможной суммой.

Ответ: 735.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	5	0	1	9	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ФОМИН

Имя МАКСИМ

Отчество ПАВЛОВИЧ

Дата рождения 27.12.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 5.03.2022

Номер телефона +79051097410 **Подпись** Фом

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 5 0 1 9 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Рассмотрим функции $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=px^2+qx+r$

Их графики – параболы, а наличие корней многочлена определяется наличием точки пересечения её с осью OX.

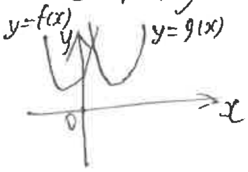
т.к. $f(x)$ и $g(x)$ не имеют нулей, то все точки парабол лежат с одной стороны от OX (не обязательно с одной и той же для обеих парабол)

Зач

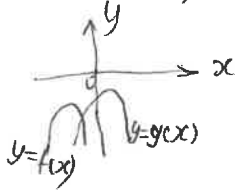
1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

Графиком функции $h(x)=f(x)+g(x)$ является множество точек, ордината которых равна сумме ординат точек $f(x)$ и $g(x)$ с такой же абсциссой.

Значит, если параболы $y=f(x)$ и $y=g(x)$ лежат по одну сторону от OX (см. схему), то и все точки графика функции $y=h(x)$ лежат по ту же сторону от OX, и он не пересекает OX, что противоречит условию.



Или



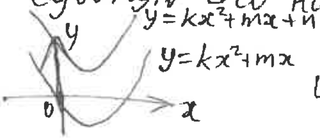
Значит, графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ лежат по разные стороны от OX, ветви парабол направлены в разных направлениях, а значит $a\cdot p<0$ (1)

Рассмотрим квадратичную функцию $z(x)=kx^2+mx+n$ в общем виде.

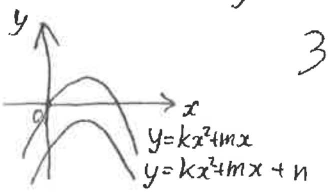
~~$z(x)=kx^2+mx+n=k\left(x^2+\frac{m}{k}x\right)+n=k\left(x^2+2x\cdot\frac{m}{2k}+\frac{m^2}{4k^2}-\frac{m^2}{4k^2}\right)+n=k\left(x+\frac{m}{2k}\right)^2-\frac{m^2}{4k}+n=$~~

Пусть свободный член $n=0$. Тогда $z(x)=kx^2+mx=x(kx+m)$ всегда имеет нули $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{m}{k}\end{array}\right.$.

Чтобы из графика функции $z(x)=kx^2+mx$ с нулями, надо сдвинуть его на какую-то величину n в направлении ветвей (см. схему)



или



Значит, $k\cdot n>0$ (2)
(старший коэф. имеет одинаковый знак со свободным членом)

Из неравенств (1) и (2) следует, что $c\cdot r<0$.

Ответ: знак произведения $c\cdot r$ – „минус"

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 5 0 1 9 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.

Сразу скажем, что для сохранения суммы все ~~[illegible]~~ столбцы и строчки в таблице повторяются через два раза. Одна строчка и столбец встретятся три раза, остальные – по 2.

Также в квадрате 3х3 нечётное число нулей и равное число −1 и 1, но не более, чем по 4.

Исходя из этих правил напишем первые строчку и столбец (левый и верхний угол) с макс. числом единиц, так чтобы ~~[illegible]~~ строчка и столбец встретились по 3 раза

1	1	1	1	1	1	1
1			1			1
-1			-1			-1
1	1	1	1	1	1	1
1			1			1
-1			-1			-1
1	1	1	1	1	1	1

Оставшиеся клетки можно заполнять ~~в любом порядке~~ по 3 „−1" и 1 „0"

Например:

1	1	1	1	1	1	1
1	0	-1	1	0	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1
1	0	-1	1	0	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1

Можно убедится, что условие задачи выполняется

Максимальная сумма: $27-18=9$

Ответ: 9.

№1.

Будем обозначать за V_i производительность i-го члена жюри, то есть ~~[illegible]~~ доля работы, выполненной за 1 день. Пусть вся работа – $A=1$. $V=\frac{A}{t}=\frac{1}{t}$. $A=V\cdot t$

Тогда $\begin{cases} V_1+V_2+V_3+V_4+V_6=\frac{1}{6} & (1) \\ V_2+V_4+V_5+V_6=\frac{1}{10} & (2) \\ V_1+V_3+V_5=\frac{1}{12} & (3) \end{cases}$

$\frac{(V_1+V_3)\cdot 4}{1}\cdot 100\% - ?$

$(1)-(2)$: $V_1+V_3-V_5=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ (4)

$(3)-(4)$: $V_5+V_5=\frac{1}{12}-\frac{1}{15}=\frac{1}{60}$

$V_5=\frac{1}{120}$

$V_1+V_3+V_5=\frac{1}{12}$

$V_1+V_3=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}=\frac{3}{40}$

Тогда $\frac{(V_1+V_3)\cdot 4}{1}\cdot 100\% = \frac{3}{40}\cdot 4\cdot 100\% = 30\%$

Ответ: 30%.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

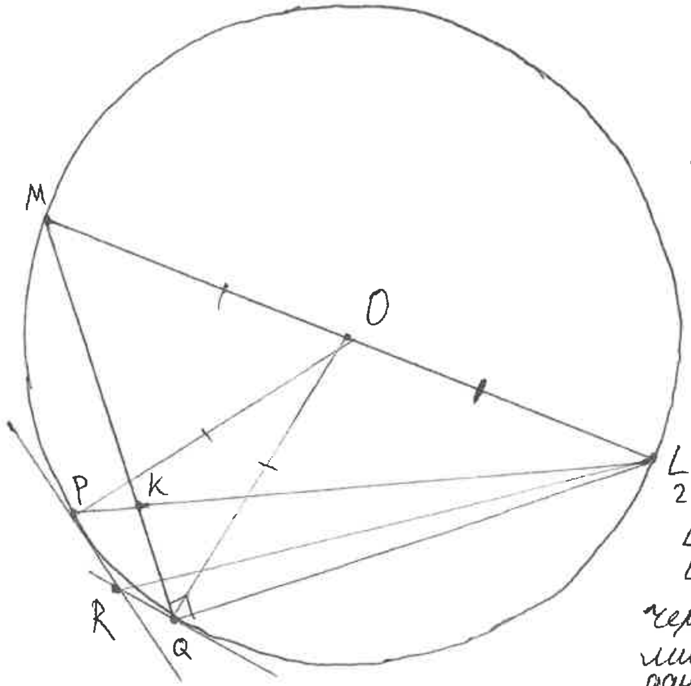
Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 1 | 9 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Утверждение ложно.



Дано:
$\triangle MKL$, $\angle LKM > 90^\circ$,
ML – диаметр окр. O,
Окр. $O \cap LK = P$, Окр. $O \cap MK = Q$,
PR и QR – касательные
Док-ть: $LR \perp KM$.

Опровержение.

1) Д.п.: LQ
$LQ \perp MQ$ т.к. $\angle MQL$ – впис., $\smile LM = 180^\circ$, ML – диаметр

2) Пусть $LR \perp KM$, то есть $LR \perp MQ$
$\left.\begin{array}{l} LR \perp MQ \\ LQ \perp MQ \end{array}\right\} \Rightarrow LR \parallel LQ$, но через точку можно провести лишь одну прямую, параллельную данной.

Значит, LQ и LR совпадают, Q и R совпадают.
Q – точка окружности, а PR – касательная, но т.к. R и Q совпадают, то получается, что PR имеет две общие точки с окружностью, что противоречит определению касательной. Либо P совпадает с Q, значит LP совпадает с MQ $\Rightarrow$ $MQ \cap LP = P = Q = K$ $\Rightarrow \angle LKM$ опирается на диаметр.
Значит, $\angle LKM = 90^\circ$, что опять противоречит условию.
Итак, наше предположение неверно и LR не перпендикулярна MK.

№5.

Ш – число шоколадных
М – число малиновых
А – число апельсиновых

$$\begin{cases} Ш \in [3;14] \\ М \in [3;14] \\ А \in [2;12] \\ Ш + М + А = 20 \end{cases}$$

С – ? (число комбинаций)
Будем перебирать варианты.

Ш	М	А	
~~3~~	~~3~~	~~14~~	($14 \notin [2;12]$)
3	5	12	} 10 в.
	...		
3	14	3	
4	4	12	} 11 в.
	...		
4	14	2	
5	3	12	} 11 в.
5	13	2	
6	3	11	} 10 в.
6	12	2	
7	3	12	} 9 в.
7	11	2	
	...		
14	3 / 4	3 / 2	} 2 в.

$$\sum_{n=5}^{14} a_n = \sum_{n=5}^{14} (11-(n-5)) = \frac{11+2}{2}(15-5) = 13 \cdot 5 = 65$$

$C = 10 + 11 + 65 = 86$

Ответ: 86

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	4	2	8	5	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Порохов

Имя Егор

Отчество Дмитриевич

Дата рождения 04.05.2005 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 8 912 870 9229 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 4 2 8 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Пусть скорость первого равна a, скорость второго – b, третьего – c, четвёртого – d, пятого – e, а также общая работа пусть будет равна единице. Из условия следует, что:

$\frac{1}{a+b+d} = 20$ч; $\frac{1}{b+c+e} = 15$ч; $\frac{1}{a+c+d+e} = 10$. Требуется найти $\frac{a+b+c+d+e}{b}$.

Приведём всё к общему знаменателю и приравняем:

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	-	80

$$20(a+b+d) = 15(b+c+e) = 10(a+c+d+e)$$

$$20(a+b+d) - 10(a+c+d+e) = 0$$

$$10a + 20b - 10c + 10d - 10e = 0 \quad |:10$$

$$a + 2b + d = c + e \quad (1)$$

$$15(b+c+e) - 10(a+c+d+e) = 0$$

$$-10a + 15b + 5c - 10d + 5e = 0 \quad |:5$$

$$c + e = 2a - 3b + 2d \quad (2)$$

$(1) = (2)$:

$$a + 2b + d = 2a - 3b + 2d$$

$$5b = a + d \quad (3)$$

$$\frac{a+b+c+d+e}{b} = \frac{2a+3b+2d}{b} \quad (\text{из } (1))$$

$$\frac{2a+3b+2d}{b} = \frac{13b}{b} \quad (\text{из } (3))$$

$$\frac{13b}{b} = 13$$

Ответ: 13.

Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	4	2	8	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$$px^2 + 2\sqrt{2}\,qx + r = 0$$

$$D = 8q^2 - 4pr = 4(2q^2 - pr)$$

Нужно доказать, что $2q^2 > pr$, т.к. в этом случае дискриминант будет больше 0, а значит уравнение будет иметь 2 решения.

] $q = p+a$, $r = p+2a$, где $a \neq 0$:

$$2(p+a)^2 > p(p+2a)$$

$$2p^2 + 4pa + 2a^2 > p^2 + 2pa$$

$$p^2 + 2pa + 2a^2 > 0$$

$$(p+a)^2 + a^2 > 0$$

Мы знаем, что $a^2 > 0$, т.к. $a \neq 0$, а также $(p+a)^2 \geq 0$, а значит неравенство является верным, т.е. уравнение имеет 2 корня.

№3.

По условию, числа расположены в порядке возрастания, а это значит, что правее каждого числа в нашем столбце стоит 4 числа, которые больше него. Значит, если идти с конца, то в шестой столбец мы сможем ставить не менее, чем каждое пятое число. Значит наибольшая сумма может быть в таком примере:

51	52	53	54	55	1
56	57	58	59	60	2
61	62	63	64	65	3
66	67	68	69	70	4
71	72	73	74	75	5
76	77	78	79	80	6
81	82	83	84	85	7
86	87	88	89	90	8
91	92	93	94	95	9
96	97	98	99	100	10
6	7	8	9	10	

Сумма чисел в 6 столбце равна 735.

Ответ: 735.

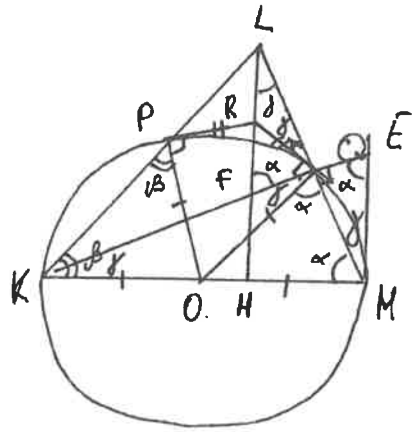
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 4 2 8 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Касательные, выпущенные из одной точки, равны, т.е. $PR = RQ$

$OK = OP = OQ = OM$ (радиусы)

$\angle OQR = \angle OPK = 90^\circ$

$\angle OQH = \angle OHQ = \alpha$

$\angle OKP = \angle OPK = \beta$

$\angle LQR = 90^\circ - \alpha = \gamma$

$\angle KQH = \angle KQL = 90^\circ \Rightarrow \angle QKH = 90^\circ - \alpha = \gamma = \angle OQK$

$\exists$ точка пересечения KQ и LR — точка F:

ΔFQL — прямоуг.

Проведём касательную через точку M, пусть она пересечёт прямую KQ в точке E, тогда $\angle QME = 90^\circ - \alpha = \gamma$

Треугольники MQE и LQF подобны, значит $\angle MLH = \gamma$

тогда $\angle LHM = 180^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

M	A	0	0	0	1	7	3	2	6	2	2

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Павлов.

Имя Георгий

Отчество Сергеевич.

Дата рождения 26.01.2005 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 05 марта.

Номер телефона 8926 896 65 86 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	3	2	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

14	24	34	44	54	96	97	98	99	100
				53	91	92	93	94	95
					86	87	88	89	90
					81				
					76				
					71				
					66				
					61				
					56				
					55				

рассмотрим цифры.

т.к возр. слева на право. и снизу вверх => в клетке (10; 10) будет 100. т.к. 100 = max. => т.к. 6 > 5; ~~[illegible]~~ в (6; 6) будут идти убыв. справа на лево. => в (6; 6) = 96; т.к. нам нужен ~~[illegible]~~ max. => ~~[illegible]~~ снизу (10; 10) => дальнейшие шаги след. макс. => в (9; 9) = 95; => в (6; 9) = 91. и т.д =>

в 6-м столбце. 96 + 91 + 86 + 81 + ... + 55 = 755.

Ответ: 755.

3б

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

№5

Рассмотрим все случаи относительно карамельных..

3	8
4	9
5	10
6	11
7	10
8	9
9	8
10	7
11	6
12	5
13	4
14	3

если карам. 3 то => возможны ~~[illegible]~~ 8 случаев.

ванильн.	фисташковых
12	5
11	6
10	7
9	8 и т.д.

если карам. 4 => ~~[illegible]~~ возможны сл.:

В	Ф
12	4
11	5
10	6
9	7

всего 9 сл.-ев.

если карам 5 => возм. сл.:

В	Ф
12	3
11	4
10	5

и т.д. =>

если карам 6 => 11 сл.-в всего 10 сл.-ев.

если карам. 7 то возм. 4ч.

12 ван. 12 ф быть не может =>

случаев 10 => аналогично.

Лист 1 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

аналогично если $k=8$ то 11 ф или 11 в - не возможно $\Rightarrow$ всего случ-в $=9$ и т.д. $\Rightarrow$ всего случаев $8+9+10+11+10\cdot 4\ldots+3=38+13\cdot 4=90$ сл.

Ответ: 90 случаев.

№2.

$p;q;r \Rightarrow q=p+a;\ r=p+2a$

док-ть: $px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$ имеет 2 реш.

док-во:

если $D>0 \Rightarrow f(x)_{=0}$ имеет 2 решения $\Rightarrow$

$$px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$$

$$D=8q^2-4pr>0$$

$$8(p+a)^2-4p\cdot(p+2a)>0$$

$8(p^2+2ap+a^2)-4p^2-8ap=8p^2+16ap+8a^2-4p^2-8ap=4p^2+8ap+8a^2 \Rightarrow$

из нер-ва коши: $a^2+b^2\geq 2ab \Rightarrow$

$4p^2+8a^2\geq 56ap \Rightarrow 4p^2+8a^2\geq 8ap$ т.к. $|56ap|>|8ap| \Rightarrow$

$4p^2+4ap+8a^2>0 \Rightarrow D>0 \Rightarrow$ ч.т.д.

Ответ: доказано.

№1

Пусть работоспособность (произв-ть) труды будет $a\ b\ c\ d\ e$ - 1-го; 2-го и т.д. членов соотв. $\Rightarrow$ обозначим работу за 1 $\Rightarrow$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a+b+d}=20\\ \dfrac{1}{b+c+e}=15\\ \dfrac{1}{a+c+d+e}=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+d=\frac{1}{20}-b\\ c+e=\frac{1}{15}-b\\ 1=10(a+c+d+e)\end{cases}$$

$\frac{1}{10}=\frac{1}{20}-b+\frac{1}{15}-b;\ b=\frac{1}{120}$

$$\frac{\frac{1}{a+b+c+d+e}}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{\frac{1}{10}+b}=$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

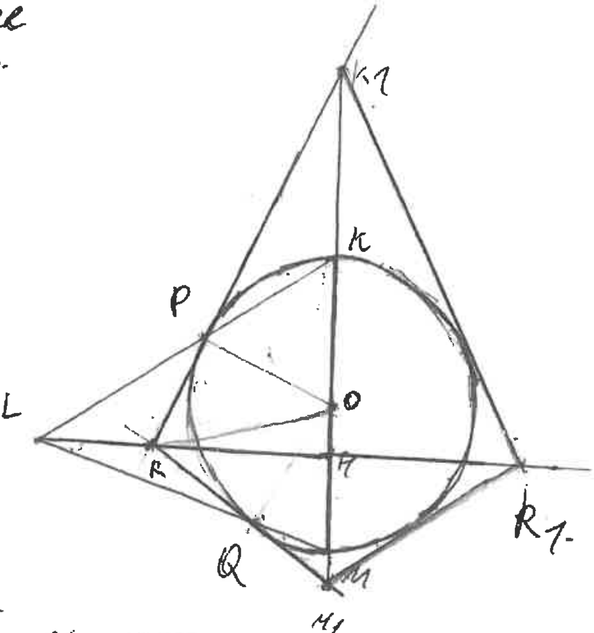
Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 3 | 2 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$= \frac{b}{\frac{1}{10}+b} = \cancel{\frac{57}{120} \ldots \frac{57}{45}}$ ~~раз быстрее~~ $= \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{120}} = \frac{1}{13}$

Ответ: в 13 раз быстрее.



№ 4.

PR и PQ - касат-е.

Док-ть: $LH \perp OM$.

Док-во:

$OP = OQ = r \Rightarrow$ т.к. $\angle OPR = \angle OQR = 90° \Rightarrow$

$QR = PR$

$OK \cap RP = K_1$; $RQ \cap OM = M_1$; $OR = \sqrt{r^2+QR^2} = \sqrt{r^2+PR^2}$

$OK_1 = \sqrt{OP^2+PK_1^2}$; $OM_1 = \sqrt{OM_1^2+OQ^2}$

из обрат. Тh Пиф $\Rightarrow \angle K_1RM_1 = 90° \Rightarrow K_1R^2 + M_1R^2 = K_1M_1^2 \Rightarrow$

$\triangle KR_1M_1 = \triangle K_1M_1R$ - по постр. $\Rightarrow$ строим $\triangle K_1R_1M_1$ $\Rightarrow$ т.к. $\angle K_1RM_1 + \angle K_1R_1M_1 =$

$= 180° = 90° + 90° \Rightarrow$ $K_1R_1M_1R$ - и впис. четырёхугольник и описанный $\Rightarrow$ диагонали $K_1M_1 \perp RR_1 \Rightarrow$

$KM \perp RH \Rightarrow LH \perp OM \Rightarrow$ ч.т.д.

Ответ: доказано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

М	А	0	0	0	1	7	6	7	3	2	2

Адрес площадки проведения — Шифр

Вариант № ________

Фамилия [redacted] ПОДШИВАЛОВ

Имя [redacted] ГЛЕБ

Отчество [redacted] ВИТАЛЬЕВИЧ

Дата рождения 20.06.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +7(925)278-27-67 **Подпись** ________

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	7	6	7	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. V_n – скорость проверки $n^{ого}$ члена жюри; $V_{nm} = V_n + V_m$

Пусть a – кол-во работ, которые нужно проверить, тогда:

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

30б

$$\begin{cases} V_{135} = \frac{a}{12} \\ V_{2456} = \frac{a}{10} \\ V_{12346} = \frac{a}{6} \end{cases}$$

Тогда: $V_{135} + V_{2456} - V_{12346} = 2V_5$

$$2V_5 = \frac{a}{12} + \frac{a}{10} - \frac{a}{6} = \frac{a(5+6-10)}{60} = \frac{a}{60}$$

$$V_5 = \frac{a}{120}$$

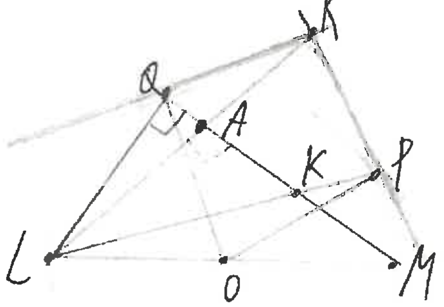
Значит, $V_{13} = V_{135} - V_5 = \frac{a}{12} - \frac{a}{120} = \frac{9a}{120} = \frac{3a}{40}$

~~[illegible]~~

домножим V_{13} на время (4 дня) и получим $\frac{3a}{40} \cdot 4 = \frac{3a}{10} = 0{,}3a = 30\% a$

Ответ: за 4 дня первый и третий члены жюри проверят 30% работ.

№4. Пусть O – центр окружности, $A = (LR) \cap (QM)$.



~~[illegible]~~

ΔLQM – прямоугольный, т.к. он вписан в окружность и одна из его сторон – диаметр этой окружности.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 7 6 7 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Из одной точки может быть опущена максимум одна прямая, перпендикулярная данной прямой.

$(KQ) \perp (QM)$, т.к. $\angle LQM = 90^\circ$; $(LR) \perp (QM)$ — доказать.

Возможно A совпадает с Q, проверим.

Тогда касательная (QR) содержит в себе хорду $[LQ]$, это невозможно.

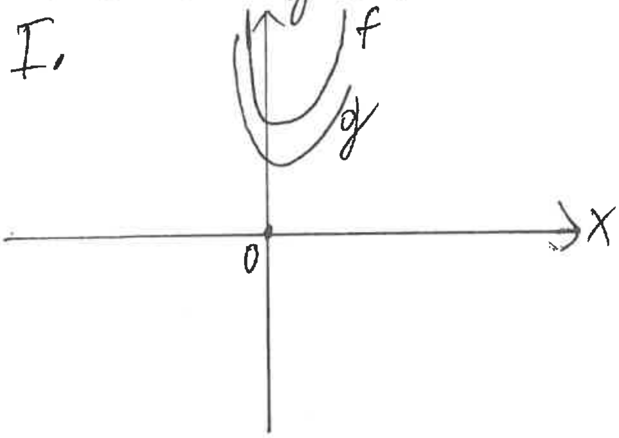
Значит, (LR) никогда не перпендикулярна (KM).

№2. $f = ax^2 + bx + c$ $\quad b^2 < 4ac$, значит $a > 0$ и $c > 0$ или $a < 0$ и $c < 0$

$g = px^2 + qx + r$ $\quad q^2 < 4pr$, значит $p > 0$ и $r > 0$ или $p < 0$ и $r < 0$

Схематично изобразим f и g на координатной сетке:

I.



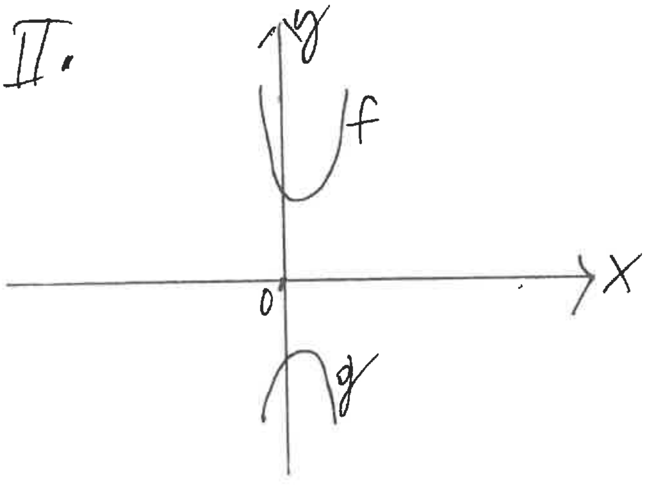
(есть 2 варианта их взаимного расположения, с одной стороны от абсциссы, или с разных); и f, и g — парабола.

$f + g = (a+p)x^2 + (b+q)x + (c+r)$

Если $a > 0$ и $p > 0$, то и $a + p > 0$; также и ($a < 0$ и $p < 0$, $a + p < 0$.

То есть ветви парабол g+f как не пересекали абсциссу, так и ветви g+f её не пересекут. Значит возможен только II вариант, тогда $c > 0$ и $r < 0$ или $c < 0$ и $r > 0$. В любом из этих случаев $c \cdot r < 0$, то есть имеет знак „–".

II.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА0001767322

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Шок.	Малин.	Апел.
	3	2
3	4	3
4	5	4
5	6	5
6	7	6
7	8	7
8	9	8
9	10	9
10	11	10
11	12	11
12	13	12
13	14	
14		

Фиксируем кол-во шоколадных макарун, для него по очереди берём каждое возможное значение малиновых макарун и в соответствии с получившимся кол-вом, берём апельсиновые макаруны, ~~доводя~~ значение доводя до 20.

С 3 шок. подходят все малиновые, кроме 3 и 4, т.к. тогда не хватит апельсино-вых, чтобы ~~добить~~ довести до 20, итого 10.

С 4 шок. не подходит только 3.

С 5 шок подходят все, кроме 14

С 6 – все, кроме 14 и 13

С 7 – не 14, 13, 12

С 8 – не 14, 13, 12, 11

С 9 – не 14, 13, 12, 11, 10

С 10 – не 14, 13, 12, 11, 10, 9

С 11 – только 3, 4, 5, 6, 7

С 12 – только 3, 4, 5, 6

С 13 – только 3, 4, 5

С 14 – только 3, 4

Итого ~~8~~6 комбинаций.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	6	7	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3. В каждом квадрате 3Х3 должно быть нечётное кол-во нолей. Расставим ноли: (используя минимум клеточек)

	0			0		
	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	
		0			0	

В оставшиеся поля вписываем единицы, в угловых клетках обязательно должны стоять единицы, так как с участием этих клеточек есть только по одному квадрату 3Х3. В оставшиеся клетки ставим 1 или −1 так, чтобы сумма во всех квадратах 3Х3 было 0.

1	0	−1	1	0	−1	1
−1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	−1
0	0	0	0	0	0	0
−1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	−1
1	−1	0	1	−1	0	1

Итоговая сумма − 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

...РАСНОЯРСК

...щадки проведения

М А 0 0 0 1 6 8 4 1 2 2

Вариант № 1 **Шифр**

...ОСКВИН

...АИЛ

...ЕКСАНДРОВИЧ

...11.05.2005 **Класс** 10

...ТЕМАТИКА

...а на 9 **листах**

Дата выполнения работы 05.03.2022

...+7 929 321 22 20 **Подпись**

...ию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, ...она, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату ...ифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	8	4	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	8	6	74

1 Пусть p_n — количество работы в долях выполняемое ~~учителем~~ жюри с номером n

Тогда по условию:

$\frac{1}{p_1+p_2+p_4}=20ч$, $\frac{1}{p_2+p_3+p_5}=15ч$, $\frac{1}{p_1+p_3+p_4+p_5}=10ч$

(1) $p_1+p_2+p_3=\frac{1}{20}\frac{1}{ч}$ (2) $p_2+p_3+p_4=\frac{1}{15}\frac{1}{ч}$ (3) $p_1+p_3+p_4+p_5=\frac{1}{10}\frac{1}{ч}$

30 ✓

(1)+(2)+(3) $=2(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5)=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{3+4+6}{60}=\frac{13}{60}\frac{1}{ч}$

(4) $=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=\frac{13}{120}\cdot\frac{1}{ч}$

$p_2=(4)-(3)=\frac{13}{120}-\frac{1}{10}=\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{ч}$

Пусть t_1 — время проверки всех работ 2-м жюри, а t_2 — время совместной проверки всех жюри

$\frac{t_1}{t_2}=\frac{\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5}}=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5}{p_2}=\frac{\frac{13}{120}\frac{1}{ч}}{\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{ч}}=13$ раз

Ответ: в 13 раз.

2

Условие: $p\neq0$, $q\neq0$, $r\neq0$ и $p+d=q$; $q+d=r$

$p+2d=r$

Тогда: $px^2+2\sqrt{2}qx+r=px^2+2\sqrt{2}(p+d)x+(p+2d)$

$px^2+2\sqrt{2}(p+d)x+(p+2d)=0$

$D=8p^2+16pd+8d^2-4p^2-8pd=$

$=4p^2+8pd+8d^2=4((p^2+2pd+d^2)+d^2)=4((p+d)^2+d^2)$

Поскольку по св-ву a^2 $(p+d)^2\geq0$, $d^2\geq0$ и $d^2\geq0$ и $p\neq0$; если $d=-p$ то $p+d=0$, в другом случае $(p+d)^2>0$

$4((p+d)^2+d^2)=D>0$

(существует 2 действительных решения ч.т.д.

