Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	6	2	2	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ДАРМОГРАЙ

Имя МАКАР

Отчество ХАЁТУЛЛОВИЧ

Дата рождения 28.08.2004 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89029421847 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

2019 2 20 0 61

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	6	2	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

Ответ: выигрывает Артём — первым ходом он вычёркивает 9 букв, а затем после каждого хода Нади Артём вычёркивает букв так, чтобы его вычеркнутые только что буквы составили с вычеркнутыми последним ходом Нади буквами 10 вычеркнутых букв.

Почему это работает: Изначально (по условию) было 59 букв. Первым ходом Артём вычёркивает 9 букв — остаётся $59 - 9 = 50$ букв. Заметим, что $50 \vdots 10$. Надя может своим ходом вычеркнуть 1, 2, 8 или 9 букв (по усл.). Теперь заметим, что Артём своими ходами (после второго хода Нади.) сможет вычёркивать буквы так, чтобы его только что вычеркнутые буквы + вычеркнутые последним ходом буквы Нади $= 10$, т.к. Если Надя вычёркивает 1, то следующим ходом Артём 9 $(1+9=10)$; Если Надя вычёркивает 2, то Артём 8 $(2+8=10)$; Если Надя вычёркивает 8, то Артём 2 $(8+2=10)$; Если Надя вычёркивает 9, то Артём 1 $(9+1=10)$ букв. Таким образом, т.к. $50 \vdots 10$, а дополняет до 10 Артём, то после 11-ого хода Артёма букв не останется, а очередь хода будет Нади $(50:10=5)$. Следовательно, Надя проиграет, причём придерживаясь этой стратегии Артём гарантирует себе победу.

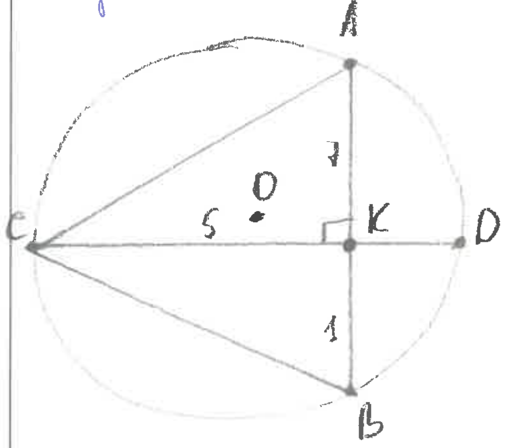
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 6 2 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2



Дано: окр $(O;R)$,
CD, AB – хорды
$CD \cap AB = K$, $CD \perp AB$
$AK = 7$, $KB = 1$, $CK = 5$
R – ?

Решение:

1. Проведём CA и CB. Т.к. $CD \perp AB$ (по усл), то $\triangle CKA$ – прям. и $\triangle CKB$ – прям.

2. В $\triangle CKA$ – прям. по Т Пифагора:
$CA^2 = CK^2 + AK^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74 \mid \Rightarrow CA = \sqrt{74}$
В $\triangle CKB$ – прям. по Т Пифагора:
$CB^2 = CK^2 + KB^2 = 5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26 \mid \Rightarrow CB = \sqrt{26}$

3. В $\triangle BCA$ по Т косинусов:
$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\angle C$, $AB = AK + KB = 7 + 1 = 8$
$2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\angle C = CA^2 + CB^2 - AB^2$
$\cos\angle C = \dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot CB} = \dfrac{74 + 26 - 64}{2 \cdot \sqrt{74} \cdot \sqrt{26}} = \dfrac{18}{\sqrt{74 \cdot 26}}$

4. По основному тригонометрическому тождеству:
$\sin^2\angle C + \cos^2\angle C = 1$
$\sin^2\angle C = 1 - \cos^2\angle C = 1 - \left(\dfrac{18}{\sqrt{74 \cdot 26}}\right)^2$
$\sin\angle C = \sqrt{1 - \dfrac{18}{\sqrt{74 \cdot 26}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{74 \cdot 26} - 18}{\sqrt{74 \cdot 26}}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{74 \cdot 26} - 18}}{74 \cdot 26} = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{37 \cdot 13} - 18}}{74 \cdot 26}$

5. $\triangle CBA$ – вписанный, а окр $(O;R)$ – описанная около $\triangle CBA$

Дальше вычисления неверные из-за арифм. ошибки.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	7	6	2	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2 (продолжение)

6. По Т синусов в $\triangle CBA$:

$\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$, где R — радиус окр $(O;R)$ (см. 5)

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle C} = \frac{8}{2\cdot\frac{\sqrt{2\sqrt{37\cdot13}-18}}{74\cdot\cancel{26}\,13}} = \frac{8\cdot74\cdot13}{\sqrt{2\sqrt{37\cdot13}-18}} = \frac{7696}{\sqrt{2\sqrt{481}-18}}$$

Ответ: $R = \frac{7696}{\sqrt{2\sqrt{481}-18}}$

Задача 4

Мы хотим найти такие $\overline{abcd}$, что $\overset{\geq1}{d}\overline{cba}\cdot n = \overset{\geq1}{a}\overline{bcd}$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ (т.к. по усл. $\overline{abcd} \neq \overline{dcba}$) и $\overline{abcd}$ — нечётное.

Т.к. $\overline{abcd}$ — нечётное $|\Rightarrow d$ — нечётное.

Если $n \geq 10$, то $\overline{abcd}$ получается как минимум пятизначным, а по условию $\overline{abcd}$ — четырёхзначное число. Следовательно, $n \leq 9$. Если n — чётное, то $\overline{abcd}$ должно получится чётным, но по условию $\overline{abcd}$ — нечётное $|\Rightarrow n$ — нечётное. Из выше сказанных утверждений следует, что n принимает значения 3, 5, 7 или 9.

Если $d \geq 4$, то $\overline{abcd}$ — как минимум пятизначное число (т.к. $n \geq 3$), но по условию $\overline{abcd}$ — четырёхзначное $\Rightarrow$ $\Rightarrow d \leq 3$, а т.к. d — нечётное (по усл.), то d принимает значения 1 или 3.

Рассмотрим случай, когда $d = 3$. Тогда $n = 3$, т.к. иначе $\overline{abcd}$ — пятизначное:

$\overline{3cba}\cdot 3 = \overline{abc3}$ $|\Rightarrow a$ может быть только 1 (т.к. $a\cdot3$ заканчивается на 3 только при $a=1$, $a \leq 9$, т.к. a — цифра числа) $|\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{3cba}\cdot3 = \overline{1bc3}$ $|\Rightarrow \overline{3cb1} > \overline{1bc3}$ $|\Rightarrow \overline{3cb1}\cdot 3 > \overline{1bc3}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	6	2	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4 (продолжение)

Следовательно, $d = 1$:

$\overline{1cba} \cdot n = \overline{abc1}$

Рассмотрим 4 случая значения n (3, 5, 7, 9):

1) $\overline{1cba} \cdot 3 = \overline{abc1} \Rightarrow a = 7$ (иначе число $\overline{abcd}$ не заканчивалось бы на 1)

$\overline{1cb7} \cdot 3 = \overline{7bc1}$, но $\overline{1cb7} \cdot 3 < 5000$, а $\overline{7bc1} > 6000$ ⊗

2) $\overline{1cba} \cdot 5 = \overline{abc1}$, но тогда, т.к. $a \geq 1$, то число $\overline{abcd}$ должно заканчиваться на 5, а оно заканчивается на 1 ⊗

3) $\overline{1cba} \cdot 7 = \overline{abc1} \Rightarrow a = 3$ (иначе число $\overline{abcd}$ не заканчивалось бы на 1)

$\overline{1cb3} \cdot 7 = \overline{3bc1}$, но $\overline{1cb3} \cdot 7 \geq 7000$, а $\overline{3bc1} < 4000$ ⊗

4) $\overline{1cba} \cdot 9 = \overline{abc1} \Rightarrow a = 9$ (иначе число $\overline{abcd}$ не заканчивалось бы на 1)

$\overline{1cb9} \cdot 9 = \overline{9bc1}$, теперь если ~~c или~~ $c \geq 2$, то $\overline{9bc1}$ должно быть пятизначным, но по условию оно четырёхзначное $\Rightarrow$ ~~$\{c \leq 1,\ c \geq 0$~~ $\{c \leq 1,\ c \geq 0$

~~Проверим 4 возможных случая:~~

~~1009 · 9 = 9001 — неверно, т.к. 1009 · 9 = 9081~~

$\overline{1109} \cdot 9 = \overline{9011}$

~~1019 · 9 = 9101~~

~~1119 · 9 = 9111~~

Пусть $c = 1$, тогда

$1109 \cdot 9 = 9981$

$1119 \cdot 9 = 10071$

следует, что не получается $\Rightarrow$

$\Rightarrow c = 0$:

$\overline{10b9} \cdot 9 = \overline{9b01}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 0 7 6 2 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4 (продолжение)

Переберём все возможные значения b ($b \in N$, b = от 0 до 9)

$1009 \cdot 9 = 9001$ – неверно, т.к. $1009 \cdot 9 = 9081$

$1019 \cdot 9 = 9101$ – неверно, т.к. $1019 \cdot 9 = 9171$

$1029 \cdot 9 = 9201$ – неверно, т.к. $1029 \cdot 9 = 9261$

$1039 \cdot 9 = 9301$ – неверно, т.к. $1029 \cdot 9 = 9351$

$1049 \cdot 9 = 9401$ – неверно, т.к. $1049 \cdot 9 = 9441$

$1059 \cdot 9 = 9501$ – неверно, т.к. $1059 \cdot 9 = 9531$

$1069 \cdot 9 = 9601$ – неверно, т.к. $1069 \cdot 9 = 9621$

$1079 \cdot 9 = 9701$ – неверно, т.к. $1079 \cdot 9 = 9711$

$1089 \cdot 9 = 9801$ – верно!

$1099 \cdot 9 = 9901$ – неверно, т.к. $1099 \cdot 9 = 9891$

Из всех выше сказанных утверждений следует, что под условие задачи подходит одно единственное число $\overline{abcd}$ – 9801

Ответ: одно число – 9801

Задача 3

$abc(a+2b+3c) = \frac{1}{6}$ $\Leftrightarrow$ $a+2b+3c = \frac{1}{6abc}$

$a+2b = \frac{1}{6abc} - 3c$, $a+3c = \frac{1}{6abc} - 2b$

$(a+2b)(a+3c) \geq 2$

$\left(\frac{1}{6abc} - 3c\right)\left(\frac{1}{6abc} - 2b\right) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{36a^2b^2c^2} - \frac{1}{3ac} - \frac{1}{2ab} + 6b \geq 2c$

$\Leftrightarrow \frac{1 - 12ab^2c - 18abc^2}{36a^2b^2c^2} + 6b \geq 2$ – верно # ?

Почему это верно?

Лист 5 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ул. Борисова, 5

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	6	7	4	1	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Дудина

Имя Анастасия

Отчество Александровна

Дата рождения 03.10.2004 **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8(913)056-98-44 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК» 20 | 20 | 20 | 5 | 15 80

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 7 | 4 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

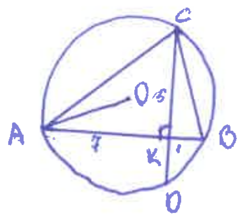
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. Выигрышная стратегия есть у Артёма.

1-й ход. Артём вычёркивает 9 букв. Таким образом, остаётся 50 букв. Нетрудно заметить, что дальше любое вычеркнутое Надей число букв Артём своим ходом может превратить в 10 вычеркнутых букв. (Н-1; А-9; Н-8; А-2 и наоборот). 50 : 10 => последний ход сделает Артём.

Ответ: Артём. Сначала 9, потом дополнять вычёркивание Нади до 10 букв.

№2.



Дано: окр. O; $AB \perp CD$; $AK=7$; $KB=1$; $CK=5$.

Найти: $OA=?$

Решение

Доп. построения: хорды AC и CB.

Окружность O описана вокруг $\triangle ABC$

$\Downarrow$

$$R=OA=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{\triangle ABC}}$$

$CD \perp AB$

$\Downarrow$

По th Пифагора: $AC=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$

$BC=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$

$AB=AK+KB=8$

$$R=\frac{\sqrt{74}\cdot\sqrt{26}\cdot 8}{4\cdot 0{,}5\cdot \underset{CK-h_{\triangle ABC}}{5}\cdot 8}=0{,}2\sqrt{481}=OA$$

Ответ: $0{,}2\sqrt{481}$.

№3. $abc(a+2b+3c)=\frac{1}{6}$

$bc(a^2+2ab+3ac)=\frac{1}{6}$

$12bc(a^2+2ab+3ac)=2$

Предположим, что $(a+2b)(a+3c)<2$. Тогда:

$(a+2b)(a+3c)-12bc(a^2+2ab+3ac)=(a^2+2ab+3ac)(1-12bc)+6bc=$

$=6bc(1-2(a^2+2ab+3ac))+a^2+2ab+3ac<0$

Обозначим $n=6bc$; $x=a^2+2ab+3ac$

Заметим, что $n>0$ и $x>0$ (сумма и произведение положительных

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	6	7	4	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

чисел всегда положительны). Подставим эти переменные в полученное неравенство:

$n(1-2x)+x<0$

$n-2xn+x<0$

$n+x<2xn$

x и n положительны => полученное неравенство верно только при $\begin{cases} n>1 \\ x>1 \end{cases}$. (число $\in (0;1)$ уменьшает произведение и увеличивает сумму => знак неравенства будет противоположным. При $\begin{cases} x=1 \\ n=1 \end{cases}$, неравенство принимает вид $2<2$, что неверно).

Но в исходном равенстве $\frac{1}{6}nx=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}\cancel{6}nx=\frac{1}{6}$

Верно.

$nx=1$

$\Downarrow$

при $n>1$, $x<1$ и наоборот (произведение взаимно обратных чисел равно 1 и только оно).

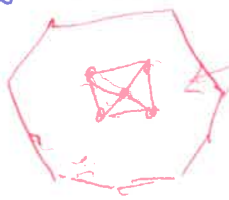
Это противоречит выводу из предположения => оно неверно.

Таким образом, $(a+2b)(a+3c)-12bc(a^2+2ab+3ac)\geq 0$

$(a+2b)(a+3c)-2\geq 0$

$(a+2b)(a+3c)\geq 2$, что и требовалось доказать.

№5. Треугольников, в которых задействованы 2 вершины 24-угольника, при любом количестве точек (КТ) 24. Количество Δ, в которых задействована 1 вершина 24-угольника, равно КТ. Количество Δ, в которых задействованы только поставленные точки, равно (КТ − 2)? Почему? Таким образом,



внутри 5 точек, тр-в, в к-х задейств. только эти точки — 4.

$24+KT+KT-2>50$

$2KT+22>50$

$2KT>28$

$KT>14$

$\Downarrow$

$KT_{наим}=15$

Д-во исходит из частного случая расположения точек

Ответ: 15 точек.

№4. Отношение двух этих чисел не может быть чётным, т.к. исходные числа нечётны, а первая цифра полученного числа будет нечёт.

Первая и последняя цифра в исходном числе при умножении на одно и то же число должны оканчиваться друг на друга и при этом последняя цифра; вернее, её произведение с выбранным множителем не может быть больше 9. Т.о., среди множителей остаются лишь 3, 5, 7, 9, а среди цифр 1, 3, 5, 7, 9.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	6	7	4	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим комбинации, соответствующие условию:

цифра, на к. оканчивается произведение	П	
1	7 · 3 9 · 9	
3	7 · 9	
5	5 · 5 3 · 5 7 · 5 9 · 5	
7	9 · 3	
9	3 · 3 7 · 7	9 · 1

Почти все эти произведения больше 9, то есть не подходят (проверка это подтвер~~ждает~~дила). 9 и 3 · 3 так же не удастся собрать в одном числе. Следовательно, чисел удовлетворяющих условию не существует.

Ответ: таких чисел нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ул. Борисова, 5

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	7	5	1	9	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Храпенков

Имя Степан

Отчество Сергеевич

Дата рождения 21 03 2004 **Класс** 9

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89233415758 **Подпись** ______

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

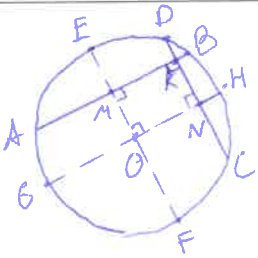
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК» 20 20 20 15 15 90

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 5 | 1 | 9 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

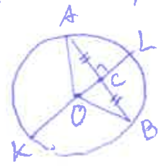
№2.



Дано: окр$(O;R)$, AB и CD – хорды, $AB \perp CD$ и $AB \cap CD =$ т. K.
$AK=7$; $BK=1$; $DK=?$; $CK=5$.
Найти: R

Решение:

1) Д.п. EF и GH - диаметры, $EF \perp AB$, $GH \perp CD$. 2) По свойству хорд $\frac{AK}{CK}=\frac{DK}{BK} \Rightarrow DK = \frac{AK \cdot BK}{CK} = \frac{7\cdot 1}{5}=\frac{7}{5}$. 3) Т.к. EF – диаметр, AB – хорда и $EF \perp AB$, то $AM=MB$, аналогично $GH \perp DC \Rightarrow DN=NC$ (доказательство:



$\triangle AOC = \triangle BOC$ по гипотенузе и катету ($AO=OB=R$, OC – общий) $\Rightarrow$ $\Rightarrow AC=CB$)

4) из 3-го пункта $\Rightarrow$ $AM=\frac{1}{2}(AB)=\frac{1}{2}(AK+BK)=\frac{1}{2}\cdot 8=4$; 5) По свойству хорд $MF : AM = MB : EM \Rightarrow MF\cdot EM = AM \cdot MB \Rightarrow (OF+MO)(OE-MO)=AM^2=16$, $OF=EO=R \Rightarrow (R+MO)(R-MO)=16 \Rightarrow R^2-MO^2=16$. 6) С другой стороны, $MO=KN$ (в прямоугольнике $OMKN$) $\Rightarrow MO = ND-KD = \frac{1}{2}CD-KD = \frac{1}{2}(KD+KC)-KD = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}+5\right)-\frac{7}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{5}-\frac{7}{5} = \frac{32}{10}-\frac{14}{10}=\frac{18}{10} \Rightarrow R^2-\left(\frac{18}{10}\right)^2=16 \Rightarrow R=\sqrt{16+\left(\frac{18}{10}\right)^2} = \sqrt{16+\frac{324}{100}} = \sqrt{16+3{,}24} = \sqrt{19{,}24} = 0{,}2\sqrt{481} \approx 0{,}2\cdot 22 \approx 4{,}4$.

Ответ: $R=0{,}2\sqrt{481} \approx 4{,}4$.

№1. Заметим, что вычеркнув любое количество букв: 1, 2, 8 или 9, 2-й игрок сможет вычеркнуть такое число букв, что после 2-х ходов вычеркнется 10 букв: $\underbrace{-1, -9}_{-10}$, $\underbrace{-2, -8}_{-10}$ ... . Если Артём вычеркнет 9 букв, то останется 50 букв. После любого хода Нади, Артём вычеркнет столько букв, сколько нужно, чтобы в результате 2-го хода (хода Нади) и 3-го хода (хода Артёма) вычеркнулось 10 букв. Таким образом, когда останется 10 букв, сколько бы ни вычеркнула букв Надя, Артём вычтет такое число букв, что вычеркнутся все буквы и Надя не сможет сделать ход. Пример:

1) Артём: −9, осталось: 50 2) Надя: −1, осталось: 49 3) Артём: −9, осталось: 40 4) Надя: −8, ост: 32 5) Артём: −2, ост. 30 6) Надя: −2, ост. 28 7) А: −8, ост: 20

8) Надя: −9, ост: 11; 9) Артём: −1, ост: 10 10) Н: −2, ост. 8 11) А: −8 ост. 0. (Артём оставляет после себя круглое число букв.

Ответ: при правильной игре выиграет Артём

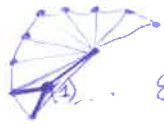
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 5 | 1 | 9 | 2 | 0

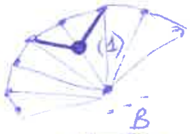
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

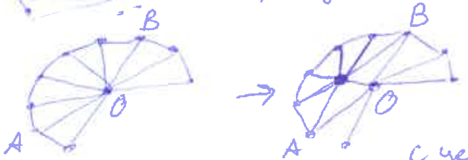
№5. Если поставить (нарисовать) внутри многоугольника 1 точку, то очевидно, что треугольников будет 24. ① Соединять вершины многоугольника с его другими не выгодно, так как мы оставляем в неиспользовании его вершины, которые остались отрезанными диагональю: (① ①) (вершины 1 и 2 мы никак не используем). Поэтому вершины нужно соединять только с точками внутри. После того, как мы поставили 1-ю точку, 2-ю точку мы можем поставить куда угодно, и количество треугольников увеличится на 2! :

1) 

(Ставим точку 1 так, чтобы она не попала на другой отрезок (ставим внутрь треугольника) — треугольников теперь на 2 больше.

2) 

Ставим точку на какой-либо отрезок (сторону треугольника, но не сторону многоугольника) — треугольников на 2 больше.

3) 

(В „секторе" от точки A до точки B было 5 треугольников, но поставив точку и соединив её с центральной (первой) — т. O а ещё отсоединив от т. O и присоединив к новой точке отрезки, мы получили 7 треугольников — на 2 больше!

Таким образом, если при первой поставленной внутрь многоугольника точке у нас было 24 треугольника (т.к. было 24 вершины), то с каждой новой поставленной точкой количество треугольников будет увеличиваться на 2, куда угодно, поэтому, чтобы число треугольников превысило 50, нужно ещё $(50-24+1)=27$ треугольников, то есть $\frac{27}{2}$ ещё 14 точек (ведь $\frac{27}{2}=13$(ост. 1), но мы округляем в большую сторону). Значит всего будет 15 точек.

Ответ: минимум 15 точек

Сначала ставят все точки, потом их соединяют. Нет д-ва, что число треуг. в такое ...

№4. Во-первых, так как искомые ~~данные~~ четырёхзначные числа ($\overline{abcd}$) должны быть нечётными, то последняя цифра — нечётна ⇒ числа ($\overline{dcba}$), которым кратны искомые числа, начинаются на нечётную цифру. Более того, первая цифра в числе $\overline{dcba}$ (число, которому кратно искомое число $\overline{abcd}$) ~~меньше~~ меньше 5, ведь это число минимум в 2 раза меньше искомого $\overline{abcd}$, а $\overline{abcd}$ — четырёхзначное. Поэтому цифра d в числе $\overline{dcba}$ равна либо 1, либо 3 (d — нечёт. и $d<5$). То есть, т.к. $\underset{(9)}{a\in\{1;2;\dots;9\}}$, $\underset{(10)}{b\in[0;9]}$, $\underset{(10)}{c\in[0;9]}$, $\underset{(2)}{d\in\{1,3\}}$ ⇒ уже чисел не больше $9\cdot10\cdot10\cdot2 = 1800$.

Какие могут быть числа: 1) 2...1 ⋮ 1...2; 3...1 ⋮ 1...3; 4...1 ⋮ 1...4; ...; 9...1 ⋮ 1...9

2) 2...3 ⋮ 3...2; или 4...3 ⋮ 3...4; 5...3 ⋮ 3...5; ...; 9...3 ⋮ 3...9

В 1-м и во 2-м ряду возможные числа — только такие: 9...1 ⋮ 1...9 или 9...3 ⋮ 3...9, т.к. не считая 1, только 9^2 даёт в единицах 1 и т.к. цифры a и d должны быть кратны. Например: нет таких 8**3 ⋮ 3**8, ведь *3 ⋮ 8, и т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	5	1	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 $abc(a+2b+3c)=\frac{1}{6} \Rightarrow a(a+2b+3c)=\frac{1}{6bc}$

$(a+2b)(a+3c)\geqslant 2 \Rightarrow a^2+3ac+2ab+6bc\geqslant 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(a+3c+2b)+6bc\geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{6bc}+6bc\geqslant 2$, или т.к.

$bc=\frac{1}{6a(a+2b+3c)}$, то $a(a+3c+2b)+\frac{1}{6a(a+2b+3c)}\geqslant 2$.

Пусть $6bc=k$

То есть нужно доказать, что $\frac{1}{k}+k\geqslant 2$.

$\frac{1}{k}+\frac{k^2}{k}\geqslant 2$ $\quad \frac{1+k^2}{k}\geqslant 2$. Т.к. $k^2-1=(k-1)(k+1)$ то

$k^2=(k-1)(k+1)+1 \Rightarrow \frac{1+(k-1)(k+1)+1}{k}\geqslant 2 \Rightarrow \frac{2+(k-1)(k+1)}{k}\geqslant 2$

$\frac{2+(k-1)(k+1)}{k}-2\geqslant 0 \quad \frac{1+k^2}{k}-\frac{2k}{k}\geqslant 0 \quad \frac{1-2k+k^2}{k}\geqslant 0$

$\frac{(1-k)^2}{k}\geqslant 0$ Т.к. $k>0$, $(1-k)^2\geqslant 0 \Rightarrow$ верно, значит

$\frac{1}{k}+k\geqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{6bc}+6bc\geqslant 2$ при любых $b,c>0$.

Или: $\quad \frac{1}{6bc}+6bc\geqslant 2 \quad \frac{1}{6bc}+\frac{(6bc)^2}{6bc}-2\geqslant 0$

$\frac{1+(6bc)^2-2\cdot(6bc)}{6bc}\geqslant 0 \quad \frac{1-2\cdot 1\cdot 6bc+(6bc)^2}{6bc}\geqslant 0 \quad \frac{(1-6bc)^2}{6bc}\geqslant 0$

при любых $b,c>0$; ч.т.д.

№4. Продолжение:

Итак, возможные числа: 9…1 ⋮ 1…9 или 9…3 ⋮ 3…9 – неверно, т.к. $9\cdot 3 \neq *3$ ⇒ только 1 вариант: 9…1 ⋮ 1…9

9…81 ⋮ 18…9 $\quad$ 9171 ⋮ 1719

Не засчитано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КГЭУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	6	6	5	5	2	0

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 3

Фамилия АБДУЛЛАЕВ

Имя АЛМАЗ

Отчество РУСЛАНОВИЧ

Дата рождения 6 апреля 2004 **Класс** 9

ОУ, местоположение Инженерный лицей-интернат КНИТУ-КАИ

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7 927 910 07 46 **Подпись**

+7 927 423 91 37

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

20 0 20 2 15

57

Вариант № 3

М А 0 0 0 0 6 6 5 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) $\begin{cases} abc(a+5b+c)=\frac{1}{5} \\ (a+5b)(a+c)\geq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} abc(a+5b+c)=\frac{1}{5} \\ a^2+ac+5ba+5bc\geq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5bc(a^2+5ba+ac)=1 \\ a^2+5ba+ac+5bc\geq 2 \end{cases}$

$\cancel{5bc}\begin{cases} a^2+5ba+ac=\frac{1}{5bc} \\ a^2+5ba+ac+5bc\geq 2 \end{cases}$

$\frac{1}{5bc}+5bc\geq 2$

$\frac{1+25b^2c^2}{5bc}\geq 2$

$25b^2c^2+1\geq 10bc$

$25b^2c^2-10bc+1\geq 0$

$(5bc-1)^2\geq 0$

$(5bc-1)^2$ не может быть меньше нуля.

Доказано

1) Победит Чук (при правильной игре). Чтобы победить, нужно сначала взять 4 ореха (Чуку), а дальше смотря как ходит Гек. Если Гек берёт 4 ореха, то Чук 6; если

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 5 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5, то и Чук 5; если 6, то 4; $\left(\begin{array}{ccc} \text{Гек} & & \text{Чук} \\ 5 & + & 5 = 10 \\ 4 & + & 6 = 10 \\ 6 & + & 4 = 10 \end{array}\right)$. И

так до конца. В конце останется 0 орехов, и ход будет Гека. (Чук победитель)

Если Чук возьмёт вначале 5 орехов, то Гек возьмёт 6 и будет повторять противоположную тактику $\left(\begin{array}{ccc} \text{Чук} & & \text{Гек} \\ 6 & + & 4 = 10 \\ 5 & + & 5 = 10 \\ 4 & + & 6 = 10 \end{array}\right)$, в конце останется 3 ореха и ход будет Чука (Гек победил)

Если Чук возьмёт вначале 6 орехов, то Гек берёт 5 и дальше всё повторяется. (В конце также останется 3 ореха и ход будет Чука) (Гек победитель

Ответ: Победит Чук (тактика для победы описана в начале)

~~4) Нужные числа: все которые оканчиваются нулём~~

5) Поставим сначала одну точку, получилось 30 треугольников. Если внутри какого-нибудь треугольника поставить точку, то он разобьётся на 3 (), то есть прибавится

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 5 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа.

два треугольника. До 60 нам нужно ещё 30 треугольников, или 30:2=15 точек ещё. Чтобы число треугольников превысило 60, добавим ещё одну точку. В итоге у нас 1+15+1=17 точек

Ответ: 17 точек.

Не д-но, что не зависит от посл-ти соединения точек. Если поставить несколько точек, а потом соединить, 30 тр-в не будет

4) Нужные числа: 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000. Все числа у которых последняя ноль, а остальные ~~либо~~ + одинаковые цифры или ноль (примеры: 1010; 9990; 8080, 7700 и т.д.), все числа у которых 1,3 одинаковые, последняя ноль, а вторая любая цифра (~~8780~~ примеры: 8780; 9190; 1310 и т.д.)

Число не записывается как 000а.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	7	0	5	3	2	0

Борисова 5

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия БЕКЕТОВ

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество ПАВЛОВИЧ

Дата рождения 26.11.2003 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8-950-984-64-91 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 15 | 0 | 15

70

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	0	5	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

~~В сем~~ Ответ: Может выиграть Артём.

Решение: т.к. Артём ходит первым, то ему нужно отнять от 59 букв 9 букв, чтобы получилось 50 букв, а после, отнимать такое количество букв, чтобы при сложении его (кол-ва букв) с кол-вом букв которое отняла Надя образовывалось 10 букв.

например Надя отняла 2 буквы, тогда Артёму нужно отнять 8 букв.

А – кол-во букв после хода Артёма

Н – кол-во букв после хода Нади.

ходы Артёма и Нади:

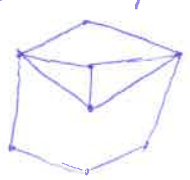
	59			
	50			А
49	48	42	41	Н
40	40	40	40	А
39	38	32	31	Н
30	30	30	30	А
29	28	22	21	Н
20	20	20	20	А
19	18	12	11	Н
10	10	10	10	А
9	8	2	1	Н
0	0	0	0	А – у Нади не осталось ходов.

№ 5

Представим, что в многоугольнике есть 2 типа треугольников, образованных с помощью новых точек внутри, это внешние и внутренние Δ-ки. внешние Δ-ки образуются с помощью двух точек многоуг. и одной точки внутри, а внутренние с помощью двух точек внутри и одной точкой многоуг. или трёх точек внутри. т.к отрезки не пересекаются, то кол-во внешних Δ-ков равно кол-ву точек многоуг. например в данном многоуг. будет 24 внешних Δ-ка, а значит чтобы кол-во Δ превысило 50 нужно ещё 27 внутренних Δ.

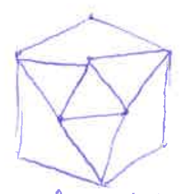
рассмотрим закономерность:

если 2 внут. точки



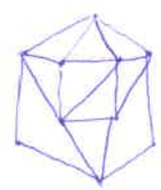
2 внут Δ-ка

если 3 внут точки



4 внут Δ-ка

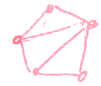
если 4 внут точки



6 внут Δ-ка.

4 тр-ка

3 тр-ка



5 точек

Зависит от расп.

из закономерности можно сделать вывод, что при добавлении 1-ой точки образуется ещё 2 внут. Δ-ка. ~~т.к нужно 27 внут. значит по закономерности нужно поставить 14 точек.~~

А значит, что ровно 27Δ мы сделать не можем, поэтому нужно 28Δ-ов, а для этого, следуя из закономерности нужно поставить 15 точек.

Ответ: 15 точек

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 0 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

$abc(a+2b+3c)=\frac{1}{6}$ $\quad (a+2b)(a+3c)\geq 2$

$a^2+2ab+3ac+6bc\geq 2$

$a(a+2b+3c)+6bc\geq 2 \quad |\cdot bc$

$abc(a+2b+3c)+6b^2c^2\geq 2bc$

$\frac{1}{6}+6b^2c^2-2bc\geq 0$

произведём замену $bc=x \Rightarrow x\geq 0$

$6x^2-2x+\frac{1}{6}\geq 0$

$6x^2-2x+\frac{1}{6}=0$

$D=4-4=0$, $\Rightarrow$ 1 корень $\Longrightarrow 6x^2-2x+\frac{1}{6}=(x-\frac{1}{6})^2\cdot 6\geq 0$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

произведём обратную замену $x=bc \Rightarrow bc=\frac{1}{6} \Rightarrow$

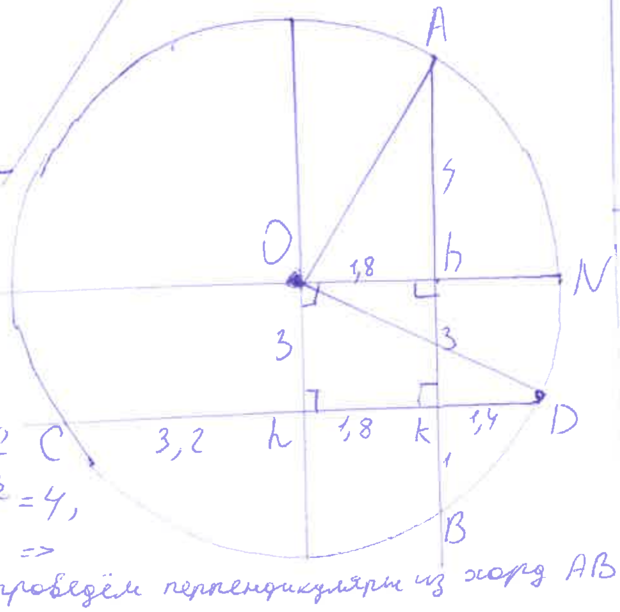
$\Rightarrow \frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}^2-2\,\frac{1}{6}\geq 0$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{2}{6}\geq 0$

$\frac{2}{6}-\frac{2}{6}\geq 0$

$0\geq 0$ #

N 2



Дано:
$AK=7$
$KB=1$
$CK=5$
$б-?$

Решение:

по св-ву хорд в окр. $\Rightarrow AK\cdot KB=CK\cdot KD \Rightarrow$

$\Rightarrow KD=1,4$

поставим точки h и L, которые делят хорды пополам. $\Rightarrow Ah=hB=\frac{AK+KB}{2}=4$,

$CL=LD=\frac{CK+KD}{2}=3,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow hK=3$, $LK=1,8$. проведём перпендикуляры из хорд AB и CD из точек h и L.

т.к $AB\perp CD$ и перпендикуляры исходят из центр хорд $\Rightarrow$ они проходят через центр O

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 5 | 3 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

продолжение №2

т.к $LK \parallel Oh$ и все углы в $OhKL = 90°$ $OL \parallel hK \Rightarrow OhKL$ прямоугольник $\Rightarrow Oh = LK = 1{,}8$ и $OL = hK = 3$. проведём отрезки OA и OD, которые являются радиусами

по теореме пифагора – $OA = \sqrt{(Oh)^2 + (hA)^2}$ (потому что $\triangle OhA$ прямоугольник)

$OA = \sqrt{16 + 3{,}24} = \sqrt{19{,}24}$ $\quad LD = LK + KD = 1{,}8 + 1{,}4 = 3{,}2$

также по теореме пифагора $OD = \sqrt{(OL)^2 + (LD)^2} = \sqrt{9 + 10{,}24} = \sqrt{19{,}24}$

т.к OA и OD радиусы и $OA = OD = \sqrt{19{,}24}$ значит ошибок не было, а значит $r = OA = OD = \sqrt{19{,}24}$

Ответ: $r = \sqrt{19{,}24}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	9	3	6	3	2	0

Борисова, 5

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ДИДЕНКО

Имя АЛИНА

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 06.01.2004 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89135778126 **Подпись** Алин/

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК» 10 20 15 20 15 90

Вариант № 2 М А 0 0 0 0 9 3 6 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Нужно понять, что когда к тебе переходит ход и осталось только 1, 2, 8 или 9 букв, то ты победил, т.к. можешь забрать за один ход. Я хочу отметить выигрышные позиции (0), это те из которых можно походить в проигрышную.

10	19	28	37	46		
9	18	27	36	45	54	
8	17	26	35	44	53	
7	16	25	34	43	52	59
6	15	24	33	42	51	58
5	14	23	32	41	50	57
4	13	22	31	40	49	56
3	12	21	30	39	48	55
2	11	20	29	38	47	
1						

3 - это проигрышная, т.к. из неё можно походить только в 1 или 2, и тогда соперник выиграет. Далее к проигрышной позиции добавляем 1, 2, 8 и 9, получаются выигрышные.

59 - это выигрышная позиция, значит, если первый игрок, то есть Артём, будет ходить в проигрышные (неотмеченные) позиции, то он, независимо от ходов Нади, выиграет.
Ответ: выиграет Артём. Не показано, что эти позиции доступны, т.е. что можно построить цепочку ходов

4. Нечетные числа оканчиваются на 1, 3, 5, 7 или 9. Рассмотрим случай, когда число оканчивается 9: (_ _ _ 9), обратное ему будет начинаться на 9 (9 _ _ _), тогда для кратности оно должно умножаться минимум на 2 (если домножить на 1, получится то же число), но 9×2 = 18, будет переход разряда и число уже станет 5-ным. Такая же ситуация с 7 и 5 на конце (7×2 = 14, 5×2 = 10).
Теперь рассмотрим ситуацию с 3 на конце:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 9 3 6 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(_ _ _ 3) должно быть кратно числу с 3 вначале (3 _ _ _). ~~3×1=3, 3×2=6, 3×3=9, 3×~~ 243 на конце дают только 3×1=3 и 7×9=63. Значит могут быть следующие варианты: 3 _ _ 3; 1 _ _ 3; 7 _ _ 3; 9 _ _ 3. Из этого списка можно вычеркнуть 7 _ _ 3 и 9 _ _ 3, т.к. 3×7=21, а 3×9=27 => будет переход разряда. 3 _ _ 3 не подходит, потому что числа в таком случае могут быть только равны, а 1 _ _ 3 не подходит, потому что меньше, чем 3 _ _ 1.

Остается только проверить числа с 1 на конце. 1 на конце дают: 1×1=1, 3×7=21, 9×9=81. Рассмотрим следующие варианты: 1 _ _ 1; 3 _ _ 1; 7 _ _ 1; 9 _ _ 1. 1 _ _ 1 не подходит, т.к. в таком случае числа равны; 3 _ _ 1 не подходит, т.к. 1 _ _ 3 × 7 ≈ 7 _ 21 (или больше из-за перехода через разряд); 7 _ _ 1 не подходит, потому что 1 _ _ 7 × 3 ≈ 3 _ 21 (или больше), но на первой позиции никогда не будет больше 5, т.к. при домножении на 3 максимальный переход через разряд это 2 (3×9=27).

9 _ _ 1 и 1 _ _ 9: 1 _ _ 9 нужно домножить на 9 9 _ $\overset{8}{\_}$ 1, причем на ~~выс~~ втором разряде у числа 1 _ _ 9 не может быть только один 1, иначе будет переход. 9 _ 11 и 11 _ 9, то есть 9011 и 1109 или 9111 и 1119 оба не подходят. 9001 и 1009; 1009×9 = ~~9081~~ 9081 => единственная пара чисел, это 9801 и 1089.

Действительно, 1089 × 9 = 9801

Ответ: 9801.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 9 3 6 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. Если в 24-угольник поставить одну точку, то его можно разбить также на 24 треугольника (каждой ~~точке~~ вершине принадлежащими 2 Δ, и в каждом Δ содержится по две вершины).

Далее, по ~~правилу~~ (свойству) трапеции, с каждой новой точкой появляются не более 2 треугольников. $50-24=26$; $\frac{26}{2}=13$

$\Rightarrow$ 14 ~~тре~~ точек могут разбить 24-угольник также на 50 Δ. А если поставить 15, то число треугольников превысит 50, что и требовалось в условии.

Ответ: 15 точек.

Точки могут быть соединены произвольным образом. Вы рассматриваете частный случай

3. $\frac{1}{6}\cdot 12=2$

$$\Rightarrow (a+2b)(a+3c) \overset{?}{\geq} 12abc(a+2b+3c)$$

$$1)\ a^2+2ab+3ac+6bc \overset{?}{\geq} 12abc(a+2b+3c)$$

$$a(a+2b+3c)+6bc \overset{?}{\geq} 12abc(a+2b+3c) \quad : \underset{(12abc(a+2b+3c))}{\overset{}{2}}$$

$$\frac{1}{12bc}+\frac{1}{2a(a+2b+3c)} \overset{?}{\geq} 1 \quad : bc$$

$$\frac{1}{12b^2c^2}+\frac{1}{2abc(a+2b+3c)} \overset{?}{\geq} \frac{1}{bc} \qquad 2abc(a+2b+3c)=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{12b^2c^2}+3 \overset{?}{\geq} \frac{1}{bc}$$

12bc

$$3 \overset{?}{\geq} \frac{1}{bc}-\frac{1}{12b^2c^2}$$

$$3 \overset{?}{\geq} \frac{12bc-1}{12b^2c^2}$$

$$3 \overset{?}{\geq} \frac{12bc}{12b^2c^2}-\frac{1}{12b^2c^2}$$

$3 \overset{?}{\geq} \frac{1}{bc} - \frac{1}{12b^2c^2}$

2) $a(a+2b+3c)+6bc \overset{?}{\geq} abc(12a+24b+36c)$

$a(a+2b+3c-12abc-24b^2c-36bc^2)+6bc \overset{?}{\geq} 0$

$a(a(1-12bc)+2b(1-12bc)+3c(1-12bc))+6bc \overset{?}{\geq} 0$

$a(1-12bc)(a+2b+3c)+6bc \overset{?}{\geq} 0$

$\cancel{1-12bc = 1-\frac{2}{a(a+2b+3c)}}$

Итак, по условию дано, что a, b, c положительны. Теперь осталось заметить, что утверждение 1: $3 \geq \frac{1}{bc} - \frac{1}{12b^2c^2}$ всегда верно, если $bc > \frac{1}{12}$.

полный квадрат

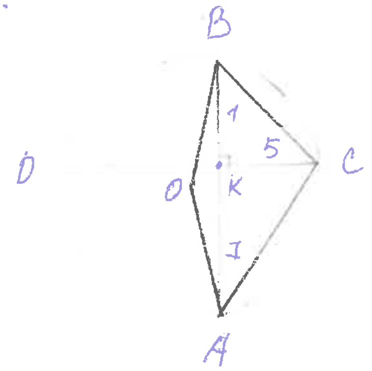
Неточно и не обосновано.

А утверждение 2: $a(1-12bc)(a+2b+3c)+6bc \geq 0$ верно, когда $bc \leq \frac{1}{12}$.

Значит, $(a+2b)(a+3c) \geq 2$ верно всегда (при ~~только~~ данных условиях).

ч.т.д.

2.



$BK = 1,\ AK = 7,\ CK = 5.$

$BC = \sqrt{26}$ (по т. Пифагора)

$AC = \sqrt{74}$

~~по т. косинусов:~~

$\cancel{64 = 26+74-2\cdot\sqrt{26}\cdot\sqrt{74}\cdot\cos x}$ (100)

$\cancel{18 = \sqrt{26}\cdot\sqrt{74}\cdot\cos x}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	9	3	6	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\cos\alpha = -\frac{18}{\sqrt{26\cdot 74}} = -\frac{18}{2\sqrt{13\cdot 37}} = -\frac{9}{\sqrt{481}}$

$\alpha = \angle BCA.$

~~$\angle BCA = 2(\angle 360 - \angle BOA)$~~

~~$\cos BOA = \cos$~~

$BK \cdot KA = BK \cdot KC$

$7 \cdot 1 = DK \cdot 5$

$DK = \frac{7}{5} = 1{,}4$

$\frac{abc}{4S} = R$ (радиус описаной окружности)

$a \cdot b \cdot c = 8 \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{74}$

$4S = 4 \cdot \frac{5\cdot 8}{2} = 80$

$R = \frac{8\cdot\sqrt{26}\cdot\sqrt{74}}{80} = \frac{2\sqrt{481}}{\cancel{8}\,10} = \frac{\sqrt{481}}{5}$

Ответ: $\frac{\sqrt{481}}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	6	5	7	2	2	0

ул. Борисова 5

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ДОЛЖЕНКОВА

Имя Софья

Отчество АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения 02.12.2004 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89029818385 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Вариант № 3 М А 0 0 0 0 6 5 7 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N3 a, b, c - положительные.
Известно:

$abc(a+5b+c) = \frac{1}{5} \Rightarrow a+5b+c = \frac{1}{5abc}$

Нужно доказать, что

$(a+5b)(a+c) \geq 2$

Раскроем скобки и вынесем общий множитель:

$a^2 + ac + 5ab + 5bc \geq 2$

$a(a+c+5b) + 5bc \geq 2$ (заменим $a+5b+c$ на $\frac{1}{5abc}$ из док. выше)

$\frac{\cancel{a}}{5\cancel{a}bc} + 5bc \geq 2$

$\frac{1}{5bc} + 5bc - 2 \geq 0$

$\frac{1}{5bc} + \frac{25b^2c^2}{5bc} - \frac{10bc}{5bc} \geq 0$

$\frac{(25b^2c^2 - 10bc + 1)}{5bc} \geq 0$ (Свернём квадрат)

$\frac{(5bc-1)^2}{5bc} \geq 0$ Т.к. по условию a, b, c - положительные $\Rightarrow 5bc > 0$ и $(5bc-1)^2 \geq 0$ т.к. квадрат всегда больше или равен 0 $\Rightarrow$ (из этого док-ва)

$\frac{(5bc-1)^2}{5bc} \geq 0$ # Т.к. эти преобразования доказаны, значит изначальное выражение тоже верно. $\Rightarrow (a+5b)(a+c) \geq 2$ #.

N4.

Нужно найти чётные четырёхзначные числа, которые кратны, но не равны этим же цифрам в обратном порядке. Т.к. числа чётные $\Rightarrow$ они должны оканчиваться на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8). Т.к. мы изначальное число переворачиваем и на получившееся число делим чётное число, то последняя цифра получившегося числа должна быть чётной (0, 2, 4, 6, 8) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ последняя цифра изначального числа чётная. Числа не оканчиваются на 0

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

МН00006572 20

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(Продолжение задачи № 4)
Т.к. числа не могут начинаться с 0. Получившееся число должно быть ~~больше~~ меньше изначального, потому что изначальное число кратно получившемуся. Если число (1) кратно второму, но не равно, то число 2 можно умножить на что-то и получить число 1.

Изначальное число:

2 _ _ _ 4 _ _ _ 6 _ _ _ 8 _ _ _

не может быть (начинаться с 2) т.к. второе число может начинаться с 2, 4, 6, 8 (послед. цифрой 1 числа), а значит второе число будет > или = первому, что противоречит условию.

число может заканчиваться только на 2. (т.к. второе число начин. с эт-ого числа и меньше первого)
I 4 _ _ 2
II 2 _ _ 4
На что можно умножить 4, чтоб получилась 2? На 3 и 8, но 2 при. на 3 и 8 даёт двухзначное число, а должна получиться 4 => этот вариант не подходит.

6 _ _ _
число не может ~~начинаться~~ заканчиваться с 6, т.к. оно будет кратно и равно начальному. число может заканчиваться на 4 и 2. (На 8 не может т.к. число II будет больше I)
I 6 _ _ 2
II 2 _ _ 6
На что можно умножить 6, чтоб получилась 2?
На 2 => $2\,x\,y\,6 \times 2 = 2\,\ldots\,6$. Значит чтоб в тысячах получил 6, надо добавить к 4 2, а два десятка должен дать x или y. max число $9 \times 2 = 18$, но тут нет 2 десятка => такого варианта нет.

I 6 _ _ 4
II 4 _ _ 6
6 можно умножить на 4 и 9 и получить 4, то
$4\_\_6 \times 4 =$ ① $6\_\_4$; $4\_\_6 \times 9 =$ ③ $6\_\_4$
а у нас четырехзначное число => не получится. => Такого варианта нет.

8 _ _ _ число не может заканчиваться на 0 и 8 (т.к. такого не получится) число может заканчиваться на 2, 4, 6.

I 8 _ _ 6
II 6 _ _ 8
8 можно умножить на 2 и получить последнюю цифру 6., но при умножении 6 на 2 получится 12 => число станет пятизначным, на 7 получится 42 =>

I 8 _ _ 4
II 4 _ _ 8
8 можно умножить на 8 и 3, но при умножении 4 на 8 и 3 получиться двухзначное число => всё число будет пятизначным.

I 8 _ _ 2
II 2 _ _ 8
8 можно умножить на 4 и 9, но $9 \times 2 = 18$ => число пятизначное, а 4 подходит.

$2\,x\,y\,8 \times 4 = 8\,y\,x\,2$
Теперь смотрим что можно умножить на 4, методом подбор. y не может быть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 т.к. даёт десяток к тысяче или

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	5	7	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

число не получается. А 7 подходит, проверим: (Продолжение задачи № 4)

$$\times\begin{array}{r} \overset{3}{2}\overset{3}{x}78 \\ 4 \\ \hline 8712 \end{array} \Rightarrow x \text{ равен } 1. \Rightarrow \times\begin{array}{r} 2\overset{3}{1}\overset{3}{7}8 \\ 4 \\ \hline 8712 \end{array}$$

Число получилось. Значит 8712 кратно 2178.

Значит существует только одно чётное четырёхзначное число, которое кратно, но не равно числу, записанному теми же цифрами, но в обратном порядке — 8712

Ответ: ~~8412~~ 8712

№1.

Всего 84 ореха. Можно брать 4 или 5 или 6.

Значит победитель последним ходом должен взять орехи, чтобы после него осталось либо 0, либо 1, либо 2, либо 3 ореха. Если после него остаётся 0 орехов, то он выигрывает. Значит предпоследним ходом участник берёт орехи из кучки, где не может взять орехи все и где оставляет 4, 5, 6, 7, 8, 9 орехов. (Чтоб взял победитель и осталось или 0, или 1, или 2 и 3)

Рассмотрим примеры ходов:

4+5=9	5+4=9	5+6=11
4+4=8	5+6=11	6+6=12
4+6=10	5+5=10	6+4=10

10 орехов можно слопить при любой комбинации. Значит предпоследний ход будет 10 орехов, то проигравший какое-либо число орехов не взял, то последний сможет забрать всё оставшиеся орехи и выиграть.

Что бы проигравший ходил в последний раз, когда орехов 10, то победитель должен каждый раз подстраивать число орехов кратное 10 после себя. Т.к. 84 не кратно 10, то первый игрок выиграет, если первым ходом сделает кол-во орехов : 10, а далее будет делать ходы после второго и добивать 10.

Пример:

• 84 − 4	• 46 − 6	10 − ~~4~~	10 − 5	10 − 6
80 − 5	40 − 4	• 6 − 6 = 0	• 5 − 5 = 0	• 4 − 4 = 0
• 75 − 5	• 36 − 6			
70 − 6	30 − 5			
• 64 − 4	• 25 − 5			
60 − 5	20 − 4			
• 55 − 5	• 16 − 6			
50 − 4				

Значит Чук победит, если будет брать орехи так, что его соперник должен брать орехи, число которых кратно 10.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 5 7 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

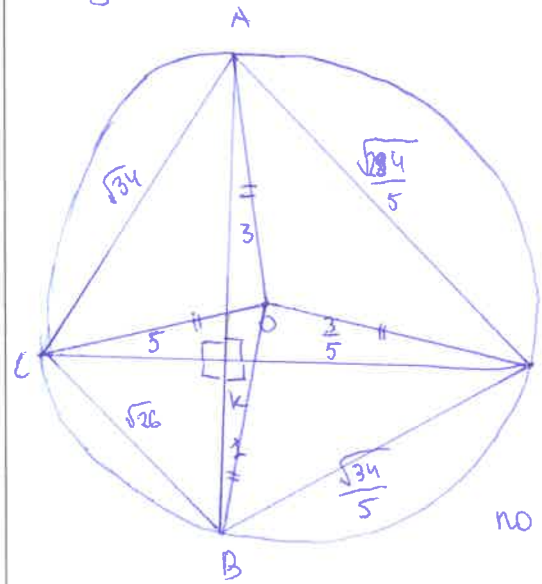
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

В конце оставлять 1, 2, 3 ореха не выгодно, т.к. тогда победитель должен сделать так, чтобы соперник ходил, когда число орехов кратно 11, 12, 13, а за два хода (свой и соперника) эти числа можно не набрать (если соперник возьмет 4, то max будет $4+6=10$ орехов, а $10<11$; <12; <13). Значит предыдущая стратегия единственная.

Ответ: победит Чук, если будет брать орехи так, что его соперник должен брать орехи, число которых кратно 10.

(Задача № 1 - продолжение)

Задача № 2



Дано:
$\omega(O; r)$
$AB \cap CD = K$
$AB \perp CD$
$AK = 3$
$KB = 1$
$CK = 5$

$r - ?$

Решение:

по св-ву $CK \cdot KD = AK \cdot KB$

$KD = \frac{AK \cdot KB}{CK} = \frac{3 \cdot 1}{5} = \frac{3}{5}$

Т.к. $AB \perp CD$, то

$\triangle CAK$, $\triangle AKD$, $\triangle BKD$, $\triangle CKB$ - прямоугольные, то по теореме Пифагора:

$CB = \sqrt{CK^2 + KB^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$BD = \sqrt{1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{34}{25}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$

$AD = \sqrt{9 + \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{234}}{5}$

$CA = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

Проведем радиусы OA, OD, OC, OB =>

=> $r = OA = OD = OC = OB$

т.к. $\angle COB + \angle BOD + \angle DOA + \angle AOC = 360°$ =>

=> и $CB = \sqrt{26}$, $CA = \sqrt{34}$; $AD = \frac{\sqrt{234}}{5}$; $BD = \frac{\sqrt{34}}{5}$ =>

=> $\triangle COB$ - равнобедрен и равносторон =>

? ?

=> $CO = OB = r = CB = \sqrt{26}$

Ответ: $r = \sqrt{26}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	5	7	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5.

Т.к. 30-угольник и несколько точек соединили со всеми углами, то min (если 1 точка) каждый угол разбили на 2 угла => 60 углов всего и по 1 вершине => $\frac{60}{2} = 30$ => $60 + 30 = 90$ углов => min 30 треугольников. Чтобы кол-во превысило 60, надо разбить треугольники на 2 или разрезать их => можно поставить min 3 точки вокруг центральной точки и соединить. Непересекающимися отрезками!

Ответ: 3 точки.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ Борисова 5

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	6	0	9	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Антипенко

Имя Анна

Отчество Васильевна

Дата рождения 22.04.2004 **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8913 536 87 59 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

2 | 9 | 0 | 20 | 15 | 56

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

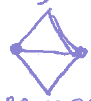
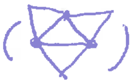
Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	~~X~~7	~~X~~6	0	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Если поставить 1 точку в выпуклый 30-угольник и соединить эту точку с вершинами, то получится 30 маленьких треугольников. Если поставить 2 точки, то прибавится к этому числу треугольников ещё 2. () Если поставить 3 точки, то получится 34 треугольников ()

Мы видим, что это арифметическая прогрессия.

$d = a_{n+1} - a_n = 34 - 32 = 2$

(a_n) - ариф. прогрессия

$a_1 = 30, \quad d = 2$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_1 + d(n-1) > 60$

$30 + 2(n-1) > 60$

$2n - 2 > 30$

$2n > 32$

$n > 16$

Значит если поставить 17 точек, то получится больше 60 треугольников.

Ответ: нужно поставить 17 точек, чтобы число треугольников превысило 60.

Ф-ла не доказана. Надо показать, что не зависит от того, как ставить точки и соединять их:
 – 4 тр-ка  – 3 тр-ка

5 точек!

Пример; нет оценки.

№1

Тек может выиграть при любых ходах другого, потому что он всегда ходит после Чука и может подсчитать, как лучше походить. Если очередь ходить Тека, и осталось до 9 орехов включительно, он берёт 6 орехов, ~~Если орехов осталось от 10 до~~ Главное чтобы во время хода Тека не оставалось 10, 11, 12, 13 орехов, тогда Тек проиграет. Теку нужно походить так, чтобы у Чука был выбор между 10, 11, 12, 13 орехами, тогда Тек 100% выиграет.

Стратегии нет, ответ неверный

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА0000760920

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

abcd

Т.к. нам нужно чётное число, то $d=2$, $d=4$, $d=6$, $d=8$, но $d \neq 8$, т.к. abc8 $\not\vdots$ 8cba (без остатка не поделится). $d=2$, т.к. $\overline{abc2} : 4 = \overline{2cb8}$, в других случаях так не получится.

$b > c$

при $b=1$ $c=0$ $8102 : 4 \neq 2018$

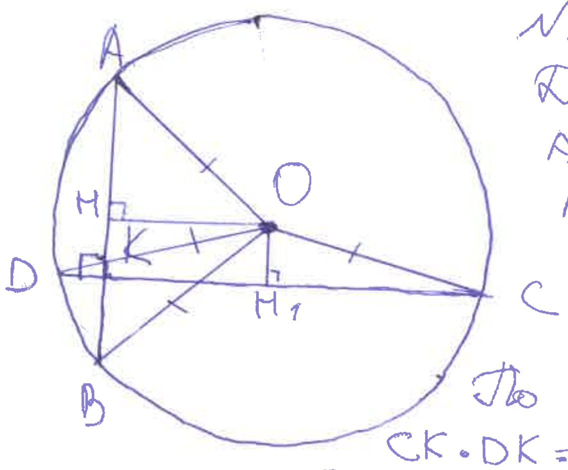
при $b=2$ $c=0$ и $c=1$ $8202 : 4 \neq 2028$ и $8212 : 4 \neq 2128$

при $b=3$ $c=0$; $c=1$; $c=2$ $8302 : 4 \neq 2038$; $8312 : 4 \neq 2138$; $8322 : 4 \neq 2238$

при $b=4$ $c=0$; $c=1$; $c=2$; $c=3$ $8402 : 4 \neq 2048$; $8412 : 4 \neq 2148$; $8422 : 4 \neq 2248$; $8432 : 4 \neq 2348$;

и т.д., но при $b=7$ и $c=1$ $8712 : 4 = 2172$

Ответ: существует только одно такое число – 8712



№2

Дано: окр$(O; r)$, $AB \perp CD$, $AB \cap CD = K$, $AK=3$, $KB=1$, $CK=5$, AB и CD – хорды

Найти: OA – радиус

Решение

По свойству пересекающихся хорд

$CK \cdot DK = AK \cdot KB$

$5 \cdot DK = 3 \cdot 1$

$DK = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$\triangle AOB$ и $\triangle COD$ – р/б, т.к. $CO = OD = AO = OB$ – радиусы, проведём OH и OH_1 – высоты, но значит и медианы, значит $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AK+KB) = 2$,

$KH_1 = \frac{1}{2}CD - DK = \frac{1}{2}(CK+DK) - DK = 2{,}2$

HKH_1O – прямоуг, т.к. $\angle OHB = \angle OH_1D = \angle HKH_1 = 90°$ и $HK \parallel OH_1$ (односторонние углы $\angle HKH_1 + \angle OH_1K = 90 + 90° = 180°$),

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 6 | 0 | 9 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

значит $KH_1 = HO = 2{,}2$,
т.к. $OH \perp AB$, то $\triangle AHO$ - прямоуг, по теореме
Пифагора $AO^2 = AH^2 + HO^2 = 4 + 4{,}84 = 8{,}84$,
$AO = \sqrt{8{,}84} = 2{,}1\sqrt{2}$ $21^2 = 441$, а не 442
Ответ: радиус окружности $AO = 2{,}1\sqrt{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Москва

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	8	8	6	6	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Филимонов

Имя Дмитрий

Отчество Эдуардович

Дата рождения 21.05.2004 **Класс** 9

Предмет математика

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7-952-992-13-89 **Подпись** Фил/—

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 0 | 0 | 15 | 55

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 8 | 6 | 6 | 2 | 0

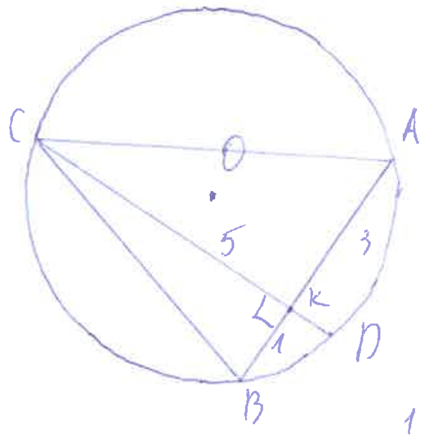
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Чук может выиграть при любых ходах Гека. Для этого ему необходимо взять 4 ореха, а во все следующие ходы дополнять кол-во орехов, которое взял Гек, до 10 (т. е., если Гек взял 4 ореха, то Чук должен взять 6; если Гек-5, то и Чук-5; если Гек-6, то Чук-4). Таким образом через некоторое кол-во ходов после хода Чука останется 0 орехов, а значит Гек не может взять орехи и проиграет.

№2



Дано:
т. O – центр. окружности
$CD \perp AB$
K – точка пересечения AB и CD

Найти:
R – ?

Решение:

1) В $\triangle ABC$:
$\triangle ABC$ вписан в окружность, значит
$2R = \frac{BC}{\sin A}$
$R = \frac{BC}{2\sin A}$

2) В $\triangle BCK$:
$\angle K = 90^\circ$
$BC = \sqrt{BK^2 + CK^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$
$\sin A = \frac{CK}{BC} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

3) В $\triangle ACK$:
$\angle K = 90^\circ$
$AC = \sqrt{CK^2 + AK^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

4) В $\triangle ABC$:
$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\sqrt{26}\cdot\sqrt{34}}{2\cdot 5} = \frac{\sqrt{2\cdot 2\cdot 13\cdot 17}}{2\cdot 5} = \frac{\sqrt{13\cdot 17}}{5} = \frac{\sqrt{221}}{5}$

Ответ: $\frac{\sqrt{221}}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 8 | 6 | 6 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 Рассмотрено конкретное разбиение.

Первой точкой многоугольник разобъётся на 30 треугольников. Каждая следующая точка будет добавлять ещё 2 треугольника (каждая следующая точка будет ставиться в одном из треугольников и будет разбивать его на 3 новых, а значит общее количество треугольников будет увеличиваться на 2), значит, чтобы многоугольник разбить на 60 треугольников, необходимо 16 точек $(1+\frac{60-30}{2}=1+\frac{30}{2}=1+15=16)$, из этого следует, что, чтобы общее количество треугольников было ~~больше~~ 60, необходимо 17 точек.

№4

Есть ~~три~~ четыре случая когда подойдут такие числа:

1) если это число вида $x\cdot 1000$, где $0<x\leq 9$ и x-целое; таких чисел 9

2) если ~~ра~~ ~~число~~ цифра разряда тысяч равна ~~числу~~ цифре разряда ~~десятков~~ сотен (~~разряд~~ цифры разрядов десятков и единиц равны 0); таких чисел 9.

3) если цифра тысяч равна цифре десятков, разряд единиц цифра 0:
таких чисел $9\cdot 10\cdot 1\cdot 1=90$ Неверно.

4) если это число 5400, 6300, 8100 их 3

Всего таких чисел $9+9+90+3=111$

Ответ: 111

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. АНГАРСК
211 КВАРТАЛ 18

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	8	2	1	7	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ДМИТРИЕВ

Имя ИГОРЬ

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 18.08.2004 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 22.02.2020

Номер телефона +79501003498 **Подпись** Дмит-

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

|20|19|15|5|13| (72)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 М А 0 0 0 0 8 2 1 7 2 0

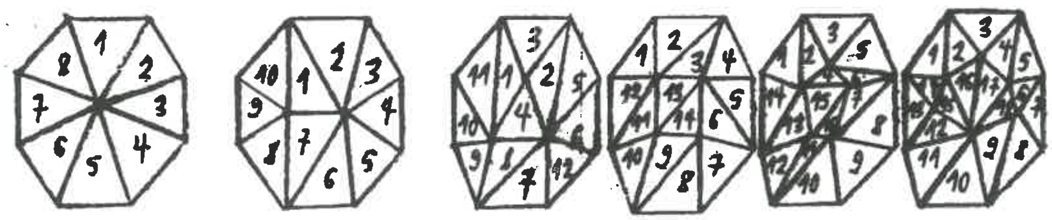
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1) Артём может выиграть Надю при любых её ходах, при определенной тактике. С самого начала, т.к. Артём ходит первый, ему нужно вычеркнуть 9 букв. Останется 50 букв. После этого при любом количестве вычеркнутых букв Надей Артём будет вычеркивать таким образом: если Надя вычеркнула 2 букви, то Артёму нужно вычеркнуть 8 букв, если 1 букву, то 9, если 8, то 2, если 9, то 1 букву (чтобы суммы вычеркнутых букв Надей и Артёмом за их ход была равна 10). При таких действиях Артём выиграет при любых ходах Нади.

№5). Для решения задачи можно найти отношение увеличевшегося числа треугольников к тому что было до прибавления новой точки. Это можно сделать на примере восьмиугольника.

1 точка   2 точки   3 точки   4 точки   5 точек   6 точек

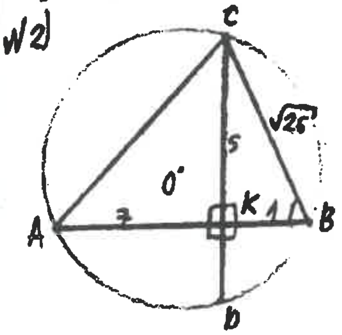


При увеличении числа точек в многоугольнике, число треугольников, образованных ими, увеличивается на 2. Таким образом, для того, чтобы найти количество точек при 50 треугольников у 24-угольника, нужно ~~количество по новым~~ от числа новых треугольников отнять число треугольников при одной точке, а затем результат разделить на 2; $(50-24):2 = 13$ точек $\Rightarrow$ наименьшее число точек, которые надо поставить, равно 13.

1) Д.б. > 50
2) Забыли про первую точку.
3) Сначала ставят точки, а потом их соединяют

Ответ: 13.

№2)



Дано:
Окр. $(O; R)$. AB и CD — хорды окружности. $AB \perp CD$.
$AB \cap CD = K$. $AK=7$, $KB=1$, $CK=5$.
Найти: R окружности.

Решение:
Проведём стороны CB и AC:
Рассмотрим $\triangle CKB$:
1. $\angle CKB = 90°$ ($CD \perp AB$).
2. $CK=5$; $KB=1$ (по условию).
$\Rightarrow \triangle CKB$ — прямоугольный.

$CB = \sqrt{CK^2+KB^2}$ (по теореме Пифагора) $= \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \Rightarrow \sin\angle B = \frac{CK}{BC} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Рассмотрим $\triangle ACK$:
1. $AK=7$; $CK=5$ (по условию).
2. $\angle CKA = 90°$ ($CD \perp AB$ (по условию)).
$\Rightarrow AC = \sqrt{AK^2+CK^2}$ (по теореме Пифагора) $= \sqrt{49+25} = 8$. $\sqrt{74} \neq 8$ арифм. ошибка

Рассм. $\triangle ACB$:
1. $AC=8$ (по найденному).
2. $\sin\angle B = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ (по найденному).
$\Rightarrow \frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$ (по св-ву синусов).

$R = \frac{AC}{\sin\angle B \cdot 2} = \frac{8\cdot\sqrt{26}}{5\cdot 2} = 0{,}8\sqrt{26}$.

Ответ: R окружности $= 0{,}8\sqrt{26}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 2 | 1 | 7 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3) $abc(a+2b+3c)=\frac{1}{6}\cdot\cancel{(a+2b)(a+3c)}$

$\underbrace{(a+2b)(a+3c)=2.}$ Это предположение?

$\Downarrow$

$\cancel{36}abc(a+2b+3c)\cdot 12=(a+2b)(a+3c).$

$12a^2bc+24ab^2c+36abc^2=a^2+2ab+3ac+6bc.$

$12a^2bc+24ab^2c+36abc^2-a^2-2ab-3ac-6bc=0.$

$a^2(12bc-1)+2ab(12bc-1)+3ac(\cancel{12b-1})-6bc=0.$

$(12bc-1)(a^2+2ab+3ac)-6bc=0.$

$(12bc-1)(a(a+2b+3c))-6bc=0.$

$(12bc-1)\cdot\frac{1}{6abc}\cdot a-6bc=0.$

$12bc-1=36b^2c^2$

$36(bc)^2-12bc+1=0.$

$a=36,\ b=-12,\ c=1.$

$D=b^2-4ac=144-144=0.\quad \sqrt{D}=\sqrt{0}=0.$

$bc=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{12}{72}=\frac{1}{6}.$

$\Downarrow$

$c=\frac{1}{6b};\ b=\frac{1}{6c}.$

$36b^2c^2-12bc+1=0.$

$(6bc-1)^2=0.$

$6bc-1=0.$

$6bc=1.$

$bc=\frac{1}{6}\Longrightarrow abc\cdot(a+2b+3c)=\frac{1}{6}.$

$a(a+2b+3c)=1.$

$a^2+2ab+3ac=1.$

$(a+2b)(a+3c)=a^2+2ab+3ac+6bc=1+1=2.\Longrightarrow(a+2b)(a+3c)\geq 2.$

ч.т.д.

Предположили, что $=$, доказали, что $\geq$? Надо было предположить $<$, получили бы противоречие.

№4). Такими не могут быть числа вида xyy ~~x (#1221), числа вида~~ $yyyy$ (#1111), $xyzx_2$ (#1231), $xzy5$ (#1345).
Последним числом не могут быть числа: 1, 4, 6, 8, 5.

Ответ: таких чисел ~~нету~~. нет, т.к. ~~пос-т~~ единицы в числах не ~~кратные совпадают~~ по кратности (# $\frac{3\cdot\cdot7}{7\cdot\cdot3}$) ($7\cdot9=63$, но $7\cdot2=14$), а если совпад~~ают но~~ не совпадают сами числа. (# $\frac{1\cdot\cdot9}{9\cdot\cdot1}$) ($9\cdot1=9$, но $81:9=9$ $\frac{1\,8\cdot9}{9\cdot81}$)

Неверно.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

крепостной 139
МБОУ школа № 4

Адрес площадки проведения

М	А	0	С	0	0	8	4	8	9	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Шерешит

Имя Егор

Отчество Андреевич

Дата рождения 15.10.2003 **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона +79885751865 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 2 | 20 | 20 | 8 (70)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 8 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 во всех случаях победит Чук придерживаясь тактики: Т.к 84 ореха всего и Чук ходит первым, то сначало ему надо взять 4 ореха, чтобы стало 80. И дальше независимо от хода Гека Чук делает так. надо чтобы сумма его и Гека была 10: т.е если Гек берет 6, то Чук 4, если Гек берет 5, то Чук 5, если Гек 4, то Чук 6. и т.д. т.е так за их два хода будут: 80; 70; 60; 50; 40; 30; 20; и 10 орехов. Получается осталось 10 орехов и ход Гека независимо от того что он выбирет 4, 5 или 6. Этот единственный остаток для Чука. => Если Гек выбирет 4, то осталось 6 и Чук выигрывает, если Гек выбирает 5, то осталось 5 и выигрывает Чук, если Гек выбирает 6, то осталось 4 и Гек проигрывает => по этой тактике всегда выиграет Чук. Ответ выиграет Чук

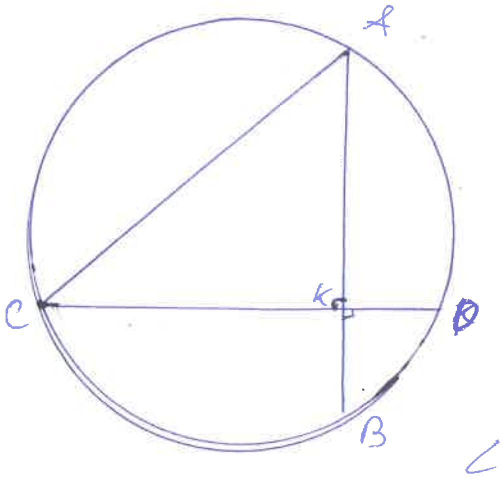
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 8 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2



Дано $CD \cap AB$ в точке K

$\angle AKC = \angle DKB = 90^\circ$

$AK = 3$

$KB = 1$

$CK = 5$

Найти R - ?

Проведем AC - гипотенуза т.к $\angle AKC = 90^\circ$ т.к по условию

$AK = 3$; $CK = 5$ => по теореме Пифагора

$AC^2 = AK^2 + CK^2$ => $AC^2 = 36$ => $AC = 6$.

9 25 34.

По теореме синусов

$\frac{a}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ =>

Тогда R — это радиус окр-ти, опис. ок. $\triangle AKC$

$a = CK$; $6 = AK$; $c = AC$

$\sin B = \frac{CK}{AC}$ $\angle ACK$ $\sin A = \angle CAK$ $\sin C = \angle AKC$ =>

$\frac{CK}{\frac{CK}{AC}}$ $\frac{CK : CK}{AC}$ => $AC = 2R$ => $6 = 2R$ =>

$R = 3$ Ответ $R = 3$

Лист 2 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 8 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 $abc(a+5b+c)=\frac{1}{5}$

Доказать $(a+5b)(a+c)\geq 2$

$abc(a+5b+c)=\frac{1}{5}$

$a+5b+c=\frac{1}{5abc}$ ~~подставляем в~~ подставляем

$(a+5b)(a+c)\geq 2. \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{5abc}-c\right)\left(\frac{1}{5abc}-5b\right)\geq 2.$

$abc(a+5b+c)=\frac{1}{5} \Rightarrow a^2+5ba+ac=\frac{1}{5bc}$

$bc(a^2+5ba+ac)=\frac{1}{5}$ подстовляем в

$(a+5b)(a+c)\geq 2.$ надо доказать что:

$a^2+5ba+5bc+ac\geq 2 \Rightarrow \frac{1}{5bc}+5bc\geq 2$

Пусть $\frac{1}{5cb}=a$, тогда

$a+\frac{1}{a}\geq 2.$ Т.к по неравенству коши

$\Rightarrow \frac{1}{5bc}+5bc$ всегда больше 2.

ЧТТД

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА0000848920

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 по условию $x_1=\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$

$x_2=\overline{dcba}=1000d+100c+10b+a$

$\Rightarrow$ $a\neq 0,1,3,5,7,9$

$d\neq 0,1,3,5,7,9$ т.к по условию

четные, а 0 не может быть т.к будет число трехзначным. $\Rightarrow$

пусть a будет 2, тогда получится

$x_1=2bcd$ $\Rightarrow$ d, число такое, что делится на 2. это 2,4,6 и 8 2,4,6 не может

$x_2=dcb2$

быть $\Rightarrow$ $d=8$, тогда

$2bc8$ $\Rightarrow 4(2000+8+100b+10c)=$

$8cb2$ $= 4(8000+100c+10b+2.$

т.к ~~таким~~ там 8cb2 и 2bc8, то разница если есть, то в 4 раза $\Rightarrow$

$2008\cdot 4+400b+40c=8002+100c+10b$ $\Rightarrow$

~~3006+~~ $390b-60c=5994$. если смотреть по mod, то получается, что

$b=7$, а $c=8$ $\Rightarrow$ получаются числа 2178 и 8712

~~другие числа не получаются т.к. по mod не проходит~~

Ответ: 2178 и 8712

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 8 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. докажем, что не может быть также, что

$\overline{abcd} \Rightarrow 8bc4$

$\overline{dcba} \Rightarrow 4cb8$ и они не могут быть кратными

$8004+100b+10c = 4008+100c+10b$

$\cancel{3996}$ 3996 $= 90c-90b$. - этого не может быть т.к. по тоб не подходит

а также

$\overline{abcd} = 6bc2 = 6002+100b+10c$ =>

$\overline{dcba} = 2cb6 = 2006+100c+10b$

$3996 = 90c-90b$ => так тоже не подходит => кроме 2178 и 8712 ничего не может быть => 2178 и 8712 единственные кратные четырехзначное ~~полные~~ числа.

Ответ 2178 и 8712

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 8 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~№6~~ №5.

Докажем, что если в 30-угольник поставить точку, то мы получим 30-треугольников.

Пусть поставили точку, тогда соединив 30 вершин в точку, которая будет внутри. и проводя из вершин к этой точке мы получим что каждая соседняя грань для всех ~~тре-угольников~~ треугольников мы получим, что первая точка внутри 30-угольника делит на 30 треугольников. Т.к по условию отрезки не должны пересекаться => надо добавить еще 30 треугольников. Мы можем получить их если поставим следующие точки так, чтобы не пересекались со следующими. На это потребуется 1 точка на 1 треугольник. => получаем чтобы получить 60-угольник мы потратим 30+1 точку => 31 Ответ: 31.

1 треуг. разбивается 1 точкой на 3!

Лист 6 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Москва

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	2	7	8	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Костров

Имя Роман

Отчество Алексеевич

Дата рождения 26.07.2004 **Класс** 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +79016910509 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 19 | 15 | 17 — 91

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	2	7	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

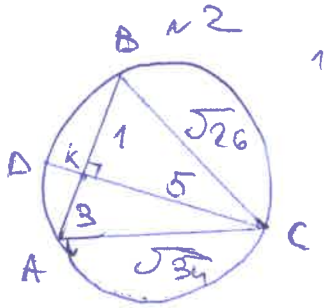
№1

Выиграет Чук при любых ходах другого.

Тактика:

Первым ходом Чук берёт 4 ореха. Остаётся 80. Теперь если Гек возьмёт 4 ореха, Чук – 6; Если Гек возьмёт 5 орехов, Чук – 5; Если Гек возьмёт 6, то Чук – 4 т.е. Чук будет делать так, чтобы сумма убранных орехов была равна 10 (5+5; 4+6; 6+4;) Таким образом в любой десятке Чук будет брать последние орехи, не оставляя их Геку т.е. и в 8 ~~одн~~ десятке Чук возьмёт последние орехи и Гек не сможет сходить.

№2



1. Проведём BC и AC.

2. $BC^2 = BK^2 + KC^2$ (по теор. Пифагора), то $BC^2 = 25 + 1 = 26$; $BC = \sqrt{26}$

3. $AC^2 = KC^2 + AK^2$ (по теор. Пифагора), то $AC^2 = 25 + 9 = 34$; $AC = \sqrt{34}$

5. △ABC – вписан в окр.