Лист 1 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	6	8	4	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

③ Пусть $(n;k)$ это число из ~~клетки~~ таблицы, где n – номер столбца и k – номер строки

~~Пусть~~ S_n – сумма чисел n-ого столбца

Тогда по условию:

$$S_6 < S_7 < S_8 < S_9 < S_{10}$$

$$(n+1;k) > (n;k)$$

$$(n;k+1) > (n;k)$$

Поскольку $(n+1;k) > (n;k) \Rightarrow \underline{(n+1;k) + 1 \geq (n;k)}$

~~тогда~~ а значит

$$S_{10} \geq S_9 + 5 \geq S_8 + 10 \geq S_7 + 15 \geq S_6 + 20 \Rightarrow$$

Однако: ~~разниц~~

$$\underset{10}{(n;k)} \geq \underset{9}{(n-1;k)} + 1 \geq \underset{8}{(n-2;k)} + 2 \geq \underset{7}{(n-3;k)} + 3 \geq \underset{6}{(n-4;k)} + 4$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{S_{10} \geq S_6 + 40}, \ k \in [0;10], \ k \in \mathbb{N}$$

Пример:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

$$S_6 = \frac{(96+51)}{2} \cdot 10 = 735 = S_{10} - 40$$

$$= \frac{(55+100) \cdot 10}{2} - 40 = 775 - 40$$

Ответ: 735

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	6	8	4	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) Пусть Ф – кол-во фист. макдун
В – кол-во ванильных
К – кол-во карамельных

Поскольку нам не важен порядок посмотрим на количество

$3 \le K \le 14$

if $k=3$: $\varphi + B = 14$

$5 \le \varphi \le 12$

$n=8$

Если мы выберем Ф, то В – выбрано однозначно

Тогда кол-во вариантов наборов для некого k равно кол-ву возможные Ф для этого k (тогда n)

$(K+\varphi+B=20)$

$k=4$: $\varphi + B = 16$

$4 \le \varphi \le 12$

$n=9$

$k=5$: $\varphi + B = 15$

$3 \le \varphi \le 12$

$n=10$

$k=6$: $\varphi + B = 14$

$2 \le \varphi \le 12$

$n=11$

$k=7$: $\varphi + B = 13$

$2 \le \varphi \le 11$ $(2 \le B)$ $n=10$

$k=8$: $\varphi + B = 12$

$2 \le \varphi \le 10$ $n=9$

$k=9$: $\varphi + B = 11$

$2 \le \varphi \le 9$ $n=8$

$k=10$: $\varphi + B = 10$

$2 \le \varphi \le 8$ $n=7$

$k=11$: $\varphi + B = 9$

$2 \le \varphi \le 7$ $n=6$

$k=12$: $\varphi + B = 8$

$2 \le \varphi \le 6$ $n=5$

$k=13$: $\varphi + B = 7$

$2 \le \varphi \le 5$ $n=4$

$k=14$: $\varphi + B = 6$

$2 \le \varphi \le 4$ $n=3$

$$S_n = \frac{(3+11)\cdot 9}{2} + 10 + 9 = 7\cdot 9 + 9 + 10 = 82$$

$63 \; 72 \; 82$

Ответ: 82 набора

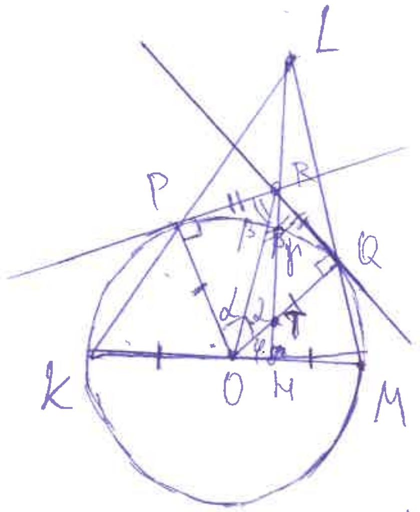
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 6 8 4 1 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4)



RP и PQ – кас. → RP = RQ

$\angle RQT = 90° = \angle RPT$ как углы между касат. и радиусом пров. в точку касания

$\angle RRO = \angle QRO = \beta$

$\angle ROQ = \angle ROP = \alpha$

$\angle TRQ = \varphi$

$\angle TOH = \varphi$

$= \angle RTQ$ (как вертик.)

$\angle PHO = \angle HK = 180° - \angle OTH - \varphi = 180° - (90° - \beta) - \varphi =$

$= 90° + \beta - \varphi$

$\angle PHO = 360° - 2\angle k - 90° - \beta - (\beta - \beta) = 270° - 2\angle k + \beta$

$\angle k = \angle OKP = \angle KPO$ ($\triangle OKP$ – равноб.: $OP = OK$ как радиусы)

$\angle PHO = 90° + \beta - \varphi = 270° - 2\angle k + \varphi$

① $\underline{180° = 2\angle k \cancel{+\beta+\beta\varphi} - \varphi}$

$\angle KOM = 180° = (180° - 2\angle k) + 2\alpha + \varphi = 180° - 2\angle k + 2\alpha + \varphi = 180°$

$2\alpha + \varphi - 2\angle k = 0$

② $2\angle k = 2\alpha + \varphi$

① – ② $180° = (2\alpha \cancel{+\beta} + \varphi) \cancel{+\beta+2\varphi} - \varphi$

$180° = 2\alpha + \beta - \varphi$

$\underline{\alpha + \beta + 90° = 90° (\triangle ORQ)}$

~~$180° = 90° + \alpha - \varphi$~~

~~$90° = \alpha - \varphi$~~

~~$\beta = \alpha - \varphi$~~

~~$2\alpha + 2\beta = \beta - \varphi + 2\alpha$~~

~~$2\beta = \beta - \varphi$~~

$180° = 2\alpha$

$\alpha = 90°$ ...

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	6	9	2	7	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия МОСКВИЧ

Имя АНАСТАСИЯ

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 06.03.05. **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.22

Номер телефона +7(977)-176-00-87 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 9 | 2 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Зачёт

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

По условию: $(V_1+V_2+V_3+V_4+V_6)\cdot 6=S$ (1) где S - количество всех работ, которые нужно проверить

$(V_2+V_4+V_5+V_6)\cdot 10=S$ (2)

$(V_1+V_3+V_5)\cdot 12=S$ (3) Пусть $S=60k$, где k-коэффициент пропорциональности

Тогда из (1) и (2) выражений получим

$$-\begin{cases}V_1+V_2+V_3+V_4+V_6=10k\\V_2+V_4+V_5+V_6=6k\end{cases}$$

$$+\begin{cases}V_1+V_3-V_5=4k\\V_1+V_3+V_5=5k\end{cases}$$ (из (3) выражения)

$2V_1+2V_3=9k$

$V_1+V_3=\underbrace{4{,}5k}$

работ проверяют вместе за 1 день.

$(V_1+V_3)4=18k$ - проверили первый и третий за 4 дня

$\frac{S}{18k}=\frac{60k}{18k}$ $100\%\left(\frac{18k}{60k}\right)=30\%$

Ответ 30% всех работ было проверено первым и третьим членами жюри за 4 дня

№2

1) $f=ax^2+bx+c$ не имеет корней $\Rightarrow b^2-4ac<0\Rightarrow -4ac<0\Rightarrow \underline{-ac<0}$, т.к. $b^2>0$ всегда

2) $g=px^2+qx+r$ не имеет корней $\Rightarrow q^2-4pr<0\Rightarrow -4\cancel{pk}^{pr}<0\Rightarrow \underline{-pr<0}$, т.к. $q^2>0$ всегда

$f+g=(a+p)x^2+(b+q)x+(c+r)$ имеет корни $\Rightarrow (b+q)^2-4(a+p)(c+r)>0\Rightarrow \underline{(b+q)^2-4ac-4pc-4rp-4ar>0}$, т.к. $(b+q)^2>0$ всегда

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0001692422

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

<0 (из п.2)

$b^2+2bq+q^2-4ac-4ar-4pc-4rp>0 \Rightarrow -4ar>0 \Rightarrow 4ar<0 \Rightarrow ar<0$ (3)

$-4pc>0 \Rightarrow 4pc<0 \Rightarrow pc<0$ (4)

<0 (из п.1)

Тогда если $a>0$, то $r<0$ (из п.(3)), $c>0$ (из п 1), $p<0$ (из п.(4)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot r<0$

Если $a<0$, то $r>0$ (из п(3)), $c<0$ (из п 1), $p>0$ (из п(4)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot r<0$

Ответ: знак произведения $c \cdot r$ – минус.

№3

1 компенсирует −1. Для достижения наибольшей суммы единиц должно быть как можно больше (0 вклада не даёт, −1 уменьшает сумму). В каждом квадрате 3×3 сумма равна 0 $\Rightarrow$ в квадрате 6×6 сумма тоже равна 0 (т.к. квадрат 6×6 можно ~~наз~~ нацело разделить на 4 квадрата 3×3). Поэтому весь нижний ряд можно заставить единицами (см. рисунок 1).

1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

При этом нельзя в седьмой столбец добавлять единицы, т.к. получатся некомпенсированные квадраты 3×3 (сумма внутри них не будет равна нулю). Сумма всех чисел в таблице равна количеству клеток в одном ряду (семи).

Ответ: 7

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 9 | 2 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Посчитаем количество комбинаций при фиксированном n-количестве апельсиновых макарун.

$n=2$

Ш	М	А
4	14	2
5	13	2
6	12	2
7	11	2
8	10	2
9	9	2
10	8	2
11	7	2
12	6	2
13	5	2
14	4	2

Всего: 11

$n=3$

Ш	М	А
3	14	3
4	13	3
5	12	3
6	11	3
7	10	3
8	9	3
9	8	3
10	7	3
11	6	3
12	5	3
13	4	3
14	3	3

Всего: 12

$n=4$

Ш	М	А
3	13	4
4	12	4
5	11	4
6	10	4
7	9	4
8	8	4
9	7	4
10	6	4
11	5	4
12	4	4
13	3	4

Всего: 11

Можно сделать вывод, что при $n=3$ количество комбинаций наибольшее, т.к. в верхней и нижней строчках количество шоколадных и малиновых макарун достигает максимума или минимума одновременно. При $n>3$ ограничения на количество шоколадных и малиновых макарун не достигается одновременно.

Из таблицы можно сделать вывод о том, что $k = М_1 - Ш_1 + 1$
k-количество комбинаций при фиксированном n, $М_1$-значение малиновых макарун в 1-ой строке, $Ш_1$ - шоколадных. Тогда при $n=5$ $k=10$, при $n=6$ $k=9$, при $n=7$ $k=8$, при $n=8$ $k=7$, при $n=9$ $k=6$, при $n=10$ $k=5$, при $n=11$ $k=4$, при $n=12$ $k=3$. Проверим.

Ш	М	А
3	5	12
4	4	12
5	3	12

Формула $k = М_1 - Ш_1 + 1$ следует из того, что при фиксированной сумме трёх чисел и увеличении одного слагаемого сумма двух других чисел должна уменьшиться на 1. Но так как числа в задаче имеют ограничение ($М_1 \geq 3$; $Ш_1 \geq 3$), то один из вариантов суммы не подходит. (так при уменьшении суммы двух чисел, одно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M A 0 0 0 1 6 9 2 7 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

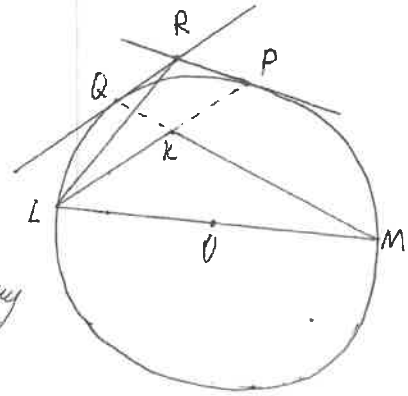
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

из них уменьшается, но достигая нижней границы (3), не может уменьшаться дальше.

Просуммируем все значения k: $11+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3 = 11+5\cdot 15 = 86$

Ответ: 86 различных наборов макарунов можно составить.

№4



Единственная прямая, проходящая через точку L и перпендикулярная KM - это прямая QL, т.к. угол, построенный на диаметре окружности и имеющий вершину на этой окружности, - прямой.

Чтобы доказать, что $LR \perp KM$, нужно доказать, что точка их пересечения лежит на окружности и является точкой Q, т.к. Q - точка прямой KM, лежащая на окружности. $\Rightarrow Q \in LR$

Если $RL \perp KM$, $Q \in KM$, то $RL \perp QM$ $\Rightarrow QR \perp QM$, но QR - касательная $\Rightarrow QR \perp$ радиусу окружности $OQ \Rightarrow$

$\Rightarrow OQ \parallel QM$, но это невозможно на окружности, радиус которой не равен нулю

Ответ: $LR \not\perp KM$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ | MA00014954 22

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 1

Фамилия Леонович

Имя Матвей

Отчество Андреевич

Дата рождения 17.10.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 7 925 313-23-48 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 9 5 4 2 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	6	86

№2.

p, q, r – арифм. прогр.

$\Rightarrow q = p + d$;

$r = p + 2d$, где d – шаг прогрессии

$px^2 + 2\sqrt{2}\, q x + r = 0$

$px^2 + 2\sqrt{2}(p+d)x + (p+2d) = 0$

$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}(p+d))^2 - (p+2d)p = 2(p+d)^2 - p(p+2d) =$

$= 2p^2 + 4pd + 2d^2 - p^2 - 2pd = p^2 + 2pd + 2d^2 = \underbrace{(p+d)^2}_{\geq 0} + \underbrace{d^2}_{\geq 0} \geq 0$

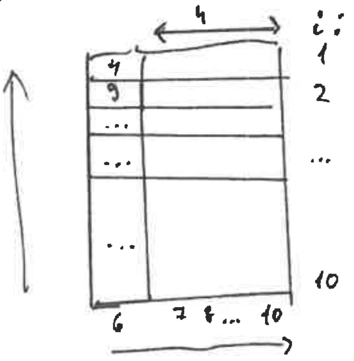
$d \neq 0 \Rightarrow d^2 > 0 \Rightarrow \frac{D}{4} > 0$

Дискр. больше нуля, значит у уравнения имеется два решения. Ч.т.д.

3.

Для каждого числа в таблице все числа выше и правее него должны его превышать. Найдём для каждого числа шестого столбца мин. необх. кол-во чисел больше него.

Для ~~i-го столбца~~ i-й строки 6-го столбца (считая сверху) есть $(i-1)5 + 4 = 5i - 1$ чисел больше него



Выберем для каждой позиции максимально возможное (учитывая ограничение) число и покажем, что такая расстановка существует.

№3. (продолжение)

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	84	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	18	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

$\boxed{6}$

—такая расстановка возможна.

Значит, макс. сумма чисел шестого ~~ряда~~ столбца - это

$51+56+61+\ldots+96 = 10+(50+55+\ldots+95) = 10+5(10+11+\ldots+19) = 10+5\cdot\frac{29\cdot 10}{2} = 735$

Ответ: 735

№5.

Пусть Ф, В, К - соотв. кол-во фист., ван. и кар. конфет в коробке, а $n = В+К$

$$\begin{cases} 3 \leq K \leq 14 \\ B = n-k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-14 \leq B \leq n-3 \\ 2 \leq B \leq 12 \end{cases}$$

Переберём все возможные Ф, и для каждого определим все возможные В (К будет однозначно задаваться через Ф и В; $K = 20-Ф-B$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 7 9 5 4 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5. (продолжение)

Ф:	n:		В (от - до):	В (кол-во вар.):
2	18		4 - 12	9
3	17		3 - 12	10
4	16		2 - 12	11
5	15	⇒	2 - 12	11
6	14		2 - 11	10
7	13		2 - 10	9
8	12		2 - 9	8
9	11		2 - 8	7
10	10		2 - 7	6
11	9		2 - 6	5
12	8		2 - 5	4

Кол-во вариантов наборов:

$4+5+\ldots+11+11+10+9 = 4+\ldots+7+2(8+9+10) = 75$

Ответ: 75

№1.

$U = \left[\frac{\text{доля работы}}{\text{час}}\right]$

U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 – соотв. скорость проверки 1-м, 2-м, …, 5-м членом жюри

t – время проверки (в часах)

Тогда $Ut = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20(U_1+U_2+U_4)=1 \\ 15(U_2+U_3+U_5)=1 \\ 10(U_1+U_3+U_4+U_5)=1 \end{cases}$$

Пусть $U_{14} = U_1+U_4$; $U_{35} = U_3+U_5$

Тогда
$$\begin{cases} 20(U_{14}+U_2)=1 \\ 15(U_{35}+U_2)=1 \\ 10(U_{35}+U_{14})=1 \end{cases}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA0001795422

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. (продолжение)

$$\begin{cases} 20(U_{14}+U_2) = 10(U_{35}+U_{14}) \\ 15(U_{35}+U_2) = 10(U_{35}+U_{14}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2U_{14}+2U_2 = U_{35}+U_{14} \\ 3U_{35}+3U_2 = 2U_{35}+2U_{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2U_2 = U_{35}-U_{14} \\ 3U_2 = 2U_{14}-U_{35} \end{cases} \Leftrightarrow 4U_2 = 2U_{35}-2U_{14}$$

$$\begin{cases} 4U_2+3U_2 = (2U_{35}-2U_{14})+(2U_{14}-U_{35}) \\ 3U_2+2U_2 = (2U_{14}-U_{35})+(U_{35}-U_{14}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7U_2 = U_{35} \\ 5U_2 = U_{14} \end{cases}$$ – выразим U_{14} и U_{35} через U_2

$$t_1 = \frac{1}{U_1+U_2+U_3+U_4+U_5}$$

$$t_2 = \frac{1}{U_2}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{U_1+U_2+U_3+U_4+U_5}{U_2} = 1+\frac{U_{14}+U_{35}}{U_2} = 1+\frac{7U_2+5U_2}{U_2} = 13$$

Ответ: в 13 раз быстрее

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

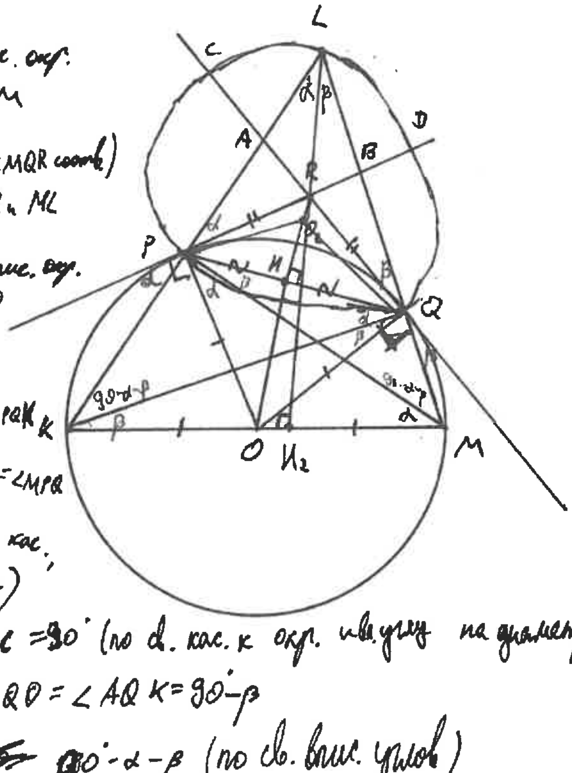
Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	9	5	4	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Пусть O – сер. KM и центр опис. окр. $KPQM$

α, β – ~~[illegible]~~ угол кас. к окр. O (внешние углы $\angle KPR$ и $\angle MQR$ соотв.)

A, B – соотв. т. пересеч. QR и KL, PR и ML

C, D – соотв. т. пересеч. QA и PB с опис. окр. ΔPLQ

~~RK [illegible]~~

Тогда $\angle LPB = \angle PMK = \angle OPM = \alpha = \angle PQK$

$\angle LQA = \angle QKM = \angle OQK = \beta = \angle MPQ$

(по св. верт. углов, угла хорды и кас., равноб. Δ-ка)

$\angle KPM = \angle KQM = \angle OPB = \angle OQC = 90^\circ$ (по св. кас. к окр. и углу на диаметре)

$\angle KPO = \angle BPM = 90^\circ - \alpha$; $\angle MQO = \angle AQK = 90^\circ - \beta$

$\angle PKQ = \angle PMQ = \frac{\angle POQ}{2} = 90^\circ - \alpha - \beta$ (по св. впис. углов)

$\angle KLM = \alpha + \beta$ (по сумме углов $LPOQ$)

OR – общ., $PO = OQ \Rightarrow \Delta OPR = \Delta OQR \Rightarrow PR = QR$, т.е. ΔPRQ – равноб.

~~H = т. пересеч. [illegible]~~ RH – высота в ΔPQR

тогда по св. равноб. Δ-ка RH – ~~[illegible]~~ медиана ΔPRQ

$\Rightarrow R$ лежит на сер. пер. PQ

По св. сер. пер. в окр. O_2 лежит на прямой RH (O_2 – центр опис. окр. ΔPLQ)

$\angle POQ = 2(90^\circ - \alpha - \beta) \Rightarrow \angle PRQ = 180^\circ - \angle POQ = 2\alpha + 2\beta$ (по сумме углов $OPRQ$)

По св. впис. углов $\angle PO_2Q = 2\angle PLQ = 2\alpha + 2\beta$

$\Rightarrow \angle PO_2Q = \angle PRQ \Rightarrow O_2$ и R совпадают

R – центр опис. окр. $\Delta PLQ \Rightarrow LR = PR = QR$, т.е. ΔPRL, ΔLRQ – равноб. Δ-ки (по определению)

$\Rightarrow \angle PLR = \alpha$, $\angle QLR = \beta$

Пусть H_2 – т. пересеч. LR и KM. Тогда $\angle KH_2L = 180^\circ - \angle LKO - \angle KLR = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$

$\Rightarrow LR \perp KM$ ч.т.д.

8

)лимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ОРСК

)оведения

М	А	0	0	0	1	9	3	4	0	2	2

Вариант № 1 Шифр

ЧАРЕНКО

ЕВНА

. 2005 **Класс** 10

СА

1 **листах**

Дата выполнения работы 05.03.2022

588 8149 **Подпись**

и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, ее количество листов, на которых выполнена работа и дату Іе забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	9	3	4	0	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	4	20	84

№1.

Пусть a, b, c, d и e – производительность соответственно первого, второго, третьего, четвёртого и пятого членов жюри.

Примем работу за 1. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a+b+d} = 20 & (1) \\ \dfrac{1}{b+c+e} = 15 & (2) \\ \dfrac{1}{a+c+d+e} = 10 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+d = \dfrac{1}{20} & (1) \\ b+c+e = \dfrac{1}{15} & (2) \\ a+c+d+e = \dfrac{1}{10} & (3) \end{cases} \quad +$$

$$2a+2b+2c+2d+2e = \frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$$

$$2(a+b+c+d+e) = \frac{3+4+6}{60} = \frac{13}{60} \Rightarrow a+b+c+d+e = \frac{13}{120}.$$

(3) $a = \frac{1}{10} - c - d - e$

(1) $\frac{1}{10} - c - d - e + b + d = \frac{1}{20}$

$\frac{1}{10} + b = \frac{1}{20} + c + e$

$\frac{1}{20} + b = c + e$

(2) $b + \frac{1}{20} + b = \frac{1}{15}$

$$2b = \frac{1}{15} - \frac{1}{20} \Rightarrow 2b = \frac{4-3}{60} \Rightarrow 2b = \frac{1}{60} \Rightarrow b = \frac{1}{120}.$$

$$\frac{a+b+c+d+e}{b} = \frac{13}{120} \cdot 120 = 13.$$

Ответ: в 13 раз быстрее.

№2.

$a_1 = p$

$a_2 = q = p + d$

$a_3 = r = p + 2d$

$px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$

$px^2 + 2\sqrt{2}(p+d)x + p + 2d = 0$

$D = 8(p+d)^2 - 4p(p+2d) = 8p^2 + 16pd + 8d^2 - 4p^2 - 8pd = 4p^2 + 8pd + 8d^2$

Ур-ие имеет 2 решения, если $4p^2 + 8pd + 8d^2 > 0$

Решим это неравенство относительно p.

$4p^2 + 8dp + 8d^2 = 0$

$D = 64d^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8d^2 = 64d^2 - 128d^2 = -64d^2$. Если $d = 0$, то $4p^2 > 0 \Rightarrow$ ур-ие имеет 2 корня

~~Если $D = 0$, то~~ Если ~~$d = 0 \Rightarrow$ то $4p^2 = 0 \Rightarrow p = 0$ – не уд. усл.~~

Значит, $D < 0$ при любом $d \neq 0$.

~~Тогда~~ Т.к. ветви направлены вверх, то $4p^2 + 8pd + 8d^2 > 0$ при любом ~~$d \neq 0$, $p \neq 0$~~ $d \neq 0$.

Значит, исходное ур-ие всегда имеет 2 корня. Доказано.

№3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	20	30	40	50	96	97	98	99	100
9	19	29	39	49	91	92	93	94	95
8	18	28	38	48	86	87	88	89	90
7	17	27	37	47	81	82	83	84	85
6	16	26	36	46	76	77	78	79	80
5	15	25	35	45	71	72	73	74	75
4	14	24	34	44	66	67	68	69	70
3	13	23	33	43	61	62	63	64	65
2	12	22	32	42	56	57	58	59	60
1	11	21	31	41	51	52	53	54	55

Рассмотрим нижнее число шестого столбца. Т.к. числа в каждой строке и каждом столбце идут в порядке возрастания, то есть ~~как и хотя бы~~ по крайней мере 49 чисел, которые больше этого числа. Значит, наибольшее значение, которое может принимать это число, равно 51.

Рассмотрим число, стоящее в столбце над предыдущим числом. Есть по крайней мере 44 числа, которые больше ~~данного~~. Тогда наибольшее значение этого числа 56.

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 9 3 4 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Для следующего числа есть 39 больших его чисел ⇒ оно не больше 61. ~~Каждое следующее число может быть максимум имеет как следующее~~ Для следующего числа аналогично находим максимальное значение 66, затем 71, 76, 81, 86, 91, 96.

Тогда сумма чисел в шестом столбце равна $51+56+61+66+71+76+81+86+91+96 = 107+127+147+167+187 = 735$.

Пример, что такая расстановка возможна, см на стр. 2.

Ответ: 735.

№5

В каждой коробке обязательно лежит не менее 2 ф., не менее 2 в. и не менее 3 к. Сразу же „положим" эти 7 макарунов в коробку. Тогда в ней останется 13 мест, которые нужно распределить между 10 ф., 10 в. и 11 к. макарунами.

Рассмотрим все возможные случаи для карамельных макарунов. Их может быть 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

Пусть k ~~f~~ – кол-во к. макарунов, f – кол-во ф. макарунов, в – кол-во в. макарунов.

~~Если f = 0, то~~ Если $k=0$, то $f+в=13$. При условии, что $f \le 10$ и $в \le 10$, это ур-ие имеет 8 пар решений. $(13 = 10+3 = 9+4 = 8+5 = 7+6 = 6+7 = 5+8 = 4+9 = 3+10)$

Если $k=1$, то $f+в=12$. Это ур-ие имеет 9 пар решений при условии, что $f \le 10$ и $в \le 10$. $(12 = 10+2 = 9+3 = 8+4 = 7+5 = 6+6 = 5+7 = 4+8 = 3+9 = 2+10)$

Если $k=2$, то $f+в=11$ ⇒ 10 пар решений. (т.к. $f \le 10$; $в \le 10$)

Если $k=3$, то $f+в=10$ ⇒ 11 пар решений. ($f \le 10$; $в \le 10$)

Если $k=4$, то $f+в=9$ ⇒ 10 пар решений.

Если $k=5$, то $f+в=8$ ⇒ 9 пар решений

Если $k=6$, то $f+в=7$ ⇒ 8 пар решений.

Если $k=7$, то $f+в=6$ ⇒ 7 пар решений.

Если $k=8$, то $f+в=5$ ⇒ 6 пар решений.

Если $k = 9$, то $f+b = 4 \Rightarrow 5$ пар решений.