6. $S(\triangle ABC) = CK \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 10$

$S(\triangle ABC) = \frac{abc}{4R} = \frac{\cancel{4} \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{26}}{\cancel{4} \cdot R} = 10$

$\frac{\sqrt{884}}{R} = 10 \Rightarrow 2\sqrt{221} = 10R$

$R = \frac{2\sqrt{221}}{10} = \frac{\sqrt{221}}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 2 7 8 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$\overline{xyza}$ – исходное число; $a = 0, 2, 4, 6, 8$ – т.е. число – чётное, при этом

$\overline{azyx}$ – число с перевёрнутыми ~~ти~~ цифрами $\Rightarrow$

$a \neq 0$ и $x \geq a$ ($x \neq a$, т.к. в таком случае числа – одинаковы)

$\overline{azyx} \cdot k = \overline{xyza}$; $k = 1, 2, 3 \ldots$

Если $k=1$, то $a = x$; $z = y$; $y = z$, то числа одинаковы

Если $k=2$; $\cancel{x} \cdot 2 = a$ ($x > a$)

$a = 2x$ $(+1)$ (если $x \geq 5$)

~~$x \neq 1, 2, 3, 4, 5$ т.к~~ $x \neq 1$ т.к $x > a$ ($a_{min} = 2$)

$\begin{cases} 2x \ (-10 \text{ если } x \geq 5) = a \\ \cancel{a = 2x(+1)} \text{ (если } 2a(+1) = x) \end{cases}$

$x \neq 5$ т.к $a = 0$ ↯

$x = 3$ при $a = 2$

$\overline{2zy3} \cdot 2 = \overline{3yz2}$ ↯ т.к $6 \neq 2$

$x = 4$ при $a = 2$

$k \neq 1$ т.к при $k=1$ числа равны

При этом $a \cdot k < 10$, то |

Если $a = 2$; $k = 2, 3, 4$

$a = 4$; $k = 2$

$a = 6$; $k \in \varnothing$

$a = 8$; $k \in \varnothing$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 2 7 8 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Из: $\overline{azyx} \cdot k = \overline{xyza}$ имеем

$$\begin{cases} kx(-n\cdot 10) = a; \ n \text{ – число десяток в числе } kx \\ ak(+1) = x \end{cases}$$

$\boxed{x(+1) = x \text{ или } x+1}$

Если $k=2$

$a=2$: $\begin{cases} 2x(-10) = a \\ 4(+1) = x \end{cases}$ $x \in \varnothing$

$a=4$: $\begin{cases} 2x(-10) = a \\ 8(+1) = x \end{cases}$ $x \in \varnothing$

$k=3$

$a=2$: $\begin{cases} 3x(-10) = a \\ 6(+1) = x \end{cases}$ $x \in \varnothing$

$k=4$

$a=2$: $\begin{cases} 4x(-n\cdot 10) = a \\ 8(+1) = x \end{cases}$ $\underline{x=8}$

Имеем $\overline{2zy8} \cdot 4 = \overline{8yz2}$; т.к $8 = 4\cdot 2$; $z = 0,1,2$

$\begin{cases} z = 4y + 3(-n\cdot 10)(из \nearrow) \\ 4z(+1) = y \end{cases}$ если $z=0$; $y \in \varnothing$

если $z=1$; $y \in \varnothing$

если $z=2$; $y \in \varnothing$, то

Ответ: таких чисел нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 2 | 7 | 8 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Ответ: n= 17.

(1) n – кол-во точек внутри 30-угольника; то от этих точек мы можем построить 30 треугольников, у которых 1 сторона – сторона 30-угольника (причём стороны не будут пересекаться (могут совпадать)).

Затем соединив эти точки по льним n-угольник (для удобства построим выпуклый). Так, получится ещё n – треугольников у которых 1 сторона – сторона n-угольника, а 2 другие стороны – отрезки, соединяющие n-точки с вершинами, которые также являются сторонами треугольников из пункта (1).

Как соединить в вогнутый?

Затем в любом выпуклом тр. можно построить (n – 3) диагоналей, которые образуют (n – 2) тр., т.е.

?

Откуда диагонали в треугольнике?

(Мин. превышение 60 – 61)

Пример есть, д-во неполное.

$61 = 30 + n + n - 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	2	7	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$31 = 2n - 2$

$33 = 2n$

$n = 17.$

№3

$abc(a+5b+c) = \frac{1}{5}$ $\qquad (a+5b)(a+c) \overset{?}{\geq} 2$

$bc(a^2+5ab+ac) = \frac{1}{5}$ $\qquad \cancel{a^2+5ab+ac+5bc \geq 2}$

$a^2+5ab+ac+5bc \overset{?}{\geq} 2$

$a^2+5ab+ac = \frac{1}{5bc}$

$5bc + \frac{1}{5bc} = a^2+5ab+ac+5bc$, то

т.к $b>0$, $c>0$, то во сколько раз будет уменьшаться $5bc$, во столько же будет увеличиваться $\frac{1}{5bc}$, то

Нет строгого д-ва.

$5bc + \frac{1}{5bc} \geq 2$ т.к оптимально мин. равное значение при $5bc = 1$. ▨

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ангарск.

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	0	1	9	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Ольшевская

Имя Мария

Отчество Андреевна

Дата рождения 27.04.2004 Класс 9

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 29.02.2020

Номер телефона 89149450736 Подпись Мария

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

2 20 20 0 15   57

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2   М А 0 0 0 0 7 0 1 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача № 5

24-угольник, внутри несколько точек, которые соединили так, что эти отрезки непересекаются, и с вершинами многоугол, в многоугол. построились Δ

Наим кол-во . ? чтобы число число Δ > 50

Ответ: 15 точек.

Можно сначала поставить все точки, а потом соединить, картинка будет другая, не доказано, что

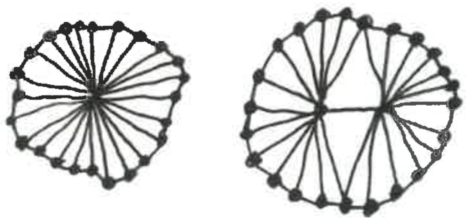
Если мы поставим 1 точку, то получим 24 треугольника, но с каждой точкой Δ увеличивается на 2 шт. ⇒ число треуг-в будет таким же.

⇒ 3 точки = 28 Δ

4 точки = 30 Δ

...

15 точек = 52 Δ



(т.к. будет увеличиваться кол-во вершин из которых можно будет провести по 2 отрезка)

Задача № 2

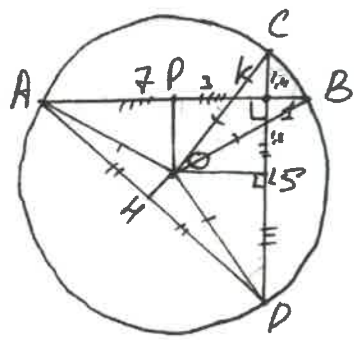
Дано: ΔAKD - прямоугол

AK = 7

KB = 1

KD = 5

Найти: R



Решение:

1) Проведем AO, OD, AD

2) AO = OD (R окружности) ⇒ ΔAOD - равнобедр ⇒

⇒ OH - высота (середин перпендик.)

3) CK · KD = AK · KB (хорды пересек.)

KC = 1,4

4) Проведем из (·) O, CO и OB

5) Рассмотрим ΔDOC :

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 0 1 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$CO=OD$ (радиус) $\Rightarrow$ $\triangle COD$ - равнобедр

6) Проведем высоту OL (медиана, биссектр.), т.к. это еще и медиана $\Rightarrow$
$\Rightarrow CL=LD$,

7) $CD=1,4+5=6,4 \Rightarrow CL=3,2 \Rightarrow KL=1,8$

8) Рассмотрим $\triangle AOB$:
$AO=OB$ (радиус) $\Rightarrow \triangle AOB$ - равнобедр

9) Проведем высоту OP, т.к. это еще и медиана $\Rightarrow$
$\Rightarrow AP=PB$

10) $AB=8, \Rightarrow PB=4 \Rightarrow PK=PB-KB=3$

11) Рассмотрим $\triangle POB$:
$PO=1,8$ (т.к. $PKLO$ - прямоугольник)
$PB=4$
$\angle P=90$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow OB=\sqrt{16+3,24}=\sqrt{19,24}=2\sqrt{4,81}=$
$=0,2\sqrt{481}$

Ответ: $0,2\sqrt{481}$

Задача № 1 Всего 59 букв. Артем первый
За раз можно вычеркнуть 1, 2, 8 или 9 букв
Если всегда вытягивать: 1 $\Rightarrow$ 59 ходов
2 $\Rightarrow$ 30 ходов (29 по 2 буквы и 1 раз 1 букву)
8 $\Rightarrow$ 9 ходов (7 по 8 букв и 1 раз - 1б, 2 раз - 2 буквы или 2 и 3 раз - 1 буква)
или 10 ходов
9 $\Rightarrow$ 9, 11, 10 ходов

Если четное кол-во ходов $\Rightarrow$ выиграет Надя (кроме 10 ходов)
Если нечетное кол-во ходов $\Rightarrow$ выиграет Артем.

Чтобы выиграть тому или иному игроку нужно, чтобы в конце на его ходе осталось 1, 2, 8 или 9 букв.

Стратегия не предложена

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	7	0	1	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача № 3

$a, b, c > 0$, $abc(a+2b+3c) = \frac{1}{6}$, Док-ть, что

$(a+2b)(a+3c) \geq 2$

1) $a^2 + 3ac + 2ab + 6cb \geq 2$

2) $bc(a^2+2ab+3ac) = \frac{1}{6}$

$a^2+2ab+3ac = \frac{1}{6bc}$

3) $\frac{1}{6bc} + 6bc \geq 2$, $6bc = t$, $t>0$ (т.к. $b, c > 0$)

$\frac{1}{t} + t - 2 \geq 0 \quad | \cdot t$

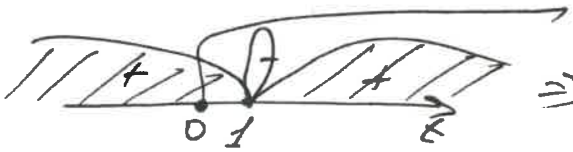
$t^2 - 2t + 1 \geq 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)^2 = 0$

$t = 1$

$t > 0$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow t \in (0; 1) \cup (1 + \infty) \Rightarrow$

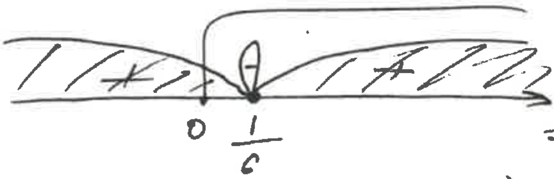
4) или возмем: $bc = t$, $t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{6t} + 6t - 2 \geq 0 \quad | \cdot 6t$

$36t^2 - 12t + 1 \geq 0$

$(6t-1)^2 \geq 0$, $t > 0$

$t = \frac{1}{6}$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow bc \in (0; \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow c \in (0; \frac{1}{6b}) \cup (\frac{1}{6b}, +\infty)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Тюмень ТюмГУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	5	7	4	2	0

Шифр

Вариант № №1

Фамилия ШАВАЛИЕВА

Имя АЛИНА

Отчество РАФАЭЛЕВНА

Дата рождения 09 03 2005 **Класс** 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 15 02. 2020

Номер телефона 890888746 76 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК» 2017/2018 68

Вариант № 1 МА00007574 20

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 число меньшее 10^6 записанное теми же ~~числами~~ цифрами, но в обратном порядке, на 6363 больше => число не может быть трехзначным и меньше => оно хотябы четырехзначное или пятизначное

1Вариант когда число четырехзначное
Представим его в виде $a_1a_2a_3a_4$, тогда

$a_1\cdot10^3+a_2\cdot10^2+a_3\cdot10+a_4=a_4\cdot10^3+a_3\cdot10^2+a_2\cdot10+a_1+6363$

$999a_1+90a_2-90a_3-999a_4=6363$

$111(a_1-a_4)+10(a_2-a_3)=707$

Максимальная разность между a_2 и a_3 это $9-0=9$ так как 707 скончивается на 7 $a_1-a_4=7$ => $a_2-a_3=-7$ => 4 (7, 0)

$a_1=a_4+7$ a_1 это возможно при $(8;1)(9;2)$

a_4 не может являться 0 т.к с него начинается одно из чисел, аналогично a_2 и a_3 это $(1;8)(2;9)$

8181; 8291; 9182; 9292

~~Ответ: 8181; 8291; 9182; 9292~~

2 Вариант когда число ~~четырех~~ пятизначное
Представим его в виде $a_1a_2a_3a_4a_5$

$a_1\cdot10^4+a_2\cdot10^3+\cancel{a_3\cdot10^2}+a_4\cdot10+a_5=a_5\cdot10^4+a_4\cdot10^3+\cancel{a_3\cdot10^2}+a_2\cdot10+a_1+6363$

$6363=9999a_1+990a_2-990a_4-9999a_5$

$707=1111(a_1-a_5)+110(a_2-a_4)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	7	5	7	4	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$707 = 11(101(a_1 - a_5) + 10(a_2 - a_4))$, но 707 не делится на 11 => такого невозможно с пятизначным числом

Ответ: 8181; 8291; 9182; 9292

№3 Пусть эти числа $a_1 a_2 a_3$, тогда
$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \geq 75$ Предположим, что их сумма меньше 14,5
$a_1 + a_2 + a_3 \leq 14{,}5$ (числа все больше 0 => мы можем возвести в квадрат неравенство)
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_3a_2 + 2a_3a_1 \leq 210{,}25$
Предположим, что $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 75$ это наименьшее возможное значение мн сейчас, т.к. правую заменим.
Так же $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$
Доказательство:
$(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ $\quad a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$ аналогично с остальными
$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$
$a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_1a_3$
$a_3^2 + a_2^2 \geq 2a_2a_3$
$2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geq 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$

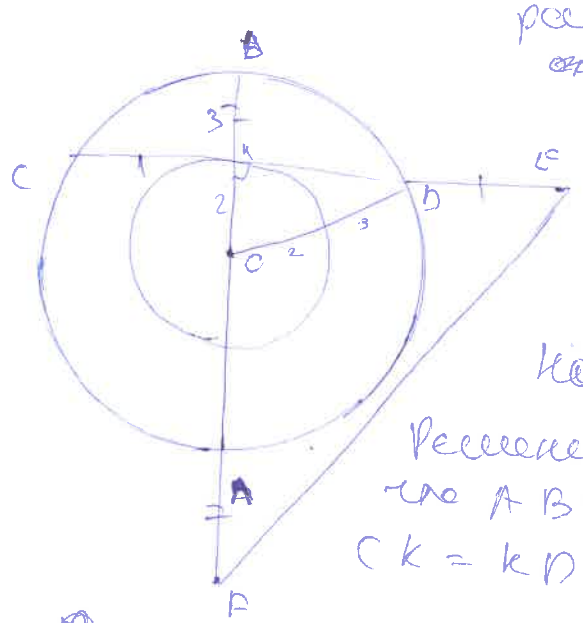
мы можем заменить на именьшие
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_3a_2 + 2a_3a_1 \leq 210{,}25$
$3(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) \leq 210{,}25$
=> $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ это хотя бы 75, тогда
$75 \cdot 3 \geq 210{,}25$
⇓
это невозможно

Лист 2 из 5

№1 Рассмотрим случай когда ~~[illegible]~~ игрок, точно ~~проигрывает~~ проигрывает (1) когда после его хода на столе остается кучи по 2 и x, тогда противник забирает кучу x и делит 2 ореха на 1 и 1, тогда 1 игрок не может поделить кучку. если ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ на столе кучи из (1 и 3) или (3 и 3), то мы обязаны оставить на столе кучу с 3 орехами и поделить ее на кучки по 1 и 2, тогда противник заберет один орех и мы проиграем =>
~~[illegible]~~ когда кто-то может поделить кучу состоящую из 2, 4 или 6 он точно выиграет, в то время если у нас ~~кучка~~ которую мы будем делить разложим в 3 мы проиграем, аналогично с 5 ведь мы можем разложить 5 только как 1 и 4, а ~~прочее~~ прочее кому-то достанется 4 он победит или 2 и 3 аналогично с 2, если не знаем 7, то при разложении 2 и 5 мы ~~[illegible]~~ проиграем, в 3 и 4 проиграем, и 1 и 6 проиграем
Рассмотрим 8, мы сможем разложить как 1 и 7, а ~~7~~ противник обязан будет взять 1, а разложение 7 ведет к проигрышу, рассмотрим 9 1 и 8 ведет к поражению 2 и 7 к ~~[illegible]~~ поражению 3 и 6, 4 и 5 можно заметить, что разложение кучи с нечетным кол-вом орехов ведет к поражению, а четных к победе => так как Ромик ходит первым он должен забрать кучу с нечетным кол-вом орехов, а кучу с четным разложить на 2 нечетные => Ромик победит Ответ: Ромик
~~[illegible]~~ заключим им на

№2 ~~Рассмотрим вари когда одна из хорд пусть AB проходит через центр окр. O~~

Частный случай: одна из хорд является диаметром.



Дано: окр с радиусом 2 с центром в точке O; окр радиусом 5 с центром в O проведены AB и CD пересекаются в K, касательной на окр. с радиусом 2, AF = BK, DE = CK

Найти: FE

Решение: ~~хорда~~ предположим, что AB проходит через O, CK = KD, т.к CD это касательная к окр. с радиусом 2, т.к $CD \perp AB \Rightarrow \angle OKD = 90°$, а радиус с касательной образуют угол в 90°; а $\triangle COD$ равнобедр. т.к CO и CD радиусы, а OK является медианой, высотой и биссектрисой, где $KD^2 = CD^2 - OK^2 = 25 - 4 = 21$ по т. Пифагора ($\angle OKD = 90°$) $\Rightarrow KD = \sqrt{21}$, т.к $CK = DE = KD$

$KE = 2\sqrt{21}$, $AK = AO - OK = 5 - 2 = 3 \Rightarrow AF = AK = 3$

$CA = 5 \Rightarrow CF = CA + AF = 5 + 3 = 8$ $KA = CA + 2 = 10$

$FE^2 = KE^2 + \underset{=KA}{CA^2}$ по т. Пифагора $FE^2 = 4 \cdot 21 + 64 = 144$

$FE = \pm\sqrt{144}$ -12 быть не может $\Rightarrow FE = 12$

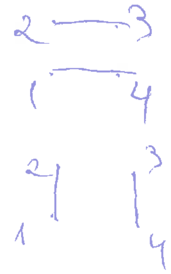
Ответ: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 7 5 7 4 2 0

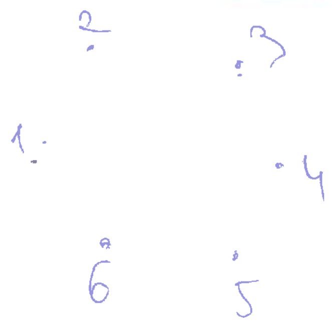
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№5 Рассмотрим квадрат соединить попарно его вершины мы можем только 2 способами т.к. если мы проведем диагонали, то вершины не входящие в эти диагонали мы не сможем соединить т.к. будут общие точки

Для правильного 6 угольника таких способов 3



если мы проведем отрезок с вершинами в точке 2 и 6, (или 6 и 4) то точку 1 мы ни с чем не сможем соединить => для каждой точки будет 1 не соседние с ней точка с которой ее можно было бы соединить так чтобы условие сохранялось => будут пары вершин => способов будет кол-во вершин / 2 => если для 2n угольника способов 14, то для (2n+2) угольника способов 15

Ответ: 15

Для 6-уг-ка – 5 способов.

Замечание к задаче 1 если мы делим круг с 4 отрезками мы сможем ее поделить на 14 4, а 6 на 3 4 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Крепостной 139

МБОУ Школа №8

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	4	4	1	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Чипашов

Имя Иван

Отчество Ильич

Дата рождения 03.08.2004 Класс 9

Предмет математика

Работа выполнена на 3 листах Дата выполнения работы 29.02.2020

Номер телефона 89614036061 Подпись Чип

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 15 | 14

89

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

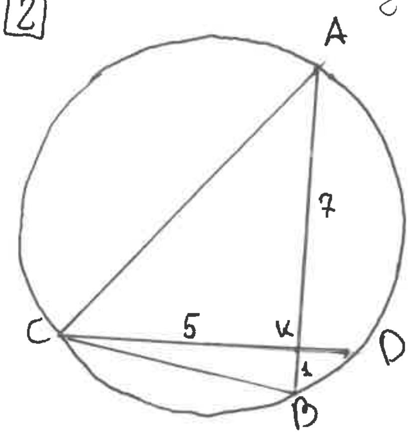
Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 4 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\boxed{1}$ Чтобы Артем выиграл надо ему первому вычеркнуть 9 букв. далее просто дополнять вычеркнутые до 10, т.е. Если Надя вычеркнет 1, то вычеркивать 9, если 2, то 8, если 8, то 2 если 9, то 1. т.к после первого хода останется 50, а после дополнений останется 10, то какое бы кол-во букв Надя не вычеркнула, Артем вычеркнет последний.

$\boxed{2}$



Дано:
$AK=7$ $CD \perp AB$
$KB=1$
$CK=5$
Найти:
R-?

Решение:

1) по теореме Пифагора:
$CB^2=CK^2+KB^2$ $CB^2=26$ $CB=\sqrt{26}$; $CA^2=CK^2+KA^2$ $CA^2=74$ $CA=\sqrt{74}$.

2) $AB=AK+KB=8$; $S_{ACB}=S_{AKC}+S_{CKB}$
$S_{AKC}=\frac{35}{2}$; $S_{CKB}=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $S_{ACB}=20$

3) $S_{ABC}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}=\frac{AC\cdot AB\cdot CB}{4R}$

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$$

$$R=\frac{\sqrt{74}\cdot\sqrt{26}\cdot 8}{80}$$

$$R=\frac{\sqrt{481}}{5}$$

Ответ: $R=\frac{\sqrt{481}}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 4 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3

$abc(a+2b+3c)=\frac{1}{6}$, внесем a в скобку

$bc(a^2+2ab+3ac)=\frac{1}{6} \Rightarrow a^2+2ab+3ac=\frac{1}{6bc}$

$(a+2b)(a+3c)\geq 2$

$\underbrace{a^2+2ab+3ac}_{=\frac{1}{6bc}}+6bc\geq 2$

$\frac{1}{6bc}+6bc\geq 2 \quad |\cdot 6bc$

$\cancel{36b^2c^2+6bc\geq 1}$

$36b^2c^2+1\geq 12bc$

$\underbrace{36b^2c^2-12bc+1}_{\text{формула сокращенного умножения}}\geq 0$

$(6bc-1)^2\geq 0$

т.к это квадрат, то это число всегда будет $\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неравенство выполняется $\Rightarrow (a+2b)(a+3c)\geq 2$

4

представим эти числа в виде

$\overline{abcd}$

$\overline{dcba}$, рассмотрим d, он не может быть больше 3, т.к тогда в перевернутой записи число будет равно или больше. но d не может быть и 3, т.к при $d=3$; $a=9$ или $a=7$ и max кратность будет 3, но $9\cdot 3=27$ $9\cdot 2=18$ $7\cdot 2=14$ $7\cdot 3=21 \Rightarrow$ последняя цифра не равна 3, тогда $d=1$

$\overline{abc1}$

$\overline{1cba}$ a может быть равно либо 9, либо 7, т.к. $9\cdot 9=81$ $7\cdot 3=21$ последние цифры совпадают

$\overline{9bc1}$

$\overline{1cb9}$, подберем такие c и b, чтобы они были кратны,

$b=8$ $c=0$ $\Rightarrow$ Ответ: 9801

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	4	4	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\boxed{5}$ Рассмотрим 24 угольник и 1 точку:

Если мы поставим 1 точку, то 24-угольник разобьется на 24 треугольника, при 2 точках на 26, при 3 на 28 и т.д., то есть количество точек повышает количество треугольников на 2.

Тогда:

Нужно поставить $\frac{50-24}{2}+1$, т.к. число превышает, получим число $13+1=14$

Ответ: 14

1) В начале была поставлена точка, ее не посчитали.

2) Сначала ставят точки, потом их соединяют. Почему использована только последовательное соединение? Не доказано, что так же будет в других случаях.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	3	5	0	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ~~Д~~ ДЕВЯТКОВА

Имя ПОЛИНА

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 16.07.2003 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8 963 260 33 78 **Подпись** ____

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

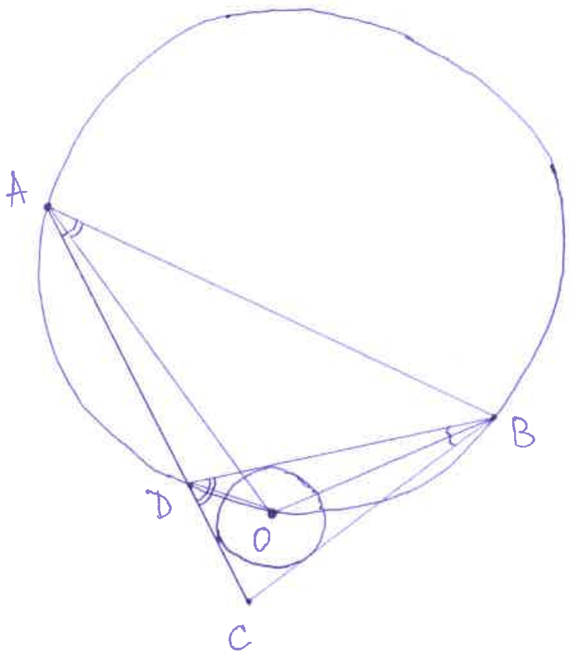
М	А	0	0	0	0	7	3	5	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1	2	3	4	5	Σ
12	20	20	8	8	68



Дано: $\triangle ABC$, $\angle CBA = 40°$
точка O – центр вписанной окружности в $\triangle CDB$

Найти: $\angle ACB$

Решение:

1) рассмотрим $\triangle BCD$: т. O – центр вписанной окружности, точка пересечения биссектрис. ⇒
OB – биссектр. $\angle CBD$; $\angle CBO = \angle DBO$
OD – биссектр. $\angle CDB$; $\angle CDO = \angle BDO$.

2) точка O лежит на окружности, ~~описанного~~ описанной около треугольника $\triangle ADB$.
рассмотрим ABOD: $\angle CDB = \angle OAB$ (т.к. опираются на одну дугу $\smile OB$),
$\angle DAO = \angle DBO$ (т.к. опираются на одну дугу $\smile DO$).

$\Rightarrow \angle OAB = \angle ODB = \angle CDO$, $\angle DAO = \angle DBO = \angle OBC = \angle CAO$

3) Выразим $\angle CAB$ через $\angle BCA$: $\angle CAB = \angle CAO + \angle OAB = \angle CBO + \angle CDO =$
$= \frac{1}{2}\angle CBD + \frac{1}{2}\angle CDB = \frac{1}{2}(\angle CBD + \angle CDB)$

в треугольнике $\triangle CDB$: $\angle CDB + \angle CBD + \angle BCD = 180°$ ⇒ $\angle CDB + \angle CBD = 180° - \angle BCD$

$\Rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2}(180° - \angle BCD)$

4) в треугольнике $\triangle ABC$: $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$, где $\angle ABC = 40°$ (по условию)
$\angle CAB + \angle BCD = 140°$ → подставим $\angle CAB$ через $\angle BCD$:

$\frac{1}{2}(180° - \angle BCD) + \angle BCD = 140°$

$90° - \frac{1}{2}\angle BCD + \angle BCD = 140°$

$\frac{1}{2}\angle BCD = 50°$ $/ \cdot 2$

$\angle BCD = 100° = \angle BCA$

Ответ: $\angle BCA = 100°$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть команда „Бельчата" ответила верно на а лёгких, в средних и с трудных задач, а всего на олимпиаде было предложено x лёгких, y средних и z трудных задач. Тогда команда ответила неверно на $(x-a)$ легких, $(y-b)$ средних и $(z-c)$ трудных задач.

кол-во	верно	неверно	всего
легких	a	$x-a$	x
средних	b	$y-b$	y
трудных	c	$z-c$	z

По условию, команда ответила верно на 10 задач, т.е.

$a+b+c=10.$

Всего получили баллов:

$4a+5b+6c-2(x-a)-(y-b)$

Составим уравнение:

$4a+5b+6c-2(x-a)-(y-b)=4x+5y+6z-30$, где $4x+5y+6z$ – максимально возможное число баллов

$4a+5b+6c-2x+2a-y+b=4x+5y+6z-30$

$6(a+b+c)+30=6(x+y+z)\ \big|:6$

~~$a+b+c+30=x$~~

$a+b+c+5=x+y+z$, заменим $a+b+c$ на 10

$10+5=x+y+z$

$15=x+y+z$

+

Всего задач было предложено на олимпиаде $x+y+z=15$

Ответ: 15 задач.

№1

Т.к. от всех бельчат были получены все возможные ответы от 1 до 100, то всего бельчат было ≥ 100.

Пусть бельчат >100, т.е. 101. Тогда среди них точно найдётся хотя бы 1 рыцарь и хотя бы 1 лжец. Тогда рыцари могут

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 3 5 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

назвать только один верный ответ от 1 до 100. Лжецы могут назвать все числа от 1 до 101 кроме верного, а, по условию, были даны ответы до 100. Значит, бельчат было не более 100. (≤ 100)

Всего бельчат было 100, среди которых есть хотя бы 1 рыцарь и хотя бы 1 лжец. Пусть рыцарей было больше одного, все они давали один и тот же ответ, тогда лжецов было точно меньше 99, а число ответов должно быть равным $100 - 1$ (верный ответ) $= 99$. Это противоречит тому, что лжецов меньше 99. Следовательно, всего был 1 рыцарь и 99 лжецов. 12

Ответ: 99 лжецов.

№4

На отрезке $[16; 2020]$ всего $2020-16+1 = 2005$ чисел, из которых четных 1003, а нечетных 1002 максимум. максимальное нечётное число на этом отрезке $- 2019$ минимальное нечётное простое число $- 3$.

$2019 : 3 = 673$.

Наибольшее количество чисел, которые ~~толь~~ могли оказаться на доске 673 +

Ответ: 673

№5

$x^3 + ax^2 + 17x + 3b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{Z}$

запишем теорему Виета для данного многочлена:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 17 \\ x_1x_2x_3 = -3b \end{cases} \quad \text{где } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

85

Пусть $x_1 = x_2 = x_3$, тогда будет $\begin{cases} 3x_1 = -a & (1) \\ 3x_1^2 = 17 & (2) \\ x_1^3 = -3b & (3) \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	3	5	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

рассмотрим уравнение (2) из полученной системы

$3x_1^2 = 17$

$x_1^2 = \frac{17}{3}$ $\quad x_1 = \pm\sqrt{\frac{17}{3}}$

решения в целых числах нет, что противоречит условию $\Rightarrow$

~~$x_1 \neq x_2$~~ $\quad x_1 \neq x_2 \neq x_3$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	3	5	1	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Литау

Имя Екатерина

Отчество Михайловна

Дата рождения 25.12.2003 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89029192464 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	3	5	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	8	0	68

Задание 2

Составим таблицу с количеством задач:

Обозначим решенные a, в, c и все задачи x, y, z.

	легкие	средние	трудные
решили	a	в	c
не решили	x−a	y−в	z−c
Всего задач	x	y	z

Следовательно баллы за задачи 4a, 5в, 6c и аналогично 4x, 5y, 6z

По условию $a+в+c=10$ задач. Также

$4a+5в+6c-2(x-a)-(y-в)-0(z-c)=4x+5y+6z-30$

⇓ максимальное кол-во, которое решили участники минус баллы за нерешенные (неправильно решенные)

⇓ получили на 30 меньше максимального

$4a+5в+6c-2x+2a-y+в-0\cancel{(z-c)}=4x+5y+6z-30$

$6a+6в+6c=6x+6y+6z-30$

$6(a+в+c)=6(x+y+z)-30 \quad |:6$

$a+в+c=x+y+z-\cancel{30}\,5$

+

⇓ 10 по условию

$10=x+y+z-5$

$\underline{x+y+z=15}$ ⇒ Всего задач было 15, из которых участники команды „Бельчата" правильно ответили на 10

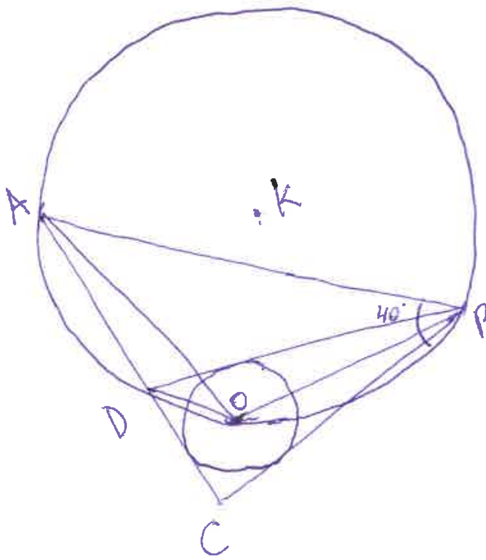
Ответ: 15

Вариант № 2 | МА000073 5120

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3



Дано: $\triangle ABC$

т. $D \in AC$

Описанная окружность с центром K, вписанная окружность с центром, через который проходит описанная окр.

$\angle ABC = 40°$

Найти: $\angle ACB$

Решение: 1. Рассмотрим $\triangle ABC$ и обозначим все углы, не трогая искомый $\angle ACB$.

2. Обозначим O - центр вписанной окружности, тогда т. O, D, A, B лежат на одной окружности

3. $\angle CAB = \angle CAO + \angle OAB$

4. Т.к BO - биссектриса, $\angle CAO$ и $\angle DBO$ опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle CAO = \frac{1}{2}\angle DBC$

$\angle OAB$ и $\angle ODB$ также опираются на одну окружность $\Rightarrow \angle OAB = \frac{1}{2}\angle CDB$

5. $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle CDB + \frac{1}{2}\angle DBC = \frac{1}{2}(\angle CDB + \angle DBC)$

6. $\angle CAB = \frac{1}{2}(180° - \angle DCB)$ $\Rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2}(180 - \angle DCB) = \frac{1}{2}(180° - \angle ACB)$

7. $\angle CAB = \frac{1}{2}(180° - \angle ACB)$

Т. C и B принадлежат $\angle DCB$, $\angle ACB$.

т. D и A лежат на одной прямой $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCB = \angle ACB$

Для того, чтобы найти $\angle ACB$, нужно сложить все углы треугольника ABC, зная, что сумма углов в треугольнике равна 180.

$\frac{1}{2}(180° - \angle ACB) + \angle ACB + 40° = 180°$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$90° - \frac{1}{2}\angle ACB + \angle ACB + 40° = 180°$ | умножим на 2

$180 - \angle ACB + 2\angle ACB + 80 = 360°$

$180° + \angle ACB + 80° = 360°$

$\angle ACB = 360° - 80° - 180°$

$\angle ACB = 100°$ – искомый угол

Ответ: 100°

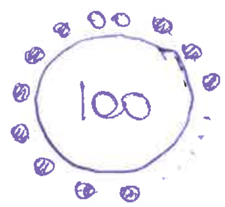
Задание 1

Всего было ответов от 1 до 100 => на полене как минимум 100 бельчат, потому что каждый ответ был произнесен.

Рассмотрим случай, если на полене было 100 бельчат.

о - рыцарь
● - лжец

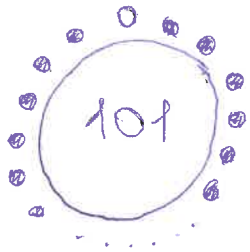
Допустим, на полене 1 рыцарь и все остальные лжецы. Тогда этот рыцарь скажет, что лжецов 99 - верно, а остальные ответы произнесут лжецы - неверные => на полене могло быть 99 лжецов



Если на полене 2 рыцаря, то лжецов будет 98. Оба рыцаря скажут, что на полене 98 лжецов (ответы по условию могут повторяться). Остается 99 вариантов ответа, а бельчат всего 98, но т.к. все ответы были использованы по условию => противоречие, не может быть 2 рыцаря.

Если увеличивать кол-во рыцарей, то будут оставаться несказанные варианты, чего не может быть по условию

Если на поляне увеличивать кол-во бельчат, например, 101 бельчонок =>



Рассмотрим вариант, если на поляне был 1 рыцарь и 100 лжецов.

Рыцарь скажет, что лжецов 100 - верно.

Остается 100 лжецов и 99 ответов => минимум 1 лжец должен повториться => на поляне может быть 100 лжецов

Случай с 2-мя рыцарями будет такой же, что и при 100 бельчат на поляне - может быть 99 лжецов

При рыцаря, 98 лжецов - не может быть т.к останется один несказанный ответ, но такого быть не может => лжецов не может быть меньше 99.

Если на поляне 102 бельчонка, у них 1 рыцарь => он скажет, что лжецов 101, но ответы были только от 1 до 100. При увеличении кол-ва рыцарей будет повториться та же схема = 100 лжецов, 99 лжецов, не могут дальше рассматриваться. При увеличении кол-ва бельчат на поляне будут такие же ответы. Сначала невозможно из-за вариантов только от 1 до 100, 100, 99, дальше не получится.

Ответ: 100; 99

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 3 5 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 5

Рассмотрим многочлен $x^3+ax^2+17x+36$, где a и b - целые

x_1, x_2, x_3 - корни

Запишем теорему Виета для кубического многочлена.

$x^3+ax^2+17x+36$

$\Updownarrow$

dx^3+ax^2+Bx+c

$x_1+x_2+x_3 = -\frac{a}{d} = -a$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = \frac{B}{d} = 17$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{c}{d} = -36$

Рассмотрим $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = 17$.

Если x_1, x_2, x_3 - четные $\Rightarrow \underset{ч}{ч \cdot ч} + \underset{ч}{ч \cdot ч} + \underset{ч}{ч \cdot ч} = ч$ - противоречие 17 - нечет

Если x_1, x_2, x_3 - нечетные $\Rightarrow \underset{Н}{Н \cdot Н} + \underset{Н}{Н \cdot Н} + \underset{Н}{Н \cdot Н} = Н$

Если x_1 - ч, x_2, x_3 - Н $\Rightarrow \underset{ч}{ч \cdot Н} + \underset{Н}{Н \cdot Н} + \underset{ч}{ч \cdot Н} = Н$

Если x_1 - ч, x_2 - Н, x_3 - ч $\Rightarrow \underset{ч}{чН} + \underset{ч}{Нч} + \underset{ч}{чч} = ч$ - противоречие

Пусть x - нечетный

$\underbrace{ax^2+17x+36}_{чет} = 0 \Rightarrow x^3+\underbrace{ax^2+17x+36}_{чет} = 0 \Rightarrow x$ - чет, иначе будет противоречие и не будет нуля. $\Rightarrow$ вариант со всеми нечетными не подходит, потому что нарушает. Должно быть хоть одно четное $\Rightarrow$ если хоть бы 1 четное, корни будут различными. ч.т.д

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 3 | 5 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание ~~5~~ 4

Рассмотрим отрезок [1~~4~~; 2019] потому что Катя выписывала нечетные числа, а 2020 четное и 16

На данном отрезке 298 простых чисел, однако кроме них подходят числа, которые не являются простыми и делятся на 3, 5 и т.д. Но так как наш отрезок начинается с 16 они не будут делится.
Если мы выпишем все нечетные числа, то среди них найдутся те, которые будут иметь общие множители ⇒ все выписывать нельзя.

Используя метод, что „Если кол-во кроликов превосходит кол-во клеток, то как минимум 2 кролика будут сидеть вместе". Получаем, что Катя могла выписать на доску 673 числа 3б

Ответ: 673

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	3	5	3	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Блинов

Имя Даниил

Отчество Геннадьевич

Дата рождения 17.04.2003 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89232953400 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	3	5	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	8	20	88

Задача №2

Пусть a – кол-во решённых «бельчатами» лёгких задач,
b – кол-во решённых «бельчатами» средних задач,
c – кол-во решённых «бельчатами» ~~сложных~~ трудных задач.
Тогда общее число решённых «бельчатами» задач:
$a+b+c=10$ (по условию)

Пусть x – общее кол-во лёгких задач, y – общее кол-во средних задач, z – общее кол-во трудных задач. Тогда общее число задач:
$x+y+z$, что нам и нужно найти.

Также заметим, что «бельчата» могли сдавать неверно решённые задачи. Кол-во неверно решённых лёгких задач это $(x-a)$, средних – это $(y-b)$, трудных – это $(z-c)$.
Тогда, мы получаем, что $(4a-2(x-a))$ – это кол-во баллов полученных «бельчатами» за лёгкие задачи, $(5b-(y-b))$ – кол-во баллов, полученных «бельчатами» за средние задачи, $(6c-0\cdot(z-c))$ – кол-во баллов, полученных «бельчатами» за трудные задачи. Если сложить эти три числа, то мы получим общее кол-во баллов, полученных «бельчатами»:

$$(4a-2(x-a))+(5b-(y-b))+(6c-0\cdot(z-c))=6a-2x+6b-y+6c=$$
$$=6\underbrace{(a+b+c)}_{\substack{10\\ \text{(по условию)}}}-2x-y=60-2x-y$$

Заметим, что ~~общее кол-во задач~~ максимально возможное число баллов это $(4x+5y+6z)$. Тогда «бельчата» получили

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(4x+5y+6z-30)$ (по условию). Но также они получили $(60-2x-y)$ баллов (из решения), а значит мы получаем уравнение:

$$60-2x-y=4x+5y+6z-30$$

$$90=6x+6y+6z$$

$$6(x+y+z)=90$$

$x+y+z=15$, что нам и необходимо было найти

Ответ: 15 задач

+

Задача N1

Лжецов не может быть больше 100, т.к. ~~...~~ по условию есть хотя бы 1 рыцарь, который может назвать это число.

В случае, когда лжецов 100, то рыцари будут называть одно и тоже число (100), а 100 лжецов будут называть числа от 1 до 99, возможно повторяющиеся. Такой случай возможен, т.к. нет противоречий с условием, а значит лжецов могло быть 100.

Лжецов также может быть 99, т.к. в этом случае рыцари будут называть одно и тоже число (99), а лжецы назовут 99 различных чисел от 1 до 100, исключая 99. Таким образом, лжецов может быть 99.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 3 5 3 2 0

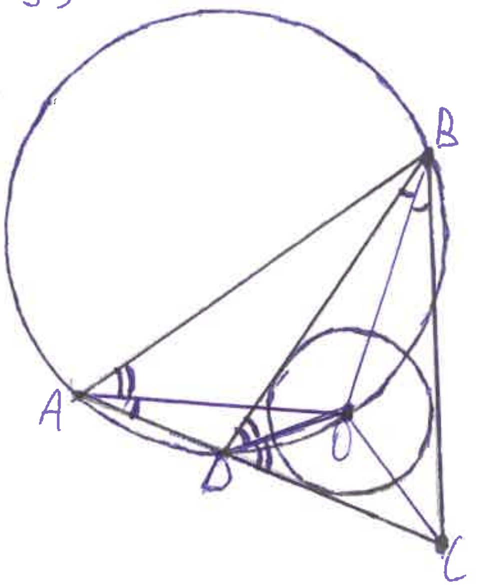
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Докажем, что лжецов не ~~бу~~ может быть меньше 99. И действительно, если их например 98, то рыцари будут называть одно и тоже число (98), а эти 98 лжецов назовут различные 98 чисел, при этом не назовут 98, т.к. тогда они скажут правду, что противоречит условию. Тогда всего различных ответов получится 98+1=99. Но, по условию, бельчата назвали 100 различных ответов (от 1 до 100 ~~чисел~~ 100 чисел). А значит мы получаем противоречие. Рассматривать числа лжецов меньше 98 бессмысленно, т.к. кол-во различных ответов, даваемых ими будет лишь уменьшаться, и тем самым, вызывать противоречие условию

Ответ: 100; 99

Задача №3



Обозначим центр ~~Арисан~~ вписанной в $\triangle BCD$ окружности за O. Мы получаем, что 4 точки – A, D, B, O – лежат на одной окружности ($\triangle ADB$ – вписанный, O – по условию). Проведём

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	3	5	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

AO. Заметим, что $\angle DAO = \angle DBO$ (опираются на одну и туже дугу), $\angle BAO = \angle ODB$ (опираются на одну и туже дугу). Также отметим, что $\angle DBO = \angle OBC = \frac{1}{2}\angle DBC$ (центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис треугольника $\Rightarrow$ BO – часть биссектрисы $\angle DBC$); $\angle ODC = \angle ODB = \frac{1}{2}\angle CDB$ (центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис треугольника $\Rightarrow$ DO – часть биссектрисы $\angle CDB$).

Следовательно, мы получаем, что:

$\angle DAO = \frac{1}{2}\angle DBC$

$\angle BAO = \frac{1}{2}\angle \cancel{CAB}\, CDB$

$\angle BAC = \angle DAO + \angle BAO = \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle CDB)$

$\angle DBC + \angle CDB + \angle BCD = 180^\circ$ (по теореме о сумме углов в треугольнике)

$\Downarrow$

$\angle DBC + \angle CDB = 180^\circ - \angle BCD$, тогда получаем:

$\angle BAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCD)$

$\angle BCD = \angle BCA$, т.к. т. $D \in AC$ (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCA)$

Получаем, что сумма углов $\triangle ABC$ равна:

$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCA) + 90^\circ + \angle BCA = 180^\circ$ (по теореме о сумме углов в треугольнике)

$\frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCA) + 90^\circ + \angle BCA = 180^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 3 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$90^0 + \frac{1}{2}\angle BCA = 140^0$

$\frac{1}{2}\angle BCA = 50^0$

$\angle BCA = 100^0$, что и требовалось найти

Ответ: 100^0

+

Задача №5

$x^3 + ax^2 + 17x + 36$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$; $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_3 \in \mathbb{Z}$

Запишем теорему Виета для данного кубического многочлена:

$x^3 + ax^2 + 17x + 36 = 0$

1) $x_1 x_2 x_3 = -36$

2) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$

3) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 17$

Предположим, все корни одинаковы, тогда $x_1 = x_2 = x_3$. Тогда из третьего уравнения следует:

$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = 17$

$3x_1^2 = 17$

$x_1^2 = \frac{17}{3}$

$x_1 = \pm\sqrt{\frac{17}{3}}$, что не является целым числом, что, в свою очередь, противоречит условию.

Предположим, что какая либо пара корней одинакова, пусть x_1 и x_2. Тогда из второго уравнения следует:

Вариант № 2 | М | А | . 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 3 | 5 | 3 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_1^2 + 2x_1x_3 = 17$

$x_1(x_1+2x_3)=17$

Т.к. x_1, x_2, x_3 ~~x_1, x_3~~ — целые по условию, то число 17 следует ~~расписе~~ расписать как произведение целых чисел:

$x_1(x_1+2x_2)=17$

① $1 \cdot 17 \to x_3=8$

② $17 \cdot 1 \to x_3=-8$

③ $-1 \cdot -17 \to x_3=-8$

④ $-17 \cdot -1 \to x_3=8$

①: $x_1=1$, $x_3=8$

Из ~~третьего~~ первого уравнения следует, ~~что~~ что:

$1^2 \cdot 8 = -3b$

$\Downarrow$

$b=-\frac{8}{3}$ — это противоречит условию ($b \in \mathbb{Z}$)

②: $x_1=17$, $x_3=-8$

Из первого уравнения следует, что:

$17^2 \cdot (-8) = -3b$

$-2312 = -3b$

$b=\frac{2312}{3}$ — что противоречит условию ($b \in \mathbb{Z}$)

③: $x_1=-1$; $x_3=-8$

Из первого уравнения следует, что:

$(-1)^2 \cdot (-8) = -3b$

$b=\frac{8}{3}$ — что противоречит условию ($b \in \mathbb{Z}$)

④: $x_1=-17$, $x_3=8$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 3 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Из первого уравнения следует, что:

$(-17)^2 \cdot 8 = -36$

$b = -\frac{2312}{3}$ — что противоречит условию ($b \in Z$)

Отсюда вывод, что x_1, x_2, x_3 различны, что и требовалось доказать. Отметим, что рассматривая случаи, когда x_1 и x_2 — одинаковы, можно было подставить такие пары чисел как x_2 и x_3 или x_1 и x_3, но на результат это не повлияло бы.

Задача №4

Всего нечётных чисел на этом промежутке — 1002. Из них 208 — это простые числа, которые Катя точно должна выписать. Также Катя не должна выписывать квадраты каких-либо чисел, если уже выписала это число. ~~Катя может выписать такие числа, которые в своём разложении на множители не будут иметь одинаковых простых чисел~~

Также, выписывая какое-либо число, Катя не должна выписывать кратные ему числа в дальнейшем.

Итак, всего на доске может максимум оказаться 673 числа

85

Ответ: 673

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	3	5	2	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Бычкова

Имя Ксения

Отчество Геннадьевна

Дата рождения 17.04.2003 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89233087097 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	5	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	0	60

② Введем переменные. Пусть x - легкие задачи, y - средние задачи, z - трудные задачи.

Тогда кол-во задач, которые решили бельчата будут a - кол-во легких задач, b - кол-во средних задач, c - кол-во трудных задач.

Неверные ответы x-a баллов, y-b баллов, z-c баллов.

Т.к из условия известно, что $a+b+c=15$, нужно найти $x+y+z$?

Учитывая условие задачи составим математическую модель.

$$(4a-2(x-a))+(5b-(y-b))+(6c-0(z-c))= \quad +$$

$$=4a-2x+2a+5b-y+b+6c=6a+6b+6c-2x-y=$$

$$=6(a+b+c)-2x-y.$$ Т.к из условия $a+b+c=15$, то

$$6\cdot 15-2x-y=90-2x-y.$$

Найдем какое максимальное число баллов они могли получить, если бы не допустили ни одной ошибки:

⇒ $4x+5y+6z$. Т.к из условия известно, что у них оказалось на 30 баллов меньше, чем максимум, то можем составить математическую модель:

$$90-2x-y=4x+5y+6z-30$$

$$90+30=6x+6y+6z$$

$$120=6(x+y+z)$$

$$20=x+y+z$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3.

М	А	0	0	0	0	7	3	5	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Нужно было найти $x+y+z$ - кол-во всех задач предложенных на олимпиаде. $x+y+z=20$.

Ответ: 20 задач.

(1) Заметим, что кол-во рыцарей не влияет на различность ответов, т.к рыцари говорят только правду, сколько бы их не было, они назовут один и тот же ответ.

Также очевидно, что лжецов не может быть больше, чем 200 т.к есть хотя бы один рыцарь => бельчат на поляне будет больше и ответы будут выходить за $[1; 200]$. Потому что лжецов будет больше и рыцарь назовет ответ $>$ чем 200. Такого не может быть, следовательно лжецов может быть максимум 200.

Заметим, что лжецов не может быть менее, чем 199. Потому что если лжецов 198 и 1 рыцарь (он есть всегда из условия), то их в сумме 199 бельчат => максимальное кол-во ответов они смогут дать 199, но из условия ответов 200 - противоречие.

(1) Рассмотрим случай, когда лжецов 199 и 1 рыцарь. Рыцарь назовет число 199, а остальные 199 ответов (ложных) дадут 199 лжецов. Это удовлетворяет условию задачи.

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 5 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

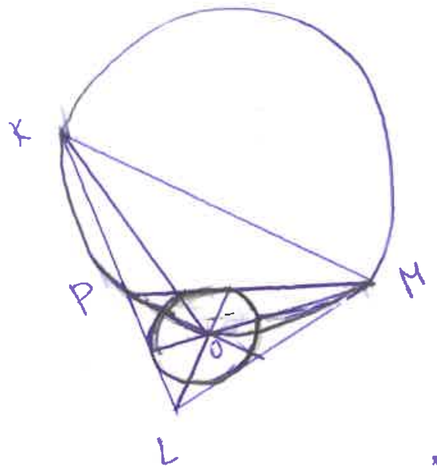
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② Рассмотрим случай, когда лжецов 200 и 1 рыцарь. Рыцарь назовет число 200, а остальные назовут 200 других ложных ответов – это допустимо, т.к в условии сказано, что некоторые из ответов могут повторяться.

$\boxed{\text{Ответ}}$: 199 лжецов; 200 лжецов.

+

③



Дано:
KLM - треугольник
PLM - треугольник
$P \in KL$
$\angle KML = 50°$
Найти: $\angle KLM$ - ?

Решение:

1. Из условие дано, что описанная окружность проходит через центр вписанной (точку O). Следовательно, K, P, O, M лежат на одной окружности.

2. Проведем доп. построения. Проведем все биссектрисы в ΔPLM - они будут пересекаться в точке O, т.к она вписана. Проведем биссектрису KO

3. Выразим все углы ΔKLM => $\angle KLM + \angle KML + \angle MKL = 180°$

$\angle KLM = 180 - \angle KML - \angle MKL$

$\angle KML = 180 - \angle KLM - \angle MKL$

$\angle MKL = 180 - \angle KLM - \angle KML$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 3 | 5 | 2 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. Заметим, что $\angle MKO = \frac{1}{2}\angle MPL$:
- PO - часть биссектрисы
- $\angle MKO = \angle MPO$, т.к они опираются на одну дугу

Аналогично, что $\angle LKO = \frac{1}{2}\angle PML$, т.к
- MO - часть биссектрисы
- $\angle PKO = \angle PMO$, т.к они опираются на одну дугу.

5. Заметим, что $\angle LKM = \angle LKO + \angle MKO = \frac{1}{2}(MPL + PML)$

$\angle LKM = \frac{1}{2}(180 - PLM)$

Из пункта 3 $\angle MKL = 180 - \angle KLM - \angle KML \Rightarrow$

$\angle MKL = 180 - 50 - \angle KLM$

$\angle MKL = 130 - \angle KLM$

6. Приравняем два выражения (из пункта 5) и получим:

$130 - \angle KLM = \frac{1}{2}(180 - PLM)$.

Но $PLM = KLM \Rightarrow$ $130 - \angle KLM = \frac{1}{2}(180 - \angle KLM)$

$130 - \angle KLM = 90 - \frac{1}{2}\angle KLM$

$130 - 90 = -\frac{1}{2}\angle KLM + \cancel{K}LM$

$40 = \frac{1}{2} KLM$

$KLM = 80^\circ$

$\boxed{\text{Ответ}}$: 80°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	5	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) Рассмотрим промежуток $[16; 2024]$ - в этом промежутке 300 простых, нечетных чисел.
Также в него входит такие числа, как 5^3, 7^3, 9^3, 3^3, 7^2, 9^2 - которые удовлетворяют условию задачи.
Следовательно минимум 306 чисел могло быть записано на доске.

16 и 2024 - числа чётные $\Rightarrow$ $2024-16-2=2006$ чисел входит в промежуток.
Узнаем сколько из них нечетных, удовлетворяющих условию задачи: $2006:2=1003$ - кол-во нечетных.
Т.к мы знаем, что 306 из 1003 - простые, то 695 остальных чисел просто нечетные.

Заметим, что $695\cdot3=2085$ - это число не входит в промежуток, но 695 является его делителем, следовательно числа входящих в $[16; 2024] < 695$.
Рассмотрим число 675. $675\cdot3=2025$. Следовательно, 673 - последнее число, которое удовлетворяет ~~на~~ промежутку.
Посчитаем, что от 17 до 673 - 656 чисел, но только $656:2=328$ чисел (нечетных ~~в~~ включая 306 из начала решения),

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 5 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Т.к мы отсеивали из 695 - просто нечетных чисел, то

$328 + 306 = 634$.

Ответ: 634 числа

5) $x^3 + 6x^2 + 23x + 3a$, a и $b \in Z$, доказать, что a и b - различное.

Скажем, что $a = 6$, тогда

запишем теорему Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a}$$

В таком случае $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-3a}{1} = -3a$.

С учетом $a = 6$, ~~тогда~~ многочлен преобретает такой вид:

$$x^3 + x^2 + 23x + 3$$

Следовательно $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -3$.

Но так как их сумма отрицательна, то минимум одно из них положительно.

А так как ~~[illegible]~~ положительное $\cdot$ отрицательное $\cdot$ отрицательное = положительное

Следовательно, это противоречие, значит $a \neq 6$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ул. Борисова 5

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	6	7	3	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Егоров

Имя Никита

Отчество Викторович

Дата рождения 07.12.2002 **Класс** 10

Предмет Математика

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8-923-574-2679 **Подпись** Егор

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	8	6	7	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

№ 2

1) Заметим, что на каждую из предложенных задач можно ~~получить~~ дать либо правильный, либо не правильный ответ; так же заметим, что если дать правильный ответ на лёгкую, то к числу n баллов команды прибавится 4, т.е. получим $n+4$ балла, а если неправильный – вычтется 2, т.е. получится $n-2$ балла, значит между баллами, ~~полученными за правильный~~ которые будут у команды, если она даст ~~за...~~ правильный ответ и баллами, которые у т ней будут при неправильном, разница составляет $n+4-(n-2)=n-n+4+2=6$ баллов. Аналогично, правильный ответ на среднюю задачу при изначальных k баллах позволяет ~~получить после решения~~ иметь $k+5$ баллов, а неправильный $k-1$ балл, т.е. разница для итогового зачёта по баллам так же $k+5-(k-1)=6$ баллов и. Со сложной задачей так же команда будет иметь на 6 баллов больше при правильном решении, чем при неправильном.

2) Из (1) „Бельчата" теряли ровно 6 баллов от максимально возможного числа баллов в итоге, когда ~~не решали~~ давали не правильный ответ на задачу, вне зависимости от того, была она лёгкой средней или сложной, а значит, раз ~~после~~ в итоге „Бельчата" получили на 30 баллов меньше максимально возможного числа, то они дали не верный ответ на $\frac{30}{6}=5$ задач; на ~~7~~ 10 задач, по условию, дали верный ответ, а значит всего задач было предложено $5+10=15$.

Ответ: 15

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 6 7 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

1) По теореме Виета для кубического многочлена

$3b = -x_1 x_2 x_3$

$a = -(x_1 + x_2 + x_3)$

$17 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$, где $x_1; x_2; x_3$ – корни заданного многочлена (существуют по условию).

2) Если $x_1; x_2$ и x_3 – не различные, ~~то возможны два случая: все корни равны или два из корней равны, третий – отличается.~~ ~~3) Рассмотрим случай~~ ~~не~~ ~~они~~ – одинаковы, то хотя бы два корня, представленные числом x_4, а оставшийся, третий корень, который может быть равен другим двум, а может и не быть, обозначим за x_5, тогда, из пункта (1), получим

$3b = -x_1 x_2 x_3 = -x_4^2 x_5$

$a = \cancel{-(2x_4 + x_5)} = -(x_1 + x_2 + x_3) = -(2x_4 + x_5)$

$17 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = x_4^2 + 2x_4 x_5$. Рассмотрим выражение

$17 = x_4^2 + 2x_4 x_5$, из него следует, что $17 = x_4(x_4 + 2x_5)$, тогда

$x_4 + 2x_5 = \frac{17}{x_4}$; поскольку и x_4 и x_5 – ~~представляют~~ равны каким-либо корням заданного многочлена, которые, по условию, – целые, то x_4 – целое; 2 – целое; x_5 – целое; $2 \cdot x_5$ – целое и $x_4 + 2x_5$ – целое. Тогда $\frac{17}{x_4}$ – тоже целое; 17 – простое число, значит его целыми делителями являются только ± 1 и $\pm$ само число, т.е. ± 17, значит ~~$x_4 = \pm 1$~~ $x_4 = -1$, либо $x_4 = -17$, либо $x_4 = 1$, либо $x_4 = 17$. Рассмотрим каждый из случаев.

Если $x_4 = -1$, то выражение $x_4 + 2x_5 = \frac{17}{x_4}$, примет вид

$-1 + 2x_5 = -17$, тогда $x_5 = -8$, (продолжение на листе 3)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 6 7 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 (продолжение)

2) продолжение

Если $x_4 = -17$, то ~~выражение~~ $x_4 + 2x_5 = \frac{17}{x_4}$ примет вид

$-17 + 2x_5 = -1$

$x_5 = 8$

Если $x_4 = 1$, то выражение $x_4 + 2x_5 = \frac{17}{x_4}$, примет вид

$1 + 2x_5 = 17$

$x_5 = 8$

Если $x_4 = 17$, то выражение ~~примет вид~~ $x_4 + 2x_5 = \frac{17}{x_4}$, примет вид

$17 + 2x_5 = 1$

$x_5 = -8$; Получили, что при любом x_4 - удовлетворяющем условию $|x_5| = 8$; $|x_4| = 1$ либо $|x_4| = 17$, в таком случае $x_5 \not\vdots 3$ и $x_4 \not\vdots$.
Рассмотрим выражение

$3b = -x_4^2 \cdot x_5$

$b = -\frac{x_4 \cdot x_4 \cdot x_5}{3}$; по условию $b \in \mathbb{Z}$; поскольку ~~x_4~~ $x_4 \not\vdots 3$, то $x_4^2 \not\vdots 3$;
тогда $x_4^2 \cdot x_5 \not\vdots 3$, значит

$b = -\frac{x_4^2 \cdot x_5}{3}$, где $x_4^2 \cdot x_5 \not\vdots 3$, тогда $b \notin \mathbb{Z}$, что противоречит условию. Раз найдено противоречие, то предположение о том, что хотя бы 2, т.е. 2 или 3 корня - одинаковы, не верно, тогда все корни различны ~~были~~, поскольку многочлен, по условию, существует и, по условию - имеет 3 корня, которые, как выяснилось, по-парно различны.

Доказано.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 6 7 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

1) В условии не указано являются ли диапазон всех полученных ответов отрезком или интервалом (т.е. ответы были получены включительно от 1 до 100, или не включительно), так что рассмотрим оба случая.

2) Если все возможные ответы получены в диапазоне от 1 до 100 включительно, то бельчатами дано было 100 различных вариантов ответов. Раз хотя бы 1 рыцарь есть, то один из этих 100 вариантов - верен, значит лжецов не больше 100, при этом, раз рыцари говорят правду, то все рыцари, каким бы неизвестным числом не было представлено их кол-во, дали одинаковый ответ, потому что лжецов - фиксированное число, тогда оставшиеся 99 различных вариантов - ложь и, следовательно, поступили от лжецов, тогда лжецов не меньше 99, значит лжецов может быть 99 либо 100 по заданном диапазоне. такого варианта ответа „больше 100" не представлено

Ответ: 99 либо 100.

3) Если все возможные ответы получены из диапазона от 1 до 100 не включительно, то есть из диапазона от 2 до 99 включительно, то бельчатами дано 98 различных вариантов ответа, один из которых - верен, раз присутствует хотя бы один рыцарь, а значит, раз максимальный ответ на полученном диапазоне это 99, значит лжецов не больше 99, при этом, аналогично (2) все рыцари дали одинаковый ответ, значит 98 - 1 = 97 вариантов ответов, ~~лжецов хотя бы 97~~ принадлежали лжецам, значит лжецов хотя бы 97. ~~ответов~~ на заданном промежутке

Ответ: 97, либо 98, либо 99.

Лист 4 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	6	7	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4.

1) Поскольку ~~2020⋮2, нечётных на 1 число меньше, чем чётных~~ ~~200~~ 2020⋮2 и 16⋮2, то на заданном промежутке нечётных на одно меньше, чем чётных. А всего целых чисел на промежутке ~~$\frac{2020-16}{2}+1=$~~ $2020-16+1=2005$ из них n - чётных и $n-1$ - нечётных, а всего чисел $n+n-1=2n-1$, тогда $2n-1=2005$; $n=1003$, тогда $n-1=1002$ итого имеем 1002 нечётных чисел на промежутке.

2) Пусть на доске оказалось хотя бы 674 числа; ~~тогда на доске хотя бы~~ Заметим, что ~~на доске~~ существует $\frac{2019-675}{2}+1=673$ нечётных числа лежащих в отрезке $[675;2019]$, тогда, по принципу Дирихле, если на доске есть хотя бы 674 числа, то хотя бы одно из них не лежит в $[675;2019]$; в заданном промежутке ($[16;2020]$), нет нечётных, ~~меньших~~ больших 2019, значит это число, не лежащее в $[675;2019]$ меньше 675, т.е. это 673 и меньше; все нечётные числа меньше 675, при умножении на какую-то степень тройки, начиная с первой, дают число из промежутка $[675;2019]$, т.к. не хотя бы в 3 раза больше, это происходит из-за того, что все числа из $[675;2019]$, ~~можно представить~~ кратные 3 можно представить в виде $a\cdot 3$, где $a\in[225;673]$; и т.д. В итоге, если есть 1 число а меньшее 675, то есть число вида $a\cdot 3^n$, где $n\in\mathbb{Z}$; $n\geq 1$ На промежутке $[675;2019]$; если убрать из того промежутка число $a\cdot 3^n$, то придётся брать ещё одно число ~~а из промеж~~ меньшее 675, и тогда либо a, делиться на это новое число, либо ему соответствует другое $b\cdot 3^n$ из $[675;2019]$ и т.д. В итоге, если есть хотя бы 674 числа, из-за ~~конечности множества нечётных на промежутке $[16;673]$, тогда~~ того, что ~~$\frac{1002}{3}$~~ ~~$\frac{1002}{2}=67$~~ ~~$\frac{2019}{3}$~~ $=673$, ~~всегда найдётся~~

(продолжение на листе 6)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	6	7	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4 (продолжение).

$\frac{2019}{3} = 673$, по принципу Дирихле, всегда есть ~~не~~ хотя бы одна пара вида a и $a \cdot 3^n$, и раз при $a \not\vdots\, 3$; $a \cdot 3^n \not\vdots\, 3$, то эта пара ~~удовлетворяет~~ условию, при этом $a \cdot 3^n \vdots\, a$, тогда, по условию на доске не может быть 674 числа или более.

3) С другой стороны есть пример на 673 числа, это все нечётные числа отрезка $[675; 2019]$. Поскольку они не чётны, то для того чтобы одно число делилось на другое, нужно, чтобы делимое было хотя бы в трое больше делителя, однако даже минимальное число промежутка $675 > 673 = \frac{2019}{3}$, значит, раз 2019 - максимальное число промежутка, то в промежутке нет ни одного числа, превосходящего другое хотя бы втрое.

4) Есть оценка на то, что на доске не может быть более 673 чисел, и пример на 673 числа, значит на доске могло оказаться максимум 673 числа.

Ответ: 673.

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	8	6	7	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

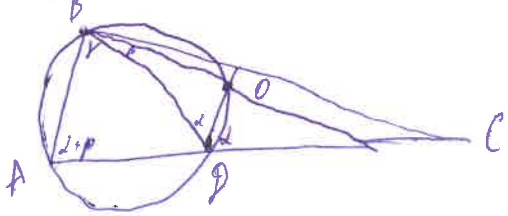
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Дано:
$\triangle ABC$; $D \in AC$; ω – описанная окружность $\triangle ABD$; $O \in \omega$; O – центр вписанной окружности $\triangle BCD$; $\angle ABC = 40^\circ$

Найти: $\angle ACB$

рис



Решение

1) Центр вписанной окружности треугольника есть точка пересечения его биссектрис. Тогда DO и BO – биссектрисы углов BDC и CBD соответственно. Пусть $\angle ODB = \alpha$; $\angle OBD = \beta$.

2) Сумма градусных мер углов треугольника равна 180°, тогда $\angle BOD = 180^\circ - \angle OBD - \angle ODB = 180^\circ - \beta - \alpha$. Поскольку $\angle BOD$ – вписан в ω и $\angle BAD$ – вписан в ω, при этом $\angle BOD$ – опирается на дугу BD содержащую A, а $\angle BAD$ – на дугу BD – не содержащую A, то $\angle BOD + \angle BAD = 180^\circ$, тогда $\angle BAD = 180^\circ - \angle BOD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$

3) Пусть $\angle ABD = \gamma$, тогда из того, что сумма градусных мер углов треугольника равна 180°; $\angle BDA = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABD = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$; при этом углы BDA и BDC – смежные, тогда $\angle BDA = 180^\circ - \angle BDC = 180^\circ - 2 \cdot \angle BDO = 180^\circ - 2\alpha$ (поскольку DO – биссектриса $\angle BDC$ из (1)). Получили $\angle BDA = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - 2\alpha$, значит $\beta + \gamma = \alpha$

4) Из (1) $\angle DBO = \angle OBC = \beta$, тогда $\angle ABC = \gamma + \beta + \beta = \alpha + \beta = \angle BAD = \angle BAC$, тогда, раз $\angle CBA = \angle BAC = 40^\circ$ (по условию), то $\angle BCA = 180^\circ - 40^\circ \cdot 2 = 100^\circ$.

Ответ: 100°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	3	1	5	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Прачик

Имя Ксения

Отчество Александровна

Дата рождения 17.01.2003 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89029630041 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	1	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	8	20	88

№1

Т.к известно, что среди бельчат есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец, рассмотрим что может сказать рыцарь

Т.к рыцарь всегда говорит правду, то все рыцари на острове назовут одно и то же число, а лжецы в таком случае называют все остальные 199 чисел. =>

Минимальное число лжецов – 199. Рыцарь в таком случае называет это число (199), а оставшиеся 199 чисел называют лжецы.

Максимальное число, которое может назвать любой ~~человек~~ бельчонок на острове – 200.

+

Если рыцарь называет это число, то лжецов всего 200 и кто-то из них повторил уже названное число.

Рыцарь не может назвать число меньшее 199, т.к если он называет, например 198, то соответственно 198 чисел названо лжецами, ~~т.к~~ рыцари могут называть лишь одно число, ещё одно названное число будет ложью, но в количество лжецов названных рыцарем этот бельчонок не попадёт => рыцарь солгал => противоречие.

Ответ: 199, 200

№4

Рассмотрим число 675. $675 \cdot 3 = 2025$. Следовательно это число не ~~может~~ ~~будет~~ является делителем для любых чисел на промежутке $[675; 2024]$. Соответственно если дальше рассматривать число в данном промежутке, то они все не являются делителями чисел с этого же промежутка (наименьшее нечетное число не равное 1)

$(675+n) \cdot 3 > 2025$; $675 \cdot (3+k) > 2025$). Данная ситуация

$n < 1350$ · $675 \cdot (3+k)$ k – число; $2n, n < 675$

удовлетворяет условию, то есть Катя может выписать все нечетные числа с промежутка $[675; 2024]$ их количество –> 675, что составляет $\frac{1}{3}$ от всех чисел.

Всего на промежутке $[16; 2024]$ 1004 нечетных чисел. ~~При этом 300~~ ~~из~~ ~~такие простые~~. ~~Нужно~~ Часть из них являются делителями друг. друга.

Поэтому нужно найти среди этих чисел наименьшее число, чей первый нечетный делитель будет больше 2024. Таким числом и является 675 => подходят все нечетные $[675; 2024]$ Ответ: 675

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

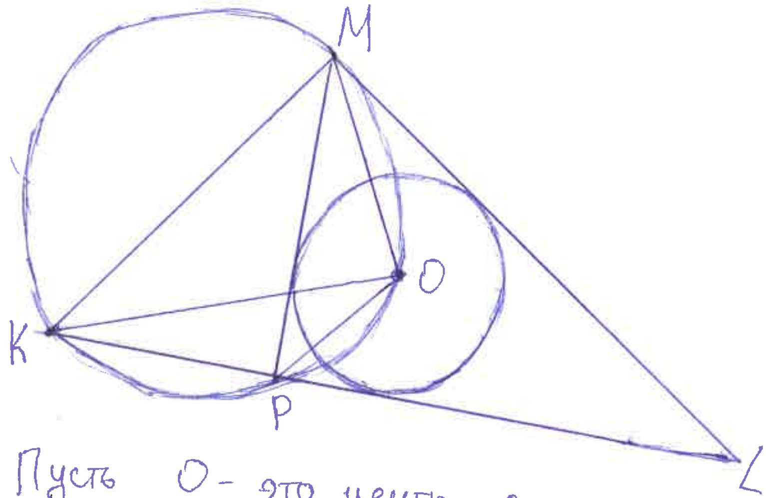
Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	1	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Пусть O – это центр вписанной окружности (в $\triangle PML$). Исходя из условия задачи описанная окружность $\triangle KMP$ проходит через O. => O ∈ данной окружности.

Проведем KO и рассмотрим $\angle MKO$ и $\angle OKP$ ($\angle MKO + \angle OKP = \angle MKL$):

а) $\angle MKO$ опирается $\cup MO$ и $\angle MPO$ опирается на дугу MO => (K, M, P, O ∈ окружности по условию) => $\angle MKO = \angle MPO$ как вписанные и опирающиеся на одну дугу.

O – центр вписанной окружности => точка пересечения биссектрис => PO – биссектриса $\angle MPL$ => $\angle MKO = \angle MPO = \frac{1}{2}\angle MPL$ (по определению биссектрисы)

б) Аналогично $\angle OKP$ опирается на $\cup OP$ и $\angle PMO$ опирается на $\cup OP$ => $\angle OKP = \angle PMO$ как вписанные и опирающиеся на одну дугу.

MO – биссектриса $\angle PML$ => $\angle OKP = \angle PMO = \frac{1}{2}\angle PML$ (по определению биссектрисы)

Т.к $\angle MKO + \angle OKP = \angle MKL$ => $\angle MKL = \frac{1}{2}\angle MPL + \frac{1}{2}\angle PML =$
$= \frac{1}{2}(\angle MPL + \angle PML)$.

Т.к сумма углов в $\triangle$ равна $180°$ => $\angle MPL + \angle PML = 180° - \angle MLP$ => ($\angle MLP = \angle MLK$)

$\angle MKL = \frac{1}{2}(180° - \angle MLK)$

Т.к сумма углов в $\triangle$ 180°, то рассмотрим $\triangle KML$:

$\angle MKL + \angle KLM + \angle LMK = 180°$; подставим выведенный $\angle MKL$ через $\angle MLK$

$\frac{1}{2}(180° - \angle KLM) + \underset{50° \text{ (по условию)}}{\angle KLM} = 180°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	1	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

$90° - \frac{1}{2}(\angle KLM + \angle KLM) = 130°$

$\frac{1}{2}\angle KLM = 40$; $\angle KLM = 80°$

Ответ: $\angle KLM = 80°$

+

№2

Пусть: k – кол-во решенных простых ; l – кол-во всех лёгких
m – кол-во решенных средних ; s – кол-во всех средних
n – кол-во решенных трудных ; t – кол-во всех трудных

Найти $l+s+t$

Рассмотрим два уравнения:

① Кол-во баллов команды это все баллы за правильные – – баллы за неправильные:

Тогда $(l-k)$ – количество лёгких задач, решенных неправильно
$(s-m)$ – количество средних задач, решенных неправильно
$(t-n)$ – количество трудных задач, решенных неправильно

Исходя из условия уравнение имеет вид:

$4k+5m+6n-2(l-k)-(s-m)-0\cdot(t-n)=X$, X – баллы команды

② С другой стороны, баллы команды – это ~~~~ максимальное количество баллов – 30:

+

$4l+5s+6t-30=X$

Рассмотрим ①:

$4k+5m+6n-2l+2k-s+m = 6k+6m+6n-2l-s = 6(k+m+n)-2l-s = X$

Т.к. $k+m+n$ – это все решенные задачи команды, то $k+m+n=15$

$X = 90-2l-s$

Подставим это значение X во ②:

$90-2l-s = 4l+5s+6t-30$

$6l+6s+6t = 120$

$6(l+s+t) = 120$

$l+s+t = 20$ – ответ

Ответ: 20 задач

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 3 | 1 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5

$x^3+bx^2+23x+3a, \quad a, b \in \mathbb{Z}$

Т.к известно, что многочлен имеет три целых корня, то запишем теорему Виета для кубического многочлена: в общем виде:

$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad x^3+bx^2+23x+3a=0$

$$\begin{cases} -\frac{b}{a}=x_1+x_2+x_3 \\ \frac{c}{a}=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 \\ -\frac{d}{a}=x_1x_2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b=x_1+x_2+x_3 \\ 23=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 \\ -3a=x_1x_2x_3 \end{cases}$$

Предположим, что все корни одинаковы; тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} -b=3x \\ 23=3x^2 \\ -3a=x^3 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение.
$x=\sqrt{\frac{23}{3}}$, но по условию корни многочлена должны быть целыми числами, а $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$ не является целым (23 - простое) $\Rightarrow$ противоречие

$\Downarrow$

Среди корней есть различные. Рассмотрим ситуацию, когда есть два одинаковых корня и один отличный. Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} -b=2x_1+x_3 \\ 23=x_1^2+2x_1x_3 \\ -3a=x_1^2x_3 \end{cases}$$

$23=x_1^2+2x_1x_3 \Leftrightarrow 23=x_1(x_1+2x_3)$
Т.к 23 - простое и x_1, x_3 - целые по условию, то данное уравнение имеет два решения

~~23=1·23~~ $\quad 23=x_1(x_1+2x_3)$
$\quad 1 \cdot 23$
$\quad 23 \cdot 1$

$\begin{cases} x_1=1 \\ x_1+2x_3=23 \end{cases}$ ① $\begin{cases} x_1=1 \\ x_3=11 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=23 \\ x_1+2x_3=1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x_1=23 \\ x_3=-11 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_3=-11 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-23 \\ x_3=11 \end{cases}$ при $-1\cdot(-23)$, $-23\cdot(-1)$

① $-3a=1\cdot 11$, $a \notin \mathbb{Z}$

② $-3a=23^2\cdot(-11)$
23 - простое; 11 - простое ($23 \not\vdots 3$; $11 \not\vdots 3$)
$a \notin \mathbb{Z}$

③ $-3a=1\cdot(-11)$
$a \notin \mathbb{Z}$

④ $-3a=(-23)^2\cdot 11$
$a \notin \mathbb{Z}$.

противоречие

$\Rightarrow x_1, x_2, x_3$ - различны

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	8	6	5	3	2	0

Ульяновск

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 1

Фамилия Карасева

Имя ЕЛИЗАВЕТА

Отчество Олеговна

Дата рождения 16.10.2003 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 15.02.2020

Номер телефона +79176121494 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 6 | 5 | 3 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Рассмотрим рыцаря. По условию за ним сидят либо лжец, а потом рыцарь(1); либо ещё один рыцарь, а затем лжец(2).

1	2	3	4	5	Σ
20	8	20	20	-	68

(1) Р → Л → Р (2) Р → Р → Л

(1): Т.К. за лжецом сидит рыцарь, то для соблюдения условия за ним должен сидеть ещё один рыцарь. (за лжецом могут сидеть либо два лжеца, либо два рыцаря). Р → Л → Р → Р.
Т.К. за вторым рыцарем уже находится рыцарь, значит следующим должен быть лжец: ...Р → Л → Р → Р → Л → Р → Р → Л...
Значит, если за каждым лжецом будет сидеть два рыцаря, то наша цепочка зациклится. Т.К. 450 без остатка делится на 3, то такая ситуация возможна ⇒ лжецов могло быть 450 : 3 = 150.

(2): Если же за каким-то лжецом сидит два лжеца, то: Л → Л → Л. Т.К. за вторым лжецом сидит лжец, а рыцарь следующим быть не может по условию, то четвертый - тоже лжец.
Аналогично следующие люди будут лжецами, значит в таком случае в круге не было ни одного рыцаря ⇒ лжецов могло быть 450.

+

Ответ: 150; 450.

№2.

Пусть Вася набрал В баллов, Коля набрал К баллов; Петя набрал П баллов. Запишем то, что нам известно:

$$\begin{cases} В+К+П<n \\ 2В+К+П=2n-34 \\ В+К+3П=2n+6 \\ К=В+9 \end{cases}$$

$$3В+П+9=2n-34$$
$$2В+9+3П=2n+6$$
$$В-2П=-34-6$$
$$2П=В+40$$
$$П=\tfrac{1}{2}В+20$$

8б

$$2В+9+(\tfrac{1}{2}В+20)\cdot 3=2n+6$$
$$\tfrac{7}{2}В+69=2n+6$$
$$n=\frac{7В+63}{2}=\tfrac{7}{4}В+31{,}5$$

$$В+В+9+\tfrac{1}{2}В+20<n$$
$$\tfrac{5}{2}В+29<\tfrac{7}{4}В+31{,}5 \mid \cdot 4$$
$$10В+29\cdot 4<7В+31{,}5\cdot 4$$
$$3В<126-116$$
$$В<\tfrac{10}{3}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 6 | 5 | 3 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

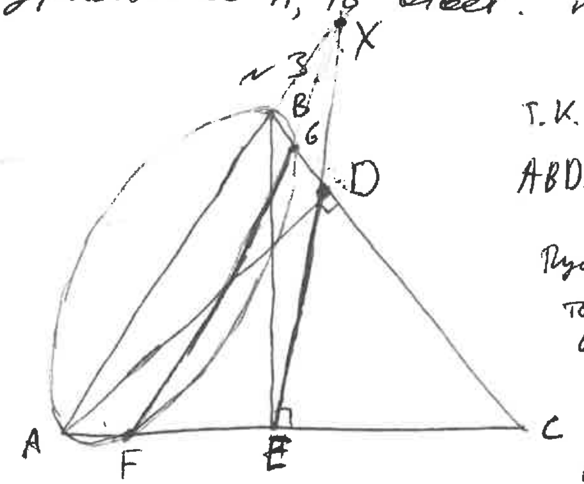
№2 (продолжение)

Подставим в систему $B=0$, так как это наим. возможное кол-во набранных баллов, тогда $n = \frac{7}{4}\cdot 0 + 31{,}5 = 31{,}5$

Теперь подставим $B = \frac{10}{3}$ (наиб. кол-во), тогда $n = \frac{7}{4_2}\cdot\frac{10^5}{3} + 31{,}5 = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$

Ответ: $\Rightarrow n \in (31{,}5; 37\frac{1}{3})$. Если в вопросе задачи требуются все возможные натуральные n, то Ответ: $n \in \{32; 33; 34; 35; 36; 37\}$.