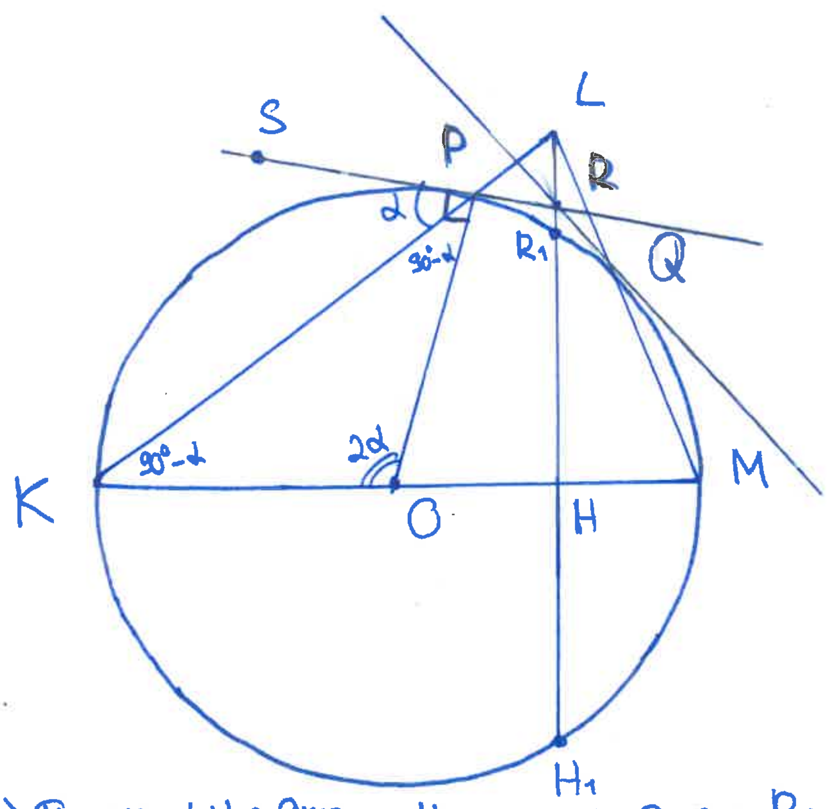
Если $k = 10$, то $f+b = 3 \Rightarrow 4$ пары решений.

Если $k = 11$, то $f+b = 2 \Rightarrow 3$ пары решений.

Всего мы получаем $8+9+10+11+10+9+8+7+6+5+4+3 = 90$ наборов.

Ответ: 90 наборов.

№4.



1) Пусть $LH \cap$ Окр $= H_1$ и $LH \cap$ Окр $= R_1$ (см. рисунок)

2) Пусть O – центр окр.

3) Пусть $\angle SPK = \alpha$. Тогда $\angle SPK = \frac{1}{2}\angle KOP$ – по св-ву угла м/у касательной и хордой $\Rightarrow \angle KOP = 2\alpha$

4) $OP \perp SP$ – как радиус, проведенный в точку касания. $\Rightarrow \angle KPO = 90° - \alpha \Rightarrow \angle PKO = 90° - \alpha$ (т.к. $OK = OP$ – как радиусы)

5) $\angle KLH_1 = \frac{\cup KH_1 - \cup PR_1}{2}$

6) $\angle PRH = \frac{\cup PH_1 - \cup PR_1}{2} = \frac{\cup PK + \cup KH_1 - \cup PR_1}{2} = \frac{\cup KH_1 - \cup PR_1}{2} + \alpha = \angle KLH_1 + \alpha$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

M	A	0	0	0	1	7	1	0	2	2	2

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Ингеройнен

Имя Алексей

Отчество Андреевич

Дата рождения 11.11.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +7 910 377 35 32 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	1	0	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Задача 2.

Найдём D (дискриминант) $D=(2\sqrt{2}q)^2-4r\cdot p=8q^2-4rp$.

чтобы было два решения, надо чтобы D было больше 0

т.е. $8q^2-4pr>0 \Leftrightarrow 2q^2-pr>0$ т.к. p q и r

три последовательные члена ариф. прогр., то $q=p+a$, $r=p+2a$ (a - шаг ар. прог.)

тогда $2q^2=2(p+a)^2$; $pr=p(p+2a)$ тогда $2(p+a)^2-p(p+2a)$

$=(p+a)^2+p^2+2ap+a^2-p^2-2ap=\underset{0}{\underset{\geq}{(p+a)^2}}+\underset{0}{\underset{\geq}{a^2}}>0$

Рассмотрим случай где это не кв. ур-е, тогда 2-ух решений не будет никогда, т.к. будет всегда одно $\left(\frac{-r}{2\sqrt{2}q}\right)$

т.е. $D>0 \Rightarrow$ утверждение доказано.

Задача 1.

Обозначим объём работы как S, производительность членов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Тогда $\frac{S}{A_1+A_2+A_4}=20$; $\frac{S}{A_2+A_3+A_5}=15$;

$\frac{S}{A_1+A_3+A_4+A_5}=10$; спрашивается $\frac{\frac{S}{A_1+A_2+A_3+A_4+A_5}}{\frac{S}{A_2}}=\frac{A_1+A_2+A_3+A_4+A_5}{A_2}$

т.е. имеем: $\frac{S}{10}=A_1+A_3+A_4+A_5$; $\frac{S}{20}=A_1+A_2+A_4$; $\frac{S}{15}=A_2+A_3+A_5$

тогда $\frac{S}{15}+\frac{S}{20}-\frac{S}{10}=\cancel{A_1}+A_2+\cancel{A_4}+A_2+\cancel{A_3}+\cancel{A_5}-\cancel{A_1}-\cancel{A_3}-\cancel{A_4}-\cancel{A_5}=2A_2$

$=\frac{4S}{60}+\frac{3S}{60}-\frac{6S}{60}=\frac{S}{60}=2A_2 \Rightarrow S=120A_2 \Rightarrow \frac{S}{A_2}=120 \rightarrow \frac{S}{120}=A_2$

$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=\frac{S}{10}+\frac{S}{120}=\frac{12S}{120}+\frac{S}{120}=\frac{13S}{120}$; $A_2=\frac{S}{120}$, тогда искомое

равно $\frac{13S}{120}:\frac{S}{120}=13$ Ответ: в 13 раз

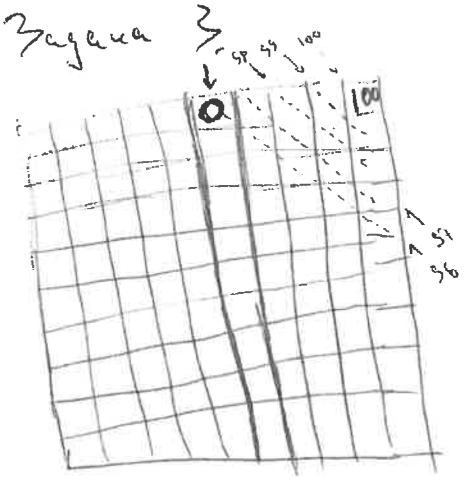
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 1 0 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3



Гарантированно в верхнем правом углу стоит 100, т.к. ~~правее~~ нет чисел правее его и ~~левее~~ выше (они должны быть больше)

Пронумеруем столбцы и строки так, что 100 стоит в (10;10), тогда 99 может ~~стоять~~ только в (9;10) или (10;9) т.к. выше или правее может быть только 1 число – 100, 98 может стоять в клетках, где должна стоять 99 и в (10,8), (9,9), (8,10) и т.д. тогда 96 это максимальное число которое может стоять в 6 столбце, тогда заметим, что 97, 98, 99 имеют единственное место (в 10-строке). Также нет смысла ставить 95 в 5-ый столбец, т.к. хотим получить наибольшую сумму в 6 (иначе в 9-ой строке макс. число справа не более 94, тогда в 6 столбце 9 строке не более 90, а при 95 на месте (9 строка, 10 столб) может достичь 91)

Тем самым получим что 95 на месте (9;10) тогда в 6 столб. 91, сделаем аналогично с 90... 85... 80. 55. Пользуясь таким алгоритмом получим что в 6-ом столбце стоят максимально возможные числа, при которых достигается сумма: $96+91+86+81+76+71+66+61+56+51=2\cdot(90+80+70+60+50)+5\cdot7(1+6)=$

$=\underbrace{5\cdot7}_{35}+2\cdot\underbrace{(200+150)}_{350}=735$

Пример таблицы:

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

Ответ: 735

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA000171022 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5

Рассмотрим каждый вариант для Фисташковых:

Ван + Кар	$Ф_{ист}$	Ван	Кар.	способов выбрать кол-во Ваниль.
18	2	4 - 12		9
19	3	3 - 12		10
16	4	2 - 12		11
15	5	2 - 12		11
14	6	2 - 11		10
13	7	2 - 10		9
12	8	2 - 9		8
11	9	2 - 8		7
10	10	2 - 7		6
9	11	2 - 6		5
8	12	2 - 5		4

Будем ~~смотреть~~ возможные расклады Ванильных т.к. Карамельных не менее 3, то при 12 Ф В не более 5 и от 2 (при 11Ф - 6В, при 10Ф - 7В и т.д. до 12 В) это 5Ф

При 16 Ф Ван от 2 до 12, а уже при 3 Ф от 3, т.к. Кар. не более 14 при 2 Ф от 4 В.

Тогда в каждом варианте Карамельных это оставшееся кол-во от 20, т.е. определяется единожды. Фист. мы зададим отдельно.

Ванильные выбирает кол-во (5 столбец) ~~столькими способами~~ т.е. надо просто просуммировать его и получим общее кол-во наборов (т.к. порядок не важен, то ~~нужно~~ варируется только кол-во)

Т.е: $\underbrace{4+5+6}_{15}+\underbrace{7+8}_{15}+9+\underbrace{10+11+}_{30}\underbrace{11+10+9}_{30} = 30+30+15+15 = 90$

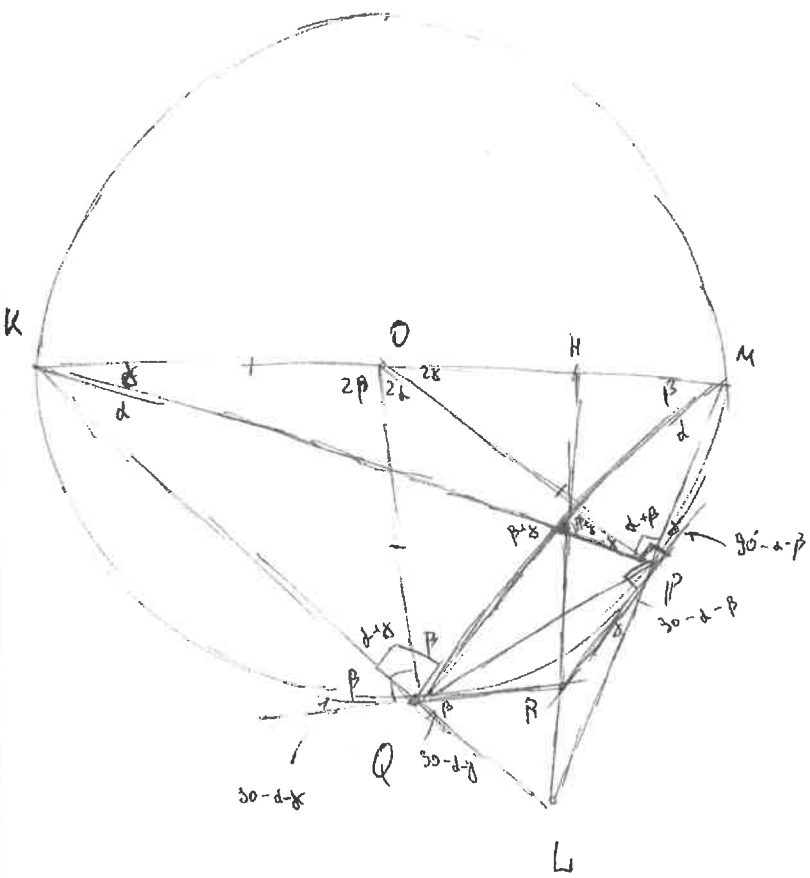
Отвег: 90 способов.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 4 1 0 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



$OK = OM = OQ = OP$ как радиус

LR пересекается с MK в т. H.

MQ и KP в т. I

$\angle MOP = 2\gamma$
$\angle POQ = 2\alpha$
$\angle KOQ = 2\beta$

$\angle KPM = \angle KQM$ т.к. опираются на диаметр

тогда $\angle KOM = 180° = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$
т.е. $\alpha+\beta+\gamma = 90°$

$\angle OQR = \angle OPR = 90°$ т.к. RQ и RP касательные

$\angle OKQ = \angle KQO = \alpha+\gamma$
$\angle OQP = \angle OPQ = \beta+\alpha$
$\angle OPM = \angle OMP = \beta+\gamma$
т.к. Δ р/б (стороны (радиусы) равны)

~~$\angle MIP = \beta+\gamma = 180$~~

$\angle MKP = 180° - 90° - (\beta+\alpha) = \gamma$; $\angle MQK = 180° - 90° - (\gamma+\alpha) = \beta$; $\angle OPK = \gamma$, т.к. $OP = OK$

аналогично $\angle OQM = \beta$, ~~...~~ и $\angle MIP = 180° - 90° - \alpha = \beta+\gamma = \angle KIQ$

$\angle KLM = \beta+\gamma$ из ΔMQL: $\angle MQL = 90°$, $\angle M = \alpha$. Проведя OR, получим равенство ΔOQR и $OPQ \Rightarrow \angle QOR = \angle POR = \alpha \Rightarrow OR$ – бисс.; $QR = PR$

$\angle IQL = 90° = 180° - \angle KQM = \angle IPL$. По лемме о трезубце получаем, что $RL = RI = RP = QR$, тогда $\angle PPL = \angle PLR = \gamma$, тогда $\angle LHM$ в ΔHML равен $180° - \alpha - \beta - \gamma = 90° \Rightarrow LH \perp MK \Rightarrow LR \perp KM$

что и требовалось

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

...ноярск

...дки проведения

Шифр: М А 0 0 0 1 6 6 5 1 2 2

Вариант № 1

...стаков

...ав

...орьевич

...10.2005

Класс 10

...тика

2 **листах**

...760905 22

Дата выполнения работы 05.03.2022

Подпись Шест

...мя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения,
...бщее количество листов, на которых выполнена работа и дату
...и. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	6	6	5	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Пусть a, b, c, d, e — скорости проверки работ членами жюри (% работ в час) соответственно 1-ым, 2-ым, 3-им, 4-ым и 5-ым, а S — общий объём работы. Тогда из условия имеем
$$\begin{cases} 20(a+b+d)=S \\ 15(b+c+d)=S \\ 10(a+c+d+e)=S \end{cases}$$
Тогда мы можем вычислить $(a+c+d+e)-(a+b+d)-(b+c+d)= -2b = \frac{S}{10} - \frac{S}{20} - \frac{S}{15}$.
Можем преобразовать: $-2b = \frac{S}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) = \frac{S}{5}\left(\frac{6-3-4}{12}\right) = -\frac{S}{60}$, отсюда $b = \frac{S}{120}$. Нужно найти отношение времён работ, но поскольку объём работы постоянен и всегда равен S, то можно искать отношение скоростей:
$$\frac{a+b+c+d+e}{b} = \frac{\frac{S}{10}+\frac{S}{120}}{\frac{S}{120}} = \frac{1+\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = \frac{13}{12}\cdot\frac{12}{1} = 13 \text{ раз}$$
Ответ: в 13 раз

30!

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	8	20	88

2) Поскольку p, q, r не нулевые, то уравнение $px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$ квадратное и решается через дискриминант: $D=8q^2-4pr$. Пусть разность в этой прогрессии $-d$, тогда $p=q-d$, $r=q+d$, подставим это: $D=8q^2-4(q-d)(q+d)=8q^2-4(q^2-d^2)=4q^2+4d^2$. Очевидно, что $D\geq 0$, ведь это сумма двух неотрицательных чисел (квадратов). При этом $D\neq 0$, ведь $q\neq 0$ по условию, а значит $q^2\neq 0$, $4q^2\neq 0$ и $4q^2+4d^2\neq 0$. Ну значит $D>0$, а тогда квадратное уравнение имеет два корня $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. (в наших обозначениях $\frac{-2\sqrt{2}q\pm\sqrt{D}}{2p}$).

3) Если мы оценим наибольшее значение каждого числа в шестом столбце, обозн. как $a_1, a_2 \ldots a_{10}$, то сумма в 6 столбце будет $S\leq a_1+a_2+\ldots+a_{10}$. Давайте займёмся этим. Оценим число в i-ой строчке 6-го столбца (нумерация с 0, сверху вниз, рис 3.1). Числа стоящие строго выше x по условию больше, их ровно i. Во всех строках числа возрастают слева направо по условию, а значит в i-ой строке есть еще 4 числа больше x, и в строках выше (с 0-ой по $i-1$-ую) тоже есть еще по 4 числа разных.

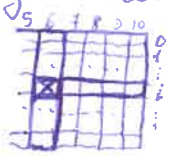


рис 3.1.

То есть для этого числа нашлось $5i+4$ чисел, больших него, а значит $x\leq 100-5i-4$, подставляя все допустимые i, имеем: $\{96, 91, 86, 81, 76, 71, 66, 61, 56, 51\}$.

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

рис 3.2.

И сумма чисел в шестом столбце $S\leq 96+91+86+\ldots+51 = 5\cdot 147 = 735$. В то же время пример на такую сумму есть на рис 3.2, где значения в каждой клетке шестого столбца равны оценке $(100-5i-4)$.

Ответ: $96+91+\ldots+51=735$.

Лист 1 из 2

5) Числа "маленькие", поэтому давайте переберем количество фисташковых (x), ванильных (y) и посчитаем число карамельных (z), как $z = 20 - x - y$. Если z попадёт в диапазон $[3; 14]$, то мы такой вариант посчитаем, иначе — нет.

x \ y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	16	15	14	13	12	11	10	9	8	9	6
3	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
4	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
5	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
6	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
7	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	[illegible]	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
10	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
11	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
12	8	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

рис 5.1.

Понятно, что x и y мы будем перебирать среди $[2; 12]$, т.к. для других x и y ~~на~~ наборы точно не подходят. В таблице на рис 5.1. представлены вычисленные z в зависимости от x и y. Видно, что среди всех $11 \cdot 11 = 121$ вариантов ровно 3 не подходят под ограничение $z \leq 14$, и ещё 28 не подходят под второе ограничение $z \geq 3$. Значит итого подходящих осталось $121 - 3 - 28 = 90$.

Ответ: 90

4)

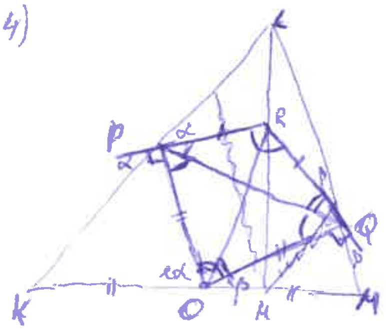


рис 4.1.

Изобразим чертёж на рис 4.1. $OK = OP = OQ = OM$ — как радиусы. ~~$\angle QOM$~~ $\angle QOM$ и $\angle POK$ — центр. углы при касательных. $RP = RQ$ — как отрезки касательных. Значит $\triangle RPO = \triangle PQO$ по 3 сторонам и можно посчитать углы, ведь $\angle RPO = \angle RQO = 90^\circ$ и 4-у. $RQOP$ — вписан. Тогда $\angle PRO = \angle ORQ = \angle PQO = \angle QPO = \triangle$ и $\angle RQP = \angle RPQ = \angle POR = \angle QOR = \triangle$. Можно видеть, что $PRQO$ — дельтоид и $RO \perp PQ$

Ещё кажется, что рис 4.2 не бесполезен, там есть 2 равнобедр. $\triangle$: $\triangle KQO$ и $\triangle PMO$, их углы считаются исходя из внешнего при вершине O.

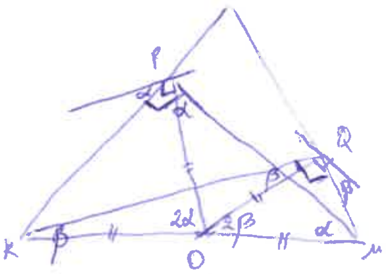


рис 4.2.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ангарск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	9	1	0	6	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Перфильев

Имя Виктор

Отчество Анатольевич

Дата рождения 13.05.2005 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 8(950) 133-39-00 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	9	1	0	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть x - вся работы

1	2	3	4	5	Σ
20	20	16	20	–	76

$\frac{x}{6}$ - общая производ. I, II, III, IV, VI (1)

$\frac{x}{10}$ - общая производ II, IV, V, VI (2)

$\frac{x}{12}$ - общая производ I, III, V (3)

$(1)-(2) = \frac{x}{6} - \frac{x}{10} = \frac{x}{15}$ - общая производ (I + III - V) (4)

$(4)+(3) = \frac{x}{15} + \frac{x}{12} = \frac{3x}{20}$ - удвоенная производ I и III ⇒

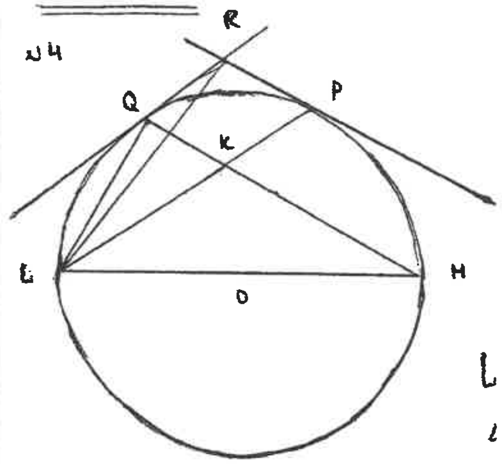
⇒ $\frac{3x}{40}$ - производ I и III

$\frac{3x}{40} \cdot 4 = 0{,}3x$ - работы выполнят I и III за 4 дня

$\frac{0{,}3x}{x} \cdot 100\% = 30\%$

Ответ: 30 %

№4



Дано:

ω (т. O ; OH)

△LKH (∠LKH - тупой)

LH - диаметр

...

Док-ть: LR ⊥ KH

LH - диаметр
∠LQH опир на диаметр ω } ⇒ ∠QH = 90° ⇒

⇒ LR не перпендикулярен KH, т.к. 2 перпендикуляра из одной точки на одну прямую опустить нельзя

Некорректность условия

№2

$f = ax^2 + bx + c$ - не имеет корней ⇒ $b^2 - 4ac < 0$ ⇒ $ac > 0$

$g = px^2 + qx + r$ - не имеет корней ⇒ $q^2 - 4pr < 0$ ⇒ $pr > 0$

$f > 0$, $g > 0$ ( ) } ⇒ $f+g > 0$ ⇒ $f+g \neq 0$ ⇒ корней нет

$f < 0$, $g < 0$ ( ) } ⇒ $f+g < 0$ ⇒ $f+g \neq 0$ ⇒ корней нет

$f > 0$, $g < 0$ или $f < 0$, $g > 0$ } ⇒ $f+g \neq 0$ ⇒ $a > 0 ⇒ c > 0$, $p < 0 ⇒ r < 0$ или $a < 0 ⇒ c < 0$, $p > 0 ⇒ r > 0$ } ⇒ $cr < 0$

Лист 1 из 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	9	1	0	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
0	-1	-1	0	-1	-1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
0	-1	-1	0	-1	-1	0
1	1	1	1	1	1	1

Сумма всех цифр в квадрате 6×6 = 0 (т.к. его можно ровно разбить на 4 квадрата 3×3) ⇒ чтобы получить максимальную сумму цифр в квадрате 7×7 надо поставить как можно больше единиц в оставшиеся 13 клеток и как можно меньше -1. Рассмотрим правый нижний квадрат 3×3, в нём должен (как и в любом квадрате 3×3) находиться хотя бы один 0, поставим его в одну из наших 13 клеток.

Рассмотрим правый верхний квадрат 3×3, правую его часть надо заполнить как можно >1 и как можно меньше -1, но в нём тоже должен быть 0 (а в левой части как больше -1) ⇒ 0 поставим в правую строку ⇒ $S_{кв\ 7\times7} = S_{13кл} \leq 11$

Пример на $S = 11$ построен !!

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

нoярск
дки проведения

МА000170 2222

Вариант № 1 Шифр

1AKoB

ТРИЕВИЧ

1.05.2005

1KA Класс 10

а 5 листах

Дата выполнения работы 05.03.2022

02 852 93-05 Подпись

имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату ми. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	0	2	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	6	86

3а1

№1 ! a_i – скорость i-ого жюри. S – вероятность... тогда

Найти: $A = \frac{t_2}{t_1}$

где t_1 – время на проверку ~~второго~~ работ второго жюри

t_2 – время на проверку работы 1,2,3,4,5-жюри.

$$\begin{cases} 20(a_1+a_2+a_4)=S \\ 15(a_2+a_3+a_5)=S \\ 10(a_1+a_3+a_4+a_5)=S \end{cases}$$

$$A = \frac{\frac{S}{a_2}}{\frac{S}{a_1+a_3+a_4+a_5}} = \frac{a_1+a_3+a_4+a_5+a_2}{a_2}$$

$$\begin{cases} 60(a_1+a_2+a_4)=3S \\ 60(a_2+a_3+a_5)=4S \\ 60(a_1+a_3+a_4+a_5)=6S \end{cases}$$

I + II − III:

$60a_1+60a_2+60a_4+60a_2+60a_3+60a_5 - 60a_1-60a_3-60a_4-60a_5 = 3S+4S-6S$

⇓

$120a_2 = S \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{S}{120}}$

$a_1+a_3+a_4+a_5 = \frac{S}{10}$

⇓

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = \frac{S}{10}+\frac{S}{120} = \frac{13S}{120} \Rightarrow A = \frac{\frac{13S}{120}}{\frac{S}{120}} = 13$

Ответ: в 13 раз

№2 $\{p;q;r\} = \{q-d;q;q+d\}$, где d – шаг прогрессии.

$px^2+2\sqrt{2}qx+r = (q-d)x^2+2\sqrt{2}qx+q+d=0$

2 корня $\Leftrightarrow D = 8q^2-4(q-d)(q+d)>0 \Leftrightarrow 2q^2-q^2+d^2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q^2+d^2>0$. т.к $q\neq 0 \Rightarrow |q|>0 \Rightarrow q^2>0 \Rightarrow q^2+d^2>0$ ▨

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

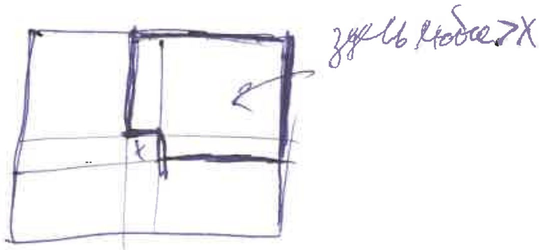
Вариант № 1 | МА00017022 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

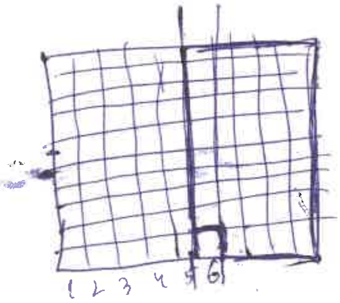
Заметим, что если число стоит в какой-то клетке, то все числа, находящиеся правее или выше или выше и правее больше. ~~т~~ Т.к. числа в таблице различные натуральные, то наше число $X \leq 100 -$ (кол-во клеток правее или выше минус клетки с числом X)



тогда сумма 6-ого столбца $\leq$

$$\leq (100-49)+(100-44)+\ldots+(100-4) =$$

$$= 100\cdot 10 - \frac{(4+49)10}{2} = 1000 - 5\cdot 53 = 735$$



Оценка: 735

Пример на 735

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Нетрудно убедиться, что пример удовлетворяет условию, а сумма шестого столбца =

$$= 51+56+\ldots+96 = \frac{(51+96)10}{2} =$$

$$= 5\cdot 147 = 735$$

Ответ: 735

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 7 0 2 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 пусть: $\begin{cases} a \text{ – кол-во фисташковых м. в коробке} \\ b \text{ – кол-во ванильных в коробке} \\ c \text{ – кол-во карамельных в коробке} \end{cases}$

$a+b+c=20$

$\begin{cases} 2 \le a \le 12 \\ 2 \le b \le 12 \\ 3 \le c \le 14 \end{cases}$

Выставим все $12+12+14=38$ макарун в ряд

$\underbrace{aaa\ldots a}_{12}\ \underbrace{bb\ldots b}_{12}\ \underbrace{c\ldots c}_{14}$

Надо убрать отсюда $38-20=18$ штук.

кол-во способов сделать это C_{38}^{18}, но мы не можем ~~сделать~~ оставить макарун каждого вида меньше, чем нам разрешено, => нужно отнять кол-во способов ~~выбрать пока~~ убрать больше 10 ванильных и т.д.

кол-во способов убрать 18 штук, и чтобы осталось меньше 2 ванильных $= C_{26}^{7} + C_{26}^{6}$ ← если осталось 0 ванильных

↑ если осталось 1 ванильная

аналогично для фисташковых: $C_{26}^{7}+C_{26}^{6}$

и карамельных: $C_{24}^{6} + C_{24}^{5} + C_{24}^{4}$

↑ 2 кар. ↑ 1 кар. ↑ 0 кар.

очевидно, что если нам нужно убрать 18 штук, мы не сможем „нарушить закон" сразу для 2 сортов (минимум надо убрать 11+11=22)

Итоговый ответ: $C_{38}^{18} - 2\cdot C_{26}^{7} - 2\cdot C_{26}^{6} - C_{24}^{6} - C_{24}^{5} - C_{24}^{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	0	2	2	2	2

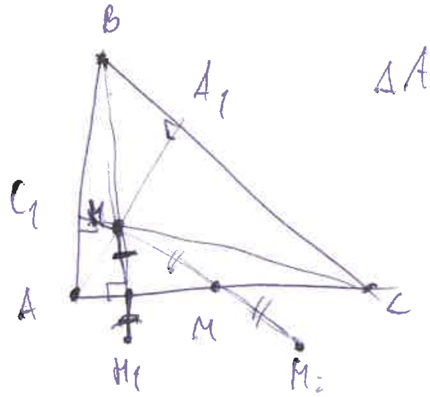
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

• Докажем утверждение о окружности 9 точек.