№3



Т.к. $\angle BDA = \angle BEA = 90°$, то $ABDE$ – вписанный; AB – диаметр.

Пусть $AB \cap FG = X$, тогда степень точки X относительно окружности, описанной около $ABGF$ равна

$XA \cdot XB = XG \cdot XF$

Пусть $AB \cap DE = Y$, тогда степень Y относительно окр. $ABDE$ равна

$YE \cdot YD = YA \cdot YB$

+

$\Rightarrow Y$ и X совпадают, и $XG \cdot XF = XE \cdot XD \Rightarrow \frac{XG}{XE} = \frac{XD}{XF} \Rightarrow$

$\triangle XDG \sim \triangle XFE$ с коэф. $\frac{1}{2} \Rightarrow FG = 2DE$, что и т.д.

№4.

Заметим, что произведение двух чисел отрицательное только когда одно из чисел отрицательное.

Пусть у нас есть 2020 положительных чисел, и 2019 их произведений.

+

Тогда 1) если поменять знак на – у числа, соседнего с двумя полож. числами (+ – +), то кол-во отрицательных произведений увеличится на +2.

2) если ситуация $(-\,+\,+) \to (-\,-\,+)$, то число отр. произв. не изменится.

3) если $(-\,+\,-) \to (-\,-\,-)$, то число отр. произв. уменьшится на 2.

4) если число крайнее, то $(+\,-) \to (-\,-)$ – число произв. уменьш. на 1
$(+\,+) \to (-\,+)$ – число произв. увелич. на +1.

Т.е., если в ряду k отриц. чисел, то отриц. произв. $(\leq 2)\cdot k$.

Максимальное число отрицательных произведений $= 2019 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\leq 2)\cdot k = 2019$; $k \leq 1010$, т.е. максимально возможное число отриц. чисел среди $x_1 \dots x_{2020}$ равно 1010, и при этом максимально возможное число отриц. произв. таких чисел равно $2019 \Rightarrow$ всего отриц. чисел на доске $2019 + 1010 = 3029$.

(Пример: среди $x_1 \dots x_{2020}$ отриц. числа чередуются с положит.)

Лист 2 из 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	3	0	5	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Сёмушкина

Имя Екатерина

Отчество Ивановна

Дата рождения 28.11.2002 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +79831661488 **Подпись** Катюта

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	0	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② легкие, средние, трудные задачи

реш 4 5 6

нереш −2 −1 0

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	2	82

пусть a, b, c — общее количество задач, x_1, x_2, x_3 — решенные, а $(a-x_1)$, $(b-x_2)$, $(c-x_3)$ — нерешенные по условию известно, что

$$x_1+x_2+x_3=15$$

составим еще одну мат. модель

$$4x_1+5x_2+6x_3-2(a-x_1)-(b-x_2)=4a+5b+6c-30$$

$$4x_1+5x_2+6x_3-2a+2x_1-b+x_2=4a+5b+6c-30$$

$$6x_1+6x_2+6x_3=6a+6b+6c-30$$

$$6(x_1+x_2+x_3)=6(a+b+c)-30 \quad |:6$$

$$\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{15}=a+b+c-5$$

$$a+b+c=20$$

общее количество задач на олимпиаде

Ответ: 20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	0	7	3	0	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(1) необходимо найти количество нечетных чисел на отрезке [16;2024], так, чтобы они не делились друг на друга.

проанализируем, каким образом можно найти наибольшее количество

наименьшее натуральное нечетное число, большее единицы, это 3, то есть числа вида n и $3n$, находящиеся в заданном промежутке, нам не подходят

аналогично нам не подходят числа вида $n, 5n$; $n, 7n$ и так далее, потому что это автоматически показывает то, что они делятся друг на друга.

мы не рассматриваем четные числа ни отдельно (Катя выписывает только нечетные), ни как коэффициент (нечетное • четное = четное, см. ↑).

найдем первое число, которое нам подходит, это будет такое число, которое при умножении на 3 перестает входить в отрезок [16;2024], это нам и нужно

$2024 : 3 = 674$ (ост. 2)

674 это число ещё входит, а 675 уже нет, значит

675 - первое число, которое нам подходит

очевидно, что при умножении его на числа больше 3 будут также получаться числа, не входящие в [16;2024].

аналогично с нечетными числами, идущими после 675, понятно, что при умножении их на 3 и следующие нечетные числа, у нас будут получаться числа, не входящие в [16;2024].

$\Rightarrow$ подходят все нечетные числа от 675 до 2023 (2024 - чет)

$2023 - 675 = 1348$

$1348 : 2 = 674$

$674+1=675$ - наибольшее количество чисел.

Ответ: 675.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 0 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3

1) На стороне треугольника $\triangle KLM$ точка P описаной окружность $\triangle KPM$ проходит через центр вписаной окружность $\triangle KLM$

⇓

$K, P, O, M \in$ окружност O_2

Найти $\angle KLM$, если $\angle KML = 50°$

2) обозначим углы в $\triangle KML$

$\angle KML = 50°$

$\angle MKL = \angle MKO + \angle LKO$

$\angle KLM$ - искомый

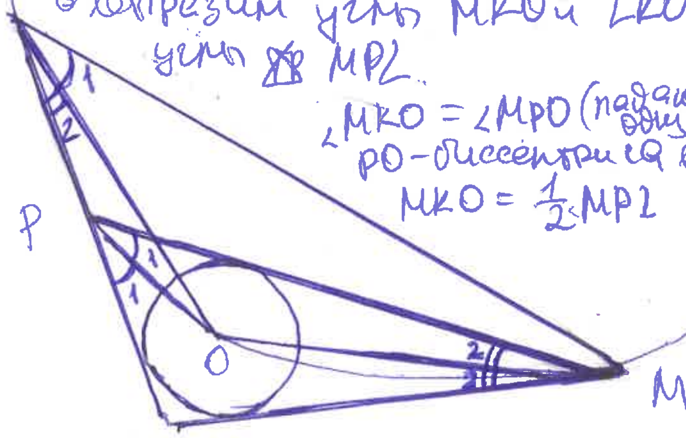
O_2

3) выразим углы MKO и LKO через углы MPL.

$\angle MKO = \angle MPO$ (падают на одну дугу)

PO - биссектриса в $\triangle MPL$

$MKO = \frac{1}{2} MPL$



K

P

O

L

M

$\angle LKO = \angle PMO$ (падают на одну дугу)

MO - биссектриса

$\angle LKO = \frac{1}{2} \angle PML$

$\angle MKO = \frac{1}{2} \angle MPL$

$\Rightarrow \angle LKO = \frac{1}{2} \angle PML$

4) обозначим угол $\angle KLM$ через $\angle MKO$ и $\angle LKO$

$\angle KLM = 180 - 2\angle MKO - 2\angle LKO$

составим выражение с углами $\triangle KLM$, выраженными через $\angle MKO$ и $\angle LKO$.

$MKL + \angle KLM + \angle KML = 180$

$\angle MKO + \angle LKO + \cancel{180} - 2\angle MKO - 2\angle LKO + 50 = \cancel{180}$

$\angle MKO + \angle LKO + 50 = 2\angle MKO + 2\angle LKO$

$\angle MKO + \angle LKO = 50$

$\angle MKL = 50$

$\angle KLM = 80°$

$180 - \angle KML - \angle MKL = 180 - 50 - 50 = 80$

Ответ: 80

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 0 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(1) Бельчата в лесу, рыцари и лжецы, каждого роли минимум 1 бельчонок "Сколько лжецов на поляне", все возможные ответы от 1 до 200 (некоторые несколько раз могут быть).

Из условия следует, что на поляне минимум 200 бельчат, т.к было получено 200 разных ответов.

1) рассмотрим случай, где 200 бельчат и один из них рыцарь.
рыцарь (даёт верный ответ): 199 лжецов
все остальные лжецы и дают все остальные 199 ответов (неверных)

2) рассмотрим случай, где 200 бельчат и один из них лжец.
рыцари: 1 лжец.
лжец: /говорит что угодно/ — но тогда у нас только 2 высказывания, а должно быть 200, нам ничего не остаётся кроме как добавить различных мнений путём добавления количества лжецов но тогда не хватает еще 198 мнений,

199 рыцарей
1 лжец + 198 = 199 лжецов — наименьшее возможное количество лжецов.

(3 случай)

Лжецов не может быть более 200, т.к. на поляне в моём случае (по условию) будет хотя бы один рыцарь и если их будет более 200, то будет получен ответ числом >200, а в условии только про [1;200].
Лжецов не может быть менее 199, это описано во втором случае

3) 200 бельчонка, 1 рыцарь
Р: 200 лжецов
лжецы: называют числа от 1 до 199, у кого-то повторяется.

$\Downarrow$

следовательно, лжецов может быть либо 199, либо 200, больше вариантов нет.

Ответ: 199; 200.

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 0 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $\underset{a}{x^3}+\underset{b}{bx^2}+\underset{c}{23x}+\underset{d}{3a}$, a и b – целые.

многочлен имеет 3 целых корня. Доказать, что они различны

вспомним теорему Виета для третьей степени

в нашем конкретном случае, $a=1$

$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ $=-b$

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$ $=23$

$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$ $=-\frac{3a}{a}=-3$

$x_1; x_2; x_3$ – целые корни

из третьего уравнения можно сделать вывод, что среди корней нечетное количество отрицательных (1 или 3), а также ни один из корней не равен нулю

если бы все корни были одинаковы, из второго уравнения мы бы получили такую ситуацию

$x_1x_1+x_1x_1+x_1x_1=23$

$3x^2=23$, что очевидно в целых числах нерешаемо $\Rightarrow$

корни не могут быть одинаковы

если бы 2 корня были одинаковы, мы бы из третьего уравнения получили

2б

$\cancel{2}x_1^2x_2=-3$, что аналогично не может быть решено в целых числах

$\Downarrow$

все корни различны

что и требовалось доказать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г.Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	8	8	4	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия МАКАРОВ

Имя СЕМЁН

Отчество ЛЕОНИДОВИЧ

Дата рождения 24.08.2003 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89332001407 **Подпись** Мак

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	8	8	4	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	6	20	86

№1

Минимум 200 бельчат.

Покажем, что все рыцари будут говорить одно и тоже число. Тогда лжецов останется 199 или больше.

Рыцари говорят 199, тогда лж – 199, и назыв оси числа $\{1, 2, \dots 198, 200\}$.

+

Рыцари говорят 200, тогда лж – 200, и назыв оси число $\{1, 2 \dots 198, 200\}$ и еще ~~один лжецу~~ два лжеца скажут одно и тоже число.

Если рыцари говорят ~~н~~ ≤ 198, то тогда всех ответов будет $\leq 1 + 198 = 199$, но всего различных ответов 200, противоречие.

Ответ: 199, 200.

№2.

Пусть было: x легких задач, y средних и z сложных. И решенных командой „Бельчата"

x_1 легких задач, y_1 средних и z_1 сложных.

Составим уравнения:

Макс возм кол-во баллов $4x + 5y + 6z$

Решенных задач было $x_1 + y_1 + z_1 = 15$

~~Нерешенных~~ Баллы, снятые за нереш задачи:

$2(x - x_1) + (y - y_1) + 0 \cdot (z - z_1)$

Баллы за решенные задачи: $4x_1 + 5y_1 + 6z_1$

Тогда:

$4x_1 + 5y_1 + 6z_1 - 2 \cdot (x - x_1) - (y - y_1) - 0 \cdot (z - z_1) = 4x + 5y + 6z - 30$

$6x_1 + 6y_1 + 6z_1 = 6x + 6y + 6z - 30 \quad | : 6$

$x_1 + y_1 + z_1 = x + y + z - 5$

$\underset{\text{(Всего задач)}}{x + y + z} = x_1 + y_1 + z_1 + 5 = 15 + 5 = 20$

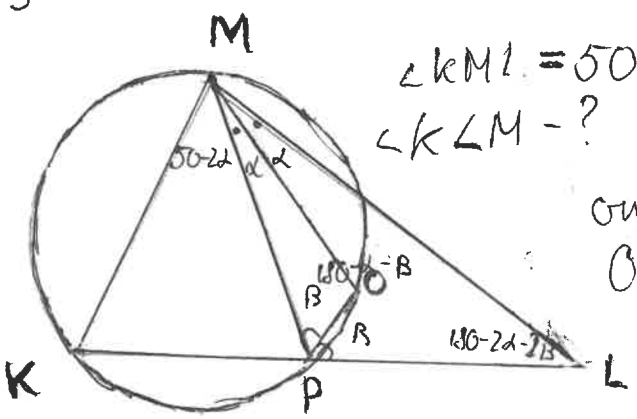
Ответ: 20 задач.

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 8 8 84 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



$\angle KML = 50°$

$\angle KLM - ?$

Решение:

O - лежит на ~~окр~~ описанной окр $\triangle KMP$,

Отсюда, KMOP - ~~вп~~ вписанный четырехугольник, => по св-ву впис четырехуг.

$\angle MOP + \angle MKP = \angle KPO + \angle KMO = 180°$

O - центр вписаной окр $\triangle MLP$ => O - точка перес ее биссектрис PO и MO.

Пусть $\angle PMO = \angle OML = \alpha$, $\angle MPO = \angle OPL = \beta$

Тогда $\angle KMP = 50 - 2\alpha$

$\angle MLK = 180 - 2\alpha - 2\beta$

$\angle MOP = 180 - \alpha - \beta$

$\angle MKP = 180 - \angle KML - \angle KLM = 180 - 50 - (180 - 2\alpha - 2\beta) =$
$= 2\alpha + 2\beta - 50$

По св-ву впис четырехуг.:

$\angle MKP + \angle MOP = 180°$

$2\alpha + 2\beta - 50 + 180 - \alpha - \beta = 180°$

$\alpha + \beta = 50°$

$\angle KLM = 180 - 2(\alpha + \beta) = 180 - 2 \cdot 50 = 80$

Ответ: $\angle KLM = 80°$

№4.

Минимальное нечетное число, на к-ое делится данное нечетное число есть данное нечетное число, умноженное на 3.

2019 : 3 = 673 (2019 - первое неч число, дел на 3)

Все числа больше 673 и нечетные не будут делиться друг на друга, т.к их ~~наим~~ мин. число будет

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	8	8	4	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 больше или равен $675\cdot 3 = 2025$, что уже выходит за границу отрезка.

$2019 - 675 = 1344$, $1344+1 = 1345$, Всего 673 числа.

Поймем почему нельзя больше.

Через кажд 34, делятся числа на 17 (соседн)

Через каждые 35, дел на 19

....

Через каждые 1342, дел на 671

Через каждые 1346, дел на 673

Через каждые 1350, дел на 675.

6б

~~Напр: 51:17, но и 102:51:17 и 204:51:17~~, и

~~40~~ 51:17, и 153:51:17, и 459:153:51:17, 1377:459:

:153:51:17 и можно взять лишь единственно

из всех и т.д. Как раз по одному числу будет

в наборе [675; 2019] 673 число 23

Ответ: 673.

№5

$x^3 + bx^2 + 23x + 3a = 0$

По теореме Виета:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{23}$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 23$

$x_1x_2x_3 = -3a$

Пусть хотя бы 2 корня одинаковые ($x_1 = x_2 = x$), получим

$2x + x_3 = -\frac{b}{23}$

$x^2 + 2xx_3 = 23 = x(x + 2x_3) = 23 \Rightarrow$ Т.к. корни целые, то x может быть равен ± 1, ± 23

$x^2x_3 = -3a \Rightarrow$ Т.к $a \in \mathbb{Z}$, то x^2x_3 должно делиться на 3.

$(23 = 23\cdot 1 = 1\cdot 23 = (-1)\cdot(-23) = (-23)\cdot(-1))$

....

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$x = 1$, тогда $1 + 2x_3 = 23$, $x_3 = 11$

$x^2 x_3 = 1 \cdot 11 \not\vdots\, 3$

$x = -1$, тогда $-1 + 2x_3 = -23$, $x_3 = -11$

$x^2 x_3 = 1 \cdot (-11) \not\vdots\, 3$

$x = 23$, тогда $23 + 2x_3 = 1$, $x_3 = -11$

$x^2 x_3 = 23^2 \cdot (-11) \not\vdots\, 3$

$x = -23$, тогда $-23 + 2x_3 = -1$, $x_3 = 11$

$x^2 \cdot x_3 = 23^2 \cdot 11 \not\vdots\, 3$

Противоречие, значит все корни различны.

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	7	3	4	9	2	0

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Бирюков

Имя Егор

Отчество Сергеевич

Дата рождения 23.07.2003 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 12 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +79138307088 **Подпись** Е.Бели

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	Р	0	0	0	7	3	4	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть кол-во лёгких решённых задач a, а всего лёгких задач x
кол-во средних решённых b, а всего средних y
Кол-во сложных решённых c, а всего сложных z
Тогда кол-во лёгких, которые не решили $(x-a)$, кол-во средних, которые не решили $(y-b)$, кол-во сложных, которые не решили $(z-c)$. Так как по условию за лёгкую 4 балла, за среднюю 5 баллов, за сложную 6 баллов, за неверную лёгкую вычитается 2 балла, за неверную среднюю вычитается 1 балл, за неверную сложную баллы не вычитаются, „Бельчата" ответили правильно на 15 задач и получили на 30 баллов меньше максимально возможного, то составим систему уравнений

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	8	20	88

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ 4a+5b+6c-2(x-a)-(y-b)=4x+5y+6z-30 \end{cases}$$

Раскроем скобки и приведём подобные во втором уравнении

$4a+5b+6c-2x+2a-y+b=4x+5y+6z-30$

$6a+6b+6c-2x-y=4x+5y+6z-30$

$6a+6b+6c=6x+6y+6z-30$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 4 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$6\cdot(a+b+c)=6\cdot(x+y+z)-30 \quad |:6$

$$\begin{cases} a+b+c=x+y+z-5 \\ a+b+c=15 \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в первое

$x+y+z-5=15$

$x+y+z=20$

Так как x - это всего лёгких, y - всего средних и z - всего сложных задач, то их сумма это кол-во предложенных на олимпиаде задач.

Ответ: 20 задач

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 4 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Т.к. все возможные ответы от 1 до 200 и стоит вопрос „Сколько лжецов на поляне?" и если рыцарь говорит 200, то на поляне 200 лжецов плюс он сам итого на поляне ~~находится~~ находится 201 человек.

Из условия следует, что все числа от 1 до 200 должны быть произнесены хотя бы один раз.

Начнём рассматривать ~~случаи~~ возможные случаи:

1 случай:

1 рыцарь и 200 лжецов

Соответственно 200 лжецов способны произнести все числа от 1 до ~~200~~ 199, ~~кроме 200~~ т.к им можно повторяться, соответственно лжецы будут врать и единственный рыцарь скажет число 200 и будет прав, соответственно такой случай возможен.

2 случай:

2 рыцаря и 199 лжецов

2 рыцаря 2 раза скажут число 199, а соответственно 199 лжецам нужно будет произнести оставшиеся $200-1=199$ чисел: и они смогут это сделать т.к лжецов тоже 199, соответственно этот вариант возможен.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 М А 0 0 0 0 7 3 4 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 случай:

3 рыцаря и 198 лжецов

3 рыцаря скажут число 198, значит останется произнести 200-1=199 чисел. Эти 199 чисел должны произнести лжецы, которых 198, а это не возможно.

следующие случаи с большим кол-вом рыцарей и меньшим кол-вом лжецов будут также невозможны. потому что лжецы, не смогут произнести оставшиеся числа, а рыцари говорят только одно число.

Ответ: 200 лжецов и 199 лжецов

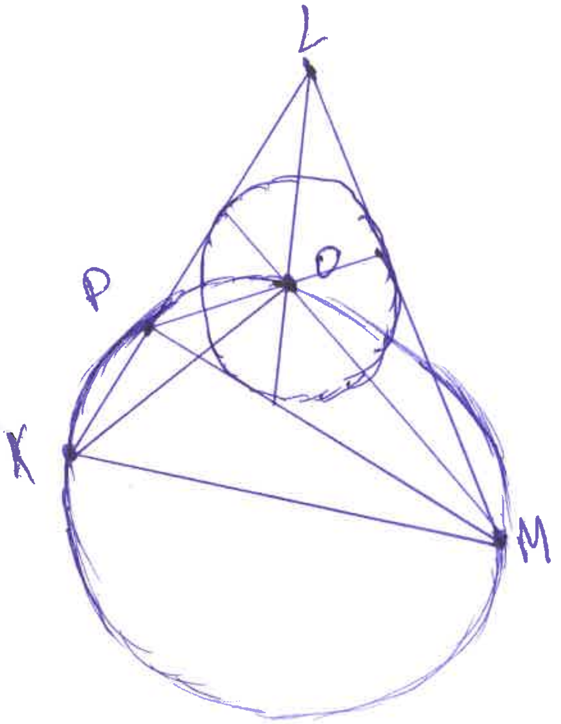
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 4 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Решение:

Пусть O - центр окружности, вписанной в $\triangle PLM$. =>

=> PO, MO, LO - биссектрисы $\triangle PLM$ (по свойству окружности, вписанной в треугольник, что её центр - пересечение биссектрис)

$\angle LKM = \angle PKO + \angle MKO$

$\angle PMO = \frac{1}{2}\angle PML$ (т.к. MO - биссектриса)

$\angle PMO = \angle PKO$ (т.к. оба угла вписаны в одну окружность и опираются на дугу PO) =>

=> $\angle PKO = \frac{1}{2}\angle PML$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	4	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle MPO = \frac{1}{2}\angle LPM$ (т.к. PO - биссектриса)

$\angle MPO = \angle MKO$ (т.к. они вписаны в одну окружность и опираются на одну дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MKO = \frac{1}{2}\angle LPM$

Подставим полученные выражения в $\angle LKM = \angle PKO + \angle MKO$

$\angle LKM = \frac{1}{2}\angle PML + \frac{1}{2}\angle LPM = \frac{1}{2}(\angle PML + \angle LPM)$

$\angle PML + \angle LPM + \angle PLM = 180$

$180 - \angle PLM = \angle PML + \angle LPM$

$\angle PLM = \angle KLM$ (т.к это один и тот же угол

$\Downarrow$

$\angle LKM = \frac{1}{2}(180 - \angle KLM)$.

$\angle KLM + \angle KML + \angle LKM = 180°$. подставим $\angle LKM = \frac{1}{2}(180 - \angle KLM)$ в эту формулу

$\angle KLM + \angle KML + \frac{1}{2}(180 - \angle KLM) = 180$

$\angle KLM + \angle KML + 90 - \frac{1}{2}\angle KLM = 180$

$\frac{1}{2}\angle KLM + \angle KML = 90$

$\frac{1}{2}\angle KLM + 50 = 90$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 4 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{1}{2}\angle KLM = 40$

$\angle KLM = 80^0$

Ответ: $\angle KLM = 80^0$

~~№5~~

~~$x^3+bx^2+23x+3a$~~

~~Коэффициент $C=23$~~

~~Из теоремы Виета следует, что $-C = x_1x_2x_3$ =>~~

~~=> $-23 = x_1x_2x_3$~~

~~Разложим число 23 на множители~~

~~$23 | 23$~~
~~$1 |$~~

~~Число 23 простое. Его множители 23·1 и т.к. корни должны быть разными и $x_i \in \mathbb{Z}$ чтобы получилось -23 =>~~

~~=> $x_1 = 23$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 3 4 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$x^3+bx^2+23x+3a=0$

Из теоремы Виета следует, что

① $x_1x_2x_3=-3a$

② $x_1+x_2+x_3=-b$

③ $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=23$

Пусть у нас все три корня будут одинаковыми

$x_1=x_2=x_3$

Тогда из ③ уравнения следует

$x^2+x^2+x^2=23$

$3x^2=23$

$x^2=\frac{23}{3}$

$x=\pm\sqrt{\frac{23}{3}}$ – что явно не является целым числом.

Теперь предположим что какие-то из двух корней одинаковы, например x_1 и x_2 из третьего уравнения следует, что:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	4	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_1^2 + x_1x_3 + x_1x_3 = 23$

$x_1^2 + 2x_1x_3 = 23$

$x_1 \cdot (x_1 + 2x_3) = 23$

23 можно расписать как произведение целых чисел

$1 \cdot 23 \rightarrow x_3 = 11$

$23 \cdot 1 \rightarrow x_3 = -11$

$-1 \; -23 \rightarrow x_3 = -11$

$-23 \; -1 \rightarrow x_3 = 11$

1 случай

$x_1 = 1, \; x_3 = 11$

из ~~первого~~ ~~следует~~ 1 уравнения следует, что

$1^2 \cdot 11 = 3a$

$a = -\frac{11}{3}$ - что не является целым числом

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	4	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2 случай

$x_1=23$; $x_3=-11$

Из ① уравнения следует, что

$23^2\cdot(-11)=-3a$

$-5819=-3a$

$a=1939\frac{2}{3}$ что не является целым числом

3 случай

$x_1=-1$; $x_3=-11$

Из ① следует, что

$(-1)^2\cdot(-11)=-3a$

$-11=-3a$

$a=\frac{11}{3}$ - что не является целым числом

4 случай

$x_1=-23$ $x_3=11$

Из ① следует

$(-23)^2\cdot 11=-3a$

$5819=-3a$

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	3	4	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a = \frac{5819}{3} = 1939\frac{2}{3}$ - что не является целым числом

Таким образом можем сделать вывод, что все три числа равные. И ответим, что если бы мы взяли одинаковыми не n_1 и n_2, а n_2 и n_3, то на результат это бы никак не повлияло.

Ч.т.д. они различны

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 7 3 4 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Наибольшее кол-во чисел 675. Это произойдёт, если Катя выпишет все нечётные числа из промежутка [675; 2024]

8б

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Борисова 5

М	А	0	0	0	0	9	4	4	5	2	0

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Балахонов

Имя Вадим

Отчество Владимирович

Дата рождения 08.05.2003 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7 913 177 90 13 **Подпись** БВВ

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 9 4 4 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Если мы спросим рыцаря (или рыцарей), то он скажет какое-то число n, при чём все рыцари из неназванных чисел уберут только одно число n. Тогда на долю лжецов останется назвать остальные 199 чисел, для этого понадобится не менее 199 лжецов. Но их также не может быть более 200 (т.к ~~это~~ так. число, которое может назвать рыцарь). $\Rightarrow 199 \le n \le 200$

Ответ: 199 либо 200. +

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	20	80

№2

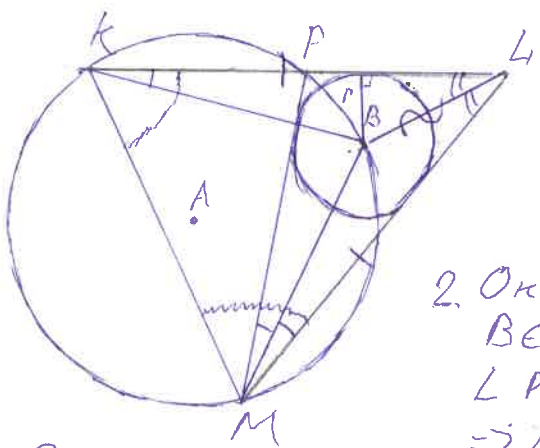
Я полагаю, что команда решила правильно 15 задач, а на остальные дала неверный ответ либо не ответила (и получила за это штрафные баллы), т.к в таком случае, без разницы на какие задачи команда ответила неверно.

За лёгкую з. команда не получает 4 балла + ей зачисляется 2 штрафных балла (=-6 от максимального кол-ва баллов); за среднюю не получает 5 + 1 шт. бал (=-6) и за сложную не получает 6 и не начисляются шт. баллы (=-6)

$\Rightarrow$ нерешено 5 задач (30/6) $\rightarrow$ Всего задач 20

Но если за отсутствие ответа не начисляются штрафные баллы, то нерешённых задач может быть до 7 (6 лёгких и 1 сложная) и очевидно их будет от 5 (5 сложных) $\Rightarrow$ для 2 варианта условий предложенных задач будет от 20 до 22

№3



Решение: 1. Окр (B, r) - вписана в ΔPLM

$\Rightarrow LB$ - биссектриса $\angle L$;

MB - биссектриса $\angle PML$

$\Rightarrow \angle PLB = \angle MLB$; $\angle PMB = \angle LMB$

2. Окр (A, AM) описана около ΔPKM (по усл)

$B \in$ Окр (A, AM)

$\angle PKB$ и $\angle PMB$ опираются на $\smile PB$

$\Rightarrow \angle PKB = \angle PMB = \angle LMB$ (п. 1)

3. Рассмотрим ΔLBM и ΔLBK

$\angle KLB = \angle MLB$ (п.1), $\angle LKB = \angle LMB$ (п.2) $\Rightarrow \angle LBK = \angle LBM$

~~$\Rightarrow \Delta LB$~~ LB - общая

$\Rightarrow \Delta LBM = \Delta LBK \Rightarrow KL = LM$

см. лист №2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 9 4 4 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

4. Рассмотрим ΔKLM

$\angle KML = 50°$ (по усл), $KL = ML$ (п.3)

$\Rightarrow \Delta KLM$ - равнобедренный

$\Rightarrow \angle LKM = \angle LMK$

$\Rightarrow \angle KLM = 180° - \angle KML - \angle MKL = 180° - 2\angle KML =$

$= 180° - 2 \cdot 50° = 80°$ +

Ответ: $\angle KLM = 80°$

№5

Представим многочлен в виде произведения и раскроем скобки e, f, g - корни

$(x-e)(x-f)(x-g) = x^3 - (e+f+g)x^2 + (ef+eg+fg)x - efg$

$\rightarrow x^3 - (e+f+g)x^2 + (ef+eg+fg)x - efg = x^3 + 6x^2 + 23x + 3a$

Составим систему уравнений

$\begin{cases} 23 = ef + eg + fg \\ 3a = -efg \end{cases}$ a, e, f, g - целые

Пусть есть один различный корень $(e = f = g)$ тогда:

$\begin{cases} 23 = 3e^2 \\ 3a = -e^3 \end{cases}$; $\begin{cases} e = \sqrt{\frac{23}{3}} \\ 3a = -e^3 \end{cases}$ — не целое, противоречие условию

Пусть 2 различных корня $(e = f \neq g)$ тогда:

$\begin{cases} 23 = e^2 + 2eg \\ 3a = -e^2 g \end{cases}$; $\begin{cases} e(e+2g) = 23 \\ 3a = -e^2 g \end{cases}$; $\begin{cases} e = \frac{23}{e+2g} \\ a = \frac{-e^2 g}{3} \end{cases}$ — из этого следует, что e может равняться $-23, -1, 1, 23$

1. $e = -23$, $\rightarrow -23 = \frac{23}{-23+2g}$ $\quad -1 = \frac{1}{-23+2g}$ $\rightarrow -23 + 2g = -1$

$2g = 22$ $\quad g = 11$

$a = \frac{-23^2 \cdot 11}{3}$ — не целое, противоречит условию

2. $e = -1$ $\rightarrow -1 = \frac{23}{-1+2g}$ $\quad 1 - 2g = 23$ $\quad 2g = -22 \rightarrow g = -11$

$a = \frac{+1^2 \cdot 11}{3}$ — не целое, противоречит условию

3. $e = 1$ $\rightarrow 1 = \frac{23}{1+2g}$ $\quad 1 + 2g = 23$ $\quad 2g = 22$ $\quad g = 11$

$a = \frac{1^2 \cdot 11}{3}$ — не целое, противоречит условию

4. $e = 23$ $\rightarrow 23 = \frac{23}{23+2g}$ $\quad 1 = \frac{1}{23+2g}$ $\quad 23 + 2g = 1$ $\quad 2g = -22$

см. стр. №

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	4	4	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5 (продолжение)

$\Rightarrow g = -11$

$a = \frac{+23^2 \cdot 11}{3}$ – нецелое, противоречит условию

Поскольку система:

$$\begin{cases} 23 = ef + eg + fg \\ 3a = -efg \end{cases}$$

~~то аналогич~~ симметрична, то аналогично доказывается для $e = g$ и $f = g$.

$\Rightarrow e \neq f \quad f \neq g \quad g \neq e$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ, А-300

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	8	0	4	5	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Дунаева

Имя Анна

Отчество Андреевна

Дата рождения 18.02.2004 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7(921)369-54-58 **Подпись** Дунаева

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	0	4	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	20	80

№2

Ответ: 20

Пусть всего легких задач a, средних b, трудных c. Тогда максимально возможный балл равен $4a+5b+6c$. Пусть „бельчата" решили правильно a', b' и c' соответственно легких, средних и трудных задач. По условию $a'+b'+c'=15$. За неправильно решенные $(a-a')$ легких вычиталось по 2 балла, за $(b-b')$ неправильных средних — по 1 баллу. Тогда имеем:

$4a'+5b'+6c'-2(a-a')-(b-b')=4a+5b+6c-30 \Leftrightarrow$

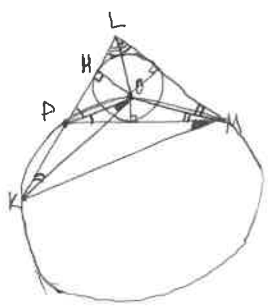
$\Leftrightarrow 4a'+5b'+6c'-2a+2a'-b+b'=4a+5b+6c-30 \Leftrightarrow 6a'+6b'+6c'=6a+6b+6c-30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\cdot 15=6(a+b+c)-30 \Leftrightarrow a+b+c=\frac{6\cdot 15+30}{6}=20$, т.е. всего было предложено 20 задач.

+

№3

Ответ: 80°



Пусть O - центр вписанной окружности $\triangle PLM$. Биссектрисы $\triangle PLM$ пересекаются в точке O (по теореме о двух касательных, проведенных из одной точки вне окружности).

Тогда пусть $\angle MPO=\angle OPL=\alpha$; $\angle PMO=\angle OML=\beta$; $\angle MLO=\angle OLP=\gamma$.

По условию $\angle KML=\angle KMP+2\cdot\beta=50^\circ \Rightarrow \angle KMP=50^\circ-2\cdot\beta$

Проведем KO. $\angle KOP=\angle KMP$, поскольку оба лежат на окружности и опираются на дугу KP. Значит $\angle KOP=50^\circ-2\cdot\beta$

$\angle OKP=\angle OMP=\beta$, т.к. опираются на дугу OP.

+

Пусть KL касается вписанной окружности в точке H; $OH\perp KL$. Значит $\angle HOP=90^\circ-\angle HPO=90^\circ-\alpha$. Запишем сумму углов для $\triangle KOH$: $\angle OKP+\angle PHO+\angle HOP+\angle KOP=180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta+90^\circ+(90^\circ-\alpha)+(50-2\beta)=180^\circ \Leftrightarrow -\beta-\alpha+50=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=50^\circ$.

Для $\triangle PLM$: $2\alpha+2\beta+2\gamma=180^\circ \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=90^\circ \Leftrightarrow \gamma=90^\circ-(\alpha+\beta)=90^\circ-50^\circ=40^\circ$.

Искомый $\angle KLM=2\gamma=80^\circ$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	0	4	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Ответ: 199 или 200

Лжецов не может быть больше 200, т.к. тогда рыцарь(-и) вынужден(-ы) назвать число, превосходящее 200, что не может быть по условию.
Если лжецов не больше 198, лжецы не могут назвать больше 198 различных чисел. Рыцари вне зависимости от своего количества называют только одно (правдивое) число. Значит если лжецов ≤ 198, может быть названо не более 199 различных чисел — противоречие условию.
Итого лжецов может быть 199 (все лжецы называли числа от 1 до 200, исключая 199, без повторений) или 200 (лжецы называли от 1 до 199 включительно, какие-то двое сказали одинаковое число). В обоих случаях неограниченное (но ≥ 1) количество рыцарей называют истинное число.

+

№5

Пусть корнями многочлена являются некоторые целые x_1, x_2 и x_3. Тогда
$x^3+bx^2+23x+3a=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, откуда (а также по теореме Виета для кубического уравнения) имеем:

$$\begin{cases} -x_1\cdot x_2\cdot x_3=3a \\ -x_1-x_2-x_3=b \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2 x_3=23 \end{cases}$$

Допустим, что какие-то два корня совпадают, для определенности $x_1=x_3$. Тогда имеем

$$\begin{cases} -x_1^2\cdot x_2=3a \\ -2x_1-x_2=b \\ x_1^2+2x_1x_2=23 \end{cases} \Rightarrow x_1^2+2x_1x_2-23=0 \Rightarrow x_1=\frac{-2x_2\pm\sqrt{4x_2^2+4\cdot 23}}{2}=-x_2\pm\sqrt{x_2^2+23}$$

Из первого уравнения x_1 или x_2 должны быть кратны 3; из последнего преобразования (x_2^2+23) является точным квадратом (иначе x_1 и/или a нецелые).
Если $x_2\equiv_3 0$, то $(x_2^2+23)\equiv_3 23\equiv_3 2$. Точные квадраты не могут давать остаток 2 при делении на 3 (доказательство: $(3k+0)^2\equiv_3 0$; $(3k+1)^2\equiv_3 1^2=1$; $(3k+2)^2\equiv_3 2^2=4\equiv_3 1$). Противоречие.
Если $x_2\equiv_3 1$, то $(x_2^2+23)\equiv_3 ((3k+1)^2+23)\equiv_3 1^2+23=24\equiv_3 0$, откуда $x_1=-x_2\pm\sqrt{x_2^2+23}\equiv_3$ $\equiv_3 -1\pm 0\equiv_3 2$, откуда оба x_1 и x_2 не кратны 3. Противоречие.
Если $x_2\equiv_3 2$, то $(x_2^2+23)\equiv_3 2^2+23=27\equiv_3 0 \Rightarrow x_1\equiv_3 -2\pm 0\equiv_3 1$. Аналогично.
Итого не существует таких пар x_1 и x_2, чтобы $x_1^2\cdot x_2$ кратна трем, $\sqrt{x_2^2+23}$ целое при целых x_1 и x_2. Следовательно, допущение $x_1=x_3$ неверно, и многочлен имеет три различных корня.

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 8 0 4 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Ответ:

Для примера рассмотрим последовательность $17; 17\cdot 3; 17\cdot 5 \dots 17\cdot 119$. Если выписать число 17, оставшиеся 59 чисел выписать уже будет нельзя. Выписывая $2023 = 17\cdot 119 = 17\cdot 17\cdot 7$, мы накладываем ограничения лишь на числа $17; 17\cdot 17; 17\cdot 7$, т.е. из этой цепочки подходят $60-3=57$ чисел. Но внутри этой цепочки есть кратные числа, например, $17\cdot 3 \,/\, 17\cdot 5$ и $17\cdot 15$. Анализируем новую последовательность $3; 5; 9 \dots 15; 19; 21 \dots 119$.

Некоторые два числа будут выписаны, если их можно представить соответственно как $x\cdot a$ и $x\cdot b$, где a и b — взаимно простые $\ne 1$; x — НОД этих чисел. НОК их при этом равно $x\cdot a\cdot b$; $x \in \{17\}; \{19\}; \{21\} \dots \{2023\}$; $a, b \in \{3\}; \{5\} \dots \{119\}$. Исключение составляют лишь простые числа, большие 1012 — при их умножении на любое натуральное получится число, не попадающее в границы условия.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ, ауд. А-300

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	6	8	5	3	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия РОЗАЕВА

Имя МАРИЯ

Отчество Михайловна

Дата рождения 08. 12. 2003 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8-965-193-77-91 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

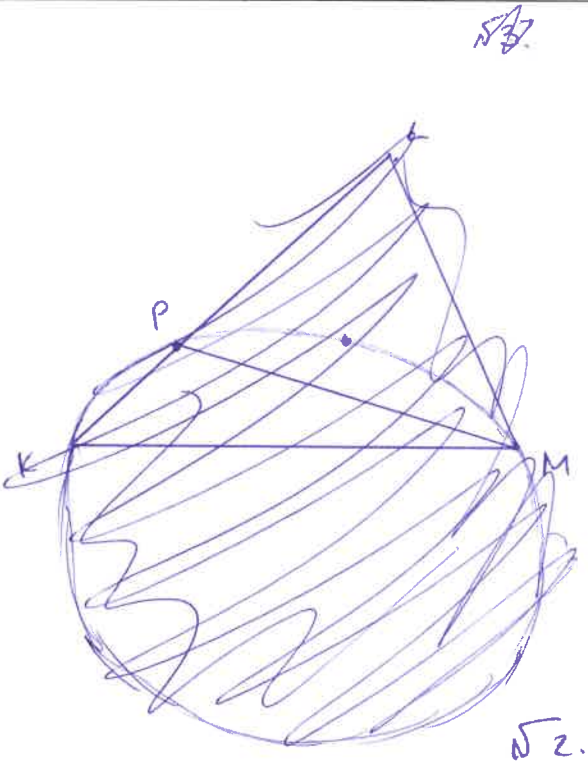
Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 8 | 5 | 3 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~№3~~

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	6	66



№2.