~~ΔABC A_1, B_1, C_1 – середина~~



ΔABC H – ортоцентр BB_1 – высота

BM – медиана

CC_1, AA_1 – высота

BA_1HC_1 – вписан (углы по 90°)

$\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle C_1HA_1 = 180-\alpha = \angle AHC$

Отразим H относительно AC ⟶ H_1 – симметрична H относительно AC ⇒

$\Rightarrow AH_1C = 180-\alpha \Rightarrow ABCH_1$ – вписан ($\angle ABC + \angle AH_1C = 180$)

Пусть H_2 – точка симметрична H относительно точки M

$\left.\begin{matrix} AM = MC \\ HM = MH_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow AHCH_2$ – параллелограм $\Rightarrow \angle AHC = \angle AH_2C = 180-\alpha$

$\Rightarrow H_2 \in$ описанной окружности ABC

H_3 – середина BH ⇒

Сделаем гомотетию с центром в точке H коэф $= \frac{1}{2}$,

тогда: $\begin{cases} B \to H_3 \\ H_1 \to B_1 \\ H_2 \to M \end{cases}$ ⇒ описанная окружность ⟶ в окружность 9 точек.

аналогично все середины сторон основания и середины отрезков соединяющих вершину и ортоцентр будут лежать на одной окружности

Продолжение на след. листе.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

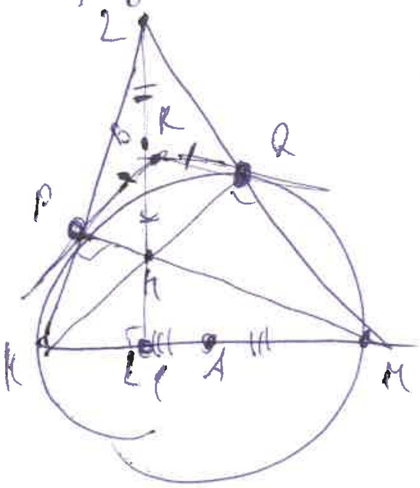
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	7	0	2	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение к 4



① KM-диаметр => ∠KPM = ∠KQM = 90 =>
=> KQ и MP - высоты △ABC
! ~~KQ~~ H - ортоцентр △ABC
~~тогда LH - вторая содержащая~~
! LH пересекает KM в точке L_1
$LL_1 \perp KM$. ! B - середина LM
! A - середина KM, тогда
точки L_1 P A Q B лежат на окружности 9 точек.

② ! ∠PMQ = α => ∠PKQ = α = ∠QPR => ∠PRQ = 180 − 2α
$\overset{\cup}{PQR}$ ~~∠PRK = α~~

③ PKL_1H - вписан => ∠PLH = ∠PKH = α, аналогично: $\angle HL_1Q = \alpha$
∠PAQ ~~PQA~~ опирается на дугу PQ окружности 9 точек =>
=> $\angle PAQ = \angle PL_1Q = \angle PL_1H + \angle QL_1H = 2\alpha$.
$\angle PRQ + \angle PL_1Q = 180$ => R ∈ окружности 9 точек.
PR = RQ (касательные) => R середина дуги PQ
для PL_1Q
$\angle PL_1H = \angle QL_1H = \alpha$ => L_1H - биссектриса => L_1H проходит через середину дуги PQ (точку R) => LRH лежат на одной прямой - высоте △ABC => LR ⊥ KM ▨

Лист 5 из 5

16070

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	6	0	7	0	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Краснов

Имя Андрей

Отчество Алексеевич

Дата рождения 28.12.2004 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +79880723990 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа, и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

/

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 7 | 0 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	—	20	80

№ 1

Пусть n – количество работ, x – скорость проверки работ и t – время проверки работ, тогда:

$\frac{n}{x_1+x_2+x_4}=20$ (ч); $\frac{n}{x_2+x_3+x_5}=15$ (ч); $\frac{n}{x_1+x_3+x_4+x_5}=10$ (ч);

где x_i; i – номер проверяющего;

~~Выразим (1)~~ Получается:

$x_1+x_2+x_4=\frac{n}{20}$ (1);

$x_2+x_3+x_5=\frac{n}{15}$ (2);

$x_1+x_3+x_4+x_5=\frac{n}{10}$ (3);

Выразим (1)+(2)−(3):

$x_1+x_2+x_4+x_2+x_3+x_5-x_1-x_3-x_4-x_5=\frac{n}{20}+\frac{n}{15}-\frac{n}{10}$

$2x_2=\frac{n}{60} \Rightarrow x_2=\frac{n}{120}$, Тогда:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{n}{10}+\frac{n}{120}=\frac{13n}{120}$ – скорость проверки всеми жюри.

Найдём отношение скорости проверки всеми жюри к скорости проверки второго проверяющего (ответ):

$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{x_2}=\frac{\frac{13n}{120}}{\frac{n}{120}}=\frac{13n}{n}=13$. Ответ: в 13 раз.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00016070 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть $p=a$. Т.к. p, q и r являются членами арифметической последовательности, то $p=a$; $q=a+d$; $r=a+2d$.

Тогда уравнение $px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$ преобразуется в $ax^2+2\sqrt{2}(a+d)x+a+2d=0$.

Нужно доказать, что уравнение имеет 2 корня $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нужно доказать, что дискриминант >0:

$D=(2\sqrt{2}(a+d))^2-4a(a+2d)=8a^2+16ad+8d^2-4a^2-8ad=$
$=4a^2+8ad+8d^2$

Если $a>0$ и $d>0$, или $a<0$ и $d<0$, то все члены трёхчлена $4a^2+8ad+8d^2$ - положительные $\Rightarrow$ $\Rightarrow 4a^2+8ad+8d^2>0$, при $a,d>0$, или при $a,d<0$.

Если $a>0$ и $d<0$, или $a<0$ и $d>0$, то 1ый и 3ий член трёхчлена $4a^2+8ad+8d^2$ - положительные, а 2ой - отрицательный. Значит надо доказать, что $4a^2+8d^2>8ad \mid :4$

$a^2+2d^2>2ad$

$a^2-2ad+d^2+d^2>0$

$(a-d)^2+d^2>0$. Сумма квадратов всегда >0 $\Rightarrow 4a^2+8ad+8d^2$ всегда больше $0 \Rightarrow D>0 \Rightarrow$ уравнение $px^2+2\sqrt{2}qx+r$ имеет 2 корня.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 7 | 0 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Число 100, как самое большое, будет стоять в 1 строке 10 столбце.
Т.к. в 6 столбце должна быть максимальная сумма, в неё должны быть максимально возможные числа, поэтому пойдём из 10 стб. до 6 стб. в 1 стр.: использую макс. возмож. числа:

6	7	8	9	10	
96	97	98	99	100	1
91	92	93	94	95	2

Далее мы ставим 95 в 2 стр. 10 стб, т.к. если сделать так, то в 2 стр. 6 стб. будет стоять 91, а если продолжать 1 стр. то будет стоять 86, а 91 > 86.
Далее, подобным способом мы заполняем остальные строки с 6 по 10 столбец и в итоге получается так:

Лист 3 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 0 7 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	20	30	40	50	96	97	98	99	100
2	9	19	29	39	49	91	92	93	94	95
3	8	18	28	38	48	86	87	88	89	90
4	7	17	27	37	47	81	82	83	84	85
5	6	16	26	36	46	76	77	78	79	80
6	5	15	25	35	45	71	72	73	74	75
7	4	14	24	34	44	66	67	68	69	70
8	3	13	23	33	43	61	62	63	64	65
9	2	12	22	32	42	56	57	58	59	60
10	1	11	~~[illegible]~~ 21	31	41	51	52	53	54	55

Т.к. нам нужны числа только в 6 столбце, то не важно, какие числа в остальных 5ти, главное, чтобы они стали по правилу из условия.

Т.о. наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца равно:

$96+91+86+81+76+71+66+61+56+51= 735$

Ответ: 735.

№5

Для решения этого задания можно перебрать все возможные наборы макаронов и посчитать их количество.

В 1ом столбце количество фист. мак. в наборе (Ф); Во 2ом — ванильных (В). И в 3ем — карамельных (К).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	0	7	0	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ф	В	К	Ф	В	К	Ф	В	К	Ф	В	К	Ф	В	К
2	4	14	4	2	14	5	10	5	7	8	5	10	3	7
2	5	13	4	3	13	5	11	4	7	9	4	10	4	6
2	6	12	4	4	12	5	12	3	7	10	3	10	5	5
2	7	11	4	5	11	6	2	12	8	2	10	10	6	4
2	8	10	4	6	10	6	3	11	8	3	9	10	7	3
2	9	9	4	7	9	6	4	10	8	4	8	11	2	7
2	10	8	4	8	8	6	5	9	8	5	7	11	3	6
2	11	7	4	9	7	6	6	8	8	6	6	11	4	5
2	12	6	4	10	6	6	7	7	8	7	5	11	5	4
3	3	14	4	11	5	6	8	6	8	8	4	11	6	3
3	4	13	4	12	4	6	9	5	8	9	3	12	2	6
3	5	12	5	2	13	6	10	4	9	2	9	12	3	5
3	6	11	5	3	12	6	11	3	9	3	8	12	4	4
3	7	10	5	4	11	7	2	11	9	4	7	12	5	3
3	8	9	5	5	10	7	3	10	9	5	6			
3	9	8	5	6	9	7	4	9	9	6	5			
3	10	7	5	7	8	7	5	8	9	7	4			
3	11	6	5	8	7	7	6	7	9	8	3			
3	12	5	5	9	6	7	7	6	10	2	8			

Всего получилось 90 различных вариантов.

Ответ: 90.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 1 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Пусть V – объем бассейна в литрах

Тогда из каждой трубы в бассейн поступает $\frac{V}{3}$ л/ч

Тогда за первый час набралось $\left(\frac{V}{3}+\frac{V}{3}\right)\cdot 1 = \frac{2}{3}V$л.

После этого осталось набрать $V-\frac{2}{3}V=\frac{1}{3}V$л

Скорость подачи воды после засорения равна $\frac{V}{3}+\frac{1}{2}\frac{V}{3}=$
$=\frac{2V+V}{6}=\frac{V}{2}$ л/ч

Тогда время наполнения оставшейся части бассейна равно $\frac{\frac{1}{3}V}{\frac{V}{2}}=\frac{2}{3}$ч

Зил

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Ответ: $\frac{2}{3}$ч

2. $f(x)=x^2+px+q$

Пусть корни $f(x)$ x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$

$x_1+x_2=-p$

$p=-x_1-x_2$

$\begin{cases} p_2=p-x_1=-2x_1-x_2 \\ q_2=2q=2\cdot x_1\cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2=-p_2 \\ 2\cdot x_1\cdot x_2=q_2 \end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, числа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 1 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$2x_1$ и x_2 являются корнями многочлена

$f_2(x) = x^2 + p_2 x + q$, ч.т.д.

3) Пусть прямоугольник разбит на k частей площадью S. Тогда $k \cdot S = 1000$. Пусть $S = ab$

$1000 = 1000 \times 1$; 2×500; 4×250; 5×200;

10×100; 8×125; 25×40; 20×50

Если $k = 10$, то $S = 100$, тогда $a \times b$:

1×100; 10×10; 5×20; 4×25; 2×50

Если мы хотим вместить в исходный прямоугольник 1×100, то его длина ≥ 100

Если мы хотим вместить в исходный прямоугольник 10×10, то его ширина ≥ 10

Тогда получим прямоугольник 100×10, в котором не могут одновременно существовать прямоугольники 100×1 и 10×10

Если $k = 5$, то $S = 200$, тогда $a \times b$

2×100; 20×10; 40×5; 25×8; 50×4; 200×1

Если мы хотим вместить в исходный прямоугольник 1×200 то его длина ≥ 200, а ширина ≤ 5,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 1 | 2 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

что исключает существование 40×5, 25×8, 10×20

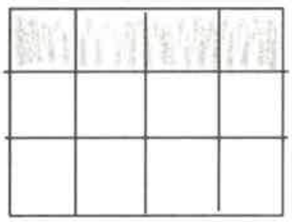
Если мы хотим вместить в исходный прямоугольник 2×100 то его длина ≥ 100, а ширина ≤ 10.

Аналогично предыдущему случаю в таком прямоугольнике не могут одновременно существовать 2×100 и 10×20.

Т.о. количество пар $a\times b \leq 4$. (в остальных случаях S раскладывается на a и b не более, чем четырьмя способами (так, чтобы это вписывалось в возможные размеры и количество). Например, в прямоугольник 25×40 поместится 5 шт. 5×8, 10 шт 4×10, 2 шт 2×20 и 8 шт. 1×40.

Ответ: 4

5



A способов

B способов

C способов

Искомое количество: $(A\cup B\cup C)$

Очевидно, что $A=B$

$A = 2^8$, т.к. для каждой из 8 клеток

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 1 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

есть вариант быть закрашенной или нет.

Аналогично $C = 2^6$ (закрашиваем или нет 6 клеток)

Повторяющиеся способы: A и B $- 2^4$ (средняя строка)

A и C $- 2^4$ (средние клетки 1 и 2 строки)

B и C $- 2^4$ (средние клетки 2 и 3 строки)

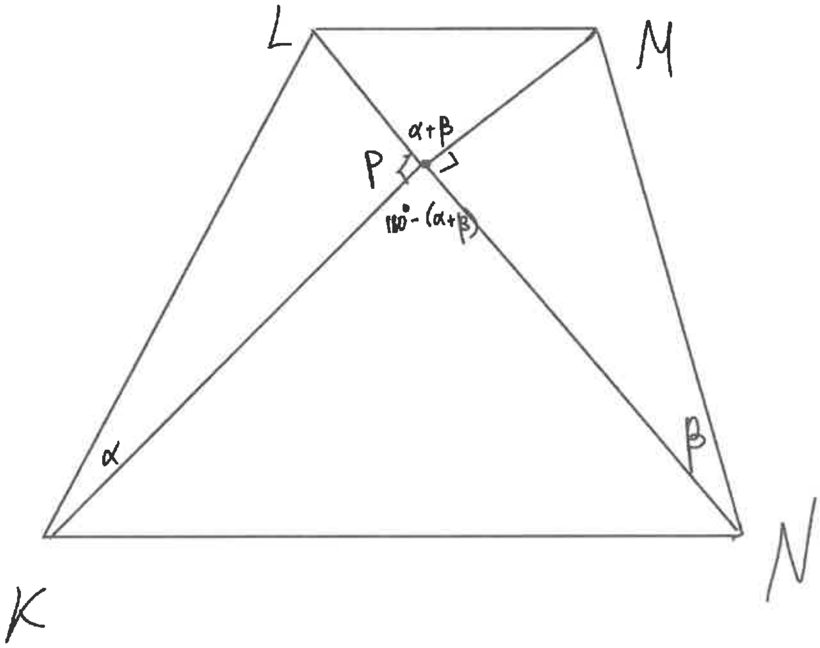
A, B и C $- 2^2$ (средние клетки 2 строки)

Т.о. получим $\underset{512}{2^8+2^8}+\underset{16}{2^6-2^4}-\underset{48}{2^4-2^4}+2^2=$

$= 256\cdot 2+64-16\cdot 3+4 = 512+16+4 = 532$ способа

Ответ: 532

4



Лист 4 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 7 | 1 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

По теореме Пифагора $LK^2 = LP^2 + KP^2$;

$MN^2 = MP^2 + NP^2$

Пусть $\angle LKP = \alpha$, $\angle MNP = \beta$. Тогда $\angle LPM = \alpha + \beta$

$\angle KPN = 360^\circ - (\angle KPL + \angle MPN + \angle LPM) =$

$= 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + (\alpha+\beta)) = 180^\circ - (\alpha+\beta)$

По теореме косинусов:

$LM^2 = LP^2 + MP^2 - 2 \cdot LP \cdot MP \cdot \cos(\alpha+\beta)$

$KN^2 = KP^2 + NP^2 - 2 \cdot KP \cdot NP \cdot \cos(180^\circ - (\alpha+\beta)) =$

$= KP^2 + NP^2 + 2 \cdot KP \cdot NP \cdot \cos(\alpha+\beta)$

Тогда $LM^2 + KN^2 = LP^2 + MP^2 - 2LP \cdot MP \cdot \cos(\alpha+\beta) +$

$+ KP^2 + NP^2 + 2 \cdot KP \cdot NP \cdot \cos(\alpha+\beta) =$

$= LK^2 + MN^2 + 2\cos(\alpha+\beta)(KP \cdot NP - LP \cdot MP)$

$LM = \sqrt{LP^2 + MP^2 - 2 \cdot LP \cdot MP \cdot \cos(\alpha+\beta)}$

$KN = \sqrt{KP^2 + NP^2 + 2 \cdot KP \cdot NP \cdot \cos(\alpha+\beta)}$

$LK = \sqrt{LP^2 + KP^2}$

$MN = \sqrt{MP^2 + NP^2}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$

$= \frac{KP}{\sqrt{KP^2+LP^2}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{MP^2+NP^2}} - \frac{LP}{\sqrt{KP^2+LP^2}} \cdot \frac{MP}{\sqrt{MP^2+NP^2}} =$

$= \frac{KP \cdot NP - LP \cdot MP}{\sqrt{(KP^2+LP^2)(MP^2+NP^2)}}$

Т.о. $LK + MN = KN + ML$

Получим, что в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, а значит в него можно вписать окружность, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Самара ул. Больничная д. 14а

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	2	0	4	5	0	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Апаркин

Имя Матвей

Отчество Максимович

Дата рождения 24. 08. 2005 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 5.03.2022

Номер телефона 8-937-659-00-24 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2.

М	А	0	0	0	2	0	4	5	0	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

№1. Пусть a_i - скорость работы i-го члена [illegible].
S - вся работа. Тогда

$$\underbrace{6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_6)}_{I}=\underbrace{10(a_2+a_4+a_5+a_6)}_{II}=\underbrace{12(a_1+a_3+a_5)}_{III}=S$$

$$I-III=0 \Rightarrow 6(a_2+a_4+a_6)=6(a_1+a_3+2a_5)$$

$$a_2+a_4+a_6=a_1+a_3+2a_5$$ подставили

полученное равенство во II

$$10(a_1+a_3+3a_5)=12(a_1+a_3+a_5)$$

$$a_1+a_3=9a_5 \Rightarrow 12\cdot 10a_5=120a_5=S$$

Нужно найти $\frac{4(a_1+a_3)}{S}$ в процентах

$$\frac{4(a_1+a_3)}{S}=\frac{4\cdot 9a_5}{120a_5}=\frac{36}{120}=\frac{6}{20}=30\%$$

Ответ: 30%

№2. $f(x)=ax^2+bx+c \to D_1=b^2-4ac<0$

$g(x)=px^2+qx+r \to D_2=q^2-4pr<0$

$f(x)+g(x)=(a+p)x^2+(b+q)x+(c+r)=w(x)$

~~Пусть $a<0 \to f(x_0)>0$ тогда очевидно~~

Пусть $a>0. \to f(x_{0f})>0 \to$ если $w(x)$ имеет корни, то $g(x)$ имеет хотя бы 1 отрицательное значение, но $g(x)$ не имеет корней $\to g(x)<0$ т.е. $p<0$; Аналогично для $a<0$.

Т.е. $a\cdot p<0$ Будем считать, что $a>0$.

~~Du~~ $D_1=b^2-4ac<0 \Rightarrow$; $b^2>0$; $a>0 \Rightarrow c>0$ иначе $b^2+4a|c|>0$ т.к. $a>0$

$D_2=q^2-4pr=q^2+4|p|r<0 \Rightarrow r<0$ иначе $D_2>0 \Rightarrow r\cdot c<0$

Ответ: $r\cdot c<0$

№5. В коробке 20 печений. Причем шоколадных должно быть хотя бы 3, малиновых так же, а апельсиновых хотя бы 2. Давайте сделаем 3 кучки. Ш(шоколадные) М(малиновые); А(апельсиновые). Сразу положим туда минимальное нужное кол-во шаров. т.е. в Ш - 3 шоколадных в М - 3 малиновых; в А - 2 апельсиновых. Осталось 12 шаров. Всего разделить их на 3 кучки C_{14}^{2} способов (методом шаров и перегородок). $C_{14}^{2} = \frac{13\cdot 14}{2} = 13\cdot 7 = \cancel{70}\ 91$

Но не все они подходят. т.к. в Ш мы можем добавить не больше 11; в М аналогично; в А не больше 10. Посчитаем кол-во „лишних" вариантов. Когда в Ш берем 12, то в остальные по нулю - это 1 способ; когда в М берем 12, в остальные тоже по нулю - еще 1 способ; когда в А берем 11, то оставшийся идет либо в Ш, либо в М - 2 способа; когда в А берем 12, то остальные получают по нулю - 1 способ.

Итого $\frac{13\cdot 14}{2} - 1 - 1 - 1 - 2 = \cancel{78}\ 91 - 5 = \cancel{73}\ 86$ способов.

№3.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	1	1	0
2	1	-1	-1	1	-1	-1	1
3	1	-1	-1	1	-1	-1	1
4	0	1	1	0	1	-1	0
5	1	-1	-1	1	-1	-1	1
6	1	-1	-1	1	-1	-1	1
7	0	1	1	0	1	1	0

Сумма 8

Легко понять, что сумма i ~~стр~~ строки всегда равна сумме $i+3k$ строке. Потому что для любого 3×3 равна 0. Аналогично и для столбцов. $j+3k$ $k\in\mathbb{Z}$:

Легко понять, что сумма 6×6 любого тоже равна 0. (Это 4 квадрата 3×3) т.е. Нам нужно максимизировать сумму крайнего столбца и строки

Все „1" там стоять не могут т.к. сумма нижнего угла 3×3 будет больше „0" т.к. „1" больше половины клеток.

		1
		1
1	1	1

Т.к. „0" есть в одной угловой, то допустим в (7;7) тогда он есть и в (4;7) (1;7) ;(7;4); (7;1) ;(4;4);(4;1);(1;4)(1;1) из симметричности сумм i и $i+3k$ строк; j и $j+3k$ столбцов. значит сумма ~~строк~~ не больше 8, ~~от~~ пример приведен.

Подробное док-во что i и $i+3k$ строки совпадают. (для столбцов аналогично) Возьмем квадрат 3×3 с левым верхним углом I в (1;1) и левым верхним II в (2×2) у обоих сумма равна 0; но в I входят клетки (1;1);(1;2);(1;3), а во II входят клетки (4;1)(4;2)(4;3) значит, что их суммы равны. Теперь мы можем „сдвигать" наши квадраты вправо, получая, что суммы одинаковых отрезков на разных строках равны.

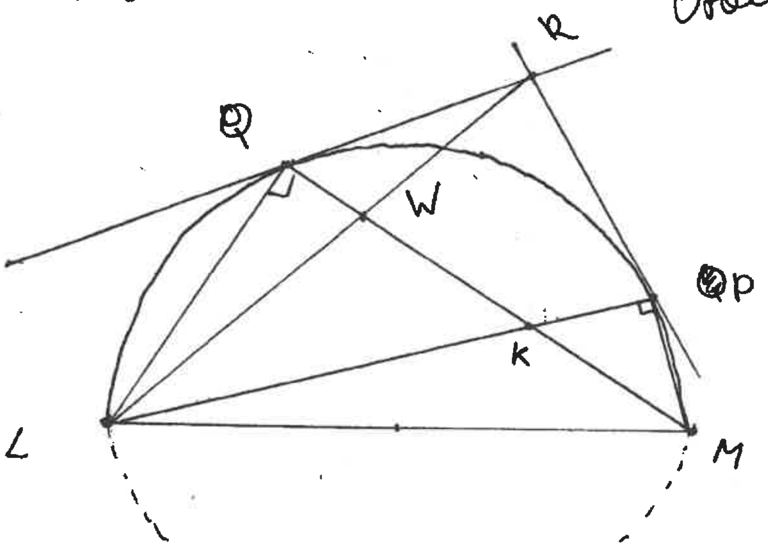
$$\sum_{i=1}^{3}(1;i)=\sum_{i=1}^{3}(4;i)=\sum_{i=1}^{3}(7;i)$$

$\sum_{i=2}$

$$\sum_{i=k}^{k+2}(7;i)=\sum_{i=k}^{k+2}(4;k)=\sum_{i=k}^{k+2}(7;k)\quad k\in\mathbb{Z}\quad k\le 5$$

Ответ: 8

№4.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	0	4	5	0	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$W \in LR$; $W \in \cancel{L}QM$ $\angle LQM = 90^\circ$ т.к. LM - диаметр. : Q лежит на окружности. $\angle LWM$ должен быть равен 90°, но такого не может быть так как тогда $\angle QWL = 90^\circ \Rightarrow Q = W \Rightarrow LR = LQ$ - кас. $\Rightarrow L = Q$ а такого не может быть по условию.

...мпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

(Борисова, 5). | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 9 | 2 | 2 | 2 |

...дения

Шифр

Вариант № 2

...а

...ровна

...005 **Класс** 10

...а

... **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

...19 6363 **Подпись**

...отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, ...е количество листов, на которых выполнена работа и дату ...е забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	3	9	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Пусть i-й член жюри ($i\in\mathbb{N}$, $1\leqslant i\leqslant 6$) проверяет все работы за d_i дней. Тогда $V_i=\frac{1}{d_i}$ – скорость проверки работ i-ым членом жюри.

По условию задачи,

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

$$\begin{cases} V_1+V_2+V_3+V_4+V_6=\frac{1}{6} \\ V_2+V_4+V_5+V_6=\frac{1}{10} \\ V_1+V_3+V_5=\frac{1}{12} \end{cases}$$

$V_1+V_2+V_3+V_4+V_6=\frac{1}{6}$, значит, $V_2+V_4+V_6=\frac{1}{6}-V_1-V_3$

$V_2+V_4+V_5+V_6=\frac{1}{10}$, значит, $V_5=\frac{1}{10}-(V_2+V_4+V_6)=\frac{1}{10}-\frac{1}{6}+V_1+V_3$

$V_1+V_3+V_5=\frac{1}{12}$, значит, $V_1+V_3=\frac{1}{12}-V_5=\frac{1}{12}-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}-V_1-V_3$

$V_1+V_3=\frac{1}{12}-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}-V_1-V_3$

$2V_1+2V_3=\frac{3}{12}-\frac{1}{10}$

$2(V_1+V_3)=\frac{15-6}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$

$V_1+V_3=\frac{3}{40}$

$V_1+V_3=\frac{3}{40}$, значит, ~~[illegible]~~ первый и третий за 4 дня проверили $4\cdot\frac{3}{40}=\frac{3}{10}=0,3=30\%$ всех работ.

Ответ: 30%.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000183922 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$f=ax^2+bx+c$ не имеет корней

Если $a>0$, то график $f=ax^2+bx+c$ - парабола, с ветвями, направленными вверх, не пересекающая ось абсцисс. Если $a<0$, то парабола с ветвями вниз

$f=ax^2+bx+c$ не имеет корней, зн., $D=b^2-4ac<0$

$4ac>b^2$, зн., $ac>0$ (т.к. $b^2\geqslant 0$).

Если $a>0$, то $c<0$

Если $a<0$, то $c>0$.

$a\neq 0$, т.к. f - трёхчлен

$g=px^2+qx+r$ не имеет корней, зн. $D=q^2-4pr<0$

$4pr>q^2$, зн. $pr>0$ (т.к. $q^2\geqslant 0$)

Если $p>0$, то $r<0$

Если $p<0$, то $r>0$.

Если $p>0$, то график $g=px^2+qx+r$ - парабола с ветвями вверх, не пересекающая ось абсцисс. Если $p<0$, то график - парабола с ветвями вниз, не пересекающая ось абсцисс.

$p\neq 0$, т.к. g - трёхчлен

Если $a>0$ и $p>0$, то при любом значении x, $f>0$, $g>0$, тогда $f+g>0$ и корней нет.

Если $a<0$ и $p<0$, то при любом значении x, $f<0$, $g<0$, тогда $f+g<0$ и корней нет.

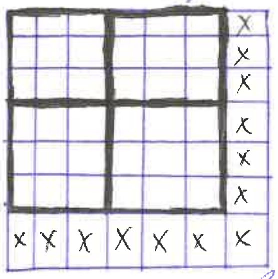
Значит ($a>0$ и $p<0$) или ($a<0$ и $p>0$), т.е., a и p имеют разный знак. Тогда c и r имеют разный знак, и произведение $c\cdot r$ отрицательно.

Ответ: отрицательно.

№3

Предположим, в каком-то квадрате 3×3 оказалось ≥5 единиц. Тогда в оставшихся ≤4 клетках расставлены числа -1 или 0, тогда кол-во 1 в квадрате больше, чем кол-во -1, и сумма чисел >0. По условию задачи, такого не может быть, зн., в каждом квадрате не более 4 единиц.

Предположим, что сумма всех чисел в таблице ≥12. Рассмотрим такое разбиение таблицы на квадраты:

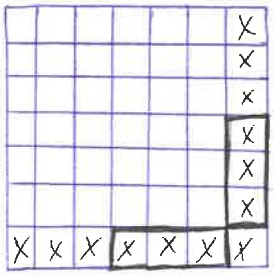


В каждом из 4 квадратов сумма чисел 0, и остаётся ещё 13 „пустых" клеток. Сумма всех чисел ≥12, зн. ни в одной из пустых клеток не стоит -1, и есть ≤1 клетка, в которой стоит 0.

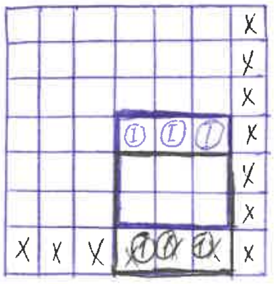
(„Пустые" клетки обозначены символом X)

Если ни в одной из „пустых" клеток не стоит 0, то сумма всех чисел 13. Тогда, если рассмотреть самый правый и нижний квадрат, то в нём стоят хотя бы 5 единиц (т.к. эти 5 клеток расположены на правой и нижней границах таблицы), а такого не может быть. Зн, хотя бы в одной „пустой" клетке есть 0.

Сумма всех чисел ≥12, зн. 0 есть ровно в одной „пустой" клетке.



0 стоит только в 1 пустой клетке, значит хотя бы в одной из двух выделенных областей стоят 3 единицы. Рассмотрим квадрат 3×3, который содержит все клетки этой области. Пусть это будет нижняя область. Для другой доказательство аналогичное.



Передвинем квадрат на 1 строку вверх. (На рисунке чёрный квадрат передвинули, и он стал синим) У этих двух квадратов сумма чисел 0, и 6 клеток общие, значит сумма клеток, обозначенных 1 равна сумме клеток, обозначенных I. В клетках 1 стоят числа 1, зн. в клетках I тоже стоят 1.

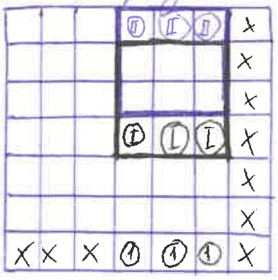
Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	3	9	2	2	2

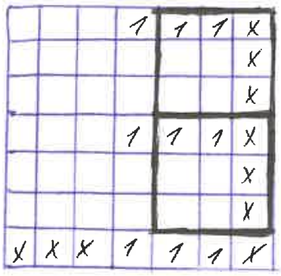
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)



Рассмотрим такие два квадрата 3×3 (чёрный и синий). Сумма чисел в них 0, и у них 6 общих клеток, зн., сумма клеток I равна сумме клеток II. В клетках I стоят числа 1, зн. в клетках II тоже стоят 1.



Рассмотрим такие два непересекающиеся квадрата 3×3. Только в одной клетке X стоит 0, зн. хотя бы в одном из этих квадратов ≥ 5 чисел 1 (т.к. иначе в обоих квадратах один $X = 0$, тогда нулей будет 2, а по предположению, что сумма ≥ 12, это неверно). Это невозможно, т.к. сумма в квадрате не будет равняться 0. Мы пришли к противоречию. Значит, сумма всех чисел в таблице < 12. Сумма целых чисел — целое число, зн. сумма ≤ 11.

Пример для суммы чисел 11:

1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
0	-1	-1	0	-1	-1	0
1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
0	-1	-1	0	-1	-1	0
1	1	1	1	1	1	1

Сумма чисел в каждом квадрате равна 0, сумма всех чисел в таблице равна 11.

Ответ: 11.

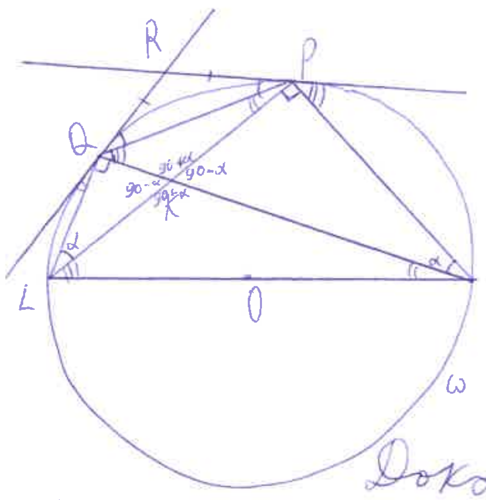
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 3 9 2 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Дано: $\triangle KLM$

$\angle LKM > 90^\circ$

ω – окружность, LM – диаметр ω

$LK \cap \omega = P$

$MK \cap \omega = Q$

RP, RQ – касательные к ω

Доказать: $LR \perp KM$

Доказательство:

1. $\angle LKM > 90^\circ$, зн. точка K находится внутри ω.
2. $\angle LQM = \angle LPM = 90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр LM.
3. Угол между касательной и хордой равен половине центрального угла, опирающегося на эту хорду, зн., $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \angle PMQ$, $\angle RQP = \frac{1}{2}\angle QOP = \angle PMQ$
4. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, зн. $\angle QLP = \angle QMP = \angle RPQ = \angle RQP$.
5. $\angle RQP = \angle RPQ$, зн. $\triangle QRP$ – равнобедренный, зн. $RQ = RP$.
6. $OL = OQ = OP = OM$ как радиусы окружности ω.
7. $\angle QPL = \angle QML$ как вписанные, опирающиеся на дугу QL
8. Рассм. $\triangle LQK$ и $\triangle MPK$, в них
   1) $\angle LQK = \angle MPK = 90^\circ$,
   2) $\angle QKL = \angle PKM$ как вертикальные,
   зн. $\triangle LQK \sim \triangle MPK$ по двум углам, зн. $\frac{LQ}{MP} = \frac{QK}{PK} = \frac{LK}{MK}$
9. Рассм. $\triangle LMK$ и $\triangle QPK$, в них
   1) $\angle LMK = \angle QPK$,
   2) $\angle LKM = \angle QKP$ как вертикальные,
   зн. $\triangle LMK \sim \triangle QPK$ по двум углам, зн. $\frac{LM}{QP} = \frac{MK}{PK} = \frac{LK}{QK}$, $\angle MLK = \angle PQK$
10. $\angle LQM = 90^\circ$, зн. $LQ \perp KM$
11. Предположим, что $LR \perp KM$. Тогда $LR \parallel LQ$ (т.к. $LQ \perp KM$).
12. Через одну точку не могут проходить две параллельные прямые, $LR \parallel LQ$, зн. L, R и Q лежат на одной прямой.
13. QR – касательная, зн. QR пересекает ω только в точке Q; L лежит на ω, зн. Q и L совпадают.
14. $\angle LQM = 90^\circ$, но Q и L совпадают, зн. это невозможно, зн. LR не $\perp KM$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	3	9	2	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

В каждой коробке должно быть 3 шоколадных, 3 малиновых и 2 апельсиновых макаруна, т. е. эти 8 макарунов нужно всегда класть в коробку. На остальные 12 мест можно класть любые макаруны из оставшихся 11 шоколадных, 11 малиновых и 10 апельсиновых.

Пусть a – кол-во апельсиновых макарунов,
b – кол-во шоколадных макарунов,
c – кол-во малиновых макарунов, тогда

$$\begin{cases} 0 \le a \le 10 \\ 0 \le b \le 11 \\ 0 \le c \le 11 \\ a+b+c=12 \end{cases}$$

~~Если мы положим с апельсиновых (а=0), то~~

Если $a=0$, то $b+c=12$, есть 11 способов выбрать b и c:

$b=1$, $c=11$
$b=2$, $c=10$
$b=3$, $c=9$
$\vdots$
$b=11$, $c=1$

Если $a \ge 1$, то есть $12-a+1=13-a$ способов выбрать b и c:

$$\begin{cases} b=0, & c=12-a \\ b=1, & c=11-a \\ b=2, & c=10-a \\ \vdots \\ b=12-a, & c=0 \end{cases}$$

т. к. если $a \ge 1$, то $12-a \le 11$, т. е. $b \le 11$, $c \le 11$

Т. е. общее кол-во способов равно $n = 11 + \sum\limits_{a=1}^{10}(13-a) =$
$= 11+(13-1)+(13-2)+\ldots+(13-9)+(13-10) = 11+10\cdot 13-(1+2+3+\ldots+10) =$
$= 11+130-\frac{10\cdot 11}{2} = 141-55 = 86$ способов.

Ответ: 86 способов.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск
Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	6	6	3	0	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Богоявленский

Имя Александр

Отчество Викторович

Дата рождения 28.08.2005

Предмет Математика **Класс** 10

Работа выполнена на 4 **листах**

Номер телефона 89836102165 **Дата выполнения работы** 5.03.2022

Подпись АБ

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	6	6	3	0	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть S - кол-во работ; $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ - скорость проверки первого, второго ... шестого члена жюри $\left(\frac{\text{кол-во работ}}{\text{дни}}\right)$. Тогда запишем условие:

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

1) $\frac{S}{v_1+v_2+v_3+v_4+v_6} = 6$

2) $\frac{S}{v_2+v_4+v_5+v_6} = 10$

3) $\frac{S}{v_1+v_3+v_5} = 12$

$4\cdot(v_1+v_3) = a\cdot S$

$a - ?$

Из 1) и 3) получаем:

$2S = (v_1+v_2+v_3+v_4+v_6)\cdot 12$

$S = (v_1+v_3+v_5)\cdot 12$

Вычтем из первого второе:

4) $S = (v_2+v_4+v_6-v_5)\cdot 12$

Из 2) и 4) получаем:

$6S = (v_2+v_4+v_5+v_6)\cdot 60$

$5S = (v_2+v_4+v_6-v_5)\cdot 60$

Вычтем из первого второе:

$S = 120\cdot v_5 \Rightarrow v_5 = \frac{S}{120}$

Исходя из 3): $\left(v_1+v_2+\frac{S}{120}\right)\cdot 12 = S$

$\Downarrow$

$(v_1+v_2)\cdot 12 = \frac{9}{10}\cdot S$

$\Downarrow$

$(v_1+v_2)\cdot 4 = \frac{3}{10}\cdot S$

$\Downarrow$

$a = \frac{3}{10} = 30\%$

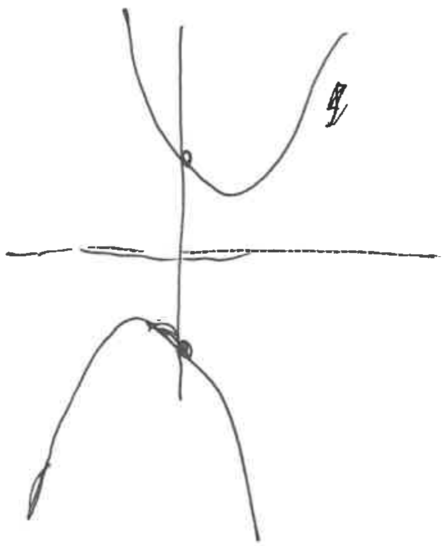
Ответ: 30%

Зс 0

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

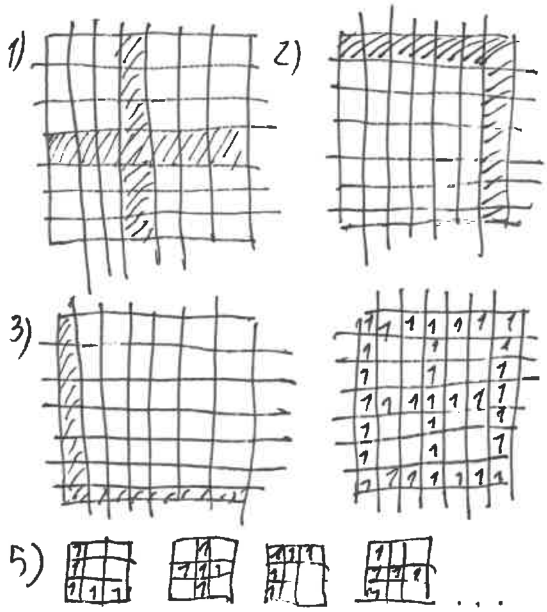
Рассмотрим эти функции:
Предположим что a и p одного знака, тогда исходя из того что у них нет корней получаем что и значения функций одного знака ⇒ f+g не уменьшается по модулю ⇒ у f+g не могло появиться новых корней. Противоречие ⇒ a и p разных знаков. Нарисуем их:



Понятно что при такой картинке f и g пересекают ось O_y в точках разных знаков, ~~а~~ а эти точки и есть c и r ⇒ c·r с ~~мин~~ минусом

Ответ: минус

№ 3



Очевидно что сумма в ~~квад~~ таблице (которая уже нарисована) всегда одинакова. ~~Дав~~ тогда убрав квадраты 3·3 сумма не поменяется. Расставим 4 квадрата 3·3, по разными способами (1), 2), 3)). Сумма в них одинакова (в закрашенных областях), и очевидно максимальная сумма будет тогда, когда они все будут заполнены 1-ми. Откуда получаем 4). Заметим что у нас есть квадраты 5 которых сумма точно не равна 0 (5), т.к в них ~~к~~ единиц больше чем оставшихся клеток

Вариант № ______ MA0001663022

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

6)

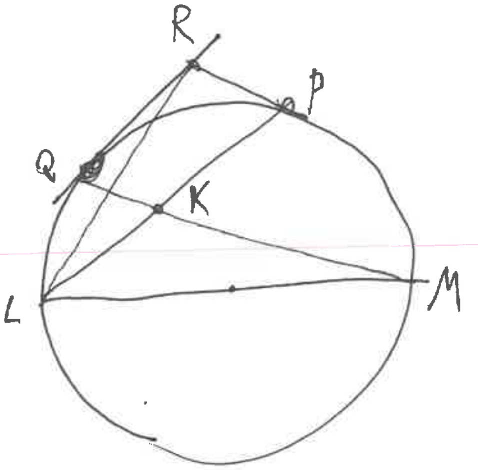
0	1	1	0	1	1	0
1			1			1
1			1			1
0	1	1	0	1	1	0
1			1			1
1			1			1
0	1	1	0	1	1	0

в таких квадратах должны появиться 0 $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ пример 7) и в нём сумма = 8

Ответ: 8

7)

0	1	1	0	1	1	0
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
0	1	1	0	1	1	0



№ 4

Доказать $RL \perp KM$

Док-во: $\angle LQM = 90°$ (опирается на диаметр) $\Rightarrow LQ \perp KM$, но при этом $LR \perp KM$ (предполагаем) $\Rightarrow$ LQ и LR одна прямая $\Rightarrow$ L, Q и R – на одной прямой. Но так как RQ – касательная у неё всего одна общая точка с окружностью $\Rightarrow$ L совпадает с Q. Но тогда мы получаем что QM – диаметр и $M = P$ $\Rightarrow$ касательные в точках Q и P – параллельны и R несуществует. Предположение неверно $\Rightarrow RL \not\perp KM$. (Надеюсь что я умею читать условие; но тогда получаем что $RL \not\perp KM$, может это имелось ввиду)

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 6 6 3 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

шоколадные
$14 \geq Ш \geq 3$
малиновые
$14 \geq М \geq 3$
апельсиновые
$12 \geq А \geq 2$

Всего в коробке 20 печений. Давайте для начала положим 2 Ш, 2 М и 1 А. Тогда нам осталось положить 15 печений!

. . . .

Будем выбирать сколько кого ложить по принципу: Ставим две перегородки между 2-мя точками. Всё что левее левой перегородки то кол-во Ш которое мы доложим к изнач. Всё что между левой и правой перегородкой то кол-во М которое мы доложим к изначальным. Оставшееся это А. Тогда наша задача превращается в: какое кол-во способов поставить 2 перегородки между 15 точками (сами собой перегородки не могут стоять между двумя одинаковыми точками). Ответ на эту задачу C_{14}^2, но так как у нас есть ограничение сверху для Ш, М и А, то у нас пропадают следующие случаи:

$|\cdot|$ . . . . $(A \geq 12)$

$\cdot|\cdot|$ . . . . $(A \geq 12)$

$\cdot|\cdot\cdot|$ . . . . $(A > 12)$

$\cdot|$ . . . . $|\cdot$ $(M > 14)$

. . . . $|\cdot|\cdot$ $(Ш > 14)$

Откуда получаем что ответ $C_{14}^2 - 5 = 86$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 9 | 9 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	6	~~4~~ 20	8	18	~~56~~ 72

Зачёт

Задача 1

Пусть труба наполняет x литров в час

→ тогда в бассейне всего $3x$ литров

2 трубы наполняют $2x$ литров в час

После полома (засора) трубы остается набрать

x литров

и скорость работы будет $\frac{3x}{2}$ литров в час

$$x : \frac{3x}{2} = \frac{2}{3} \text{ часа}$$

После засора трубы бассейн заполнить за 40 минут

Задача 2

$f(x) = x^2 + px + q$ $\quad D \geq 0 \Rightarrow p^2 - 4q > 0$

$g(x) = x^2 + (p - x_1)x + 2q$

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$g(x) = x^2 + \left(p + \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)x + 2q$$

Пусть $g(x)$ не имеет действительных корней, тогда

$$\left(\frac{3p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2 - 8q < 0$$

$$\frac{10p^2+6p\sqrt{p^2-4q}-4q}{4} < 8q$$

$$\begin{cases} 10p^2+6p\sqrt{p^2-4q}-4q < 32q \\ p^2 > 4q \end{cases}$$

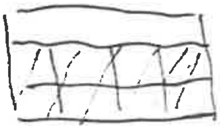
$$10p^2 > 40q$$

$$\begin{cases} 10p^2-4q > 36q \\ 10p^2-4q+6p\underbrace{\sqrt{p^2-4q}}_{\geq 0} < 32q \end{cases}$$

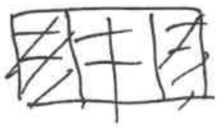
$\hookrightarrow$ противорение

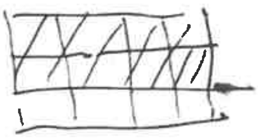
$\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow g(x)$ будет иметь корень ч.т.д.

Задача 5



2^8 способы



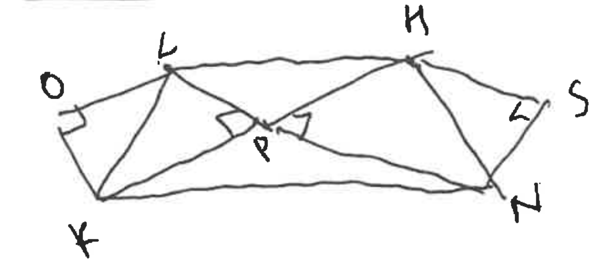


2^8 способов

$256+256+64-16-16-$

$-16+4=\underline{\underline{532}}$

Задача 4



$\angle LPK = \angle MLP = 90^\circ$

$\angle LPK + \angle HPN = \angle LPH$

$\angle LPH + \angle KPN = 180^\circ$

LOKP и SNPH прямоуг. $\Rightarrow$ NH и LK диагонали

$\Downarrow$

$\angle LKP = \angle HNP = 45^\circ$

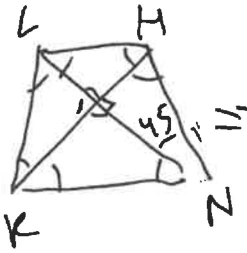
$\Downarrow$

$\angle LPH = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\angle KPN = 90^\circ$

LN и KM диагонали трапеции



$\Rightarrow \angle L = \angle H = \angle N = \angle K = 90^\circ \Rightarrow$ прямоуг.

$\Downarrow$

$LP = PN = HP = PK$

$\Downarrow$

$\triangle$ равны по 2 ст. и $\angle$

$\Downarrow$

$LK = LM = MN = KN$

$\Downarrow$

$LM + KN = MN + LK$

$\Leftrightarrow$ можно вписать.

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | МА000159 9822 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3

Пусть имеется 5 разных видов прямоугольников или более

Варианты разложения:

5 - 200 ✓
8 – 125
10 – 100 ✓
20 - 50
25 - 40
50 - 20
100 – 10
125 – 8
200 – 5 ← S
число прямоуг.

S раскладывается как:
200: 1·200, 2·100, 4·50, 5·40, 8·25, 10·20, ...
125: делители 1, 5, 25, 125 (меньше 5 видов прямоуг.)
100: 1·100, 2·50, 4·25, 5·20, 10·10
50: 1·50, 2·25, 5·10... (меньше 5 видов)
40: 1·40, 2·20, 4·10, 5·8 (меньше 5 видов)
20: 1·20, 2·10, 4·5 (меньше 5)
8: 1·8, 2·4 (меньше 5 в.)

Отсюда в разложении либо:
а) 5 прямоуг. S 200
б) 10 прямоуг. S 100
либо меньше прямоуг (5 различных)

Вариант а) 1·200, 2·100, 4·50, 5·40, 8·25, 10·20 (6 видов)
1. если есть прямоуг. 1·200 то длина исходного пр. не меньше 200
тогда пр. 8·25, 10·20 ~~вся~~ не влезут
Т.е не более 4 различных прямоу. в этом варианте

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | МА 0 0 0 1 5 9 9 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. если нет прямоуг. 1·200, но есть все остальные 5 видов
тогда длина исходного пр. не меньше 100, ширина не меньше 10, т.е. исходный 10·100, но 2·100 и 10·20 в нем одновременно не расположены

вариант б)

разложение 1·100, 2·50, 4·25, 5·20, 10·10
длина исходного не меньше 100, а ширина не меньше 10, если есть все 5 видов, но одновременно в прямоуг. 10·100 не располож. 1·100 и 10·10

Поэтому не может быть 5 различ. видов. прямоуг. или больше

может быть 4. Пример:

25·40: ↑1·40 до верха
2·20
тут 4·10
прямоуг. 5·8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Якутск, СВФУ

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	8	2	9	0	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Матвеева

Имя Елизавета

Отчество Андреевна

Дата рождения 27.05.2005 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.22.

Номер телефона 89248664597 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00018290 22

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. номер члена жюри: 1 2 3 4 5 6
обозначение: a b c d e f

пусть их обозначения будут показывать их скорость проверки работ в $\frac{\text{(все работы)}}{\text{день}} = \frac{1}{\text{день}}$

обозначим „все работы“ как 1.

тогда по условию:

нужно найти $4(a+c)$.

За 1

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

$$\begin{cases} a+b+c+d+f=\frac{1}{6} \\ b+d+e+f=\frac{1}{10} \\ a+c+e=\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$e=\frac{1}{10}-b-d-f$$

$$+\begin{cases} a+c+\frac{1}{10}-b-d-f=\frac{1}{12} \\ a+b+c+d+f=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$2a+2c+\frac{1}{10}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$$

$$2(a+c)=\frac{1}{12}^{\backslash 5}+\frac{1}{6}^{\backslash 10}-\frac{1}{10}^{\backslash 6}$$

$$2(a+c)=\frac{5+10-6}{60}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20} \quad |\cdot 2$$

$$4(a+c)=\frac{3}{10} \implies \frac{3}{10}\cdot 100\%=30\%$$

Ответ: 30%.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 2 9 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. $f = ax^2+bx+c$, $g = px^2+qx+r$

$D = b^2-4ac<0$ $\qquad D = q^2-4pr<0$

$f+g = ax^2+bx+c+px^2+qx+r =$

$= (a+p)x^2+(b+q)x+c+r$

$D = (b+q)^2-4(a+p)(c+r) =$

$= b^2+2bq+q^2-4ac-4pr-4ar-4pc \geq 0$

$b^2-4ac+q^2-4pr+2bq-4ar-4pc \geq 0$

$b^2-4ac+q^2-4pr<0$

т.к. сумма отриц. чисел = отриц. числу.

тогда $\cancel{2bq-4ar-4pc \geq 0}$ $\qquad \cancel{2bq \neq 4(ar+pc)}$

$\cancel{bq > 2(ar+pc)}$

~~если~~ $\cancel{(ar+pc)>0}$

~~то~~

$2bq-4ar-4pc \geq 0$

$-4ar-4pc \geq 0$

$-4(ar+pc) \geq 0$

$ar+pc \leq 0$

$\begin{cases} ac>0 \\ pr>0 \end{cases}$

1) $a>0, c>0, p>0, r>0$

$ar+pc>0$ $\varnothing$

2) $a>0, c>0, p<0, r<0$

$ar+pc \leq 0$

$c \cdot r = \ominus$

3) $a<0, c<0, p<0, r<0$

$ar+pc>0$ $\varnothing$

4) $a<0, c<0, p>0, r>0$

$ar+pc<0$

$c \cdot r = \ominus$

Ответ: отрицательный

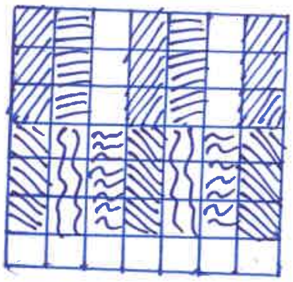
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 2 9 0 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.



т.к сумма чисел в любом квадрате $3 \times 3 = 0$
сумма чисел в прямоугольнике 3×1 равна сумме чисел в другом прямоугольнике 3×1, который находится через прямоугольник 3×2 (остаток квадрата образует новый квадрат)

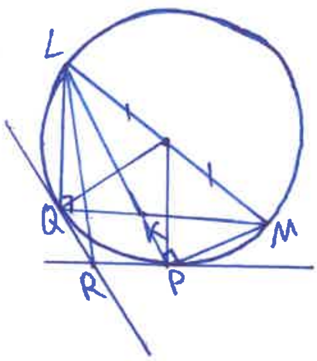
Рассмотрим прямоугольник 6×7 максимальная сумма в этом прямоугольнике $= 6$, если в прямоугольниках  и  стоят числа 1

Если мы рассмотрим такой же прямоугольник 6×7, но с другой стороны, максимальной суммой этого прямоуг. также будет $= 6$.

Следует, что максимальная сумма квадрата 7×7 будет сумма максимальных сумм этих прямоугольников -5, т.к у них совпадают 5 строк $\Rightarrow 6+6-5=7$

Ответ: 7

4.



Пойдем от обратного:
$\angle LQM = \angle LPM = 90^\circ$ (опираются на диаметр)
получается $LQ \perp MK = Q$
т.к. $Q \in MK$

Если $LR \perp MK$, то $Q \in LR$
и $LR \perp MK = Q$
т.к из точки к прямой может быть опущен только 1 перпендикуляр

но QR – касательная окружности с диаметром LM, значит должна пересекаться с окружностью только в 1 точке и это точка Q, а при $LR \perp MK$ QR пересекает окружность в двух точках – Q и L – противоречие,
а значит LR не может быть перпендикулярна KM.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0001829022

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5. шоколадные – ш
мятные – м
апельсиновые – а

в каждой коробке
$3 \le ш \le 14$
$3 \le м \le 14$
$2 \le a \le 12$
(~~[illegible]~~ должно быть 20)

т.к шоколадных может быть от 3 до 14:

3ш: $5 \le м \le 14$, $3 \le a \le 12$

4ш: $4 \le м \le 14$, $2 \le a \le 12$

5ш: $3 \le м \le 13$, $2 \le a \le 12$

6ш: $3 \le м \le 12$, $2 \le a \le 11$

7ш: $3 \le м \le 11$, $2 \le a \le 10$

8ш: $3 \le м \le 10$, $2 \le a \le 9$

9ш: $3 \le м \le 9$, $2 \le a \le 8$

10ш: $3 \le м \le 8$, $2 \le a \le 7$

11ш: $3 \le м \le 7$, $2 \le a \le 6$

12ш: $3 \le м \le 6$, $2 \le a \le 5$

13ш: $3 \le м \le 5$, $2 \le a \le 4$

14ш: $3 \le м \le 4$, $2 \le a \le 3$

10в + 11в + 11в + 10в + 9в + 8в + 7в + 6в + 5в + 4в + 3в + 2в =
= 86 вариантов

Ответ: 86 вариантов различных наборов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск
дрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	9	3	4	1	2	2

Шифр

илия Алексеев **Вариант №** 1

Владислав

тво Алексеевич

ождения 17.05.2005

т Математика **Класс** 10

ыполнена на 5 листах

ефона 89504304929 **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Подпись [signature]

и фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения,
о телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату
работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	9	3	4	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Зот

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	20	80

числа p, q, r - ненулевые.

$q-p=d$; $r-q=d$.

$px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$.

$q=p+d$.

$r=p+d+d=p+2d$.

$px^2+2\sqrt{2}(p+d)x+(p+2d)=0$.

$D=(2\sqrt{2}(p+d))^2-4p(p+2d)$

$D=8(p^2+2pd+d^2)-4p^2-8pd$.

$D=8p^2+16pd+8d^2-4p^2-8pd$.

$D=4p^2+8pd+8d^2$

$D=4(p^2+2pd+2d^2)$

$D=4(p^2+2pd+d^2+d^2)$

$D=4((p+d)^2+d^2)$.

Т.к. $p\neq 0$ и $d\neq 0$ (арифм. прогрессия), то $(p+d)^2\geq 0$ и $d^2>0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (p+d)^2+d^2>0 \Rightarrow 4((p+d)^2+d^2)>0. \Rightarrow D>0 \Rightarrow$ уравнение имеет два решения.

Доказано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	9	3	4	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Т.к. возрастание идёт слева направо и снизу вверх, то в ~~нью~~ самой правой верхней клетке будет находиться 100

	8	9	10
1			100
2			
3			

Найдём наибольшее возможное значение для верхней клеточки 6 столбца.

	6	7	8	9	10
1	96	97	98	99	100
2					
3					

в данном случае эти числа-максимальные для возрастания вниз → вверх. Также они расположены по возрастанию слева → направо.