Таблица ~~задач~~ оценивания задач:

	Легк.	Ср.	Тяжелая
Прав. реш.	+4	+5	+6
Неправ. реш.	−2	−1	−0
Теряешь от макс, если не решил	−6	−6	−6

Можно заметить, что если команда не решает задачу любой сложности, то она „теряет" 6 баллов от максимального.

Например если команда не решила легкую, то она не сможет набрать 4 изначальных балла (−4 от макс.) и еще и потеряет 2 (−2). И того от макс −6.
Аналогично для других типов задач.

Тогда, т.к. „белочата" потеряли 30 баллов, то они потеряли $30=\underline{5}\cdot 6 \Rightarrow$ не решили 5 задач.

По условию они решили 15, ⇒ 15 решенных + 5 нерешенных = 20 задач всего

(5 нерешенных задач могли быть любой сложности так же как и решенные.

Ответ: 20 задач.

Лист 01 из 05

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	8	5	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~№3.~~

~~$x^3+bx^2+23x+3a=0$~~

~~$x^3+bx^2+23x-3a_1=0$~~

~~Тогда $-3a_1$ - корень~~

~~$x^3+bx^2+23x+3a_1 \,|\, x+3a_1$~~

~~$x^3+3a_1x^2 \quad x^2+(b-3a_1)x^2$~~

~~$(b-3a_1)x^2+23x$~~

~~$(b-3a_1)x^2+(b-3a_1)3a_1x$~~

~~$23-(b-3a_1)3a_1x-3a_1$~~

~~Если корень есть, то он ~~делится на $3a$~~ кратен $3a$, т.к. коэф-т перед $x^3=1$, свободный коэф-т $3a$.~~

~~Для удобства ~~возьмем a~~ введем a_1: ..., $a_1=-a$; (число остается целым)~~

№1.

Были получены всевозможные ответы от 1 до 200.
Сколько бы рыцарей не было на поляне, они бы все дали один ответ. Тогда должно было найтись ещё 199 неверных вариантов ответа.

~~Если рыцари говорят правду~~ Если лжецов было меньше 199, то они бы не набрали ~~нужное~~ необходимое количество неверных ответов.

Если лжецов было ~~больше 199, то рыцари~~ бы 199, то все рыцари сказали, что лжецов 199, а эти 199 лжецов перебрали бы остальные варианты от [1 до 198] и 200.

Если лжецов было 200, то тогда бы ~~рыцари несколько~~ все рыцари сказали „200", и эти 200 лжецов назвали бы все остальные 199 номеров, но какой-то был бы уже с повторением, но это не нарушает условия задачи.

Если лжецов было бы больше 200, то рыцари не смогли бы даже верный ответ, т.к. числа от 201 не ~~входят~~ подходят под условие

~~Ответ 199 или 200~~

Ответ: 199 или 200

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

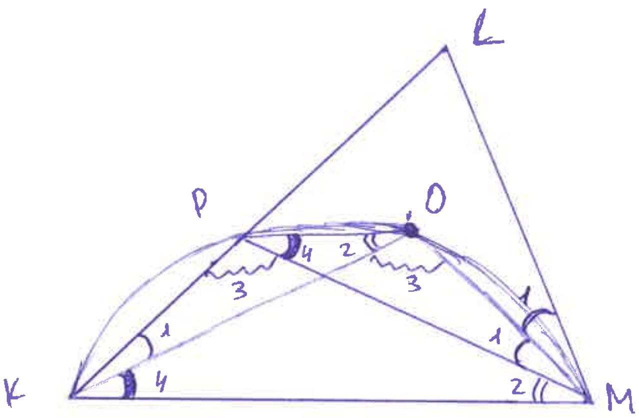
Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	8	5	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Дано: $\triangle KLM$, $P \in KL$

Опис. окр-сть около $\triangle KPM$ проходит через центр впис. окр-сти $\triangle PLM$ т. O.

$\angle KML = 80°$

$\angle KLM$ - ?

Реш-е:

1) $\angle KOM = \angle KPM$ (опирающиеся на одну дугу $\breve{KM}$) $= \angle 1$

$\angle OMP = \angle OML$ (т.к. O-ц. впис. окр-сти $\Rightarrow$ MO - бис-са) $= \angle 3$

$\angle PMK = \angle POK =$ (опир. на дугу $\breve{KP}$) $= \angle 2$ $\angle OKM = \angle OPM$ (опир. на дугу $\breve{OM}$) $= \angle 4$

сумма углов в $\triangle$ $180° \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$

2) $\angle KPO = \angle 4$ (т.к. O центр впис. окр-сти, ~~LPO~~. PO - бис-са)

$\angle KPL$ - развернутый $\Rightarrow = 180°$, тогда $\angle KPL = \angle 3 + \angle 4 + \angle 2 + \angle 1$,

$\Rightarrow \angle 2 + \angle 1 = \angle 4$

3) ~~расс~~ рассмотрим $\triangle KPO$: сумма углов в $\triangle$ 180 $\Rightarrow$

$\angle PKO = \angle 1$

Тогда: $\angle LMK = 2 \cdot \angle 1 + \angle 2$, $\angle LKM = \angle 1 + \angle 4 = \angle 1 + (\angle 2 + \angle 1)$

$\Rightarrow \angle LMK = \angle LKM$

$\Rightarrow \angle KLM = \cancel{180} \; 180 - 2(\angle LMK) = 180 - 2 \cdot 50 = 80$

Ответ: 80.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 8 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$x^3+bx^2+23x+3a=0$ коэф-т при x^3 равен 1 $\Rightarrow$ либо $+3a$ – корень, либо $-3a$ – корень (т.к. корни – целые)

$$\begin{array}{l|l} x^3+bx^2+23x+3a & x+3a \\ x^3+3ax^2 & x^2+x(b-3a)+(23-3a(b-3a)) \\ (b-3a)x^2+23x & \\ (b-3a)x^2+3a(b-3a)x & \\ x(23-3a(b-3a))+3a & \\ x(23-3a(b-3a))+3a(23-3a(b-3a)) & \\ 3a-3a(23-3a(b-3a)) & \end{array}$$

$3a-3a(23-3a(b-3a))=0$, т.к. $-3a$ – корень $\Rightarrow$ остаток должен быть 0.

Тогда получаем:

$x^3+bx^2+23x+3a=(x+3a)(x^2+x(b-3a)+(23-3a(b-3a)))\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Квадратное ур-е $x^2+x(b-3a)+(23-3a(b-3a))$ должно иметь 2 корня, $\Rightarrow D\geq 0$. (предположим что корни могут совпасть)

$D=(b-3a)^2-4(23-3ab+9a^2)=b^2+6ab+9a^2-36(2+a^2)=$

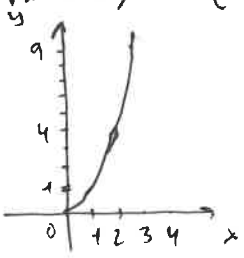
$=(b+3a)^2-36(2+a^2)$

Корни должны быть, $\Rightarrow D\geq 0$.

Тогда $(b+3a)^2-36(2+a^2)\geq 0$.

~~Рассмотрим 36(2~~ $(b+3a)^2$ – полный квадрат целого числа, $36(2+a^2)=6^2\cdot(2+a^2)$

Рассмотрим $(2+a^2)$: Не сущ-ет кв-тов целых чисел с „расстоянием“ 2 по оси Oy, т.к. сначала разница между 1^2 и $0^2=1$, потом $2^2-1^2=3$, $3^2-2^2=5$ и т.д., ф-я $y=x^2$ растет.



6б. $\Rightarrow a^2+2$ не является квадратом целого числа

Тогда $(b+3a)^2$ либо строго больше $36(2+a^2)$, либо строго меньше. Но, т.к. нам нужно более чем один корень, то отриц. дискриминант нам не подходит $\Rightarrow$ дискриминант строго больше 0. Нужно $\Rightarrow$ есть еще 2 корня. Проверка что $3a$ не является корнем ~~кв~~ этого квадратного ур-я:

$x=3a$, $9a^2+3a(b-3a)+23-3ab+9a^2=9a^2+3ab-9a^2+23-3ab-9a^2=-(9a^2+23)$ не 0, т.к. a – целое, ~~и 23 нет~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 6 8 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$-(9a^2-23)$ ~~≠~~ 0, т.к.

a - целое, $9=3^2 \Rightarrow 9a^2$ - полный квадрат целого числа,

$a\sqrt{23}$ ~~не~~ $\notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ все корни различные

№4.

Всего 2008 чисел на отрезке, 1004 из которых - нечётные.

арифм. прогр. сначала с шагом 3, потом с шагом 7, ~~потом 18 и~~ и т.д.

каждый раз накладываем одна на другую.

17
19
21
23
25
27
29
31
33
35
37
39
41
43
45
47
49
~~51~~
53
55
~~57~~
59
61
~~63~~
65
67
~~69~~
71
73
~~75~~
77
79
~~81~~
83
~~85~~
~~87~~
89
91
~~93~~
~~95~~

97
~~99~~
101
103
~~105~~
107
109
~~111~~
113
~~115~~
117
~~119~~
121
123
125
127

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ул. Красноказарменская д.17

М	А	0	0	0	0	7	6	4	1	2	0

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Яблочников

Имя Вячеслав

Отчество Сергеевич

Дата рождения 10.03.03 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +89168435633 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	0	7	6	4	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

~~Пусть лжецов было n, а рыцарей — m, тогда m+n=200~~. Т.к. рыцари всегда говорят правду, то рыцари на вопрос всегда будут отвечать, называя одно какое-то число(~~так~~ = кол-ву лжецов) Это число не будет меняться, а значит, чтобы были все возможные ответы от 1 до 200 ~~их~~ (большую часть) должны называть лжецы. Пусть лжецов ≤ 198 ~~тогда~~, а рыцарей хотя бы 1 Тогда лжецы назовут не больше 198 различных ответов, а рыцари всегда будут говорить ~~всегда~~ одно и тоже число, не входящее во множество ~~р~~ ответов лжецов $\Rightarrow$ максимум будет не больше 199 различных ~~ответов~~ $\Rightarrow$ лжецов ≥ 199. V

Ответ: не меньше 199

1	2	3	4	5	Σ
6	20	20	0	20	66

№5.

$x^3+bx^2+23x+3a$, $a,b\in\mathbb{Z}$

Пусть x_1, x_2, x_3 — корни данного многочлена; $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}$, тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-b \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=23 \\ x_1x_2x_3=-3a \end{cases}$$

① Пусть $x_1=x_2=x_3=x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0=-b \Rightarrow x_0=-\frac{b}{3} \\ 3x_0^2=23 \\ x_0^3=-3a \end{cases}$$

$3\cdot\frac{b^2}{9}=23$

$b^2=69 \Rightarrow$

$b=\pm\sqrt{69} \Rightarrow$ противоречие, т.к. $b\in\mathbb{Z}$

② Пусть какие-то два корня равны. Не умаляя общности будем считать, что $x_1=x_2=\alpha$, $x_3=\beta$, тогда ($\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-b \\ \alpha^2+2\alpha\beta=23 \Rightarrow \alpha^2(1+2\beta)=23, \text{ т.к. } \alpha\in\mathbb{Z}, \text{ а } 23 \text{ - простое, то } \alpha=\pm1 \\ \alpha^2\beta=-3a \end{cases}$$

При $\alpha=1$:

$$\begin{cases} 2+\beta=-b \Rightarrow \beta=-b-2 \\ 1+2\beta=23 \Rightarrow \beta=11 \\ \beta=-3a \Rightarrow \beta=-3a \end{cases} \Rightarrow \beta\,\vdots\,3, \text{ но } 11\not\vdots\,3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \alpha\neq1$

При $\alpha=-1$:

$$\begin{cases} \beta=2-b \\ 1-2\beta=23 \Rightarrow \beta=-11 \\ \beta=-3a \Rightarrow \beta\,\vdots\,3 \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие, т.к. } -11\not\vdots\,3.$$

никакие три корня не могут равняться между собой и никакие два не могут равняться между собой. $\Rightarrow$ все три корня различны ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	6	4	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Начертим таблицу:

Задачи	Легк.	Сред.	Тяж
Прав.реш.	+4б	+5б	+6б
Неправ.реш.	-2б	-1б	0б

Пусть легких задач было α средних $-\beta$, тяжёлых $-\gamma$

Пусть команда „Бельчата" решила φ легких задач, ε - средних и θ - тяжелых

$\Downarrow$

$\varphi+\varepsilon+\theta=15$

Максимум ~~вс~~ можно было получить $(6\gamma+5\beta+4\alpha)$ баллов команда набрала $(4\cdot\varphi+5\cdot\varepsilon+6\theta-\Delta x)$ баллов, где Δx - штрафные баллы за неправ. реш. задачи $\Rightarrow \Delta x=2(\alpha-\varphi)+1\cdot(\beta-\varepsilon)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}\varphi+\varepsilon+\theta=15\\ \Delta x=2(\alpha-\varphi)+1\cdot(\beta-\varepsilon)\\ 4\cdot\varphi+5\cdot\varepsilon+6\cdot\theta-\Delta x=6\gamma+5\beta+4\alpha-30\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4\cdot\varphi+5\cdot\varepsilon+6\cdot\theta-2\alpha+2\varphi-\beta+\varepsilon=6\gamma+5\beta+4\alpha-30$

$6(\varphi+\varepsilon+\theta)=6(\alpha+\beta+\gamma)-30$

$\varphi+\varepsilon+\theta=\alpha+\beta+\gamma-5$

$\underline{\alpha+\beta+\gamma}=15+5=\underline{20} \Rightarrow$ Всего задач было 20

+

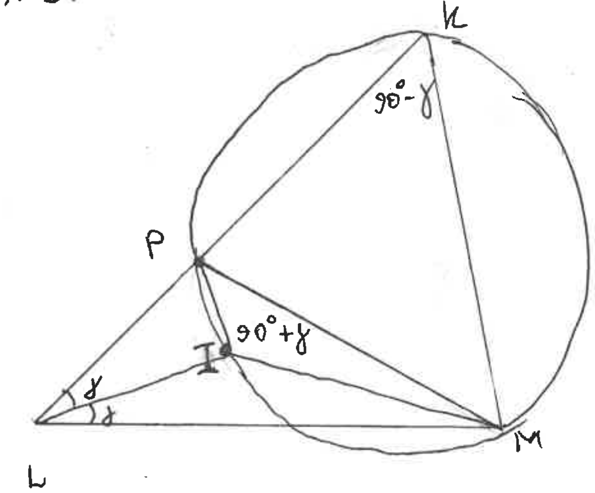
Ответ: 20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 7 6 4 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.



Решение:

1. Т.к. (.) I – центр. впис. окр. $\triangle LMP$, то PI, MI, LI – бисс. углов. LPM, PML, MLP соответ.

2. Пусть $\angle PLM = 2\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle LPM + \angle LMP = 180° - 2\gamma = \alpha$

$\Downarrow$

$\angle IPM + \angle IMP = \cancel{180° - \alpha} = 90° - \gamma$

$\cancel{\neq 180°}$ $\Downarrow$ +

$\angle PIM = 180° - 90° + \gamma = 90° + \gamma$

~~3. Пусть Т.к. чет. MIPK впис., то $\angle PKM + \angle MIP = 180° \Rightarrow$~~ $\Rightarrow$

~~$\Rightarrow \angle MIP = 180° - 50° = 130°$~~

~~$\Rightarrow 90° + \gamma = 130° \Rightarrow \gamma = 50° \Rightarrow \angle PLM = 2\gamma = 100° \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \angle LMK = 180° - 100° - 50° = 30°$~~

~~Ответ: 30°~~

3. Т.к. чет. MIPK впис, то $\angle PKM = 180° - 90° - \gamma = 90° - \gamma$

4. В $\triangle KLM$:

$2\gamma + 90° - \gamma + 50° = 180°$

$\gamma = 40° \Rightarrow \angle KLM = 2\gamma = 80°$

Ответ: 80°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 6 4 1 2 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Если Катя будет выписывать все простые числа из данного промежутка, то ни одно из чисел не будет делиться на ~~кажд~~ другие (т.к. они все простые). Но также Катя может написать ещё несколько чисел, состоящие из произведения двух ~~простых~~ нечётных меньших 16. Т.е.: ~~нечётных чисел меньши~~ нечётные числа меньше ~~15~~ или равные 15: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 Т.к. из этого ряда ~~каждое~~ ~~третье~~ ~~крат~~ 3, 9, 15 ⋮ 3, то максимум Катя может выписать на доску ещё 2 числа, например $7 \cdot 9 = 63$, $11 \cdot 13 = 143$

Если кол-во простых из данного промежутка α, то Катя может выписать не больше, чем $\alpha + 2$ числа. Никакое другое число не может оказаться на доске, т.к. оно ~~его~~ равно произведению ~~одн~~ ~~про~~ нескольких простых, которые уже есть на доске.

~~В~~ найдём чему равно α, всего нечётных чисел из данного промежутка 1004. Из этого числа вычтем кол-во нечётных чисел кратных 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~

колво нечетных чисел

$⋮3 = \frac{1004-2}{3} = 334$

$⋮5 = \frac{1004-4}{5} = 200$

$⋮7 = \frac{1004-3}{7} + 1 = 144$

~~$⋮9 = \frac{1004-15}{9}$~~

$⋮11 = \frac{1004-8-6}{11} + 1 = 91$

$⋮13 = \frac{1004-11-5}{13} + 1 = 77$

$⋮17 = \frac{1004-1}{17} + 1 = 60 \Rightarrow$ ~~...~~ >17 и $⋮17$ 59 чисел

$⋮19 = 53 \Rightarrow >19$ и $⋮19$ 52 числа

$⋮23 = \beta'$

~~Среди чисел ⋮9 есть числа ⋮3 и ⋮9 => => нам нужно найти кол-во чисел ⋮3 и ⋮9 и ⋮9~~

~~$\alpha' = 200 + 144 + 91 + 77 + 111 + 334 - 111 =$~~

~~$=$~~

$\alpha =$ ~~905~~ $1004 - (905 + \beta')^{*} =$

$=$

Ответ:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ, А300

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	6	4	9	1	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ПАВЛОВ

Имя САВЕЛИЙ

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 03.09.2003 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 9 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89177356288 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 9 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 Т.к. все рыцари назовут одно и тоже число => все остальные из 100 ответов принадлежат ~~лежат~~ лжецам, т.е. лжецов как минимум 99. Но т.к. некоторые ответы могли повторятся несколько раз, то лжецов может быть и больше. Значит на поляне от 99 лжецов и более

Ответ: 99 или больше

12б

1	2	3	4	5	Σ
12	20	8	8	20	68

№2 Пусть кол-во решённых лёгких задач: x
средних: y
сложных: z

Пусть кол-во решённых не правильно лёгких задач: m; средних: l

Пусть всего ~~балл~~ баллов команда „Бельчата" получила k => максимальный балл k+30.

За правильно решённые задачи команда получила $4x+5y+6z$, а за неверно решённые $-2m-l$

всего ~~балл~~ баллов получено: $4x+5y+6z-2m-l=k$ (1)

а масимум баллов можно набрать:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 6 4 9 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$4x+5y+6z+4m+5l=k+30$ (2)

(1)-(2): $\cancel{4x}+\cancel{5y}+\cancel{6z}-2m-l-\cancel{4x}-\cancel{5y}-\cancel{6z}-4m-5l=\cancel{k}-\cancel{k}-30$

$-6m-6l=-30$

$m+l=5 \Rightarrow$ задач которые команда решила неверно: 5 $\Rightarrow$ всего задач $10+5=15$

Ответ: 15

+

№5 Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $x^3+ax^2+17x+36$, тогда (по теореме Виета) получаем:

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=17$ (1)

$x_1x_2x_3=-36$ (2)

Если все 3 корня равны между собой, то из (1) получим: $3x_1^2=17$, т.к. $x_1, x_2, x_3 \in Z \Rightarrow 17$ должно делиться на 3, но это не так, т.к. 17 - простое число

$\Downarrow$

случай когда все 3 к равны между собой, невозможен

Проверим случай, когда 2 корня равны между собой, но не равны третьему. Для определённости, пусть $x_1=x_2$, и $x_1 \neq x_3$ $\Downarrow$

Лист 2 из 9

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	6	4	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

из ② получаем: $x_1^2 x_3 = -3b \Rightarrow$ или $x_1 \vdots 3$ (т.к. если $x_1^2 \vdots 3$, то и $x_1 \vdots 3$) или $x_3 \vdots 3$ или оба корня $\vdots 3$.

из ① получаем: $x_1^2 + x_1x_3 + x_1x_3 = 17$

$x_1^2 + 2x_1x_3 = 17$

$x_1(x_1 + 2x_3) = 17$, т.к корни $\in \mathbb{Z}$, и

17 – простое число: $\underbrace{|x_1| = 1, |x_1 + 2x_3| = 17}_{1\text{ сл.}}$, либо $|x_1| = 17$, $\underbrace{|x_1 + 2x_3| = 1}_{2\text{ сл.}}$

1 сл.) $\begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_1 + 2x_3 = \pm 17 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 17 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 + 2x_3 = 17 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 + 2x_3 = -17 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -17 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = -8 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = -9 \end{cases} \end{array}\right.$

корень кратный 3 есть только в 2 случаях: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = 9 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Найдём a и b при $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_3 = 9 \end{cases}$

$\begin{cases} -1 + a - 17 + 3b = 0 \\ 9 \cdot 81 + 81a + 17 \cdot 9 + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 18 \\ 81a + 3b = -9 \cdot 98 \end{cases}$

вычтем из ~~второго~~ первое: $80a = -9 \cdot 98 - 9 \cdot 2$

$80a = -9 \cdot 100$

$a = -9 \cdot \frac{100}{80}$

$a = -9 \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow a = -\frac{45}{4} = -11{,}25$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	6	4	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_3=9 \end{cases}$ не удов. усл.

Найдём a и b при $\begin{cases} x_1=1 \\ x_3=-9 \end{cases}$

$\begin{cases} 1+a+17+3b=0 \\ -9\cdot 81+a\cdot 81-17\cdot 9+3b=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a+3b=-18 \\ 81a+3b=9\cdot 98 \end{cases}$ вычтем из ~~первого~~ второго первое: $80a=9\cdot 100$

$a=\frac{9\cdot 100}{80}$

$a=\frac{9\cdot 5}{4}=\frac{45}{4}=11{,}25 \notin \mathbb{Z}$

$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_3=9 \end{cases}$ не удов. усл.

2и) $|x_1|=17$ и $|x_1+2x_3|=1$

$\begin{cases} x_1=\pm 17 \\ x_1+2x_3=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=17 \\ x_1+2x_3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=17 \\ x_1+2x_3=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=-17 \\ x_1+2x_3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=-17 \\ x_1+2x_3=-1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=17 \\ x_3=-8 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=17 \\ x_3=-9 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=-17 \\ x_3=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1=-17 \\ x_3=9 \end{cases} \end{array} \right.$

Корень кратный 3 есть только в двух случаях: $\begin{cases} x_1=17 \\ x_3=-9 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1=-17 \\ x_3=9 \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	6	4	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Найдем значения a при $\begin{cases} x_1=17 \\ x_3=-9 \end{cases}$

$\begin{cases} 17^3+17^2a+17^2+36=0 \\ -9\cdot81-81a-9\cdot17+36=0 \end{cases}$ вычтем из второго первое:

$-9\cdot81-81a-9\cdot17+\cancel{36}-17^3-17^2a-17^2-\cancel{36}=0$

$-370a-9\cdot98-17^2\cdot18=0$

$-370a=9\cdot98+9\cdot2\cdot17^2$

$-370a=9\cdot(578+98)$

$a=-\dfrac{9\cdot676}{37\cdot2\cdot5}$ т.к. ни 9 не делиться на 5, ни 676 не делиться на 5, то $a\notin\mathbb{Z}$ =)

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=14 \\ x_3=-9 \end{cases}$ не удов. усл.

Найдем значения a при $\begin{cases} x_1=-17 \\ x_2=9 \end{cases}$

$\begin{cases} -17^3+17^2a-17^2+36=0 \\ 9\cdot81+81a+17\cdot9+36=0 \end{cases}$ вычтем из второго первое

$9\cdot81+81a+17\cdot9+\cancel{36}+17^3-17^2a+17^2-\cancel{36}=0$

$370a=-9\cdot98-17^2\cdot18$

$a=-\dfrac{9\cdot98-9\cdot2\cdot17^2}{370}=-\dfrac{9\cdot676}{370}$ т.к. $370\,\vdots\,5$, а ни 9 не кратно 5, ни 676 не кратно 5, то $a\notin\mathbb{Z}$ =>

Лист 5 из 9

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	6	4	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -17 \\ x_2 = 9 \end{cases}$ не удов. усл.

при целых a ~~a~~, если 2 корня равны между собой и не равны 3, не существует таких корней, чтобы хотя бы 1 корень был кратен 3, но по доказанному ранее (лист №3), хотя бы 1 корень должен быть кратен 3. $\Rightarrow$ все корни различны

ч. т. д.

№4 Из отрезка [16; 2020], самое большое число (нечётное) ~~2~~ 2019, его минимальный делитель, это 3 $\Rightarrow$ $2019 : 3 = 673$ $\Rightarrow$ 673 - максимальный делитель 2019. $\Rightarrow$ ~~в промежутке~~ от на отрезке [674; 2018] нет делителей 2019

Лист 6 из ~~8~~ 9

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	6	4	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

для ~~не~~ нечётных чисел, меньших 2019, если они не просты, то их делители будут не больше 674 ~~т.е. нету в промежутке 674~~

и на отрезке [673; 2019] нету ни одного числа, которое было бы делителем другого числа в этом промежутке, ~~а для ∀ числа на (нечётного) отрезке от [16; 672] найдется число~~

~~а для ∀ числа x на отрезке [16; 672], найдется число 3x, с отрезка~~

Рассмотрим числа с отрезка [16; 672].

~~Е~~ Для ∀ числа (нечётного) с отрезка [225; 672], найдётся число 3x на отрезке [672; 2019], аналогично для ∀ нечётного $a \in [16; 225]$, найдётся 3a с отрезка [16; 672];

8б

и максимальное возможное ~~число~~ кол-во чисел ~~ю~~ написанных на доске: $\frac{2019-673}{2} = \frac{1346}{2} = 650+23 = 673$.

Отв: 673

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 9 | 1 | 2 | 0

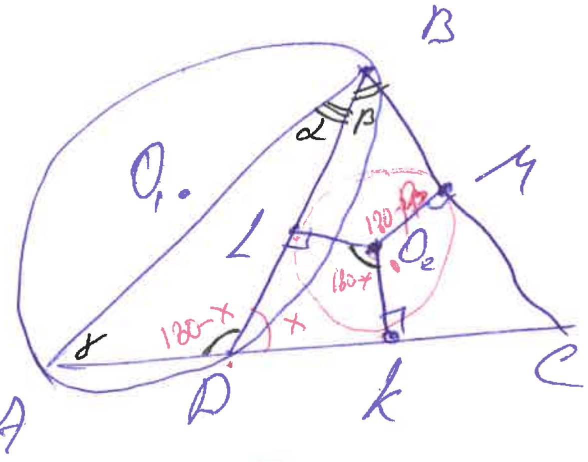
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 1) если $\angle BDC = x$,

$\Downarrow$

$\angle ADB = 180° - x$ (как вертикальные)



∃ окр (вписанная в BCD) касается DC в k; BD в (.) L; BC в (.) M.

$\Downarrow$

четырёхуг. $DL\cancel{k}O_2k$: $\angle L = \angle k = 90°$ т.к. BD и kc – касательные, а радиус проведённый в (.) касания ⊥ ~~касате~~льной,

$\Downarrow$

$\angle LO_2k = 360° - 90° - 90° - x = 180° - x$;

$\Rightarrow \boxed{\angle BDA = \angle LO_2k}$

8б

2) т.к. BC и AC – секущие $\Rightarrow \angle BCD = \frac{\cup AB - \cup BD}{2}$

∃ $\angle ABD = \alpha$; $\angle BAD = \gamma$; $\angle DBC = \beta$

$\boxed{\angle LO_2M = 180° - \beta}$ (по т. о $\Sigma \angle$ четырёхугольника)

$\angle MO_2k = 180° - \angle MCk \Rightarrow 180° - \frac{\cup AB - \cup BD}{2}$.

$\angle BDA = 180° - \alpha - \gamma$ (из $\triangle ABD$) $\Rightarrow \cup AB =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	6	4	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$= \frac{180° - \alpha - \gamma}{2}$ (т.к. $\angle BPA$ - вписанный)

$\cup BD = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \angle MOK = \left(\frac{180° - \alpha - \gamma}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{180° - \alpha - 2\gamma}{4}$

$\angle BPA = 2\angle O_2K$ (по доказанному ранее)

$2\angle O_2K = 180° - \alpha - \gamma$

т.к. $\angle O_2 = 360° = 2\angle O_2K + \angle KO_2M + \angle MO_2L \Rightarrow$

$\Rightarrow 360° = \frac{180° - \alpha - 2\gamma}{2} + 180° - \alpha - \gamma + 180° - \beta$

$720° = 180° - \alpha - 2\gamma + 720° - 2\alpha - 2\gamma - 2\beta$?!

$0 = 180° - 4\gamma - 80°$ $-\alpha$ (т.к. $\alpha + \beta = 40$)

$100° = 4\gamma \Rightarrow \gamma = 25°$

$\triangle ABC: \angle C = 180° - 60 - 25° =$

$= 140° - 25° = 115°$ (кот. осн $\angle A$)

Отв.: $115°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ, А300

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	9	0	3	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия УРУСОВА

Имя ЭВЕЛИНА

Отчество ВИКТОРОВНА

Дата рождения 26.06.2003 **Класс** 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона +79166384778 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	9	0	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $x^3+bx^2+23x+3a$, $a, b \in \mathbb{Z}$

Пусть корни m, k, n $(\in \mathbb{Z})$

Предположим противное: пусть хотя бы 2 корня равны между собой. $(m=k)$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

Запишем т. Виета:

$$\cancel{\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=-b\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3&=23\\ x_1x_2x_3&=-3a\end{aligned}}$$

$$\begin{cases} m+k+n=-b\\ mk+kn+mn=23\\ mkn=-3a\end{cases} \xRightarrow{(\text{т.к } m=k \text{ по предположению})} \begin{cases} 2m+n=-b\\ m(m+2n)=23 \quad (*)\\ m^2n=-3a\end{cases}$$

Т.к по условию корни целые, то $m\in \mathbb{Z}$ и $m+2n \in \mathbb{Z}$. Но 23 - как простое число можно разложить на 2 множ-ля только как $1\cdot 23$ и $-1\cdot(-23)$, т.е

$$\left[\begin{aligned} &m=1 \quad m+2n=23\\ &m=-1 \quad m+2n=-23\\ &m=23 \quad m+2n=1\\ &m=-23 \quad m+2n=-1\end{aligned}\right. \rightarrow$$

такое невозможно, т.к $n\in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n$-чет.

Противоречие.

Значит, все числа попарно различные.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	9	0	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m=1 \\ 2n+m=23 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-1 \\ 2n+m=-23 \end{cases} \\ \begin{cases} m=23 \\ 2n=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-23 \\ 2n=-1 \end{cases} \end{array}\right. \quad (*) \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m=1 \\ n=11 \end{cases} \; ① \\ \begin{cases} m=-1 \\ n=-11 \end{cases} \; ② \\ \begin{cases} m=23 \\ n=-11 \end{cases} \; ③ \\ \begin{cases} m=-23 \\ n=11 \end{cases} \; ④ \end{array}\right.$$

~~Построим уравнение для каждого и проверим равно ли исходному~~

~~$(x-1)^2(x-11)=(x^2-2x+1)(x-11)=x^3-2x^2+x-11x^2+22x-11=x^3-13x^2+23x+11$~~

Но по теореме Виета $mkn=3a$, т.е. какой-то из корней $\vdots\, 3$ (т.к. $a\in\mathbb{Z}$), но из полученных в (*) никакой из корней не делится на 3 $\Rightarrow$ противоречие.

Знаит, все корни попарно различны, т.к. ~~[illegible]~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	9	0	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Т.к по условию на поле обязательно находилось хотя бы 1 рыцарь, то один из ответов обязательно будет, т.к рыцарь говорит правду, т.е кол-во лжецов от 1 до 200. При этом все рыцари назвали одно и то же число = кол-ву лжецов, т.к все они говорят правду, а кол-во лжецов = const. Т.к все остальные ~~ответы~~ значения от 1 до 200 по условию были названы, то лжецов минимум 199 (200-1) при условии, что каждый сказал разное значение. => лжецов либо 199, либо 200. Приведем пример.

1) Лжецов = 199. Все рыцари (5, 10, любое кол-во) сказали, что лжецов 199. Каждый из лжецов назвал все числа от 1 до 200, отличные от 199. Действительно, они солгали, а рыцари сказали правду. (~~каждый~~ все лжецы сказали разные числа)

2) Лжецов = 200. Все рыцари (~~[illegible]~~ любое кол-во) сказали, что лжецов 200. ~~[illegible]~~ 2 лжеца назвали число 1. Все остальные назвали разные числа от 2 до 200, отличные от ~~199~~ 200. Действительно, рыцари сказали правду, лжецы соврали, числа были все названы.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 8 9 0 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

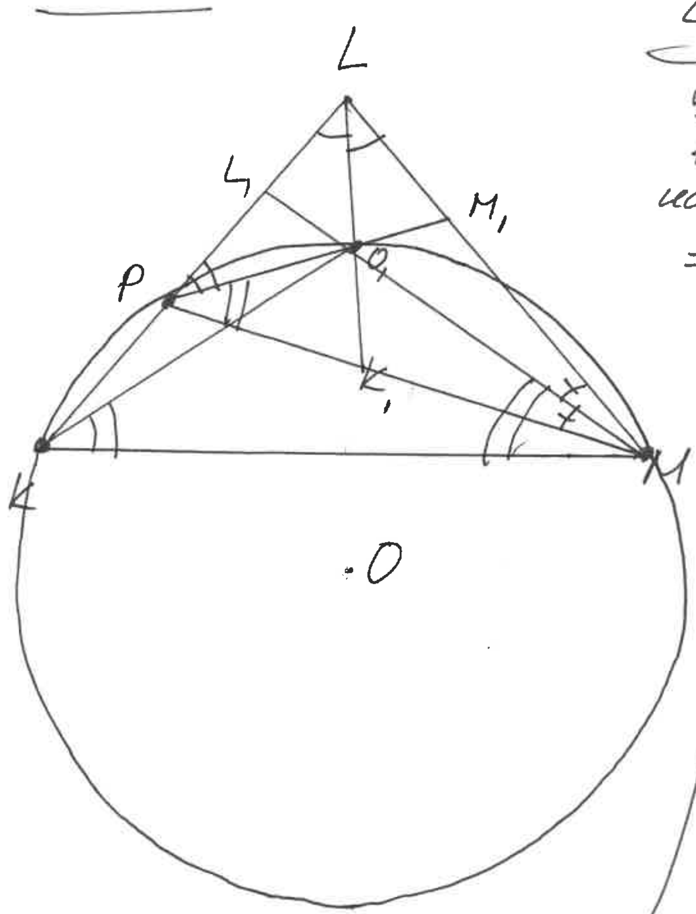
3)

Дано:

$\angle KML = 50^\circ$

$\angle KLM - ?$

Рисунок:



Решение: центр вписан. окр-ти лежит на пересечении бис-с

$\Rightarrow$ ~~...~~ $LK_1 \cap PM_1 \cap ML_1 = O_1$

$O_1 \in$ Окр O

Построим KO_1

$\angle O_1KM = MPO_1$ - как вписанные углы, опирающ-ся на одну дугу

$\angle KMO_1 + \angle KPO_1 = 180^\circ$ по т. о сумме углов во вписан. чет-ке

$\angle KPO_1 + \angle O_1PL_1 = 180^\circ$ - как смежные

$\Rightarrow \angle KMO_1 = \angle O_1PL_1 = \angle MPO_1$

PO_1 - бис-са

Пусть ~~...~~ $\angle L_1ML = x$, тогда $\angle KML_1 = 50 - x$

$\angle PML = 2x$, т.к. MO_1 - бис-са, $\angle LPM = 2(50 - x) = 100 - 2x$, т.к. PO_1 - бис-са, а $\angle O_1PM = \angle KML_1$ - по доказанному

~~...~~ $\angle PLM = 180 - \angle LPM - \angle PML$ - по т. о $\Sigma\angle$ в Δ-ке

$\Rightarrow \angle PLM = 180 - 2x - (100 - 2x) = 80^\circ$ Отв: 80°

Лист 4 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	9	0	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2)

	Л	С	Т
+	4	5	6
−	−2	−1	0

Пусть за 15 задач команда получила N очков, а x, y, z – кол-во лёгких, средних и трудных задач соответственно, которые команда неверно

Тогда ~~команда пол~~ макс. кол-во баллов $= N + 4x + 5y + 6z$ (1), а команда получила $= N - 2x - y + 0$ (2).

Разность (1) и (2) = 30 по условию

$$N + 4x + 5y + 6z - (N - 2x - y + 0) = 30$$

$$6x + 6y + 6z = 30$$

$$x + y + z = 5$$

Σ кол-ва задач $= 5 + 15 = 20$

Ответ: 20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 9 0 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) Ответ: 675

Положим так:

Это будут все нечётные числа от 675 до 2024.

Посчитаем их кол-во.

$$\begin{array}{r} 2024 \\ -\ 675 \\ \hline 1349 \end{array}$$

$1349+1=1350$ всего чисел в этом диапазоне

$\Rightarrow 1350:2=675$ - нечёт.

Убедимся, что ни одно не делится на другое. Т.к числа нечётные, то наименьшее частное, кот. может получиться в результате деления одного числа на другое может т.к нечётные) → 3 (2 не... А $675 \cdot 3 = 2025$, что выходит за рамки диапазона ($2025>2024$), значит, и все ~~числа в~~ остальные числа тем более не могут нацело „умещаться" в друге целое кол-во раз (675 - наименьшее из них)

Докажем, почему не может быть более. Разделим числа на группы по принципу 1-е число $\not\vdots\ 3$, а каждое следующее в группе получается умножением предыдущего на 3 (все в рамках отрезка [18, 2024]) используя нечётные числа) Наглядно представим эти группы. В группе, где 1-е число от 1 до 49, одно из них $:3$,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	9	0	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$17 \xrightarrow{\cdot 3} 51 \xrightarrow{\cdot 3} 153 \xrightarrow{\cdot 3} 459 \xrightarrow{\cdot 3} 1395$

$19 \xrightarrow{\cdot 3} 57 \xrightarrow{\cdot 3} 171 \xrightarrow{\cdot 3}$ ....

$21 \xrightarrow{\cdot 3} 63 \xrightarrow{\cdot 3}$ ......

.....

$49 \xrightarrow{\cdot 3} 147 \xrightarrow{\cdot 3}$ ....

~~51~~

$53 \xrightarrow{\cdot 3} 159 \xrightarrow{\cdot 3}$ ....

....

$225 \xrightarrow{\cdot 3} 675$

....

$673 \xrightarrow{\cdot 3} 2019$

Заметим, что ~~во~~ всех группах все числа попарно различные, т.к группы от 49 до 673 содержат 1-е число $/3$, а остальные получаются в результате умножения на 3, т.е имеют вид $3^n \cdot a_1$, где a_1 - 1-е число

А т.к a_1 у всех разные, т.е и не содержит тройку на и $3^n \cdot a_1$ - разные.

Аналогичные рассуждения и для групп от $[17; 49)$

К ним добавляются группы

$27 \xrightarrow{\cdot 3} 63$ ....

27 ....

33 ....

....

45 ......

Все числа также попарно различны, т.к 1-е число в своей группе не содержит $3^ь$ и число не более 15, (а у нас числа начинаются с 17)

Лист 7 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 9 0 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) – продолжение

Посчитаем кол-во таких групп. Очевидно, что в каждой группе может быть не более 1-го числа

Всего групп:

а) $49 - 16 = 33$ $\quad 33+1=34 \quad 34:2=17$

$53 \equiv 2 \pmod 3$

$55 \equiv 1 \pmod 3$

$59 \equiv 2 \pmod 3$

$673 \equiv 1 \pmod 3$

б) кол-во чисел $= 674 - 53 = 621$ $\quad 621+1=622$

$622:2=311$

Из них треть от $311-2$ делится на 3. Вычтем их. $311-(311-2)\cdot\frac{1}{3}=311-$

$-103=208$

Остались добавить числа от 674 до 2024, но

в) Всего чисел от 674 до 2024 =

$= 2024-675 = 1349$ $\quad 1349+1=1350 \quad 1350:2=675$

Из них $\frac{2}{3}$ не делятся на 3.

$675\cdot\frac{2}{3}=225\cdot 2=450$

$\Rightarrow$ всего не более, чем $450+17+208=675$ чисел

Лист 8 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МЭИ, А300

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	3	0	7	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Лунин

Имя Максим

Отчество Алексеевич

Дата рождения 26.11.2002 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29 февраля 2020 г.

Номер телефона 8 953 814 41 41 **Подпись** М

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	3	0	7	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
12	20	20	-	20	72

№1.

Поскольку были получены все ответы от 1 до 200, то 199 из них были сказаны лжецами, т.е могло быть 199 лжецов

Пример: было 200 бельчат: 1 рыцарь, который говорит, что лжецов было 199, и 199 лжецов, которые называют (различные) числа от 1 до 200 кроме 199.

125

Ответ: 199 лжецов.

№2.

Пусть L - кол-во лёгких задач, S - средних, T - трудных, p_1 - кол-во правильно решённых лёгких задач, p_2 - средних, p_3 - трудных, тогда $p_1+p_2+p_3=15$. Всего баллов было набрано на 30 меньше максимального. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4p_1-2(L-p_1)+5p_2-(S-p_2)+6p_3+30=4L+5S+6T. \\ p_1+p_2+p_3=15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6p_1+6p_2+6p_3+30=6L+6S+6T. \\ p_1+p_2+p_3=15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3+5=L+S+T \\ p_1+p_2+p_3=15. \end{cases}$$

+

$15+5=L+S+T.$

$L+S+T=20$ задач было всего.

Ответ: 20

Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

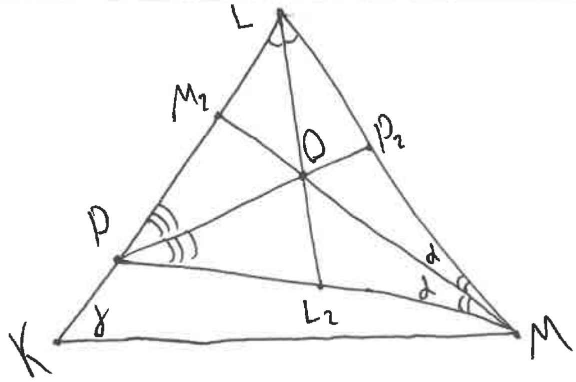
Вариант № 3

M	A	0	0	0	0	9	3	0	7	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.



Дано: $\triangle KLM$.
[redacted] точка P лежит на KL.
$\angle LMK = 50^\circ$
описанная окружность $\triangle KPM$ проходит через центр вписанной окружности $\triangle PLM$.

Найти: $\angle KLM$

Решение: Проведём в $\triangle PLM$ биссектрисы MM_2, PP_2, LL_2.

$MM_2 \cap PP_2 = O$ – центр вписанной в $\triangle PLM$ окружности.

т.к. окружность описанная около $\triangle KPM$ проходит через O, то KPOM – вписанный четырёхугольник.

Пусть $\angle LKM = \gamma$, а $\angle LMM_2 = \alpha$, тогда:

$\angle KLM = 180^\circ - \gamma - 50^\circ = 130^\circ - \gamma$; $\angle LMP = 2\alpha$.

$\angle LPM = 180^\circ - 130^\circ + \gamma - 2\alpha = 50^\circ + \gamma - 2\alpha$

$\angle LPP_2 = \frac{1}{2}\angle LPM = 25^\circ + \frac{\gamma}{2} - \alpha$; $\angle OMK = 50^\circ - \alpha$.

$\angle OPK = 180^\circ - \angle LPP_2 = 180^\circ - 25^\circ - \frac{\gamma}{2} + \alpha = 155^\circ - \frac{\gamma}{2} + \alpha$.

$\angle POM = 360^\circ - \angle OPK - \angle OMK - \gamma = 360^\circ - 155 + \frac{\gamma}{2} - \alpha - \gamma -$
$- 50^\circ + \alpha = 155^\circ + \frac{\gamma}{2} - \gamma = 155^\circ - \frac{\gamma}{2}$;

т.к. KPOM – вписанный, то $\angle KPO + \angle OMK = \angle POM + \gamma$;

$155^\circ - \frac{\gamma}{2} + \alpha + 50^\circ - \alpha = \gamma + 155^\circ - \frac{\gamma}{2}$;

$-\frac{\gamma}{2} + 50^\circ = \gamma - \frac{\gamma}{2}$;

$\gamma = 50^\circ$

$\angle KLM = 180^\circ - \gamma - 50^\circ = 80^\circ$

Ответ: 80°

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	0	9	3	0	7	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$x^3+bx^2+23x+3a$. $a, b \in Z$. x_1, x_2, x_3 – корни многочлена
$x_1, x_2, x_3 \in Z$.

$x^3+bx^2+23x+3a=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

1сл) Предположим, что $x_1=x_2=x_3$, тогда
$(x-x_1)^3 = x^3-3x^2x_1+3x_1^2x-x_1^3$. $x_1^2 \in Z$ (т.к. $x_1 \in Z$).
Здесь коэффициент перед x равен $3x_1^2$, а в исходном многочлене 23. 23 простое число => его нельзя получить перемножением 3 и x_1^2 => => все 3 корня не могут быть равны между собой.

2сл) Предположим, что между собой равны 2 корня $x_1=x_2$:
$(x-x_1)^2(x-x_3) = (x^2-2xx_1+x_1^2)(x-x_3) = x^3-2x^2x_1+xx_1^2-x^2x_3+2xx_1x_3-x_1^2x_3 = x^3-x^2(2x_1+x_3)+x(x_1^2+2x_1x_3)-x_1^2x_3$;
Здесь коэффициент перед x равен $x_1^2+2x_1x_3 = x_1(x_1+2x_3)$. $x_1 \in Z$, $(x_1+2x_3) \in Z$ (т.к. $x_3 \in Z$, $x_1 \in Z$), а в исходном многочлене коэффициент перед x равен 23. 23 - простое число => его нельзя получить перемножением двух целых чисел x_1 и x_1+2x_3, кроме как $x_1=1$ $x_3=11$, но если $x_1=1$ и $x_3=11$, тогда свободный член будет равен 11, а в исходном многочлене свободный член равен $3a$ => он делится на 3, а $11 \not\vdots\, 3$ => противоречие => => никакие 2 корня не равны между собой.

Доказано.

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	6	7	9	1	2	0

КГЭУ
Адрес площадки проведения

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 3

Фамилия ШАЙДУЛЛИН

Имя ШАМИЛЬ

Отчество РАМИЛЕВИЧ

Дата рождения 16.06.2003 **Класс** 10Б

ОУ, местоположение МАОУ „лицей №78 им. А.С. Пушкина", г. Набережные Челны

Предмет Математика

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89179276097 **Подпись** Шай

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

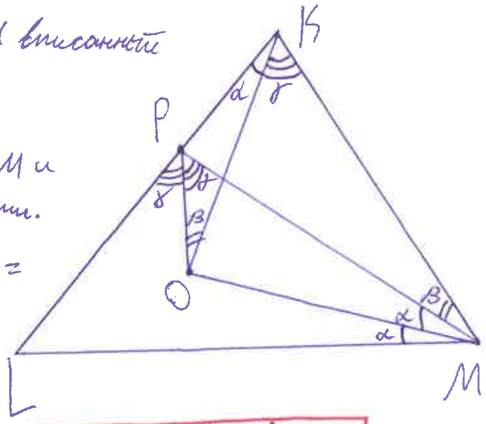
M	A	0	0	0	0	6	7	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1) O - центр вписанной окр-ти $\triangle PLM$, тогда $KPOM$ вписанный четырехугольник



2) O - центр вписанной окр-ти $\triangle PLM$, тогда $\angle LPO = \angle OPM$ и $\angle PMO = \angle OML$ по определению центра впис. окр-ти.

3) $KPOM$ - вписанный, тогда $\angle OKM = \angle OPM$, $\angle PLO = \angle POK$ и $\angle KMP = \angle KOP$

4) Пусть $\angle OKM = \angle LPO = \angle OPM = \gamma$;
$\angle KMP = \angle POK = \beta$;
$\angle PMO = \angle PKO = \angle OML = \alpha$.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

5) Тогда сумма углов треугольников $\triangle LPM$ и $\triangle LKM$ запишем в виде равенства:
$\angle KLM + \gamma + \gamma + \alpha + \alpha = \angle KLM + \alpha + \gamma + \beta + \alpha + \alpha \Leftrightarrow \gamma = \alpha + \beta$

6) $\gamma = \alpha + \beta$
$\angle LMK = \alpha + \beta + \alpha = 50°$
$\angle LKM = \gamma + \alpha$
$\Rightarrow \angle LKM = \angle LMK = 50° \Rightarrow \angle KLM = 80°$

+

Ответ: ~~∠LKM~~ $\angle KLM = 80°$

№1

Все рыцари сказали одинаковое кол-во лжецов. Значит остальные 199 различных кол-в лжецов сказали лжецы. Тогда кол-во лжецов либо равно 199 либо больше 199. Но их не может быть больше 200, т.к. есть как минимум один рыцарь, который сказал кол-во лжецов не большее 200. Тогда реальное кол-во лжецов равно 199 или 200.

+

Ответ: 199; 200.

№2

У команды не хватило баллов до максимальных, значит они правильно решили не все задачи. За неправильный ответ на легкую задачу у них результат отдаляется от максимально возможного на 6 (4 за то что не решили и еще 2 вычитают). Аналогично за неправильно решенную среднюю и сложную задачу их результат отдаляется от максимального на 6 (за среднюю 5+1, за сложную 6). А итого они отдалились от максимального результата на 30 баллов, значит неправильно решили 5 задач, а всего было предложено 20 задач.

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 7 | 9 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: 20задач

N5

$x^3+bx^2+23x+3a=0$

Возьмем корни ур-ия за A, B и C. Тогда ур можно записать в виде:

$(x-A)\cdot(x-B)\cdot(x-C)=0$

или можно расписать коэффициенты:

$$\begin{cases} A\cdot B\cdot C=-3a \\ AB+AC+BC=23 \\ A+B+C=-b \end{cases}$$

Докажем методом от противного: Если не все корни различны, то, либо они все равны, либо 2 из них равны, а третий отличен.

1) Если они все равны, то возьмем их значения за A, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} A^3=-3a \\ 3A^2=23 \\ 3A=-b \end{cases}$$

• $3A^2=23$, A по условию целое

$A^2=\frac{23}{3}$, квадрат целого число равен числу нецелому, противоречие, значит предположение неверно и все три корня не могут быть равны.

2) Тогда рассмотрим второй вариант: 2 корня равны, тогда возьмем их за A:

$$\begin{cases} A^2C=-3a \\ A^2+2AC=23 \\ 2A+C=-b \end{cases}$$

• $A^2+2AC=23$

$A\cdot(A+2C)=23$, т.к. и A и C целые, то и $A+2C$ целое, значит просто рассмотрим все возможные варианты и сверим их с ур-ем $A^2C=-3a$, по которому мы понимаем, что либо в A либо в C должен содержаться множитель 3:

$\begin{cases} A=1 \\ A+2C=23 \end{cases}$ или $\begin{cases} A=-1 \\ A+2C=-23 \end{cases}$ или $\begin{cases} A=23 \\ A+2C=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} A=-23 \\ A+2C=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} A=1 \\ C=11 \end{cases}$ не удовлетворяет

$\begin{cases} A=-1 \\ C=-11 \end{cases}$ не удовлетворяет

$\begin{cases} A=23 \\ C=-11 \end{cases}$ не удовлетворяет

$\begin{cases} A=-23 \\ C=11 \end{cases}$ не удовлетворяет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 7 | 9 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Мы получили, что ни в одном из вариантов ни A ни C не делится на 3. Значит наше предположение неверно, и никакие 2 из корней исходного ур-я не равны. +

Тогда все корни различны. Что и требовалось доказать.

№ 4.

Кол-во нечетных чисел в данном промежутке равно 1004. Нам нужно, чтобы ни одно число не делилось ни на одно другое. Но допустим нашлась такая пара нечетных чисел, что одно из них делится на второе. Тогда они могут отличаться в 3 или более разу. И чтобы такой пары не было. Тогда для получения максимального кол-ва, ~~мы~~ будем идти от ~~меньш~~ наибольшего нечетного из отрезка к наименьшему до того момента пока при делении наибольшего на наименьшее мы будем получать число меньшее 3. И когда мы дойдем до числа при делении на которое наибольшее, а именно 2023 будет давать число больше или равно 3, то поймем, что в уже рассмотренном есть два числа при делении одного на второе мы получим число 3. И в этот момент мы уже не возьмем рассматриваемое число в мн-во записанное Катей на доске. Мы также не включим в это мн-во и числа меньшие рассматриваемого. И тогда мы получим мн-во, где любые два числа при делении не дают частное больше или равное 3, а значит и условию задачи они будут удовлетворять. Осталось посчитать их кол-во. Для этого возьмем наибольшее нечетное делящееся на 3. Разделим его на 3: ~~н~~ 2019 : 3 = 673. И числа равные или меньше 673 мы уже в искомое множество не включим. Таких чисел 329, а значит искомое кол-во равно 1004 − 329 = 675.

Ответ: 675

20б

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ИЭИ, А-300 | МА0000965820

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия Першин

Имя Иван

Отчество Николаевич

Дата рождения 11.01.2004 **Класс** 10

Предмет математика

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8-925-570-38-11 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	6	5	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Все рыцари ответили единственно правильно, =>, остальные $200-1=199$ ответов сделали лжецы, =>, лжецов как минимум 199 (иначе их не хватит). Однако, если лжецов больше 200, то рыцари выдадут число, больше 200, что невозможно. =>, лжецов либо 199 (они ответили 1, 2, 3, ..., 198, 200), либо 200 (они ответили 1, 1, 2, 3, ..., 198, 199 (например, 1 повторится, это допустимо)). +

Ответ: 199 или 200 лжецов.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	8	2	70

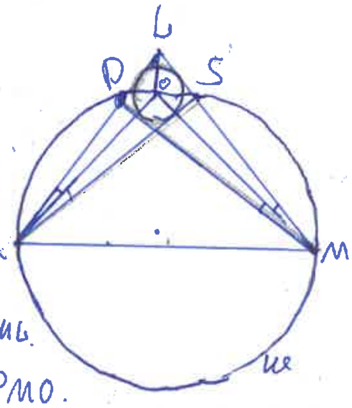
№2.

Пусть баллы команде ставятся так — сначала автоматом ставят макс. кол-во баллов, за тем за каждую неправильно решённую задачу вычитают её „стоимость", т.е. то кол-во баллов, которое можно было получить за неё + штраф (в условии). Заметим, что за задачу любой стоимости вычитается 6 баллов, т.к. $4+2=5+1=6+0=6$ баллов. Т.к. участники проиграли 30 баллов, то они решили неправильно $\frac{30}{6}=5$ задач. + =>. Всего задач $5+15=20$.

Ответ: 20.

№3.

Дано: $\triangle KLM$, т. $P \in KL$. $\triangle KPM$ вписан в w (большая ок-ть) $w \cap$ т. O, т. O – центр впис. ок-ти в $\triangle PLM$. $\angle KML = 50°$. Найти: $\angle KLM$



(+)

Решение: Пусть центр вписанной ок-ти – т. O, а $LM \cap w$ в т. S.

Т.к. в $\triangle PLM$ вписана ок-ть с ц.в. т. O, то $\angle PMO = \angle OML$.

Че-к $KPOM$ вписан в w, =>, по его св-ву $\angle PKO = \angle PMO$.

Че-к $KOSM$ – тоже вписан в w, =>, по тому же св-ву $\angle SKO = \angle OML$, =>,

$\angle PKS = \angle PMS$, KO – бис. $\angle PKS$.

$\triangle PML \sim \triangle KLS$ по $\angle PKS = \angle PMS (\angle PML)$. Но в них вписана одна ок-ть, =>,

$\triangle PML = \triangle KLS$, => $PM = KS$ и $KL = LM$. => $\triangle KLM$ – равнобедр, $\angle LKM = \angle KML = 50°$, =>, $\angle KLM = 180° - 100° = 80°$

Ответ: 80°.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 6 | 5 | 8 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Пусть Катя выпишет все нечётные числа от 675 до 2023 включительно. Ни одно из них не делится на другое, т.к. $675 \cdot 3 = 2025$, 3 - минимально возможный коэффициент, 675 - минимально число. Все остальные нечётные числа от 1 до 673 включительно не будут выписаны, т.к. для каждого из них найдётся число m такое, что $x \cdot m \in [675; 2023]$, где взяты только нечётные числа. Чем меньше число, тем больше в этом промежутке чисел, кратных ему, поэтому Катя и выписала самые большие числа. Если Катя выпишет больше этих чисел, то выпишет число $\in [1; 673]$ (нечётн.), что делать его нельзя (доказано выше). ⇒, в этом макс. кол-во — кол-во нечётных чисел от 675 до 2023 вкл.

, т.е. всего $\frac{2023-(675-1)-1}{2} = 675$ чисел.

8 б

Ответ: 675.

№5.

Пусть $x^3+bx^2+23x+3a = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, и $x_1=x_2$, тогда

$x^3+bx^2+23x+3a = (x^2-2xx_1+x_1^2)(x-x_3)$; x_1, x_2, x_3 - целые корни ;

$$\begin{array}{l|l} x^3+bx^2+23x+3a & x^2-2xx_1+x_1^2 \\ -\ x^3-2x_1x^2+xx_1^2 & x+(b+2x_1) \\ \hline x^2(b+2x_1)+x(23-x_1^2)+3a & \\ -\ x^2(b+x_1)-2xx_1(b+2x_1)+x_1(b+2x_1) & \\ \hline x(23-x_1^2+2x(b+2x_1))+3a+x_1(b+2x_1) & \end{array}$$

$x(23-x_1^2+2x(b+2x_1))+3a+x_1(b+2x_1)$ - это остаток, в нём есть x.

2 б

Даже если $kx=0$, $k=0$, то в остатке есть $3a$, где $a \neq 0$, т.е., остаток 0 никак не равен, т.к. этот многочлен на полный квадрат не делится, ⇒ одинаковых (хотя бы 2-х) корней у многочлена нет, ⇒ все корни различны.

Лист 02 из 02

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	3	4	5	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ШВЕЦОВ

Имя АНДРЕЙ

Отчество ГЕННАДЬЕВИЧ

Дата рождения 15.04.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89509863338 **Подпись** [подпись]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

20 | 20 | 20 | 15 | 4

Вариант № 2

М А 0 0 0 0 7 3 4 5 2 0

79

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \ (1) \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \ (2) \end{cases}$$

Из 1-ого: $\sin 7x = 1 - \sin 4x$

Подставим во 2-ое: $(1-\sin 4x)^2 + \sin^2 4x = 1$

$1 - 2\sin 4x + \sin^2 4x + \sin^2 4x = 1$

$\sin 4x(\sin 4x - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \ (3) \\ \sin 4x = 1 \ (4) \end{array}\right.$$

3) Если $\sin 4x = 0$, то $\sin 7x = 1$

$$\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 7x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \ | : \pi$

$\frac{n}{4} = \frac{1}{14} + \frac{2k}{7} \ | \cdot 4$

$n = \frac{2}{7} + \frac{8k}{7} \ | \cdot 7$

$7n = 2 + 8k$

$n = \frac{2(1+4k)}{7}$; $n, k \in \mathbb{Z}$

Найдем значения k, при которых n будет целым:

$k=1: n = \frac{10}{7} \notin \mathbb{Z}$

$k=2: n = \frac{18}{7}$

$k=3: n = \frac{26}{7}$

$k=4: n = \frac{2 \cdot 17}{7}$

$k=5: n = \frac{21 \cdot 2}{7} = 6$

$k=6: n = \frac{2 \cdot 25}{7}$

$k=7: n = \frac{2 \cdot 29}{7}$

$k=8: n = \frac{2 \cdot 33}{7}$

$k=9: n = \frac{2 \cdot 37}{7}$

$k=10: n = \frac{2 \cdot 41}{7}$

$k=11: n = \frac{2 \cdot 45}{7}$

$k=12: n = \frac{2 \cdot 49}{7} = 14$

. . . .

$k=19: n = \frac{2 \cdot 77}{7} = 22$

тогда $n = 6 + 8d$, $d \in \mathbb{Z}$,

значит $x = \frac{\pi n}{4}$, где $n = 6 + 8d, d \in \mathbb{Z}$

4) ~~Если~~ $\begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \sin 7x = 0 \end{cases}$

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 3 4 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi p}{2}, p \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi p}{2} = \frac{\pi m}{7} \Big| : \pi$

$\frac{1}{8} + \frac{p}{2} = \frac{m}{7} \Big| \cdot 8$

$1 + 4p = \frac{8m}{7} \Big| \cdot 7$

$7 + 28p = 8m$

$m = \frac{7(1+4p)}{8}$, т.к. $m \in \mathbb{Z}$, то $1+4p$ должно делиться на 8, а это невозможно, т.к. $4p$ - четное, а $(1+4p)$ - нечетное

Ответ: $\frac{\pi n}{4}$; $n = 6 + 8d$; $d \in \mathbb{Z}$

$\frac{3}{2}\pi + 2\pi d = -\frac{\pi}{2} + 2\pi d$

№2

Пусть какое-то число при разложении на простые множители имеет вид: $a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \cdot a_4^{n_4}$, тогда оно будет иметь $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)(n_4+1)$ делителей. К числу мы прибавляем 1, т.к. делитель может быть и в 0 степени.

~~Число N имеет 30 делителей, тогда a~~

~~$N = 2^9 \cdot 5^2 \quad ((9+1)\cdot(2+1) = 30)$~~

$N = 2^9 \cdot 5^2$ Кол-во делителей: $(9+1)(2+1) = 30$

$5N = 2^9 \cdot 5^3$ Кол-во делителей: $(9+1)(3+1) = 40$, ~~тогда $N = 2^9$~~

Ответ: $N = 2^9 \cdot 5^2 = 12800$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

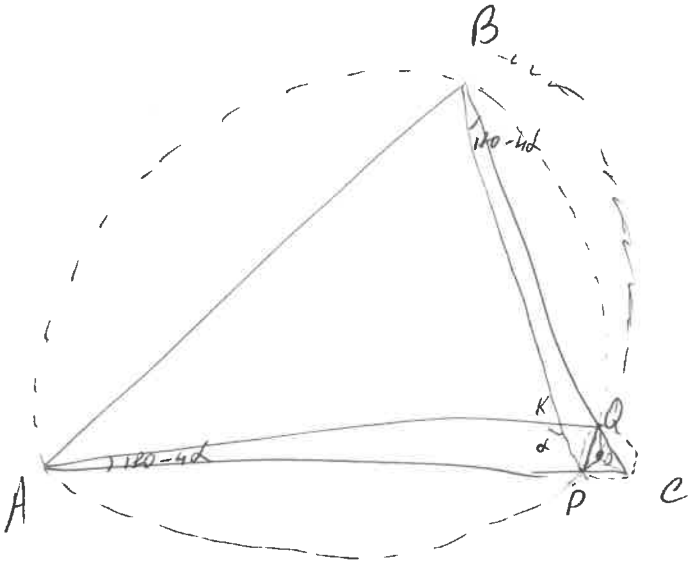
Вариант № 2

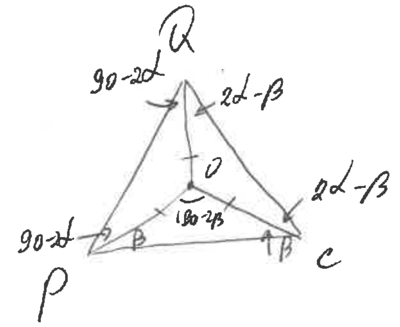
М	А	0	0	0	0	7	3	4	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3





1) Пусть $\angle AKP = \alpha$, тогда $\angle ACB = 2\alpha$

Пусть $\angle OCP = \beta$ (O – центр описанной ок-ти $\triangle PQC$), ~~во~~ тогда $\angle OCQ = 2\alpha - \beta$

$OP = OC = OQ = r$, тогда $\angle OPC = \angle OCP = \beta$, а $\angle OQC = \angle OCQ = 2\alpha - \beta$

$\angle POC = 180 - 2\beta$

$\angle QOC = 180 - 4\alpha + 2\beta$

$\angle POQ = 360 - \angle POC - \angle QOC = 360 - 180 + 2\beta - 180 + 4\alpha - 2\beta = 4\alpha$

$\angle OQP = \angle OPQ = \dfrac{180 - \angle QOP}{2} = \dfrac{180 - 4\alpha}{2} = 90 - 2\alpha$

2) $\angle QAP = \angle QPO + \angle \cancel{OPQ}\, OQP = 180 - 4\alpha$ (опираются на $\smile QOP$)

$\angle PBQ = \angle OPQ + \angle OQP = 180 - 4\alpha$ (опираются на $\smile QOP$)

3) $\angle AKB = 180 - \alpha$, тогда $\angle KAB + \angle KBA = 180 - 180 + \alpha = \alpha$ (1)

4) $\angle KAB + \angle KBA = 180° - (\angle ACB - \angle QAC - \angle PBQ =$

$= 180° - 2\alpha - 180 + 4\alpha - 180 + 4\alpha = 6\alpha - 180$ (2)

5) (1) = (2): $\alpha = 6\alpha - 180$; $5\alpha = 180$; $\alpha = 36°$, тогда $\angle ACB = 2\alpha = 2 \cdot 36° =$
$= 72°$

Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

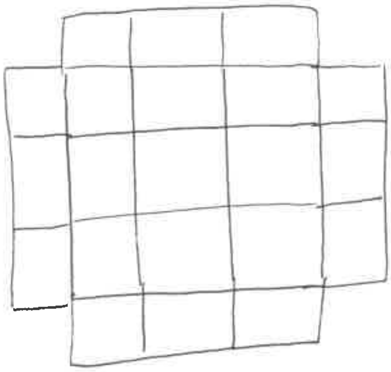
М	А	0	0	0	0	7	3	4	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Назовем 9 клеточек в центре - центр, а 3 с краю - тройки.



1) 2 клетки в центре:

$\frac{9\cdot 8}{8} = \cancel{72}\ 9$ (делим на 8, т.к. каждая комбинация повторяется и раз при повороте) и нам не важно какую мы выбрали 1-ой, а какую послед)

2) 1 в центре 1 в тройке

$9\cdot 3 = 27$ (мы берем одну тройку, т.к. при повороте они будут повторяться)

поворот не точно учтен.

3) $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$ — 2 в тройке

4) $3\cdot 3 = 9$ — 2 в соседних тройках

5) $3\cdot 3 = 9$ — 2 в противоположных тройках

6) Всего: $9+27+3+9+9 = 27+30 = 57$

Ответ: 57

№5.

Найдем ~~max~~ такие a_{49} и a_{50}, чтобы $a_{49}^2 + a_{50}^2$ было наибольшим:

Максимизируется общая сумма квадратов

$a_{49} + a_{50} = 50$

$(a_{49} + a_{50})^2 = 2500$

$a_{49}^2 + a_{50}^2 = 2500 - 2a_{49}\cdot a_{50} = 2500 - 2a_{49}(50 - a_{49}) =$

$= 2500 - 100a_{49} + 2a_{49}^2 = f(x)$

~~Найд~~ Найдем ~~max~~ максимум $f(x)$:

$f'(x) = 4a_{49} - 100$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 3 | 4 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$f'(x)=0: \quad 4a_{49}-100=0$

$a_{49}=\cancel{50}\,25$ Это т. минимума.

Тогда $a_{49}=a_{50}=25$, а $a_{49}^2+a_{50}^2=2\cdot 625=1250$

$a_1^2+\ldots+a_{48}^2$ будет наибольшим при $a_{47}=a_{48}=25$, а

$a_1=a_2=\ldots=a_{47}=0$, ~~то~~ значит $a_1^2+\ldots+a_{48}^2=2\cdot 625=1250$

$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{50}^2=1250\cdot 2=2500$

Ответ: 2500 — максимально возможное значение, а последовательность: $a_1=a_2=\ldots=a_{45}=a_{46}=0$

$a_{47}=a_{48}=a_{49}=a_{50}=25$

Д-ва нет.

1 посл-ть.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г.Красноярск СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	2	4	0	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия СОСЕДОВ

Имя МАКСИМ

Отчество НИКОЛАЕВИЧ

Дата рождения 21.04.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8950 412 0415 **Подпись** М.С.А

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

20 20 20 15 10 85

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	2	4	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$, пусть $\sin 9x = a, \sin 4x = b$,

тогда $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^2-2ab=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-2ab=1 \Rightarrow ab=0 \Rightarrow$ 1.) $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ 2.) $\begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases}$

1.) $\begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = \pi k \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{9} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}, k \in Z \Rightarrow x = \varnothing$, т.к

$\frac{\pi k_1}{9} \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_2}{2}$, при ~~любых~~ целых k_1 и k_2:

$\frac{k_1}{9} \neq \frac{1+4k_2}{8}$, т.к $8k_1 \neq 9 + 36k_2$,

т.к левая часть $\vdots 2$, а правая нет.

2.) $\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \pi k \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}, k \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases}, k \in Z \Rightarrow \frac{\pi k_1}{4} = \frac{\pi(1+4k_2)}{18} =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 9 2 4 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow 18k_1 = 4 + 16k_2$, верно для, например, $k_1 = k_2 = 2 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{9} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 1.) \\ 2.) \end{array}\right. =$

$= \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

№ 2

Количество делителей числа определяется как произведение степеней его простых делителей увеличенных на 1, т.е кол-во делителей $= \prod_{i=1}(\alpha_{p_i} + 1)$, где α^{p_i} степень вхождения простого делителя p_i в число. Тогда, пусть $N = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, тогда кол-во делителей $N = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$, тогда $3 \cdot N = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, тогда кол-во делителей $3 \cdot N = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, это пример $\Rightarrow$ такое число существует.

Ответ: Да. Например $N = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$

Лист 2 из 8

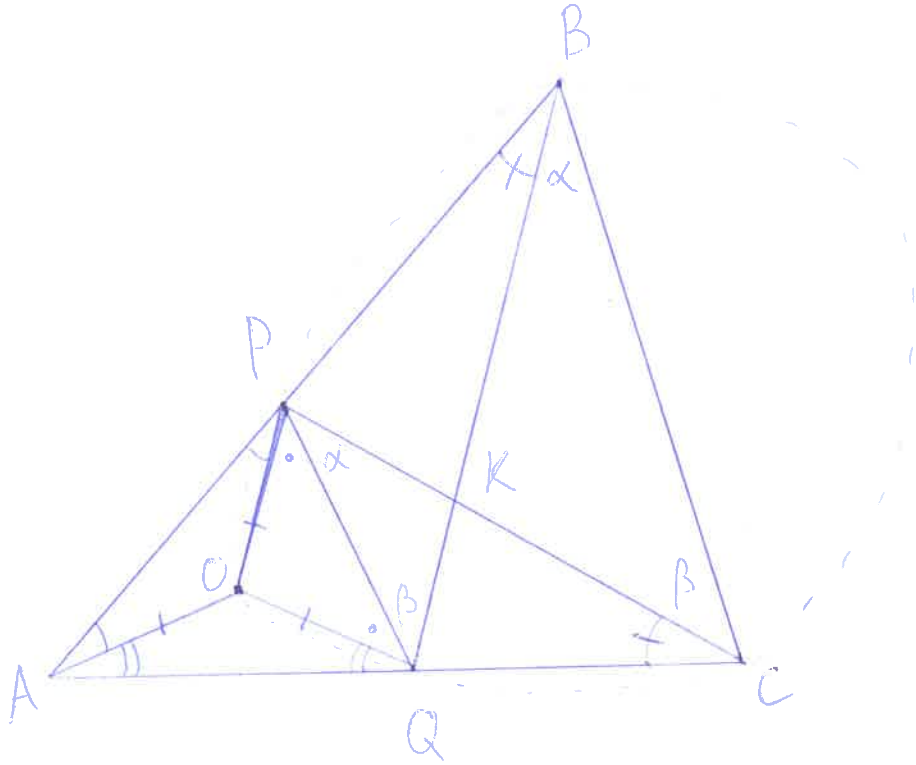
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 9 2 4 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3



1.) Пусть O - центр опис. окр. ΔAPQ, тогда $AO = OP = OQ \Rightarrow \angle OPA = \angle OAP$, $\angle OPQ = \angle OQP$, $\angle OAQ = \angle OQA$ из-за равнобедренности соответст. $\Delta\Delta$.

2.) $\angle PBQ = \angle PCQ$, $\angle QBC = \angle QPC$, $\angle PQB = \angle PCB$, т.к. впис. опираются на одну хорду

3.) $\angle POQ + \angle PBQ = 180°$, т.к. впис. опираются на одну хорду с разных дуг.

4.) $\angle POQ + 2 \cdot \angle OPQ = 180°$ (углы Δ) и $\angle POQ$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$+\angle PBQ = 180^\circ \Rightarrow \angle PBQ = 2\cdot\angle OPQ$.

5) $\angle PAO + \angle OQA + \angle OPQ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (половина суммы углов Δ).

6.) $\angle PAO + \angle OAQ + 2\cdot\angle PBQ + \angle QBC(\alpha) + \angle PCB(\beta) = 180^\circ$ (сумма угл Δ)

7.) $\angle PKB = \alpha + \beta$, т.к. внешний в ΔPKQ

8.) из 4.) и 6.) $\Rightarrow \angle PAO + \angle OAQ + \alpha + \beta + 4\angle OPQ = 180^\circ$

9.) из 8) и 5) $\Rightarrow \alpha + \beta + 3\angle OPQ = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ - 3\angle OPQ$

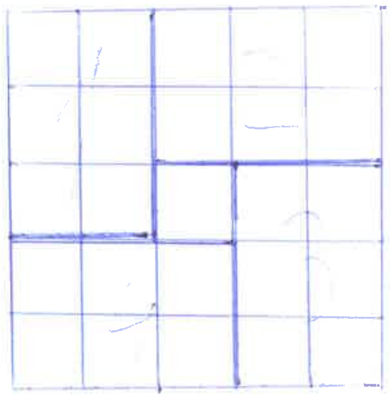
~~на~~ 10) из 5.) и 9) $\overset{\text{и } 7.)}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha+\beta = 90^\circ - 3\angle OPQ \\ \angle BAC + \angle OPQ = 90^\circ \\ \angle BAC = 3\times(\alpha+\beta) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 90^\circ - \angle OPQ = 3\times(90^\circ - 3\angle OPQ) \Rightarrow \angle OPQ = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ$

~~11) из 5~~

Ответ: $\angle BAC = 67{,}5^\circ$

№ 4



Разобьём исходный квадрат на 4 непересек прямоуг. 2×3 как показано на рис. слева. При этом центральная клетка не попадет ни в один из прямоуг. При таком разбиении каждой клетке из прямоуг. 1-4 взаимно однозначно соответствует клетка прямоуг. 1 при повороте □ на 90° несколько раз (возможно 0). Тогда рассмотрим несколько случаев расположения синих клеток.

1.) Пусть одна из синих клеток в центре, тогда для второй существует 6 вариантов внутри одного ▭.

2.) Пусть обе отмеченные клетки внутри одного ▭ 2×3, таких вариантов $C_6^2 = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$.

3.) Пусть синие клетки находятся в соседних ▭ 2×3, таких вариантов $6\cdot 6 = 36$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	2	4	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

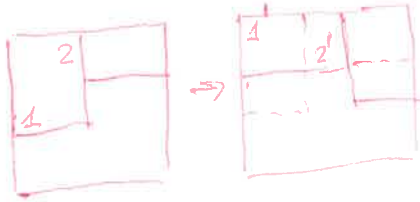
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) Пусть синие клетки в не соседн. □ 2×3, таких вариантов $6 \cdot 6 = 36$

Заметим, что рассмотренные варианты описывают всевозможные расположения синих клеток и при этом не пересекаются, поэтому ответом является сумма кол-ва способов во всех вариантах, т.е. $6 + 15 + 36 + 36 = 93$

Некоторые варианты посчитаны повторно.

(1',2') получается и как поворотом одного уголка, и как расположение в двух соседних



Ответ: 93

№ 5

1) Заметим, что $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{28}^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{28})^2 - 2(a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + \dots + a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + \dots + a_3 \cdot a_4 + \dots + a_{27} \cdot a_{28})$, при этом сумма во ~~правой~~ второй скобке ≥ 0, т.к. сумма произведений двух неотриц. чисел, а сумма в первой ≤ 30, по усл $\Rightarrow$ максимальное значение ~~же~~ суммы первой и второй скобки достигается, когда ~~на~~ сумма в I $= 30$, а во II $= 0$, такой случай возможен только если одно из чисел $= 30$, а остальные $= 0$, иначе найдется 2 ненулевых числа, произведение

это невозможно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М И 0 0 0 0 9 2 4 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

которых ≥ 0, а т.к. вторая скобка умножается на (-2) мы стремимся минимизировать значение суммы в ней. Из того, что все числа от a_1 до $a_{28} = 0$, кроме одного, $= 30$ и того, что числа упорядочены по неубыванию (по усл. $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{30}$) $\Rightarrow$ возможен единственный вариант: $a_1 - a_{27} = 0$, $a_{28} = 30$, но такой вариант невозможен, Вот именно.

2.) Проведем аналогичные рассуждения для III неравенства: $a_{29}^2 + a_{30}^2 = (a_{29} + a_{30})^2 - 2a_{29}a_{30} \Rightarrow a_{29} = 0, a_{30} = 30$

3.) Из 1.) и 2.) $\Rightarrow$ максимальное значение $A = a_1^2 + \ldots + a_{30}^2$ достигается в единственном случае $a_1 - a_{27} = 0$, $a_{28} = 30$, т.к. $a_{28} \leq a_{29} \leq a_{30} \Rightarrow a_{29} + a_{30} \geq 60$, противоречие, поэтому пусть $a_1 - a_{28} = 0$, чтобы аналогичное рассуждение сработало для III неравенства

Подбор

2.) При аналогичном рассуждении для ~~второго~~ II неравенства получим, что $a_1 - a_{29} = 0$, $a_{30} = 30$ и $A = 900$.

Первое рассуждение содержало противоречие. Поэтому на него нельзя ссылаться

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	2	4	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Та вследствие~~ Такая же сумма (значений А) может быть достигнута при $a_1 - a_{26} = 0$, $a_{27} - a_{30} = 15$. Очевидно, что ~~при~~ для в других случаях значение А будет <, по описанным выше причинам.

Ответ: $A_{max} = 900$. Достигается при 1.) $a_{1-29} = 0$, $a_{30} = 30$. 2.) $a_{1-26} = 0$, $a_{27-30} = 15$.