Найдём наибольшее возможное значение для 2 строки; 6 столбца. Это не может быть 95; 94; 93; 92, т.к. в таком случае, не получится установить по возрастанию. 2 строку; столбцы 6-10.

	6	7	8	9	10
1	96	97	98	99	100
2	92	93	94	95	?
3					

Поэтому в строке 2; столбце 6 находится 91.

	6	7	8	9	10
1	96	97	98	99	100
2	91	92	93	94	95
3					

Аналогично, получаем такой столбец:

	6
1	96
2	91
3	86
4	81
5	76
6	71
7	66
8	61
9	56
10	51

$S = 96+91+86+81+76+71+66+61+56+51 = 735.$

Ответ: $S = 735.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	9	3	4	1	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

① V_{1-5} – производительность труда 1-5 члена псюрии (раб/ч.)

S – общее количество работ

② $20(V_1+V_2+V_4)=S$

$V_1+V_2+V_4=\frac{1}{20}S$

$15(V_2+V_3+V_5)=S$

$V_2+V_3+V_5=\frac{1}{15}S$

③ $+ = V_1+V_3+V_4+V_5+2V_2=\frac{1}{20}S+\frac{1}{15}S$

$10(V_1+V_3+V_4+V_5)=S$

$V_1+V_3+V_4+V_5=\frac{1}{10}S$ раб/ч. ~~10 часов~~

④ $V_1+V_3+V_4+V_5+2V_2=\frac{7}{60}S$ раб/ч.

С другой стороны,

$V_1+V_3+V_4+V_5+2V_2-2V_2=\frac{1}{10}S$ раб/ч.

$\frac{7}{60}S-2V_2=\frac{1}{10}S$

$-2V_2=\frac{1}{10}S-\frac{7}{60}S$

$-2V_2=\frac{6}{60}S-\frac{7}{60}S$

$-2V_2=-\frac{1}{60}S \mid\cdot(-1)$

$2V_2=\frac{1}{60}S$

$V_2=\frac{1}{60}S:2$

$V_2=\frac{1}{120}S$ раб/ч.

$V_1+V_2+V_3+V_4+V_5=$

$=\frac{1}{10}S+\frac{1}{120}S=\frac{12}{120}S+\frac{1}{120}S=\frac{13}{120}S$

⑤ $\frac{1}{120}S=V_2$

⑥ $V_2t_2=S \quad t_2=\frac{S}{V_2}=$

$=\frac{S}{\frac{1}{120}S}=120$ ч.

⑦ $V_1+V_2+V_3+V_4+V_5=\frac{13}{120}S$

⑧ $V_{1-5}\,t_{1-5}=S \Rightarrow t_{1-5}=\frac{120}{13}$ ч.

~~$V_2=\frac{1}{120}S \Rightarrow t_2=120$ ч.~~

~~$V_1+V_2+V_3+V_4+V_5=\frac{1}{10}+\frac{1}{120}=\frac{12+1}{120}=\frac{13}{120}S \Rightarrow t_{1-5}=\frac{120}{13}$ ч.~~

⑨ $t_2>t_{1-5}$

⑩ $\frac{t_2}{t_{1-5}}=120:\frac{120}{13}=$

$=120\cdot\frac{13}{120}=13$ раз.

~~$\frac{V_1+V_2+V_3+V_4+V_5}{V_2}=1+\frac{V_1+V_3+V_4+V_5}{V_2}=1+\frac{\frac{1}{10}S}{\frac{1}{120}S}$ за час $=1+\frac{1}{10}:\frac{1}{120}=1+\frac{1}{10}\cdot 120=1+12=13$~~

~~Ответ: в 13 раз.~~

Ответ: в 13 раз.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 9 3 4 1 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Рассмотрим случаи, когда фисташек ~~мало~~. ~~либо~~ 5, 12 ~~или~~ 11.

ф	в	к
12	5	3
12	4	4
12	3	5
12	2	6

ф	в	к
11	6	3
11	5	4
11	4	5
11	3	6
11	2	7

ф	в	к
5	12	3
5	11	4
5	10	5
5	9	6
5	8	7
5	7	8
5	6	9
5	5	10
5	4	11
5	3	12
5	2	13

При ф. от 12 до 5 кол-во вариантов возрастает на один. То есть, всего $4+5+6+7+8+9+10+11 = 60$ вариантов. Так происходит из-за того, что не был достигнут ни один из максимальных порогов для в или к. Но для ф-4 уже достигнут макс. порог для в, поэтому для него кол-во вариантов не изменится. (мин. к увел. с 3 до 4). => 71 вариант.

ф	в	к
4	12	4
4	11	5
4	10	6
4	9	7
4	8	8
4	7	9
4	6	10
4	5	11
4	4	12
4	3	13
4	2	14

Из-за достигнутых макс. порогов для в и к при ф от 3 до 2 кол-во вариантов ~~будет снижаться~~ снизится на один, начиная с 10 при ф-3 (будет. увел. ~~мин к~~) мин к и в)

ф	в	к
3	12	5
3	11	6
3	10	7
3	9	8
3	8	9
3	7	10
3	6	11
3	5	12
3	4	13
3	3	14

ф	в	к
2	12	6
2	11	7
2	10	8
2	9	9
2	8	10
2	7	11
2	6	12
2	5	13
2	4	14

~~ф в к~~

⇓

$71 + 19 = 90$ вариантов

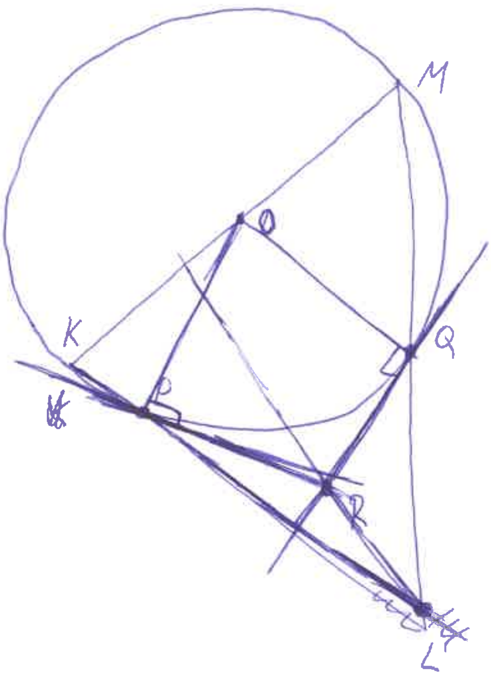
Ответ: 90 вариантов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 9 3 4 1 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Дано:

Окр(O; r).

остроугольный треугольник KLM

KM - диаметр.

QR и PR - касательные.

R - точка пересечения касательных.

Доказать, что $LR \perp KM$.

Доказательство:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	8	2	9	7	2	2

Адрес площадки проведения ______________ Шифр

Вариант № ________

Фамилия ТОЛМАЧЕВА

Имя ЕЛИЗАВЕТА

Отчество ДЕНИСОВНА

Дата рождения 15.10.2005 Класс 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 листах Дата выполнения работы 12.03.22

Номер телефона 89632570883 Подпись ______

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______

M	A	0	0	0	1	8	2	9	7	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
16	20	20	20	0	76

30А

1) $S = vt$

пусть S – объем бассейна ; $S = 1$.

$v_{тр} = \frac{S}{t} = \frac{1}{3}$

тогда за 1 час 2 трубы заполнят $S_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$

со 2го часа

$v_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$v = v_{тр} + v_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$S_{оставш} = S - S_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$t_{оставш} = \frac{S_{оставш}}{v} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}ч = 40 мин.$

$t_{общ} = 1ч + 40 мин$

Ответ: 1 час 40 минут

2) $f(x) = x^2 + px + q$

имеет 2 корня => по т. Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$

$\Downarrow$

$p = -x_1 - x_2$

$x^2 + (p - x_1)x + 2q =$

$= x^2 + (-x_1 - x_2 - x_1)x + 2x_1x_2$

$= x^2 + (-x_2 - 2x_1)x + 2x_1x_2$

Если уравнение имеет хотя бы 1 корень, то $D \geq 0 \Rightarrow (-x_2 - 2x_1)^2 - 8x_1x_2 \geq 0$

и правда, $x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1^2 - 8x_1x_2 \geq 0$,

т.к. $x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1^2 = (x_2 - 2x_1)^2 \geq 0$

кв-т. разности чисел ≥ 0.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 2 | 9 | 7 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

3) $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; $1000 = 1000 \cdot 1 = 2 \cdot 500 = 4 \cdot 250 = 5 \cdot 200 = 8 \cdot 125 = 100 \cdot 10 = 20 \cdot 50 = 25 \cdot 40$

S прямоугольников $= a \cdot b$, где $a = 2^n \cdot 5^k$, $b = 2^l \cdot 5^m$

т.к. если будет какой-либо другой делитель, в сумме площади не смогут быть равны 1000.

$n, k, m, l \in [0; 3] \Rightarrow$ всего $4 \cdot 4 = 16$ вариантов:

$S = 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 25; 40; 50; 100; 125; 200; 250; 500; 1000$

Рассмотрим, как можно получить каждую из них:

$1 = 1 \cdot 1$; 1 вар-т; n в прямоуг-ке $= \frac{1000}{1} = 1000$

$2 = 2 \cdot 1$; 1 вар-т; $n = 500$

$4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$; 2 вар-та; $n = 250$

$5 = 5 \cdot 1$; 1 вар-т; $n = 200$

$8 = 2 \cdot 4 = 1 \cdot 8$; 2 вар-та; $n = 125$

$10 = 2 \cdot 5 = 1 \cdot 10$; 2 вар-та; $n = 100$

$20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 1 \cdot 20$; 3 вар-та; $n = 50$

$25 = 5 \cdot 5 = 25 \cdot 1$; 2 вар-та; $n = 40$

$40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40 \cdot 1$; 4 вар-та; $n = 25$

$50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10 = 50 \cdot 1$; 3 вар-та; $n = 20$

$100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10 = 100 \cdot 1$; 5 вар-тов; $n = 10$

$125 = 5 \cdot 25 = 125 \cdot 1$; 2 вар-та; $n = 8$

$200 = 2 \cdot 100 = 4 \cdot 50 = 5 \cdot 40 = 8 \cdot 25 = 10 \cdot 20 = 200 \cdot 1$; 6 вар-тов; $n = 5$

т.к. в 9 сл. $n = 5$, т.е. > 5 пр-ков не может быть, вар-тов тоже 5. Аналогично при 250 $n = 4$; при 500 $n = 2$; при 1000 $n = 1$.

Значит пока что max. кол-во вариантов = 5. Но стоит заметить что в данных случаях ~~есть~~ (200, 100) обязательно будут присутствовать прямоугольники $x \cdot 100$ ($x \cdot 200$) и $y \cdot 10$, что одновременно невозможно, ведь если есть 100 столбцов ~~[illegible]~~ то строк $\frac{1000}{100} = 10$, а одна уже занята,

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

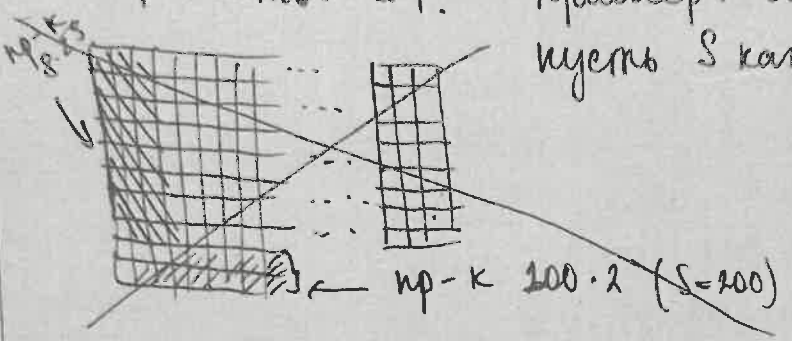
Вариант № ______ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 2 | 9 | 7 | 2 | 2 |

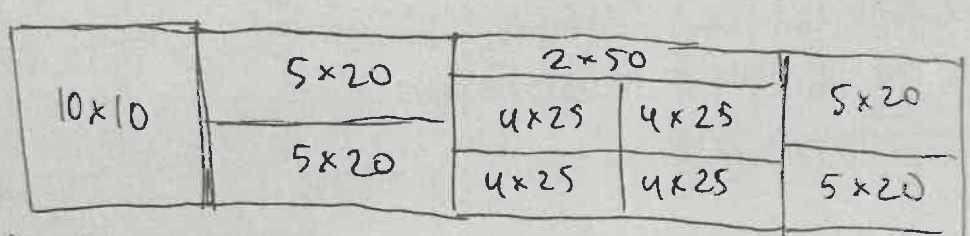
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

значит фигура $y \cdot 10$ $(y \geq 10)$ не поместится.

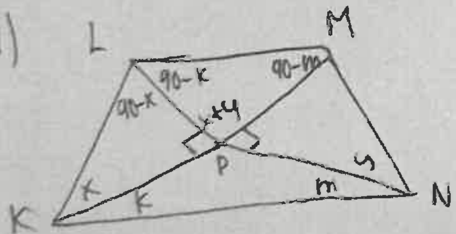
вариантов ≤ 4. Пример: дан пр-к $100 \cdot 10$ (1000 клеток)
пусть S кажд $=$ 100





Ответ: 4.

4)



Дано: $LM \parallel KN$; $\angle LPK = \angle MPN = 90$
$\angle PKL + \angle PNM = \angle LPM$
Док-ть: в $KLMN$ впис. окр.
Док-во: 1) пусть $\angle PKL = x$; $\angle PNM = y$
тогда $\angle LPM = x+y$.

2) пусть $\angle PKN = k$; $\angle PNK = m$.

3) в $\triangle KLP$ $\angle KLP = 90 - x$; аналогично $\angle PMN = 90 - y$.

4) т.к. $LM \parallel KN$, $\angle L + \angle K = 180^\circ \Rightarrow \angle MLP = 180 - 90 + x - x - k = 90 - k$
аналогично, $\angle LMP = 90 - m$

5) в $\triangle LPM$ $180 = x + y + 90 - k + 90 - m$
$180 = 180 + x + y - k - m$
$x + y = k + m = \frac{180}{2}$
$\Downarrow$
$x + y = k + m = 90$
$\Downarrow$
L, P, N и K, P, M на одной прямой.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ MA000182972 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

6) Значит P – точка пересечения диагоналей; диагонали пересекаются под прямым углом

7) $x+y=90$

$x=90-y$

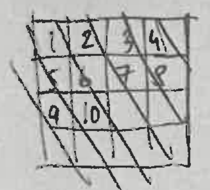
тогда $\angle KLP = 90-90+y=y$

8) получаем накрест лежащие равные углы $\Rightarrow KL \parallel MN$

9) KLMN – пар-м, у котор диагонали пересек под прямым углом $\Rightarrow$ KLMN – ромб $\Rightarrow$ все стороны равны $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ сумма противоположных сторон равна $\Rightarrow$ можно вписать окр-ть

ч.т.д.

5)



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Т.к. условие не могут выполнятся одновременно: 1) незакр. 1 строка

⇓

должны быть закр. (N6 или N7) и (N9 или N10 или N11 или N12) либо только ~~[illegible]~~ (N10 или/и N11)

2) незакр. посл. строка: зеркально ↑ отн-но 2 строки.

3) незакр. столбцы $\Rightarrow$ закр (N1 или N4) и (N9 или N12)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ, Красноярск

Адрес площадки проведения

Шифр: М А 0 0 0 1 5 6 2 8 2 2

Фамилия Спрыжков **Вариант №** 2

Имя Тимофей

Отчество Сергеевич

Дата рождения 19.09.2005

Предмет Математика **Класс** 10

Работа выполнена на 5 **листах**

Номер телефона +79048988695 **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Подпись [подпись]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	5	6	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	2	82

Дано:

$I+II+III+IV+VI$ - за 6 дней

$II+IV+V+VI$ - за 10 дней

$I+III+V$ - за 12 дней

(I, II, III, IV, V, VI - члены жюри по порядку с 1(I) до 6(VI))

Найти:

Какой % был проверен I и III членами жюри за 4 дня?

Решение:

1. Т.к. при совместной работе производительности складываются, то:

$P_1 = P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_{VI}$

$P_2 = P_{II} + P_{IV} + P_V + P_{VI}$

$P_3 = P_I + P_{III} + P_V$

2. Из условия следует (если взять всю работу равную 1), что $P_1 \cdot 6 = P_2 \cdot 10 = P_3 \cdot 12 = 1 \Rightarrow$

$P_1 = \frac{1}{6}$; $P_2 = \frac{1}{10}$; $P_3 = \frac{1}{12}$

3. $\begin{cases} P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_{VI} = \frac{1}{6} \\ P_{II} + P_{IV} + P_V + P_{VI} = \frac{1}{10} \\ P_I + P_{III} + P_V = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow$

$P_I + \cancel{P_{II}} - \cancel{P_{II}} + P_{III} + \cancel{P_{IV}} - \cancel{P_{IV}} - P_V + \cancel{P_{VI}} - \cancel{P_{VI}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$

$\begin{cases} P_I + P_{III} - P_V = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \\ P_I + P_{III} + P_V = \frac{1}{12} \end{cases}$

$2(P_I + P_{III}) = \frac{1}{15} + \frac{1}{12}$

$2(P_1 + P_{III}) = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \;\Big|\; :2$

$P_I + P_{III} = \frac{3}{40} \;\Big|\; \cdot 4$ (дня)

$4(P_I + P_{III}) = \frac{3}{10} = 0,3$

Значит, за 4 дня I и III члены жюри проверят 0,3 всех работ или же 30% всех работ.

Ответ: 30%

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 5 6 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2

Дано:

$f=ax^2+bx+c$, $g=px^2+qx+r$ — не имеют корней ($D<0$)

$f+g$ — трёхчлен, имеющий корни

Найти:

Знак произв-я $c\cdot r$ — ?

Решение:

1. Если ax^2+bx+c и px^2+qx+r не имеют корней, то $\begin{cases} b^2<4ac \\ q^2<4pr \end{cases} \Rightarrow b^2+q^2<4ac+4pr$

т.к. $b^2, q^2>0$, то $\begin{cases} ac>0 \\ pr>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c}>0 \\ \frac{p}{r}>0 \end{cases}$

Перемножим обе части нерав-ва:

$(bq)^2<16apcr$

2. $f+g=(a+p)x^2+(q+b)x+(r+c)=0$

$D=(b+q)^2-4(a+p)(r+c)=$

$=b^2+q^2+2bq-4ar-4ac-4pr-4pc>0$

$0>b^2+q^2-4ac-4pr>4ar+4pc-2bq \Rightarrow$

$4ar+4pc-2bq<0 \mid :2$

$2ar+2pc<bq$

$2cr\left(\frac{a}{c}+\frac{p}{r}\right)<bq$

3. Если $cr>0$, то ~~неравенство верное~~ значит $bq>0$

Смело возводим в квадрат, т.к. обе части >0

$4(ar+pc)^2<(bq)^2<16apcr \mid :4$

$a^2r^2+p^2c^2+2apcr<4apcr$

$a^2r^2+p^2c^2-2apcr<0$

$(ar-pc)^2<0$ — неверно $\Rightarrow cr<0$

Ответ: $cr<0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	5	6	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

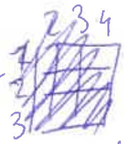
Задача 3

Дано:
таблица 7×7
числа (−1), 0, 1
В каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0

Найти:
наиб знач. суммы всех чисел в таблице − ?

Решение:

строка \ ряд	1	2	3	4
1	a	b	c	a
2	d			d
3	$\tilde{e}$			$\tilde{e}$
4	a	b	c	

Рассмотрим такую конструкцию
Если в первом (n-ом) ряду первые 3 числа - a, d, $\tilde{e}$, то в четвёртом ((n+3)-ем) ряду обязательно a, d, $\tilde{e}$, для того, чтобы при сдвиге квадрата 3×3 с  на  и любое кол-во клеток вниз/вверх, вправо/влево (в пределах 7×7) сохранялась сумма 0. ⇒ так же работает и со строками

⇒ наш квадрат 7×7 имеет вид

a	b	c	a	b	c	a
d			d			d
$\tilde{e}$			$\tilde{e}$			$\tilde{e}$
a	b	c	a	b	c	a
d			d			d
$\tilde{e}$			$\tilde{e}$			$\tilde{e}$
a	b	c	a	b	c	a

В выделенных непересек-ихся квадратах, сумма чисел =0, значит на сумму чисел влияют только крайние клетки. Их 13 штук. Если их всех заместить единицами, то $a+b+c+d+\tilde{e}=5$. В квадратах мы оставляем по 4 пустых клетки, и 4 минус единицы 5-ку не перебьют ⇒ от одной единицы в каждом квадрате надо избавиться (допустим, $\tilde{e}\neq 1$), тогда, для макс. суммы, $\tilde{e}=0$ ⇒ Сумма будет $13-2=11$

Ответ: 11

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	5	6	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5

Дано: в коробке - 20шт

3сорта - шоколадные
малиновые
апельсиновые

Кол-во ~~шоколадных~~/малиновых ~~apogo~~ - не менее 3 и не более 14

Кол-во апельсиновых - не менее 2-х и не более 12

Найти:

макс. кол-во различных наборов - ?

Решение:

Для начала, положим в коробку по минимальному кол-ву печенья каждого вида: 2апельсиновых, 3малиновых и 3 шоколадных. Осталось 12 штук доложить. Теперь смотрим апельсиновых можно положить ещё максимум 10, шоколадных и малиновых - по 11. Если бы не было этих ограничений сверху, то кол-во вариантов было бы 3^{12}. Теперь вычтем кол-во запрещённых вариантов: имеется ввиду доложить

1) кол-во вариантов, когда ещё 11 апельсиновых: 2 вар.

2) кол-во вариантов, когда ещё 12 апельсиновых: 1 вар.

3) кол-во вариантов, когда ещё 12 шок. - 1 вар.

4) кол-во вариантов, когда ещё 12 мал. - 1 вар.

итого 5 невозможных вар-тов

$3^{12} = \cancel{\ldots} 531441 \Rightarrow 3^{12} - 5 = \cancel{\ldots} 531436.$

Ответ: ~~...~~ 531436.

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	5	6	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4

Дано:

$\triangle KLM$

$\angle LKM > 90°$ ~~(…)~~

LM - диам. окр-ти

окр-ть $\cap LK = P$

окр-ть $\cap MK = Q$

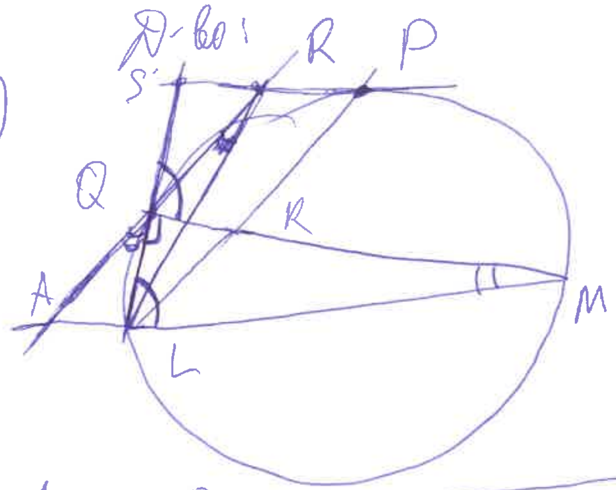
через P и Q - касат. (PR и QR)

$PR \cap QR = R$

Д-ть:

$LR \perp KM$

Д-во:



1. Д.п. $LQ \cap PR = S$, $LM \cap QR = A$

2. $\angle SQM = \frac{1}{2} \cup QM = \angle QLM$

3. $QM \parallel LM$, т.к. $\angle SQM = \angle QLM$ как соотв. при сек. SL

Более того, из-за пересечения в т. M, $KM \equiv LM$

$\Rightarrow \angle QML = 0° \Rightarrow \angle AQL = \frac{1}{2} \cup QL = \angle QML = 0°$

4. Угол между прямыми AR и $SL = 0°$, $AR \cap SL = Q$ $\Rightarrow AR \equiv SL \Rightarrow R \in SL \Rightarrow$

$RL \equiv SL$.

5. $\angle LQM = 90°$, т.к. опирается на диаметр $LM \Rightarrow$

$SL \perp KM \Rightarrow RL \perp KM$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	6	0	3	5	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия АХУНДЖАНОВ

Имя СЕМЁН

Отчество ВАДИМОВИЧ

Дата рождения 01.12.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 06.03.22

Номер телефона +79051052600 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

30%

1	2	3	4	5	Σ
20	20	2	20	20	82

№1

Пусть первый проверял a работ в день, второй b работ, третий – c, четвертый – d, пятый – e, шестой – f. Тогда:

$$\begin{cases} 6a+6b+6c+6d+6f=x \ (1) \\ 10b+10d+10e+10f=x \ (2) \\ 12a+12c+12e=x \ (3) \end{cases}$$ где x – общее кол-во работ.

Найти же нужно отношение $\frac{4a+4c}{x}$ – ? (4)

Из (2) $\Rightarrow$ $10e=x-10(b+d+f)$. Из (1) $\Rightarrow$ $6(b+d+f)=x-6(a+c)$

Домножив на $1\frac{2}{3}$ получим: $10(b+d+f)=1\frac{2}{3}x-10(a+c)$.

Подставив в (2) получаем: $10e=10(a+c)-\frac{2}{3}x \,\Big|\cdot\frac{12}{10}$

$12e=12(a+c)-\frac{4}{5}x$; ~~$\frac{4}{5}x=12(a+c)$~~. Подставим в (3)

$12a+12c+12(a+c)-\frac{4}{5}x=x$; $24a+24c=\frac{9}{5}x$;

$x=\frac{120(a+c)}{9}$. Подставляем в (4), получаем $\frac{4(a+c)}{\frac{120(a+c)}{9}}=$

$=\frac{36}{120}=\frac{6}{20}=0{,}30$; $0{,}3\cdot100\%=30\%$

Ответ: 30%

№2

$f=ax^2+bx+c$; $g=px^2+qx+r$. Заметим что a и p не могут быть одного знака, т.к. если a и p больше 0, и по ~~условую~~ условию f и g

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 3 | 5 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

не имеют корни, то $f+g>0$ при любых, следовательно, не будут иметь корней. Аналогично если и $p<0$.
Значит a и p разного знака. Пусть $a>0$ $p<0$.
Так как c и r показывают, где f и g пересечет ось Ox, то c и r совпадают по знакам c и p соответственно. тогда $cr<0$

Ответ. $c \cdot r<0$

№5

Для удобства примем, что мандарины ложили поочередно, сначала шоколадные, потом малиновые потом апельсиновые. I. положили 3 шоколадные, тогда малиновых положили от 5 до 14, т.е чтоб количество апельсиновых было не менее 3 но не более 12. Тогди вариантов в этом случае $14-5+1=10$. Аналогично рассуждая, получаем.
при 4: $14-4+1=11$; при 5: ~~3+~~ $13-3+1=11$
при 6: $12-3+1=10$; при 7: $11-3+1=9$; при 8:
$10-3+1=8$; при 9: $9-3+1=7$; при 10: $8-3+1=6$;
при 11: $7-3+1=5$; при 12: $6-3+1=4$; при 13: $5-3+1$;
при 14: $4-3+1=2$. Тогда всего вариантов:
$10+11+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2=86$

Ответ: 86

Лист 2 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 6 0 3 5 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

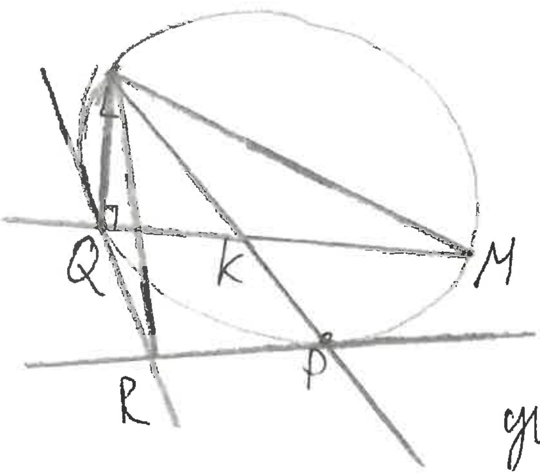
В любых 4 квадратах 3×3 сумма цифр равна нулю. Их площадь будет равна 36, а площадь большого 49. Тогда количество свободных единиц будет равно $\cancel{\frac{49}{36}}$ $\frac{49-36+1}{2}=7$.

Пример

1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1

Ответ: 7

№4



Задача не имеет ~~смысла~~ решения, т.к. $\angle LQM = 90°$, т.к. опирается на ~~радиус~~ диаметр, и получается что из точки L можно провести два перпендикуляра на KM, что невозможно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ул Ленина д. 16

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	1	5	8	6	8	2	2

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Мамаев

Имя ДМИТРИЙ

Отчество Евгеньевич

Дата рождения 05. 11. 2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 05. 03. 2022

Номер телефона 79123949496 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	5	8	6	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Обозначим скорость проверки каждого участника.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	20	80

a – скорость 1-го

b – скорость 2-го

c – скорость 3-го

~~k~~d – скорость 4-го

e – скорость 5-го

А работу, проделанную всеми возьмем за 1.

$\frac{1}{a+b+d}=20 \qquad a+b+d=\frac{1}{20}$

$\frac{1}{b+c+e}=15 \qquad b+c+e=\frac{1}{15}$

$\frac{1}{a+c+d+e}=10 \qquad a+c+d+e=\frac{1}{10}$

$(a+b+d)+(b+c+e)=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=\frac{7}{60}=a+2b+d+c+e$

$(a+2b+d+c+e)-(a+c+d+e)=\frac{7}{60}-\frac{1}{10}=\frac{1}{60}=2b$

$b=\frac{1}{120}$ – скорость 2-го

$(a+c+d+e)+b=\frac{1}{10}+\frac{1}{120}=\frac{13}{120}=a+b+c+d+e$

$(a+b+c+d+e):b=\frac{13}{120}:\frac{1}{120}=13$ – во столько раз быстрее будет выполнена проверка всеми членами жюри по сравнению с проверкой работы только вторым

Ответ: в 13 раз

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 8 | 6 | 8 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$p\neq0, q\neq0, r\neq0.$

p, q, r – последовательные члены арифметической прогрессии.

$px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$

$D=(2\sqrt{2}q)^2-4rp=8q^2-4pr$

Чтобы уравнение имело два решения, нужно чтобы $D>0$

$8q^2-4pr=4(2q^2-rp)$

$2q^2-pr>0$

~~Везде~~ Представим p

$p=(q-d)$, $r=(q+d)$, где d – это шаг арифметической прогрессии.

$2q^2-(q-d)(q+d)=2q^2-(q^2-d^2)=q^2+d^2$

q^2+d^2 – всегда положительное число, т.к. $p\neq0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D>0$ – всегда $\Rightarrow$ поэтому уравнение имеет два решения.

№3.

Чтобы выполнялось условие, что числа идут в порядке возрастания слева направо и снизу вверх, нужно число 1 поставить в левую нижнюю клетку, а 100 в правую верхнюю клетку.

Также чтобы сумма шестого

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 5 8 6 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

столбца была максимальна, нужно число 50 поставить в верхнюю клетку пятого столбца. Таблица будет выглядеть так:

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

Чтобы сумма была максимальной, нужно также заполнять слева направо, как показано в таблице.
Тогда в шестом столбце будут следующие числа: 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96

И сумма будет равняться 735

Ответ: 735 - наибольшее значение суммы шестого столбца.

№5.

Можно составить следующие наборы:

фисм.	ваниль.	карамель
3	3	14
4	2	14
2	4	14
3	4	13
4	3	13
2	5	13
5	2	13
4	4	12
5	3	12
3	5	12
6	2	12
2	6	12
5	4	11
4	5	11

фисм.	ваниль.	карамель
6	3	11
3	6	11
7	2	11
2	7	11
5	5	10
6	4	10
4	6	10
7	3	10
3	7	10
8	2	10
2	8	10
6	5	9
5	6	9
7	4	9
4	7	9
8	3	9
3	8	9
9	2	9
2	9	9

фисм.	ваниль.	карамель
6	6	8
7	5	8
5	7	8
8	4	8
4	8	8
9	3	8
3	9	8
10	2	8
2	10	8
7	6	7
6	7	7
8	5	7
5	8	7
9	4	7
4	9	7
10	3	7
3	10	7
11	2	7
2	11	7
7	7	6
8	6	6
6	8	6
9	5	6
5	9	6
10	4	6
4	10	6
11	3	6
3	11	6
12	2	6
2	12	6

фисм. ~~ваниль карамель~~

(8;7;5), (7;8;5), (9;6;5), (6;9;5), (10;5;5), (5;10;5), (11;4;5), (4;11;5)
(12;3;5), (3;12;5), (8;8;4), (9;7;4), (7;9;4), (10;6;4), (6;10;4), (11;5;4), (5;11;4), (12;4.4), (4;12;4)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 5 8 6 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(9; 8; 3), (8; 9; 3), (10; 7; 3), (7; 10; 3), (11; 6; 3), (6; 11; 3), (12; 5; 3), (5; 12; 3) – всего получилось 30 наборов (1 - число фист., 2 - число ваниль., 3 - число кокачек)

Ответ: 30 наборов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск
рес площадки проведения

Шифр МА000184 7522

ия Рудаков Вариант № 1

Максим

Андреевич

ения 20.04.2005

Математика Класс 10

лнена на 3 листах

на +7913 188-78-70 Подпись Дата выполнения работы 05.03.2022

милию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, ефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	8	4	7	5	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	2	20	82

№1

a, b, c, d, e – 1, 2, 3, 4, 5 члены жюри.

По условию:

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b+d} = 20 \\ \frac{1}{b+c+e} = 15 \\ \frac{1}{a+c+d+e} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+d = \frac{1}{20} & (1) \\ b+c+e = \frac{1}{15} & (2) \\ a+\cancel{b}+c+d+e = \frac{1}{10}. & (3) \end{cases}$$

$$\frac{a+b+c+d+e}{b} - ?$$

Выразим из первых двух уравнений переменные (кроме b) и подставим в 3.

$a = \frac{1}{20} - b - d$

$c = \frac{1}{15} - b - e.$

+

$3: \frac{1}{20} - b - d + d + \frac{1}{15} - b - e + e = \frac{1}{10}$

$b = \frac{1}{120}$

$$a+b+c+d+e = \underbrace{(a+c+d+e)}_{\text{по условию}} + \underbrace{b}_{\text{нашли}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{120} = \frac{13}{120}.$$

$\frac{13}{120} \cdot \frac{120}{1} = 13.$

Ответ: 13.

№2.

+

Так как ~~р~~ q и r – посл. члены арифм. прогрессии, можно представить их как:

$q = p + k$

$r = p + 2k$

Чтобы квадратное уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ имело 2 корня, нужно, чтоб дискременант был больше 0.

$D = b^2 - 4ac$. Подставим $\to D = 8(p+k)^2 - 4 \cdot p(p+2k) = 4p^2 + 8pk + 8k^2 =$

$4(\cancel{?}p^2 + 2pk + k^2 + k^2) = 4((p+k)^2 + k^2) = 4(p+k)^2 + 4k^2$. Т.к. ~~последовательность~~ числа ненулевые, ~~$k>0$ или~~ $p>0$, $b>0$. Значит выражение не 0. А квадрат числа всегда $\geq 0 \Rightarrow$ 2 корня (ч.т.д).

Лист 1 из 3

№3

Условно разделим таблицу на 2 части: 1-5 столбцы - 1 часть, 6-10 - 2 часть.

~~1 часть: Ра~~ Разделим все числа в таблице. в 1 части будут меньше 51, во 2 - все остальные. Правильно расставим числа в 1 части:

					6				
46	47	48	49	50	96				100
41	42	43	44	45					
36	37	38	39	40					
31	32	33	34	35					
26	27	28	29	30					
21	22	23	24	25					
16	17	18	19	20					
11	12	13	14	15					
6	7	8	9	10					
1	2	3	4	5					

Или не важен их порядок, просто докажем, что мы можем правильно расставить их, используя числа до 50. Теперь левая часть нас не волнует, т.к. максимальное в ней меньше минимального в правой части и при любой расстановке строки будут в порядке возрастания.

Переходим к правой части.

Можем сразу поставить 100 в правый верхний угол. Она может стоять только там, иначе сверху или справа от неё окажется число < 100, а это противоречие. Теперь заполним верхнюю строку так, чтобы в верхн. клетке 6 столбца было максимально возможное число. Ограничение на это число: оно должно быть меньше остальных в верхней строке. Несложно посчитать, что такое число - 96. Остальные числа верхней строки ~~да~~ однозначно заполняем числами между 96 и 100.

~~Переходим~~ „Отбрасываем" верхнюю строку. Для получившейся таблицы 5×9 проделаем тоже самое. В правый верхний угол запишем максимальное. Найдём максимально возможное для 6 столбца, отбросим. Проделываем это до конца таблицы. Получившаяся сумма будет максимальной из возможных, потому что каждый раз мы брали максимально возможное значение для 6 столбца.

$(51+96)\cdot\frac{10}{2}=735$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Переберём...

Будем складывать первые два числа и если дополнить до 20 третьими можно, то вариант подходит.

+

20-2-2=16	20-3-2=15	20-4-2=14✓	20-5-2=13✓	20-6-2=12✓	20-7-2=11✓
20-2-3=15	20-3-3=14✓	20-4-3=13✓	20-5-3=12✓	20-6-3=11✓	20-7-3=10✓
20-2-4=14✓	20-3-4=13✓	20-4-4=12✓	20-5-4=11✓	20-6-4=10✓	20-7-4=9✓
20-2-5=13✓	20-3-5=12✓	20-4-5=11✓	20-5-5=10✓	20-6-5=9✓	20-7-5=8✓
20-2-6=12✓	20-3-6=11✓	20-4-6=10✓	20-5-6=9✓	20-6-6=8✓	20-7-6=7✓
20-2-7=11✓	20-3-7=10✓	20-4-7=9✓	20-5-7=8✓	20-6-7=7✓	20-7-7=6✓
20-2-8=10✓	20-3-8=9✓	20-4-8=8✓	20-5-8=7✓	20-6-8=6✓	20-7-8=5✓
20-2-9=9✓	20-3-9=8✓	20-4-9=7✓	20-5-9=6✓	20-6-9=5✓	20-7-9=4✓
20-2-10=8✓	20-3-10=7✓	20-4-10=6✓	20-5-10=5✓	20-6-10=4✓	20-7-10=3✓
20-2-11=7✓	20-3-11=6✓	20-4-11=5✓	20-5-11=4✓	20-6-11=3✓	20-7-11=2
20-2-12=6✓	20-3-12=5✓	20-4-12=4✓	20-5-12=3✓	20-6-12=2	20-7-12=1
9	10	11	11	10	9

60

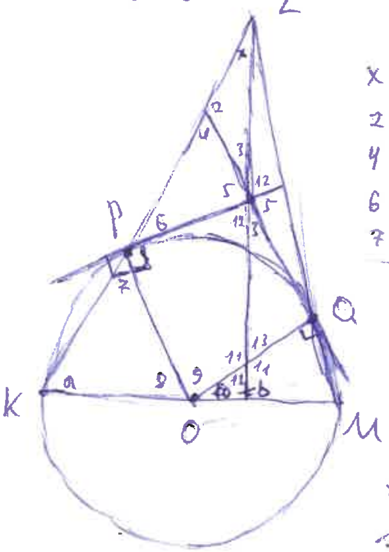
20-8-2=10✓	20-9-2=9✓	20-10-2=8✓	20-11-2=7✓	20-12-2=6✓
20-8-3=9✓	20-9-3=8✓	20-10-3=7✓	20-11-3=6✓	20-12-3=5✓
20-8-4=8✓	20-9-4=7✓	20-10-4=6✓	20-11-4=5✓	20-12-4=4✓
20-8-5=7✓	20-9-5=6✓	20-10-5=5✓	20-11-5=4✓	20-12-5=3✓
20-8-6=6✓	20-9-6=5✓	20-10-6=4✓	20-11-6=3✓	20-12-6=2
20-8-7=5✓	20-9-7=4✓	20-10-7=3✓	20-11-7=2	20-12-7=1
20-8-8=4✓	20-9-8=3✓	20-10-8=2	20-11-8=1	20-12-8=0
20-8-9=3✓	20-9-9=2	20-10-9=1	20-11-9=0	20-12-9<0
20-8-10=2	20-9-10=1	20-10-10=0	20-11-10<0	20-12-10<0
20-8-11=1	20-9-11=0	20-10-11<0	20-11-11<0	20-12-11<0
20-8-12=0	20-9-12<0	20-10-12<0	20-11-12<0	20-12-12<0
8	7	6	5	4.

30.

Итак, легко и просто, перебрав все варианты, мы можем с точностью сказать, что ответ: 90.

Примечание: я перебирал только значения, допустимые для первых двух видов (2-12), т.к. другие очевидно не подходят.

Ответ: 90



№4.

$\angle KLM = \frac{180 - \angle 9}{2}$

$x = 180 - 2 - 3 = 2\cancel{9}0 - 5 - 8 - a - 3$

$2 = 180 - 4 = \cancel{180 - 180} + 5 + 90 + 180 + 8 + a = -90 + 5 + 8 + a$

$4 = 180 - 5 - 6 = 180 - 5 - 90 + 180 - 8 - a$

$6 = 90 - 7 = 90 - 180 + 8 + a$

$7 = 180 - 8 - a$

$9 + 12 + 3 = 180$

$3 = 180 - 5 - 12 = 180 - 5 - 90 + 8 + b$

$12 = 180 - 9 - 3 = \cancel{180 - 180} + 8 + 180 - b \cancel{- 13} - 90 + \cancel{13} = \cancel{18}\ 90 + 8 - b.$

$3 = 90 - 13 =$

$9 = 180 - 8 - 90 = 180 - 8 - 180 + b + 13$

$10 = \overset{180 -}{b} - 13\ \cancel{180}$

$x = \cancel{180}\ 270 \cancel{-5} \cancel{-8} - a - 180 \cancel{+8} + 90 \cancel{+8} - b.$

$\cancel{30a}\ x = 90 - a - b + 90 \Rightarrow x = 180 - a - b.$

ада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МА000163632 2

Вариант № 1 Шифр

ВНА

Класс 10

Дата выполнения работы 5.03.2022

Подпись

название предмета печатными буквами; дату рождения, тво листов, на которых выполнена работа и дату поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	3	6	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Задача 1

$$\begin{cases} \dfrac{L}{v_1+v_2+v_4} = 20 \\ \dfrac{L}{v_2+v_3+v_5} = 15 \\ \dfrac{L}{v_1+v_3+v_4+v_5} = 10 \end{cases}$$

Пусть $v_3+v_5 = x$

$v_1+v_4 = y$

Тогда:

+ $L = 20v_2 + 20y = 15v_2 + 15x = 10x + 10y$

$$\frac{L}{5} = 4v_2 + 4y = 3v_2 + 3x = 2x + 2y$$

$$\begin{cases} v_2 = 3x - 4y \\ 3v_2 = 2y - x \\ 4v_2 = 2x - 2y \Rightarrow 4v_2 = 2(x-y) \Rightarrow 2v_2 = x - y \end{cases}$$

$$\frac{v_2}{x+y+v_2} = \frac{3x-4y}{x+y+3x-4y} = \frac{3x-4y}{4x-3y} = \frac{3x-4y}{(2y-x)+5(x-y)} = \frac{v_2}{3v_2+5\cdot 2v_2} = \frac{1}{13}$$

Ответ: в 13 раз

Задача 2

k - шаг арифметической прогрессии $k \neq 0$ $p \neq 0$ $q \neq 0$ $r \neq 0$

$r = q + k = p + 2k$

$px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$

$D = (2\sqrt{2}q)^2 - 4pr = 8(p+k)^2 - 4p(p+2k) = 8p^2 + 16pk + 8k^2 - 4p^2 - 8pk =$

$4p^2 + 8pk + 8k^2 = 4(p^2 + 2pk + k^2 + k^2) = 4((p+k)^2 + k^2) > 0$

$p + k = q \neq 0$

$D > 0 \Rightarrow px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$ всегда имеет 2 решения. ч.т.д.

Лист 1 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

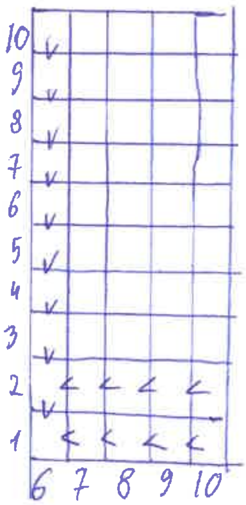
Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	6	3	6	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3



Рассмотрим ячейку 6.1 (6 столбец, 1 строчка) в таблице находится еще $(10 \cdot 5 - 1)$ клеток, в которых находятся числа большие, чем в клетке 6.1 $\Rightarrow$ число в этой клетке $\leq 100 - (10 \cdot 5 - 1)$

$6.1 \leq 51$

Рассмотрим ячейку 6.2. Клеток с большим числом в таблице $5 \cdot 9 - 1 = 44 \Rightarrow$ число в клетке $6.2 \leq 100 - 44$

$6.2 \leq 56$

Аналогично все остальные клетки в 6 столбце

$6.3 \leq 61$

$6.4 \leq 66$

$6.5 \leq 71$

$6.6 \leq 76$

$6.7 \leq 81$

$6.8 \leq 86$

$6.9 \leq 91$

$6.10 \leq 96$

Наибольшая сумма достигается при равенстве $\Rightarrow S = 51+56+61+66+71+76+81+86+91+96 = 735$

Возможный вариант заполнения таблицы:

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

Ответ: 735

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 3 6 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5

$2 \le ф \le 12$

$2 \le в \le 12$

$3 \le к \le 14$

Посчитаем кол-во наборов для каждого значения фисташек и сложим их. Тогда мы рассмотрим все возможные варианты

ф=2

в	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
	X	X									

В=9

ф=3

в	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5

В=10

ф=4

в	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4

В=11

ф=5

в	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

В=11

ф=6

в	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
к	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
											X

В=10

ф=7

в	2	3	4	5	6	7	8	9	10
к	11	10	9	8	7	6	5	4	3

В=9

ф=8

в	2	3	4	5	6	7	8	9
к	10	9	8	7	6	5	4	3

В=8

ф=9

в	2	3	4	5	6	7	8
к	9	8	7	6	5	4	3

В=7

ф=10

в	2	3	4	5	6	7
к	8	7	6	5	4	3

В=6

ф=11

в	2	3	4	5	6
к	7	6	5	4	3

В=5

ф=12

в	2	3	4	5
к	6	5	4	3

В=4

Всего: $4+5+6+7+8+2\cdot9+2\cdot10+2\cdot11=60+10+20=90$

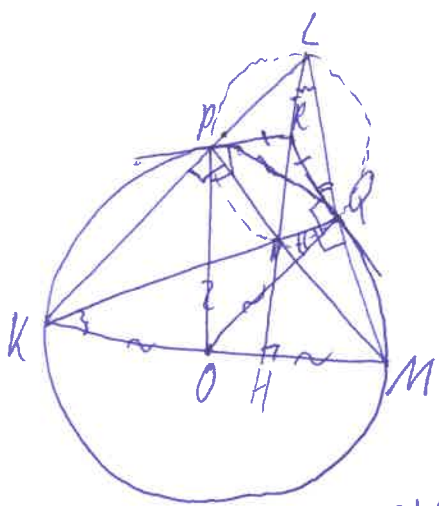
Ответ: 90

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 3 6 3 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Задача 4

Дано: окр (O; OK)

PR и QR - касательные

Д-ть: $LR \perp KM$

Д-во:

1) $PR = RQ$ - по св-ву касательных из одной точки

$KO = OP = OQ = OM$ - радиусы окр

2) Д.п. KQ и MP $KQ \cap MP = N$

$\angle KPM$ и $\angle KQM$ - опираются на диаметр $\Rightarrow$ $\angle KPM = \angle KQM = 90°$, KQ и PM - высоты $\triangle KLM$

3) Д.п. LN - высота $\triangle KLM$ $LN \cap KM = H$, $LN \perp KM$

4) $\triangle KQM$: $\angle QKM + \angle KMN + \angle QMN = 90°$

$\triangle HML$: $\angle HLM + \angle KMN + \angle QMN = 90°$ $\Big\} \Rightarrow \angle QKM = \angle HLM$

5) $\angle QKM = \angle HLM$, $PR \perp OP$, $QR \perp OQ$ (касательные к радиусу)

$\angle LQR + \angle RQN = 90°$

$\angle RQN + \angle KQO = 90°$ $\Big\} \Rightarrow \angle LQR = \angle KQO$ $\Big| \Rightarrow \triangle RLQ \sim \triangle OKQ$ (по I призн. подобия)

6) $KO = OQ$ (радиусы), $\triangle RLQ \sim \triangle OKQ \Rightarrow LR = RQ$

7) $\angle LPN + \angle LQN = 180° \Rightarrow$ около $LPNQ$ можно описать окружность,

$PR = RQ = RL \Rightarrow R$ - центр описанной окружности,

NL - диаметр окружности $\Rightarrow R$ лежит на прямой LN

8) R лежит на LN, $LN \perp KM \Rightarrow LR \perp KM$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Уфа, Космонавтов, 1

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	7	6	8	3	2	2

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Муслухов

Имя Тимур

Отчество Ришатович

Дата рождения 05.09.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона +7(917)482-10-87 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Выдан доп лист №1

Выдан доп. лист №2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	6	8	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Пусть i-тый член жюри проверяет V_i работ за день, всего работ – X шт., первый и третий члены жюри проверили kX работ за 4 дня.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	–	20	20	80

Тогда:

$$\begin{cases} 6(V_1+V_2+V_3+V_4+V_6)=X & (1) \\ 10(V_2+V_4+V_5+V_6)=X & (2) \\ 12(V_1+V_3+V_5)=X & (3) \\ 4(V_1+V_3)=kX & (4) \end{cases}$$

(2)–(1): $10V_2+10V_4+10V_5+10V_6-6V_1-6V_2-6V_3-6V_4-6V_6=0$

$4(V_2+V_4+\frac{5}{2}V_5+V_6)=6(V_1+V_3)$

$V_2+V_4+\frac{5}{2}V_5+V_6=\frac{3}{2}(V_1+V_3)$ (5)

(3)–(1): $12V_1+12V_3+12V_5-6V_1-6V_2-6V_3-6V_4-6V_6=0$

$6(V_1+V_3+2V_5)=6(V_2+V_4+V_6)$

$V_1+V_3+2V_5=V_2+V_4+V_6$ (6)

(5): $V_2+V_4+\frac{5}{2}V_5+V_6=\frac{3}{2}(V_1+V_3)$

$V_1+V_3+2V_5+\frac{5}{2}V_5=\frac{3}{2}V_1+\frac{3}{2}V_3$

$\frac{9}{2}V_5=\frac{1}{2}(V_1+V_3)$

$V_5=\frac{1}{9}(V_1+V_3)$ ~~(8)~~

~~(2): $10(V_2+V_4+V_5+V_6)=X$~~

~~$10(V_1+V_3+2V_5+V_5)=X$~~

~~$10V_1+10V_3+30\cdot\frac{1}{9}(V_1+V_3)=X$~~

(6): $V_1+V_3+2V_5=V_2+V_4+V_6$

$(V_1+V_3)\cdot\frac{11}{9}=V_2+V_3+V_6$

(2): $10(V_2+V_4+V_5+V_6)=X$

$10\left(\frac{11}{9}(V_1+V_3)+\frac{1}{9}(V_1+V_3)\right)=X$

$10\cdot\frac{12}{9}(V_1+V_3)=X$

$\frac{40}{3}(V_1+V_3)=X$ (7)

$\cancel{\frac{(7)}{(4)}}$: $\frac{(4)}{(7)}$: $\frac{4(V_1+V_3)}{\frac{40}{3}(V_1+V_3)}=\frac{kX}{X}$

$k=\frac{3}{10}=30\%$

Ответ: 30% работ.

Лист 1 из 3

Доп лист 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 8 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. ~~Если у многочле~~ Вершина трёхчлена ax^2+bx+c находится в $x=\frac{-b}{2a}$.

~~Если у квадратного трёхчлена f нет корней, то знак $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ равен знаку a.~~

$$\cancel{sgn(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} sgn\left(f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)=sgn(a)\\ sgn\left(g\left(\frac{-q}{2p}\right)\right)=sgn(p)\end{cases}}$$

$$\cancel{f\left(\frac{-b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}}$$

~~При $a>0$ $f\left(\frac{-b}{2a}\right)>0 \Rightarrow c>0$~~

~~При $a<0$ $f\left(\frac{-b}{2a}\right)<0 \Rightarrow c<0$~~

~~При $a>0$ $f(0)$~~

Если у кв. трёхчлена нет корней, то $f(x)>0$ $\forall x$ при $a>0$ и $f(x)<0$ $\forall x$ при $a<0$.

$f(0)=c$

Знак c равен знаку a.

Аналогично знак r равен знаку p.

Если a и p одного знака, то $h=f+g$ будет того же знака при всех x.

Значит, a и p разных знаков.

Значит, c и r разных знаков.

Значит, $c\cdot r<0$.

Ответ: знак $c\cdot r$ — минус.

4.

Пусть $LR\perp MK$. ~~Тогда $\angle RKQ=90°$. Но $\angle RQK=90°$, значит~~

~~Пусть~~ $O=(MK)\cap(RL)$.

Тогда $\angle ROQ=90°$. Но $\angle RQO=90°$. Значит, $Q=O$.

Значит, $(RL)=(RQ)$. Но RQ — касательная к окр-ти, значит, имеет одну общую точку с ней. Q и L лежат на окр-ти, ~~зн~~ и $\in RQ$. Значит, $Q=L$, значит, $L\in MK$, но $\triangle LMK$ — невырожденный. Противоречие.

Лист 2 из 3

Доп лист № 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 8 | 3 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. Переберём все ~~вариан~~ количества апельсинового печенья.
Заметим, что при данном количестве апельсинового и ~~кол-во апел~~ шоколадного печенья однозначно находится количество малинового печенья.

Если апельсиновых печений 2, то шоколадных не менее 4 и не более 14, т.к. если шоколадных было бы 3, то малиновых было бы 15, что противоречит условию.

При количестве апельсинового печенья, равном 3, шоколадных не менее 3 и не более 14.

При дальнейшем увеличении кол-ва апельс. печений ~~кол-во шоколад~~ верхняя граница кол-ва шок. печений уменьшается на 1.

кол-во апельс. печений	~~ко~~ кол-во шок. печений	кол-во ~~вариантов~~ наборов
2	от 4 до 14	11
3	от 3 до 14	12
4	от 3 до 13	11
5	от 3 до 12	10
...		
12	от 3 до 5	3

Сложим кол-ва ~~вариантов~~ наборов

$$S = 11 + \underbrace{12 + 11 + 10 + \ldots + 3}_{10\text{ чисел}} = 11 + \frac{12+3}{2} \cdot 10 = 11 + \frac{150}{2} = 11 + 75 = 86.$$

Ответ: 86 наборов.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	4	4	1	3	2	2

Вариант № 1 Шифр

амилия БЕЗУШЕНКО

я АЛЕКСАНДР

чество АЛЕКСАНДРОВИЧ

рождения 24.04.2005

мет МАТЕМАТИКА **Класс** 10

а выполнена на 3 **листах**

телефона 89832945758 **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Подпись Без

свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, омер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату ия работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

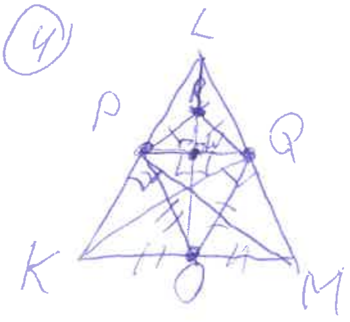
Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	4	4	1	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(4)



Дано: $\triangle LKM$, KM - диаметр окр, пересекающей $LK = P$, и $LM = Q$, касательные к окр. в точках P и Q пересек = R

Док-ть: $LR \perp KM$

1	2	3	4	5	Σ
20	8	20	20	12	80

Док-во:

$PR = RQ$ как касательные из R

в $\triangle KPM$ $\angle KPM = 90^\circ$ т.к. KM - диаметр

в $\triangle KQM$ $\angle KQM = 90^\circ$ т.к. KM - диаметр

пусть $O \in KM$ и $KO = OM$, тогда $PO = QO = KO = OM$

проведем RO

$\triangle PRO = \triangle QRO$ по 3 сторонам $\Rightarrow \angle PRO = \angle QRO \Rightarrow$

$\Rightarrow RO \perp PQ$, т.к. $LO \perp PQ$ (пусть $LO \cap PQ = W$) и

$PW = WQ$, то $\triangle LPQ$ - равноб. $\angle P = \angle Q$

рассм $\triangle PLO$ и $\triangle LOQ$ ($\angle P = \angle Q$, $PO = OQ$, LO - общ),

они равны по 3 сторонам. $\angle KLO = \angle MLO$, а $KO = OM \Rightarrow$

$\Rightarrow LO \perp KM$, как ~~высот~~ биссектр. в равнобедр. $\triangle KLM$

(2) $px^2 + 2\sqrt{2}\,qx + r = 0$

p, q, r - члены ариф. прогр. $p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0$

пусть шаг = d

$p = p$

$q = p + d$

$r = p + 2d$

$D = 8q^2 - 4rp$, при $D > 0$ два решения

$8(p+d)^2 - 4(p+2d)p = 8p^2 + 16pd + 8d^2 - 4p^2 - 8pd$

$4p^2 + 8pd + 8d^2$ $\quad 4(p^2 + 2pd + 2d^2)$ $\quad 4(p+d)^2 > 0$ т.к.

квадрат всегда ≥ 0, а $p \neq 0$, то $4(p+d)^2 > 0$ всегда

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	4	1	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5 пусть фисташковых "а", ванильных "в", карамельных "с"

$a+b+c=20$ Если выбраны "а" и "в", то "с" определяется однозначно.

$a \in [2,12]$

$b \in [2,12]$ Для каждого числа "в", если выбрано "а"

$c \in [3,14]$ есть только одно число "с" такое, чтобы $a+b+c=20$. Для каждого значения "а" подберем "в" и "с"

при $a=2$, $b \neq 2$ т.к. $b+c \to max = 2+14=16$ $16+2 \neq 20$

$b \neq 3$ т.к. $b+c \to max = 3+14=17$ $17+2<20$, всего 9

"в" может быть $=4$ т.к. $b+c \to max = 18$ $18+2=20$

"в" может быть $=12$ т.к. $20-12-2=6$ $6 \in [2;12]$,

значит для каждого из 11 "в", кроме $b=2$ и $b=3$ при $a=2$, есть парное с и при этом только одно

при $a=3$ $b \neq 2$ всего 10, при $a=4$ $b \in [2,12]$ т.к 2 и 12 подходят, всего 11

~~при $a=5$, при ..., при $a=7$ $b \in [2,12]$ всего 10~~

при $a=5$

в	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
с	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

всего 11

при $a=6$

в	~~12~~	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
с	~~2~~	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

всего 10

$a=7$

в	~~12~~	~~13~~	~~12~~	~~11~~	~~10~~	9	8	7	6	5	4	3	2
с	~~1~~	~~2~~	3	3	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11

всего 9

$a=8$

в	~~12~~	~~12~~	~~11~~	~~10~~	9	8	7	6	5	4	3
с	~~4~~	~~3~~	~~3~~	~~3~~	3	4	5	6	7	8	9

всего 7

$a=9$

в	~~12~~	~~9~~	8	7	6	5	4	3	2
с	~~3~~	~~2~~	3	4	5	6	7	8	9

всего 7

$a=10$

~~8~~	7	6	5	4	3	2
~~2~~	3	4	5	6	7	8

всего 6

$a=11$

~~7~~	6	5	4	3	2
~~2~~	3	4	5	6	7

всего 5

$a=12$

в	~~6~~	5	4	3	2
с	~~2~~	3	4	5	6

всего 4

всего $5+6+4+6+7+7+7+9+10+11+11+10+9=$
$=89$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	4	4	1	3	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) № столб.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	20	30	40	50	96	97	98	99	100
9	19	29	39	49	91	92	93	94	95
8	18	28	38	48	86	87	88	89	90
7	17	27	37	47	81	82	83	84	85
6	16	26	36	46	76	77	78	79	80
5	15	25	35	45	71	72	73	74	75
4	14	24	34	44	66	67	68	69	70
3	13	23	33	43	61	62	63	64	65
2	12	22	32	42	56	57	58	59	60
1	11	21	31	41	51	52	53	54	55

в столбцах 1–5 расположены минимально возможные числа во всех строках с 6 по 10 столбец суммы цифр максимальны

Наиб знач. суммы

187 354 167 147 264 127 167

$96+91+86+81+76+71+66+61+56+51 = 735$

1) пусть k – объём работы a, b, c, d, e – скорости первого, второго, третьего, четвёртого и пятого соответс.

$\frac{k}{a+b+d} = 20 \quad \frac{k}{b+c+e} = 15 \quad \frac{k}{a+c+d+e} = 10$

$\frac{b}{a+b+c+d+e} = ?$

$\begin{cases} (1)\ 20a + 20b + 20d = k \\ (2)\ 15b + 15c + 15e = k \\ (3)\ 10a + 10c + 10d + 10e = k \end{cases}$

(1)–(3) $10a + 10d + 20b - 10c - 10e = 0$

$a + d + 2b = c + e$, подставим в (2)

(2) $15b + 15(a+d+2b) = k$

$15b + 15a + 15d + 30b = k$ (4)

(1)–(4) $5a + 5b + 5d - 30b = 0$

$a + d = 5b$ (5) подставим в (4)

(4) $15 + 15 \cdot 7b = k$

$120b = k$

$a + c + d + e = 12b$

$\frac{a+c+d+e+b}{b} = \frac{13}{1}$

Ответ: в 13

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Санкт-Петербургский Горный университет | М А 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 1

Фамилия ВОЛКОВА

Имя ИРИНА

Отчество АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 02 11 2004 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 5 03.2022

Номер телефона 79052160345 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

№	A	P	t, ч
1, 2, 4	1	$\frac{1}{20}$	20
2, 3, 5	1	$\frac{1}{15}$	15
1, 3, 4, 5	1	$\frac{1}{10}$	10

Пусть время работы 3 и 5 членов жюри вместе t (ч), время работы 1 и 4 членов жюри вместе n (ч), время работы 2 члена жюри x (ч). Тогда необходимо найти

$\frac{x+n+t}{x}$. По условию 1, 2 и 4 члены жюри проверяют работы за 20 ч, т.е. $n+x=20$ (1);

2, 3 и 5 члены жюри проверяют работы за 15 ч, т.е. $x+t=15$ (2);

все, кроме 2 члена жюри проверяют работы за 10 ч, т.е. $t+n=10$ (3).

Составлю и решу систему уравнений.

$$\begin{cases} n+x=20 \\ x+t=15 \\ t+n=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=20-x \\ t=15-x \\ 20-x+15-x=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=20-x \\ t=15-x \\ 35-10=2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=20-x \\ t=15-x \\ 2x=25 \end{cases}$$

3А

1	2	3	4	5	Σ
6	20	20	12	20	78

выдан чистовой (дополнительный) лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} x = \frac{25}{2} \\ n = 20 - \frac{25}{2} \\ t = 15 - \frac{25}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{25}{2} \\ n = \frac{15}{2} \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Т.е искомое отношение $\dfrac{\frac{25}{2} + \frac{15}{2} + \frac{5}{2}}{\frac{25}{2}} =$

$= \dfrac{45 \cdot \cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2} \cdot 25} = \dfrac{\cancel{45}^{9}}{\cancel{25}_{5}} = \dfrac{9}{5}$, т.е в ~~4,5~~ ~~...~~ 1,8 раза быстрее будет выполнена проверка работ всеми членами жюри по сравнению с проверкой работ только 2 членом

Ответ: в 1,8 раз

2. $px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$

$D = (2\sqrt{2}q)^2 - 4pr = 8q^2 - 4pr$

чтобы ур-е имело 2 корня, необходимо, чтобы $D > 0$.

Так как p, q, r — последовательные члены арифметической прогрессии, то пусть $p = a - d$; $q = a$; $r = a + d$, где d — разность арифметической прогрессии ($^*\ a \neq 0,\ a \neq d,\ a \neq -d$)

Подставим значения p, q, r в формулу D:

$D = 8a^2 - 4(a-d)(a+d) = 8a^2 - 4(a^2 - d^2) =$

$= 8a^2 - 4a^2 + 4d^2 = 4a^2 + 4d^2$

выдан доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2

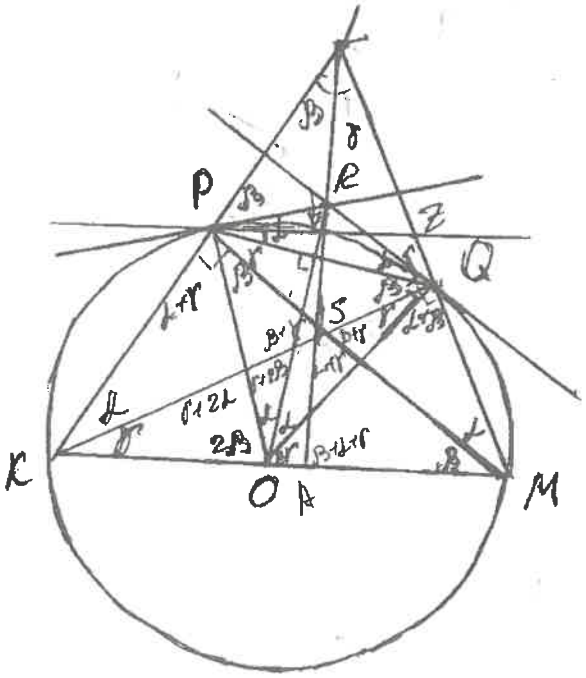
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Учитывая, что числа p, q, r ненулевые, то $a \neq 0$, т.е $4a^2+4d^2>0$ при допустимых значениях a и d, т.е ур-е имеет 2 решения.

ч.т.д

№4.



Дано:

$\triangle KLM$

KM-диаметр окр(O;R)

окр(O;R)∩KL=P

окр(O;R)∩LM=Q

PR; RQ - касательные к окр(O;R)

PR∩RQ=R

Док-ть: LR⊥KM

Доказательство.

1) PR=RQ (по св-ву отрезков касательных)

2) ∃ O-середина KM, т.е O-центр окр(O;R)

3) OP=QO (как радиусы)

значит, в 4-ёх угольнике PRQO ~~PR~~ PR=RQ и PO=QO, т.е PRQO-дельтоид, т.е PQ⊥RO (как диагонали дельтоида)

4) ∃ PM∩KQ=S

5) ∠KQM-вписанный, опирается на диаметр, т.е ∠KQM=90°

выдан доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

б) QO - медиана прямоугольного △KQM, т.е QO = OM = OK, т.е △QOM и △OKQ и △POQ и △POM - р/б

Чтобы доказать, что ∠A ⊥ KM (LR ∩ KM = A) необходимо док-ть, что ASQM - вписанный 4-ёх уг.

№5.

Всего 20 печений. (Ф - фисташковые, В - ванильные, К - карамельные)

$2 \le Ф \le 12$; $2 \le В \le 12$ (можно перебрать допустимые значения Ф и В, К определяется автоматически)

~~В ≤ 20~~ $3 \le К \le 14$.

Если в коробке 2Ф

2Ф 2В невозм, тогда К=16

2Ф 3В невозможно, тогда К=15

2Ф 4В; 2Ф 5В; 2Ф 6В; 2Ф 7В; 2Ф 8В; 2Ф 9В; 2Ф 10В; 2Ф 11В; 2Ф 12В } 9сп.

Если 3Ф:

3Ф 2В невозм, тогда К=15

3Ф 3В; 3Ф 4В; 3Ф 5В; 3Ф 6В; 3Ф 7В; 3Ф 8В; 3Ф 9В; 3Ф 10В; 3Ф 11В; 3Ф 12В } 10сп.

Если 4Ф:

11сп. { 4Ф 2В; 4Ф 3В; 4Ф 4В; 4Ф 5В; 4Ф 6В; 4Ф 7В; 4Ф 8В; 4Ф 9В; 4Ф 10В; 4Ф 11В; 4Ф 12В

Если 5Ф:

5Ф 2В; 5Ф 3В; 5Ф 4В; 5Ф 5В; 5Ф 6В; 5Ф 7В; 5Ф 8В; 5Ф 9В; 5Ф 10В; 5Ф 11В; 5Ф 12В } 11сп.

выдан доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	4	6	2	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если 6Ф:

6Ф 6Ф 6Ф 6Ф 6Ф 6Ф 6Ф 6Ф 6Ф 6Ф ~~6Ф 12В~~ } 10сп.
2В 3В 4В 5В 6В 7В 8В 9В 10В 11В

невозможно, тогда к = 2

Если 7Ф:

7Ф 7Ф 7Ф 7Ф 7Ф 7Ф 7Ф 7Ф 7Ф ~~7Ф 11В~~ } 9сп.
2В 3В 4В 5В 6В 7В 8В 9В 10В

невозм., тогда к = 2

Если 8Ф:

8Ф 8Ф 8Ф 8Ф 8Ф 8Ф 8Ф 8Ф 8Ф 8Ф } 8сп
2В 3В 4В 5В 6В 7В 8В 9В 10В

невозм., тогда к = 2

Если 9Ф:

9Ф 9Ф 9Ф 9Ф 9Ф 9Ф 9Ф 9Ф } 7сп.
2В 3В 4В 5В 6В 7В 8В 9В

невозм., тогда к = 2

Если 10Ф:

10Ф 10Ф 10Ф 10Ф 10Ф 10Ф 10Ф } 6 сп.
2В 3В 4В 5В 6В 7В 8В

невозм., тогда к = 2

Если 11 Ф:

11Ф 11Ф 11Ф 11Ф 11Ф 11Ф } 5 сп
2В 3В 4В 5В 6В 7В

невозм., тогда к = 2

Если 12 Ф:

12Ф 12Ф 12Ф 12Ф 12Ф } 4 сп
2В 3В 4В 5В 6В

невозм., тогда к = 2

Итого: 9 + 10 + 11 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 90

Ответ: 90

выдан доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

46	47	48	49	50	96	97	98	99	100
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	51	52	53	54	55

Учитывая, что в таблице расставлены натуральные числа, возрастающие слева направо по строкам и снизу вверх по столбцам, то положения 1 и 100 строго определены: 1 в нижнем левом углу, 100 - в верхнем правом углу таблицы.

Наибольшее возможное число, стоящее в 1 строке 6-го столбца - 96

(Если | 97 | 98 | 99 | | 100 |, и т.р. в 1 строке в 6 столбце стоит 97, то справа от 97 должны стоять большие числа, т.е 98 и 99, но осталось 3 свободных клетки, а числа 2).

Аналогично рассуждая получаем что под 96 во 2 строке 6 столбца стоит максимум 91 (| 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | - такой вариант не возможен, т.к. 96 уже использовано)

Заполним часть таблицы от 6-го столбика

выдан доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

до 10 аналогичным образом

(

a-4	a-3	a-2	a-1	a
a-9	a-8	a-7	a-6	a-5
a-14	a-13	a-12	a-11	a-10

, где a=100)

Таким образом, наибольшая возможная сумма чисел в 6 столбце:

$96+91+86+81+76+71+66+61+56+51=735$

Т.е. 735 – наибольшее возможное значение этой суммы.

Числа в оставшейся части таблицы можно расставить следующим образом:

...

b+5	b+6	b+7	b+8	b+9
b	b+1	b+2	b+3	b+4

где b=1.

Т.е. такая расстановка возможна.

Ответ: 735

.4 (продолжение)

~~Исходная ... PR PQ~~

~~Т.к. PO⊥~~

$PQ \perp PO$, при повороте RO на угол ORA PQ переходит в PZ, где $PZ \parallel KM$, RO переходит в RA

L – центр описанной вокруг $\triangle LPQ$ окр.

выдан доп. лист

Лист 7 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 4 6 2 8 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

7 ∠PMQ = α, тогда ∠PMK = β

△OMQ – р/б, т.е ∠OQM = α + β

7 ∠QKM = γ, тогда ∠KOQ = ∠KQO = γ (△KOQ – р/б, QO = OK)

тогда ∠KQM = γ + α + β; ∠KQM = 90°, т.е α + β + γ = 90°

6) ∠OPM = ∠OMP (△POM – р/б), т.е ∠OPM = ∠OMP = β

∠MKQ = ∠MPQ (вписанные, опираются на QM), ∠MKQ = ∠MPQ = γ

7) ∠KPM = 90° (впис, опирается на диаметр), т.е ∠MPL = 90° (∠KPM и ∠MPL – смежные), ~~т~~.

8) OP ⊥ PR и OQ ⊥ QR (по св-ву радиуса, проведённого в т. касания)

9) △LPQ ∼ △LMK (по двум углам (∠PLQ – общий, ∠PKM + ∠PQM = 180° (по св-ву впис 4-ёхуг.

∠PQL + ∠PQM = 180° (по св-ву смежных углов), т.е ∠PQL = ∠LKM)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

СФУ Красноярск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	1	9	3	3	8	2	2

Шифр

Вариант № 2

милия Баранцов

Глеб

ство Евгеньевич

рождения 02.04.2005

ет МАТЕМАТИКА Класс 10

выполнена на 4 листах

телефона 8902 9808792 Дата выполнения работы 05.03.2022

Подпись Г. Бар.

свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, мер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату ия работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	9	3	3	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

№ 2.

Если $f>0,\ g>0$, то $f+g>0$

Если $f<0,\ g<0$, то $f+g<0$

$\Rightarrow f>0,\ g<0$ или $f<0,\ g>0$, т.к. $f+g=0$ в некоторых (·) по условию

$\Rightarrow c>0,\ r<0$ или $r>0,\ c<0$

$\Rightarrow c\cdot r<0$

Ответ: знак "–"

№ 1

Обозначим за a, b, c, d, e, f кол-во работ, которые проверяют члены жюри за один день (a – 1 член, b – 2 член и т.д.), а кол-во всех работ z

тогда условия можно переписать в сл. виде

$$\begin{cases} 6(a+b+d+c+f)=z \\ 10(b+d+e+f)=z \\ 12(a+c+e)=z \end{cases} \qquad \frac{4(a+c)}{z} - ?$$

Отсюда:

$$\frac{12(a+c)}{z} = 1 - \frac{12e}{z}$$

$$\frac{10e}{z} = 1 - \frac{10(b+d+f)}{z}$$

$$\frac{6(b+d+f)}{z} = 1 - \frac{6(a+c)}{z}$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{60(a+c)}{z} = 6 - 10 + \frac{60(a+c)}{z} \Rightarrow \frac{4(a+c)}{z} = \frac{3}{10}$$

Ответ: 30 %

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	9	3	3	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Заметим что квадрат (3×3) в левом, верхнем углу задает всю таблицу 7×7, т.к. в ней присутствует периодичность, т.е. если мы находимся в i столбце, и ~~сдвинулись~~ попали на $i+3$ столбец, то содержимое i и $i+3$ столбца должно совпадать, чтобы сумма чисел в любом квадрате 3×3 была равна 0. То же самое выполняется строк.

Тогда содержимое 1 столбца и 7 столбца должны совпадать, и содержимое 1 строки и 7 строки должно совпадать.

Выберем квадрат 3×3, у которого сумма чисел в верхней строке, и лево столбце максимальна: очевидно, что им является сл. квадрат: ~~данный квадрат был выбран~~

1	1	0
1	−1	−1
1	−1	−1

тогда таблица имеет сл. вид

	1						7
1	1	1	0	1	1	0	1
	1	−1	−1	1	−1	−1	1
	1	−1	−1	1	−1	−1	1
	1	1	0	1	1	0	1
	1	−1	−1	1	−1	−1	1
	1	−1	−1	1	−1	−1	1
7	1	1	0	1	1	0	1

Также стоит отметить, что нам достаточно учитывать нижнюю строку и правый столбец, т.к. в остальном куске таблицы сумма чисел равна 0, т.к. она представляет собой квадрат 6×6, который составлен из квадратов 3×3, с нулевыми суммами.

$S = 11$

Ответ: 11

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 3 | 3 | 8 | 2 | 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Зафиксируем кол-во апельсиновых макарун, и переберем для каждой возможные варианты расположения других:

2: 9; 9 | 2 x 8; 10 | 2 x 7; 11 | 2x 6; 12 | 2x 5; 13 | 2x 4; 14 |

3: 2x 9; 8 | 2x 10; 7 | 2x 11; 6 | 2x 12; 5 | 2x 13; 4 | 2x 14; 3 |

4: 8; 8 | 2x 7; 9 | 2x 6; 10 | 2x 5; 11 | 2x 4; 12 | 2x 3; 13 |

5: 2x 8; 7 | 2x 9; 6 | 2x 10; 5 | 2x 11; 4 | 2x 12; 3 |

6: 7; 7 | 2x 8; 6 | 2x 9; 5 | 2x 10; 4 | 2x 11; 3 |

7: 2x 7; 6 | 2x 8; 5 | 2x 9; 4 | 2x 10; 3 |

8: 6; 6 | 2x 7; 5 | 2x 8; 4 | 2x 9; 3 |

9: 2x 5; 6 | 2x 4; 7 | 2x 3; 8 |

10: 5; 5 | 2x 4; 6 | 2x 3; 7 |

11: 2x 5; 4 | 2x 6; 3 |

12: 4; 4 | 2x 5; 3 |

~~4 + 5·2 + 6·2 + 1 + 5·2 + 5·2 +~~

Суммарное кол-во: 86

Ответ: 86

Лист 3 из 4

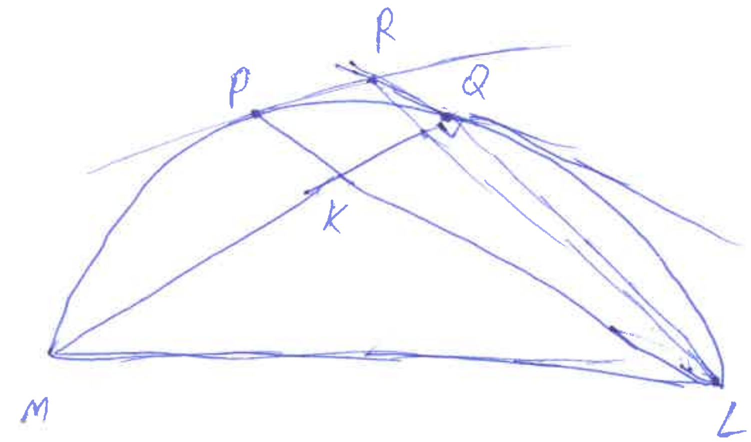
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	9	3	3	8	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4



В условии задания допущена ошибка, т.к. $\angle R$ не может быть перпендикулярна KM, т.к. $MK \perp LQ$ $(MK \in MQ)$

т.к. $\angle MQL$ опирается на диаметр окружности, а (·) Q принадлежит данной окружности $\Rightarrow MQ \perp LQ$

а из одной (·) нельзя опустить два перпендикуляра на одну прямую

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	1	5	9	3	6	2	2

г. Уфа, ул. Космонавтов, 1

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Кутьенкова

Имя Мария

Отчество Александровна

Дата рождения 20.10.2005 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 05.03.2022

Номер телефона 89174647354 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Выдан дополнительный лист N1

Выдан дополнительный лист N2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	5	9	3	6	2	2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Зач

Задание 1.

Пусть первый член жюри проверяет a_1 работ в день, второй – a_2 работ в день, 3ий – a_3; 4ый – a_4; 5ый – a_5 и 6ой – a_6 работ в день.

Тогда по условию

$6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_6) = 10(a_2+a_4+a_5+a_6) = 12(a_1+a_3+a_5)$ = все работы.

Отсюда

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_6 = 2(a_1+a_3+a_5)$

$a_1+a_3+2a_5 = a_2+a_4+a_6$

$a_1+a_3+3a_5 = a_2+a_4+a_5+a_6$.

Подставим во 2ую часть исходного равенства

$10(a_1+a_3+3a_5) = 12(a_1+a_3+a_5)$

$10a_1+10a_3+30a_5 = 12a_1+12a_3+12a_5$

$a_1+a_3 = 9a_5$.

Подставим в 3ю часть исходного равенства:

всего работ $120\cdot a_5$.

За 4 дня первый и третий члены жюри проверят $9a_5\cdot 4 = 36\cdot a_5$ работ.

Т.о. $\frac{36\cdot a_5}{120\cdot a_5}\cdot 100\% = 30\%$ всех работ.

Ответ: 30%

Задание 5.

① Всего можно взять 12^2 возможных различных комбинаций шоколадных и малиновых макарунов. Однако, исходя из условия, сумма их количеств не менее 8 и не превышает 18 (т.к. иначе нельзя добавить в коробку требуемое кол-во апельсиновых макарунов.

Т.о. из 12^2 необходимо вычесть 3 комбинации (3 и 3, 3 и 4, 4 и 3), в которых сумма меньше 8 и и (10+9+8+7+6+5+4+3+2+1) комбинаций, в которых сумма больше 18 и. Т.о. Ответ = 144 − 3 − 55 = 86 способов

Ответ: 86 способов

Доп. лист N1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 9 | 3 | 6 | 2 | 2 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3

1)

			1			
			1			
			1			
1	1	1		1	1	1
			1			
			1			
			1			

Заметим, что по условию сумма чисел в выделенных квадратах равна 0, а значит, сумма всех чисел таблицы не превосходит 13.

Поставим единицы во все ~~...~~ клетки, не попавшие в выделенные квадраты, кроме центральной.

Очевидно, что единицы не ~~...~~ могут находиться одновременно во всех клетках б1 – б9, т.к. тогда в квадратах 3×3, куда попадут образованные или пятерки вида

1	1	1
1		
1		

либо

	1	
1	1	1
	1	

невозможно будет создать сумму 0 имеющимися способами (т.к. кол-во 1 и –1 должно быть одинаковым). Таким образом, по крайней мере при общей сумме 12 или 13 в центральной клетке стоит не 1, иначе, общая сумма меньше 13. Пусть в клетке б9 стоит 0. Тогда автоматически однозначно заполняем таблицу до следующего вида:

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
1				1			
2		–1	–1	1	–1	–1	
3		–1	–1	1	–1	–1	
4	1	1	1	0	1	1	1
4		–1	–1	1	–1	–1	
5		–1	–1	1	–1	–1	
6				1			

~~Вкрайней~~ верхнем

В квадрате с координатами противоположных углов (Д1 и Ж3) обязательно должно быть 4 единицы (т.к. есть четыре –1).

С другой стороны, и в квадрате с координатами (Г1 и Е3), и в квадрате (Д2 и Ж4) противоположных углов должно быть ~~...~~ хотя бы по одному нолику. Однако, вся область их пересечения уже занята, соответственно, оба нолика стоят где-то в ~~...~~ точках Д1, Е1, Ж1, Ж2 или Ж3. Но тогда на 4 единицы в квадрате (Д1 и Ж3) остается всего 3 свободных места.

Противоречие. Т.о. сумма чисел в таблице не может быть равна 12.

~~Пусть в клетке б8 стоит 1. Сумма чисел в таблице ...~~

Приведу пример:

1	0	1	1	0	1	1
1	–1	–1	1	–1	–1	1
1	–1	–1	1	–1	–1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	–1	–1	1	–1	–1	1
1	–1	–1	1	–1	–1	1
1	1	0	1	1	0	1

			1	1	1	1
			1	–1	–1	–1
			1	–1	0	–1
1	1	0	[illegible]	1	0	1
			1			
			1			
			1			

Сумму 11 можно получить двумя способами – заменив одну единицу на –1 или две единицы на 0. Пример для второго случая изображен слева.

Ответ: 11.

Доп. лист № 2

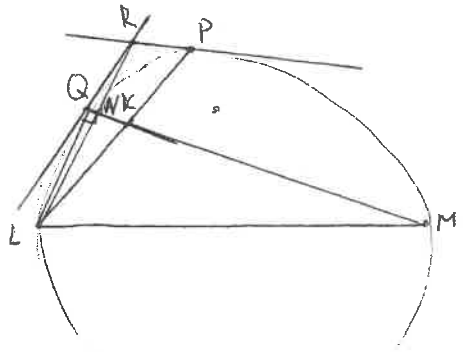
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 5 9 3 6 2 2

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4



Рассмотрим $\triangle LQM$.
$\angle Q$ опирается на диаметр окружности, является вписанным. То есть $\angle LQM = 90^\circ$.
Т.к. Q лежит на продолжении стороны MK, $K \in QM \Rightarrow \angle LQK = 90^\circ$.
Пусть LR пересекает MK в точке N, $N \in MQ$.
$\triangle QNL$ является прямоугольным, т.е. $\angle QNL < 90^\circ$. Однако, прямая LN аналогична прямой LR, QN аналогична MK $\Rightarrow$ $MK \perp LR$, только если Q совпадает с N.

Пусть Q совпадает с N $\Rightarrow$ прямая LQ аналогична прямой LN $\Rightarrow$ точка R лежит на прямой $LQ \Rightarrow LR$ – касательная к окружности. Значит, LR касается окружности ровно в одном месте, следовательно, $Q = L$, однако, это невозможно, т.к. $Q \in KM$, и тогда KM совпадает с LM и треугольник вырожденный.
Т.о. LR не может быть перпендикулярна KM, если треугольник не является вырожденным, просьба пересмотреть условие.

Задание 2 ① ax^2+bx+c не имеет корней $\Rightarrow b^2-4ac<0 \Rightarrow b^2<4ac$, т.о. знак a = знак c $\Rightarrow ac>0$

② px^2+qx+r не имеет корней $\Rightarrow q^2-4pr<0 \Rightarrow q^2<4pr \Rightarrow$ знак p = знак r $\Rightarrow pr>0$

③ $(a+p)x^2+(b+q)x+(c+r)$ имеет корни $\Rightarrow (b+q)^2 \geq 4(a+p)(c+r)$

$b^2+2bq+q^2 \geq 4ac+4pr+4ar+4pc$.

из выражений 1 и 2 $b^2+q^2<4ac+4pr$

$bq<\sqrt{16acpr}$

$acpr>0$, т.к. $ac>0$, $pr>0$ из п. 1 и 2.

$\Rightarrow 4ac+4pr+4\sqrt{acpr} \geq 4ac+4pr+4ar+4pc$

$\sqrt{acpr} \geq ar+pc$

$acpr \geq (ar+pc)^2$

$acpr \geq a^2r^2+p^2c^2+2acpr$

$-acpr \geq a^2r^2+p^2c^2$

$acpr \leq 0$, что невозможно, т.к. $\underline{ac>0 \text{ и } pr>0}$

либо $\sqrt{acpr} < (ar+pc)$, $ar+pc<0$, $|ar+pc|>\sqrt{acpr}$

$acpr \leq a^2r^2+2acpr+p^2c^2$, что верно.

Следовательно, $\boxed{ar+pc<0}$

Пусть $a<0 \Rightarrow c<0$

1) $r>0$, $p>0 \Rightarrow ar<0$, $pc<0$

2) $r<0$, $p<0 \Rightarrow ar>0$, $pc>0$, что невозможно, т.к. $ar+pc<0$

$c<0$, $r>0$

отсюда: $cr<0$. Ответ: $cr<0$, знак минус.