Д-ва max нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	7	2	8	9	2	0

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ФОМИН

Имя ГЕОРГИЙ

Отчество ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 30.06.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89135771680 **Подпись** ГФом

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 15 | 10 | 85

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	2	8	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$$\begin{cases}\sin 9x+\sin 4x=1 \ (*)\\ \sin^2 9x+\sin^2 4x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 9x+2\sin 9x\cdot\sin 4x+\sin^2 4x=1\\ \sin^2 9x+\sin^2 4x=1\end{cases}$$

$$-\begin{cases}\sin^2 9x+2\sin 9x\cdot\sin 4x+\sin^2 4x=1\\ \sin^2 9x+\sin^2 4x=1\end{cases}$$

$$2\sin 9x\cdot\sin 4x=0$$

$$\sin 9x\cdot\sin 4x=0$$

Рассмотрим все случаи:

1) ~~sin 9x~~ Пусть $\sin 9x=0$, тогда из (*) следует, что $\sin 4x=1$

$$\begin{cases}\sin 9x=0\\ \sin 4x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x=\pi n, n\in Z\\ 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi n}{9}\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\end{cases}$$

т.к. у нас система приравняем иксы:

$$\frac{\pi n}{9}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$$

$$\frac{\pi n}{9}=\frac{\pi+4\pi k}{8}$$

$$8\pi n=9\pi+36\pi k \ \Big|:\pi$$

$$8n=9+36k \ *$$

Уравнение не имеет решений в целых числах, т.к. $8n$ - четное, $9+36k$ - нечет, т.к. чет + нечет = нечет, $36k$ - четное, а 9 - нечетное. а нечет $\neq$ чет.

2) Пусть $\sin 4x=0$, тогда из (*) следует, что $\sin 9x=1$

$$\begin{cases}\sin 9x=1\\ \sin 4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\\ 4x=\pi n, n\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}\\ x=\frac{\pi n}{4}\end{cases}$$

$$\frac{\pi n}{4}=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}$$

$$\frac{\pi n}{4}=\frac{\pi+4\pi k}{18} \ \Big|:\pi$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА00007289 20

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{n}{4} = \frac{1+4k}{18}$

$18n = 4+16k \mid :2$

$9n = 2+8k$

$9n = 9k-(k-2)$, т.к. $9n \vdots 9$ и $9k \vdots 9 \Rightarrow (k-2) \vdots 9$

$k-2 = 9l, l \in Z$

$k = 9l+2, l \in Z$

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi(9l+2)}{18}, l \in Z$

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{8\pi}{18} + \frac{36l\cdot\pi}{18}, l \in Z$

$x = \frac{9\pi}{18} + \frac{36\pi l}{18}, l \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$

№2.

N имеет 24 делителя

$3N$ имеет 32 делителя

Пусть $N = x^a \cdot y^b \cdot z^c$; где x, y, z – простые числа, а a, b, c – натуральные $\Rightarrow 3N = x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot 3$

~~3N~~ Воспользуемся формулой для нахождения кол-ва делителей числа:

$(a+1)(b+1)(c+1) = 24$, для N

Пусть $z=3$, тогда:

$N = x^a \cdot y^b \cdot 3^c$, $3N = x^a \cdot y^b \cdot 3^{c+1}$

$$\begin{cases} (a+1)(b+1)(c+1) = 24, \text{ для } N \\ (a+1)(b+1)(c+2) = 32, \text{ для } 3N \end{cases}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 2 8 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\Rightarrow\begin{cases}(a+1)(b+1)(c+1)=24\\(a+1)(b+1)(c+2)=32\end{cases}$$

$$\frac{c+1}{c+2}=\frac{3}{4}\Rightarrow 3c+6=4c+4$$

$c=2$, тогда

$3(a+1)(b+1)=24$

$(a+1)(b+1)=8$

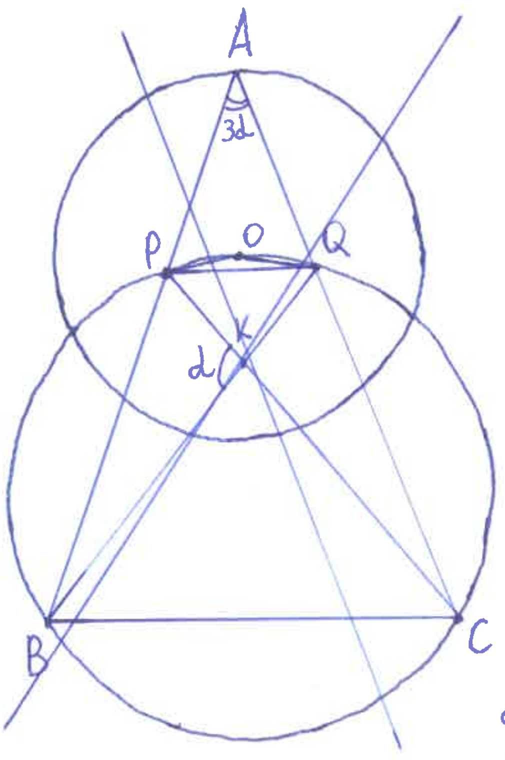
Предположим, что $(a+1)=4$, $a(b+1)=2$, тогда $a=3$, $b=1$

Пусть $x=2$, а $y=5$, тогда $N=2^3\cdot5\cdot3^2=360\Rightarrow$

$\Rightarrow 3N=360\cdot3=1080$

Ответ: существует, пример: 360

№3.



Найти: $\angle BAC$

Решение: 1) Пусть $\angle BKP=\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow\angle BAC=3\alpha$

~~2) Рассмотрим окружность описанную около $\triangle APQ$:~~

~~а) $\angle$~~

2) По теореме об угле между пересекающимися хордами:

$\angle PKB=\alpha=\frac{\smile PB+\smile QC}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\smile PB+\smile QC=2\alpha$

3) Рассмотрим окружность описанную около $\triangle APQ$:

~~$\angle APQ$ и $\angle$~~ $\angle PAQ$ и $\angle POQ$ опираются на одну и ту же дугу, но $\angle PAQ$ - вписанный, а $\angle POQ$ - центральный $\Rightarrow\angle POQ=2\angle PAQ=6\alpha$

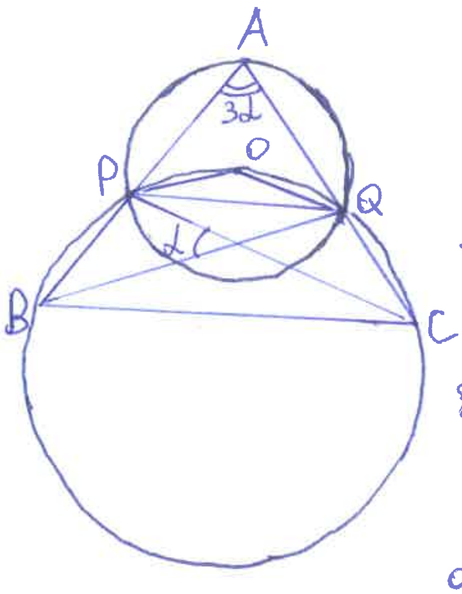
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	2	8	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



4) $\angle POQ$ - вписанный в большую окружность и опирается на $\smile PBCQ \Rightarrow \smile PBCQ = 12\alpha$

5) $\smile BC = \smile PBCQ - \smile PB - \smile QC = 12\alpha - 2\alpha = 10\alpha$

6) $\angle BPC$ - вписанный и опирается на $\smile BC \Rightarrow \angle BPC = 5\alpha$

7) $\angle BPC$ и $\angle APC$ - смежные $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle APC = 180° - \angle BPC = 180 - 5\alpha$

8) Рассмотрим $\triangle APC$:

$\angle ACP = 180 - \angle CPA - \angle PAC = 180 - 3\alpha - (180 - 5\alpha) = 5\alpha - 3\alpha = 2\alpha$

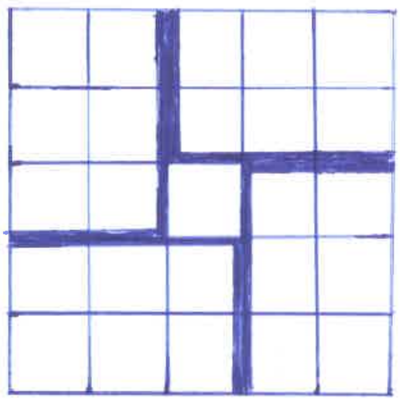
9) Рассмотрим четырехугольник $POQC$ - он вписанный $\Rightarrow \angle POQ + PCQ = \angle OPC + \angle OQC = 180°$

$\angle POQ + \angle PCQ = 180° \Rightarrow 6\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$

10) $\angle BAC = 3\alpha$, а $\alpha = 22{,}5° \Rightarrow \angle BAC = 67{,}5°$

Ответ: $67{,}5°$

№4.



Разобьем квадрат 5×5 на четыре прямоугольника 2×3 и один квадрат 1×1, он должен быть по центру (см. рисунок).

Как бы мы ни ~~ставили~~ закрашивали клетки в каком-то из прямоугольников мы все равно при повороте закрасим те же самые клетки в остальных прямоугольниках при повороте (~~ся~~ способы будут повторяться)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 2 | 8 | 9 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Поэтому есть смысл рассматривать только следующие случаи:

1) Красим 1 клетку в одном прямоугольнике и 1 клетку в прямоугольнике, который граничит с ним (с ним граничат два прямоугольника, но ~~есть~~ есть смысл рассматривать только с одним, т.к. второй случай получится при повороте на 180°)

2) Красим две клетки в одном прямоугольнике

3) Красим 1 клетку в одном прямоугольнике и 1 клетку в прямоугольнике, который не граничит с ним (находится относительно него по диагонали)

4) Красить центральную клетку (квадрат 1×1) и 1 клетку в одном из прямоугольников.

Посчитаем кол-во вариантов для каждого способа:

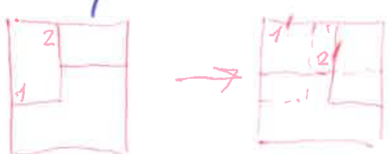
1) $6 \cdot 6 = 36$, т.к. ~~во~~ изначально можем выбрать одну из 6 клеток в первом прямоугольнике и одну из 6 клеток в соседнем

2) $6 \cdot 5 = 30$, т.к. изначально можем выбрать одну из 6 клеток; а следующим действием одну из 5, т.к. одна уже закрашено

3) $6 \cdot 6 = 36$, док-во аналогично с (1).

4) $1 \cdot 6 = 6$, т.к. центральную клетку мы красим в любом случае, а в прямоугольнике 6 клеток.

Всего вариантов: $36 + 36 + 30 + 6 = 108$



Но по Вашему разбиению 1' и 2' принадлежат не одному прямоугольнику, а соседним.
Некоторые варианты посчитаны повторно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 7 2 8 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$$\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le a_{30} \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{28} \le 30 \\ a_{29} + a_{30} \le 30 \end{cases}$$

$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2$ $A - max$

т.к. все числа не отрицательные => A будет максимальным, только тогда, когда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{29} + a_{30} - max$

~~Рассмотрим~~ => $a_1 + a_2 + \ldots + a_{29} + a_{30} = 60$

1) Рассмотрим $a_{29}^2 + a_{30}^2$, т.к. мы знаем, что сумма всех чисел ~~равн~~ должна быть равна 60, (максимальной) =>

=> $a_{29} + a_{30}$ тоже должна быть максимальной => $a_{29} + a_{30} = 30$

Пусть $a_{30} = x$ => $a_{29} = (30 - x)$ => $a_{29}^2 + a_{30}^2 = (30-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 60x + 900$

Это парабола, ветви ↑. Найдем вершину: $x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{60}{4} = 15$ =>

=> если $x = 15$, то $a_{29}^2 + a_{30}^2 - min$. А т.к. у нас парабола ветви ↑

=> на промежутке $[0; 15)$ - y ($y = 2x^2 - 60x + 900$) уменьшается, а на промежутке $(15; 30]$ - y увеличивается, нет смысла рассматривать промежуток $[0; 15)$, т.к. если $x < 15$, то $a_{30} < a_{29}$, что противоречит условию => $y = max$ при $x = 30$ и $y = 900$ =>

таким образом мы доказали, что квадрат числа (z) больше сумме квадратов чисел, которые в сумме равны z.

⇓

$(a_{29}^2 + a_{30}^2)_{max} = 900$ и $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{27}^2 + a_{28}^2)_{max} = 900$ =>

=> $A_{max} = 900 + 900 = 1800$, но такого быть не может т.к.

Дальше идет подбор.

$a_{29} = 0$, а $a_1 + a_2 + \ldots + a_{27} + a_{28} = 30$, что противоречит условию => максимальное значение, которое может принимать $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{28}^2) = 450$, но тогда $(a_{29}^2 + a_{30}^2) = min = 450$ => при увеличении $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{28}^2)$ у нас будет уменьшатся $(a_{29}^2 + a_{30}^2)$ => $A_{max} = 900$ и это возможно в двух случаях:

1) $(a_1 - a_{26})$ включительно $= 0$, а $a \cdot (a_{27} - a_{30})$ - включительно $= 15$

2) (Все a, кроме a_{30}) $= 0$, а $a_{30} = 30$

Лист 6 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	6	1	1	3	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Чернин

Имя Михаил

Отчество Михайлович

Дата рождения 24.03.2003 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона 8(985) 464 0964 **Подпись** Чер

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 10 | 0   70

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	1	8	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1

Решение: 1) $\begin{cases}\sin 9x+\sin 4x=1 & (1)\\ \sin^2 9x+\sin^2 4x=1 & (2)\end{cases}$, $\Rightarrow (\sin 9x+\sin 4x)^2 = \sin^2 9x + 2\sin 9x\cdot\sin 4x + \sin^2 4x = \underbrace{(\sin^2 9x+\sin^2 4x)}_{=1} + 2\sin 9x\cdot\sin 4x =$ (из (2) уравнения системы)

$= 1+2\sin 9x\cdot\sin 4x.$

В то же время $(\sin 9x+\sin 4x)^2 = 1^2 = 1.$ (Из (1) уравнения системы)

В итоге получается, что $(\sin 9x+\sin 4x)^2 = 1 = 1+2\sin 9x\cdot\sin 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 9x\cdot\sin 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 9x=0\\ \sin 4x=0\end{array}\right.$;

Чтобы исходная система имела решения, необходимые условия таковы:

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 9x=0\\ \sin 4x=1\end{cases} (I)\\ \begin{cases}\sin 9x=1\\ \sin 4x=0\end{cases} (II)\end{array}\right.$

2) Решим первую (I) систему: $\begin{cases}\sin 9x=0\\ \sin 4x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x=\pi n, n\in Z\\ 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi n}{9}, n\in Z\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z\end{cases}$ Чтобы получить итоговое решение, приравняем выражения для x: $\frac{\pi n}{9}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} \Leftrightarrow \frac{n}{9}=\frac{1}{8}+\frac{k}{2} \Rightarrow$ (чётн., чётн., нечётн.)

$\Rightarrow n=\frac{9}{8}+\frac{9k}{2} \ |\cdot 8 \Rightarrow 8n=9+36k \Leftrightarrow 8n-36k=9.$

Как видим, разность двух чётных чисел равна нечётному (девятке), что невозможно, поэтому у системы I нет решений.

3) Решим вторую систему (II): $\begin{cases}\sin 9x=1\\ \sin 4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\\ 4x=\pi n, n\in Z\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}, k\in Z \ (*)\\ x=\frac{\pi n}{4}, n\in Z\end{cases}$ Аналогично п. 2 решения, приравняем: $\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9}=\frac{\pi n}{4} \Rightarrow \frac{1}{18}+\frac{2k}{9}=\frac{n}{4} \ |\cdot 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{2+8k=9n}$ (3) Решая это диофантово уравнение, можно понять, что $k=2+9p$, $p\in Z$; $n=2+8p$, $p\in Z$. Подставляя

(Подбором, $k=2$, $n=2$ — решение, но и $k=11$, $n=10$ — тоже решение.) выражения для k и n в (3), получим, что $2+8(2+9p)=9(2+8p) \Rightarrow$

$\Rightarrow 18+72p=18+72p$ — истина).

Подставляя (здесь это не важно), например, $k=2+9p$ в (*), получим итоговый ответ: $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{9}\cdot(2+9p)=\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{9}+2\pi p=\boxed{\frac{\pi}{2}+2\pi p, p\in Z}$ ← в ответ

Все случаи рассмотрены.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi p, p\in Z$

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 1 8 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 2

Ответ: да, существует. Например, $N = 360$

Решение: 1) Рассмотрим разложение числа N на множители: $N = \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\alpha_3^{p_3}\cdot\ldots\cdot\alpha_n^{p_n}$. Предположим, что $\alpha_1 = 3$, тогда $3N = \alpha_1^{p_1+1}\alpha_2^{p_2}\alpha_3^{p_3}\cdot\ldots\cdot\alpha_n^{p_n}$.

2) Рассмотрим число делителей чисел N и $3N$:
Так как $p_n = 0, 1, 2, 3$, то число делителей числа N будет равняться (выбираем каждый множитель p_n+1 вариантами)

$$(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1) = 24 \quad (*)$$

Аналогично, число делителей числа $3N$ равняется $(p_1+2)(p_2+1)(p_3+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1) = 32$ (**)

Такие выражения справедливы, ведь делитель числа получается перемножением степеней его простых множителей, поэтому степень делителя можно выбрать (p_1+1) способами, ведь его (α_1) там может просто не быть и $p_1 = 0$.

3) Разделим (**) на (*): $\frac{(p_1+2)(p_2+1)(p_3+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1)}{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1)} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{p_1+2}{p_1+1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3p_1 + 6 = 4p_1 + 4 \Rightarrow \boxed{p_1 = 2}$ (удовл. условию задачи), то есть $N = 3^2\cdot A$, где $A \in \mathbb{N}$

4) Таким образом стало ясно, что такое N существует, поэтому можно подобрать взять это число: к примеру $N = 3^2\cdot 5^1\cdot 2^3 = 9\cdot 5\cdot 8 = 360$. (число делителей: $(3\cdot 2\cdot 4) = 24$)

И $3N = 3^3\cdot 5^1\cdot 2^3 = 27\cdot 5\cdot 8 = 1080$ (число делителей: $(3+1)\cdot(1+1)\cdot(3+1) = 4\cdot 2\cdot 4 = 32$)

Задание 4

Решение: 1) Количество всех способов выбрать 2 синие клетки: $C_{25}^2 = \frac{25!}{23!\cdot 2!} = \frac{24\cdot 25}{2} = 12\cdot 25 = 300$. (квадрат симметричен для каждой стороны)

2) Заметим, что квадрат можем ~~делать~~ 4 разных "индивидуальных" поворота, поэтому среди общего количества раскрасок каждая встречена четыре раза, то есть искомое количество раскрасок равно $\frac{C_{25}}{4} = \frac{300}{4} = 75$.

Ответ: 75

(Центр.-симм. – 2 раза)

доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

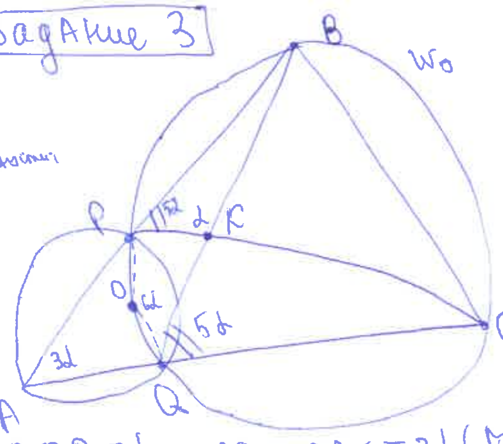
Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 1 8 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3

Дано: $\triangle ABC$;
$[BQ] \cap [CP] = \{K\}$;
O — центр окружности $\triangle APQ$ окружности;
$\angle BAC = 3\angle BKP$;
Найти: $\angle BAC$ — ?;



Решение: 1) Обозначим $\angle BKP = \alpha$, тогда $\angle BAC = 3\alpha$ (по условию)

2) $\angle PAQ$ — вписанный в $\triangle$-ке APQ $\Rightarrow$ $POQ = 2\cdot\angle PAQ = 6\alpha$ (как центральный)

3) $\angle PKB$ — угол между хордами PC и BQ, поэтому $\angle PKB = \frac{1}{2}(\smile PB + \smile QC) = \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\smile PB + \smile QC = 2\alpha}$.

4) $\angle POQ$ — вписанный в окружность W_0, поэтому $\angle POQ = 6\alpha = \frac{1}{2}\smile PBCQ$ $\Rightarrow$ (по Т. о вписанном угле).

$\Rightarrow \smile PBCQ = 12\alpha$ (по Т. о вписанном угле), но из п. 3 $\smile PB + \smile QC = 2\alpha$,

5) В то же время, $\smile PBCQ = \smile PB + \smile BC + \smile CQ = 12\alpha$,

поэтому $\smile BC = 12\alpha - 2\alpha = \boxed{10\alpha}$.

6) $\angle BPC = \angle BQC = \frac{10\alpha}{2} = 5\alpha$ (как вписанные углы, опирающиеся на дугу $\smile BC$)

7) По Т. о сумме углов в $\triangle PKB$, $\angle PBK = 180° - (\angle BPK + \angle PKB) = \underline{180° - 6\alpha}$.

8) $\angle AQB = 180° - \angle BQC = \underline{180° - 5\alpha}$ (так как смежные).

9) Запишем Теорему о сумме углов в $\triangle ABQ$: $\angle BAQ + \angle ABQ + \angle AQB = 180°$

Подставляя все полученные для углов выражения, получим:

$3\alpha + (180° - 6\alpha) + (180° - 5\alpha) = 180° \Rightarrow 180° - 8\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{180°}{8} = 22{,}5°$.

10) По обозначению, $\angle BAC = 3\alpha \overset{(п.9)}{=} 3 \cdot 22{,}5° = \boxed{67{,}5°}$.

Ответ: $67{,}5°$

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 1 | 8 | 3 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 5

Решение: 1) $(a_1+a_2+\ldots+a_{28})^2 = \underbrace{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{28}^2)}_{\to\max} + 2(a_1a_2+a_2a_3+\ldots \oplus$

$\oplus\, a_{28}a_{27}) \leq 900$ (о средн. арифметическом и средн. геометрическом)

2) Все числа положительные, поэтому запишем неравенство Коши:

$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{28}a_{27} \geqslant (27\cdot14)\cdot\sqrt[27\cdot14]{a_1^{27}a_2^{27}\cdot\ldots a_{28}^{27}} \ominus$

(всего пар $C_{28}^2=\frac{28!}{26!\,2!}=\frac{27\cdot28}{2}=27\cdot14$)

всего в произведении $a_1a_2a_2a_3\ldots a_{28}a_{27}$ встречаются 27 раз (a_1), 27 раз (a_2) и т.д. для образования пар — всех — всех пар) каждый (с каждым)

$\ominus\ \underbrace{27\cdot14\sqrt[27\cdot14]{a_1a_2\ldots a_{28}}}_{\text{минимальное значение}}$ (ведь сумму $\sum\limits_{i=1}^{27}a_i^2$ нужно максимизировать) достигается при $a_1a_2=a_2a_3=\ldots=a_{27}a_{28}$,

т.е. при $a_1=a_2=\ldots=a_{28}$ $\underset{(a_1+a_2+\ldots a_{28})\leq30\text{ (по условию)}}{\Longrightarrow}$ $a_1=a_2=\ldots=a_{28}=\frac{30}{28}$.

Поэтому $\max\sum\limits_{i=1}^{28}a_i^2 = 28\cdot\left(\frac{30}{28}\right)^2 = \frac{900}{28}$.

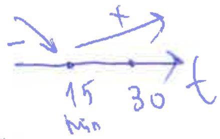
3) $(a_{29}+a_{30})^2=(a_{29}^2+a_{30}^2)+2a_{29}a_{30}\leq900$

Неравенство Коши: $a_{29}+a_{30}\geqslant2\sqrt{a_{29}a_{30}}$

Из третьего неравенства системы $(a_{29}+a_{30}\leq30)$ следует, что $a_{30}\leq30-a_{29}$. Тогда $a_{29}^2+a_{30}^2\leq a_{29}^2+(30-a_{29})^2=2a_{29}^2-60a_{29}+900$.

(в то же время $\begin{cases}a_{29}\geqslant0\\a_{30}\geqslant0\end{cases}$, поэтому $0\leq a_{29}\leq30$, $0\leq a_{30}\leq30$)

Пусть $f(t)=2t^2-60t+900$ $(t=a_{29})$, тогда $f'(t)=4t-60$.



В силу ограничений, $\max(f(t))=f(30)=1800-1800+900=900$. и достигается при $a_{29}=30$ и $a_{30}=0$. Так как нас просили перечислить все варианты, то $a_{29}=0$, $a_{30}=30$ тоже удовлетворяют условию задачи.

4) Таким образом, $A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{28}^2+a_{29}^2+a_{30}^2=\max\sum\limits_{i=1}^{28}a_i^2+\max(a_{29}^2+a_{30}^2)=$ (1,2,3) $\frac{900}{28}+900=900\cdot\frac{29}{28}=\frac{225}{7}\cdot29$ — в ответ;

Ответ: $\max A=900\cdot\frac{29}{28}$, максимум достигается при последовательностях $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{27}=a_{28}=\frac{30}{28}$, $a_{29}=0$, $a_{30}=30$ и $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{27}=a_{28}=\frac{30}{28}$, $a_{29}=30$, $a_{30}=0$

Нарушается условие

$a_{29}\leq a_{30}$

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ „МЭИ"

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	8	0	6	1	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Решин

Имя Кирилл

Отчество Денисович

Дата рождения 20.01.2003 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7 916 873 04 50 **Подпись** КРеш

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета пѐчатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 15 | 14

89

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М А 0 0 0 0 8 0 6 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

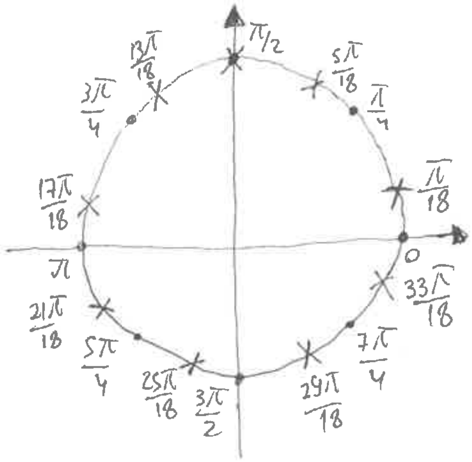
$$\begin{cases} \sin 9x = 1 - \sin 4x \\ \sin^2 4x - 2\sin 4x + 1 + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 9x = 1 - \sin 4x \\ \sin 4x(\sin 4x - 1) = 0 \end{cases}$$

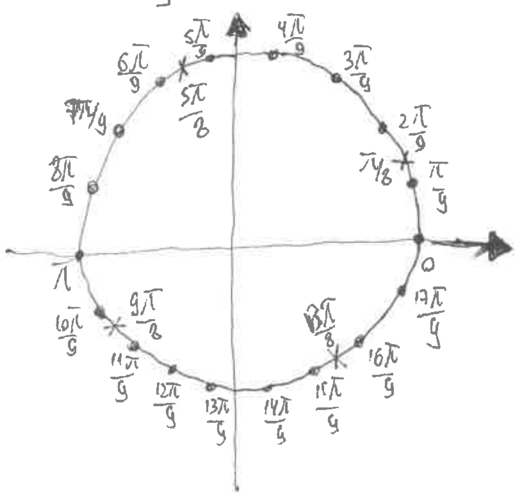
$$\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} \overset{1)}{} \Bigg| \overset{2)}{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}$$

1) $\begin{cases} x = \frac{\pi n}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi k}{18} \end{cases}, n,k \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi n}{8} \\ x = \frac{\pi k}{9} \end{cases}, n,k \in \mathbb{Z}$



$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



нет реш.

$\boxed{\text{Отв: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$

N2

Да, например $N = 2^7 \cdot 3^2$, тогда у него $(7+1)(2+1) = 8 \cdot 3 = 24$ делителя, а у $3N = 2^7 \cdot 3^3$ $(7+1)(3+1) = 8 \cdot 4 = 32$ делителя

$\boxed{\text{Ответ: да, существует, например } N = 2^7 \cdot 3^2 = 1152}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 0 6 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

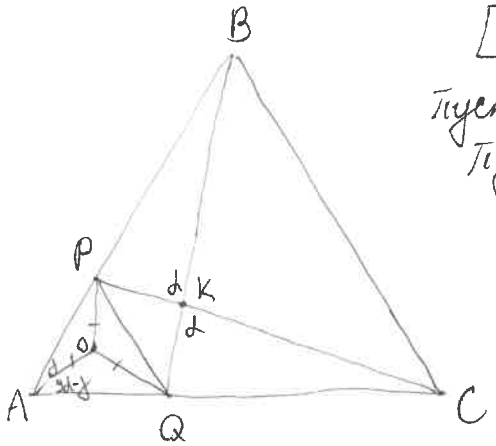
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~№4~~

~~Способов покрасить 2 клетки из 25 без учета поворотов: $\frac{25!}{23!\cdot 2!} = 25\cdot 12$. Существует ровно 4 раскраски, переходящие друг в друга при поворотах, так как всего у квадрата 4 поворота: на 0°; 90°; 180° и 270°. Таким образом, всего вариантов покрасить две клетки с учётом поворотов $= \frac{25\cdot 12}{4} = 25\cdot 3 = 75$~~

~~Отв: 75~~

№3



Пусть центр опис. окр. $\triangle APQ$ – O

Пусть $\angle BKP = \alpha$, тогда $\angle PAQ = 3\alpha$ и $\angle QKC = \alpha$

Пусть $\angle PAO = \gamma$, тогда $\angle OAQ = 3\alpha - \gamma = \angle OQA$

и $\angle APO = \angle PAO = \gamma$

$\angle POQ = 2\angle PAQ = 6\alpha$ (центральный и вписанный углы)

Так как $\triangle PBCQ$ впис., то $\angle POQ + \angle PBQ = 180^\circ \Rightarrow \angle PBQ = 180 - 6\alpha$

Аналогично $\angle PCQ = 180 - 6\alpha$

В $\triangle POQ$ $\angle POQ = 6\alpha$ и он равнобед. $\Rightarrow \angle OPQ = \angle OQP = 90^\circ - 3\alpha$

Получаем, что $\angle APQ = 90^\circ - 3\alpha + \gamma$; $\angle AQP = 90^\circ - 3\alpha + 3\alpha - \gamma = 90^\circ - \gamma$

$\angle ABC + \angle PQC = 180^\circ$, т.к. P, Q, C, B на одной окр, причём $\angle PQC + \angle AQP = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = \angle AQP$

Аналогично $\angle APQ = \angle ACB$

Получаем, что $\angle QBC = \angle PBC - \angle PBQ = \angle AQP - \angle PBQ = 90^\circ - \gamma - 180^\circ + 6\alpha = 6\alpha - \gamma - 90^\circ$

$\angle BCP = \angle BCQ - \angle PCQ = \angle APQ - \angle PCQ = 90^\circ - 3\alpha + \gamma - 180^\circ + 6\alpha = 3\alpha + \gamma - 90^\circ$

$\angle BKC = 180^\circ - \alpha$

В $\triangle BKC$: $180^\circ = \angle BKC + \angle BCP + \angle QBC = 180^\circ - \alpha + 3\alpha + \gamma - 90^\circ + 6\alpha - \gamma - 90^\circ = 8\alpha$

$\alpha = \frac{180^\circ}{8} = \frac{45^\circ}{4}$; $\angle BAC = 3\alpha = \frac{135^\circ}{4}$ Отв: $\frac{135^\circ}{4}$

$\frac{45}{2}$. Ошибка в самом конце. Балл не снижен

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

NA00008 06120

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\boxed{N5}$

Пусть $a_{30}=a$, тогда a_{29} возьмём $30-a$ (если взять меньше, чем $30-a$, то сумма квадратов будет меньше)

Возьмём какой-нибудь набор $a_1,\dots,a_{28}$: $a_1+\dots+a_{28}=30$

Прибавим к a_k ещё n $(k>k_1)$, тогда от a_{k_1} надо отнять n, чтобы сумма не менялась. Тогда сумма квадратов будет такая:

$a_1^2+\dots+(a_k+n)^2+(a_{k_1}-n)^2+\dots=a_1^2+\dots+a_{28}^2+n(2a_k+2n^2-2a_{k_1})$, а была такая: $a_1^2+\dots+a_{28}^2$. Т.е. есть сумма квадратов возросла, так как $2a_k+2n^2-2a_{k_1}>0$, т.к. $2a_k-2a_{k_1}\geq 0$, т.к. $a_k\geq a_{k_1}$, т.к. $k>k_1$

Получаем, что выгоднее всего, чтобы a_{28} было максимальным, то есть равным a_{29}, чтобы a_{27} было максимальным, то есть равным a_{28}, чтобы ...

То есть мы берем m чисел, равных a_{29} и, когда $(m+1)a_{29}$ уже больше 30, но $ma_{29}<30$, берем ещё одно число так, чтобы $ma_{29}+b=30$, где b - это число

Получаем, что сумма квадратов равна: $a^2+(30-a)^2\cdot(m+1)+b^2=$
$=(m+2)a^2-60(m+1)a+900(m+1)+b^2=f(a)$

$f(a)$ - парабола рогами вверх, т.к. $m+2>0$

Учитывая, что $a\in[15;30]$ (иначе $a_{29}>a_{30}$), получаем, что максимум нашей функции либо при $a=15$, либо при $a=30$

1) $a=15=a_{30}=a_{29}=a_{28}=a_{27}$
$A=15^2\cdot 4=900$

2) $a=30=a_{30}$
$A=30^2=900$

Итак, получаем, что $A_{max}=900$ и достигается при следующих последовательностях: 1) $15;15;15;15;0;\dots;0$ 2) $30;0;\dots;0$

$\boxed{\text{Отв: } 900}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

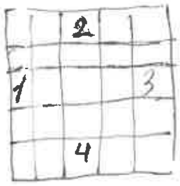
М	А	0	0	0	0	8	0	6	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N4

Пусть у нас уже покрашена одна нецентральная клетка доски(1), тогда при поворотах на $0°; 90°; 180°$ и $270°$ мы получим ещё 3 клетки:



Если вторая покрашенная клетка не совпадает с клеткой 3, то получим, что ровно 4 раскраски получаются друг из друга поворотом.

Если же вторая покрашенная клетка — это клетка 3, то ровно 2 раскраски получаются друг из друга поворотом.

Таким образом, если покрашены 2 центрально-симметричные клетки, то 2 раскраски получ. друг из друга поворотом, иначе 4

Если мы сначала покрасим центральную клетку, то какую бы вторую клетку мы не покрасили, у нас получились бы 4 раскраски получ. друг из друга поворотом.

Всего пар центрально-симметричных клеток: $\frac{25-1}{2}=12$, но эти раскраски разбиваются ещё на пары, внутри которых раскраски получ. друг из друга поворотом. Получаем $\frac{12}{2}=6$ раскрасок.

Посчитаем не центрально-симметрич. раскраски: 1) Сначала красим не центральную клетку (24 способа), а затем ещё одну не центральную (23 способа). Итого: $\frac{24\cdot 23}{2}=23\cdot 12$ способов 2) Сначала красим центральную клетку, а затем любую другую: 24 способа.

Итого: $23\cdot 12+24=12\cdot 25$ раскрасок. Но эти раскраски разбиваются ещё на четвёрки, внутри которых раскраски получ. друг из друга поворотом. Получаем $\frac{25\cdot 12}{4}=25\cdot 3=75$ раскрасок

Всего: $6+75=81$ раскраска

Отв: 81 раскраска

И не симметр. первой!

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Крепостной 139

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	4	9	6	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия МАРЧЕНКО

Имя КОНСТАНТИН

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 24.05.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89612961060 **Подпись** [подпись]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 0 | 20 | 6 | 66

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	4	9	6	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

Пусть $\sin 7x = t$, $\sin 4x = y$

$$\begin{cases} t + y = 1 \\ t^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - y \\ (1-y)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - y \\ 2y(y-1) = 0 \end{cases}$$

из системы получаем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} & k \in Z \\ x = \frac{\pi q}{4} & q \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi n}{7} & n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi L}{4} & L \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

найдём пересечения корней $\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi q}{4} \end{cases}$ и $\begin{cases} x = \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi L}{4} \end{cases}$ на единичной окружности

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

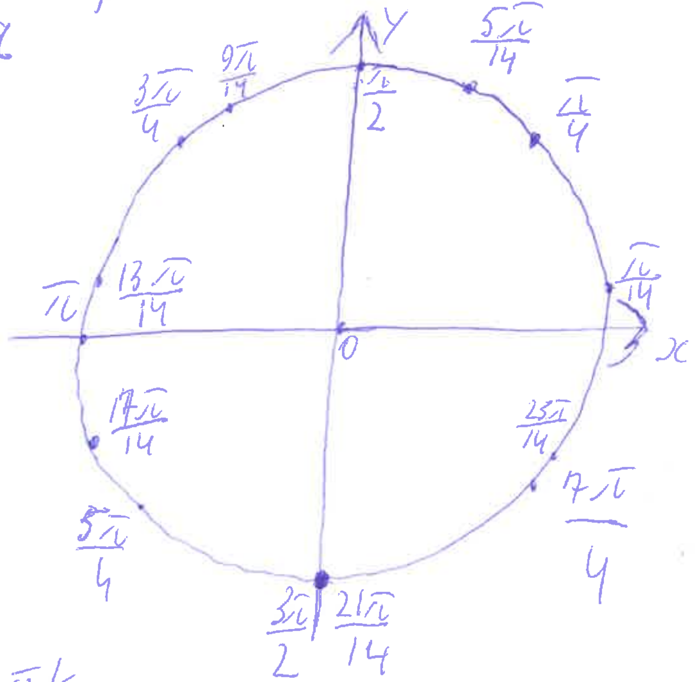
Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

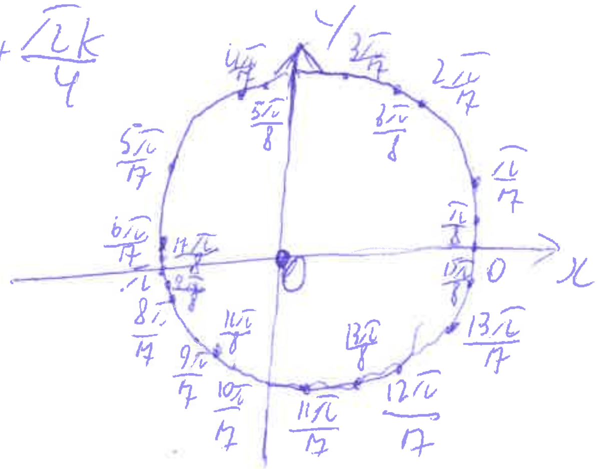
1. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi a}{4} \end{cases}$



$x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}$ и $x = \frac{\pi a}{4}$ пересекаются в т. $\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m \quad m \in Z$

2. $\begin{cases} x = \frac{\pi n}{17} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \end{cases}$



пересечений нет.

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 4 | 9 | 6 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N2

У исходного числа - 30 делителей. => $30=2\cdot3\cdot5$.
~~по форм~~ количество делителей числа по формуле равно $(1+k_1)\cdot(1+k_2)\cdot(1+k_3)\ldots\cdot(1+k_n)$
где k_i - ненулевая степень простых чисел p_i - ~~p_i~~ то есть число в виде $p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$ $p_i>1$
k_i и p_i - натуральные числа. Так как 30 представляемая в виде умноженных трёх чисел то и $i\leq3$ => что будет ~~меньше или~~ скобок будет 3 или меньше. Также известно что при умножение числа N на 5. число делитель не умножетая на два => число N - кратно 5.
Пусть P_{N_1} - число делителей числа N, а P_{N_2} - число делителей числа 5N ~~тогда~~ и k_3 - ~~количество коэффициент~~ k_3 степень числа 5. Получим систему:

$$\begin{cases} P_{N_1}=(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)=30 \\ P_{N_2}=(1+k_1)\cdot(1+k_2)(1+k_3+1)=40 \end{cases}$$

отним из P_{N_2} P_{N_1} получим $(1+k_1)\cdot(1+k_2)=10$.
Из этого следует, что $\begin{cases} P_{N_1}=10(1+k_3)=30 \\ P_{N_2}=10(2+k_3)=40 \end{cases}$ => $k_3=2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0000849620

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

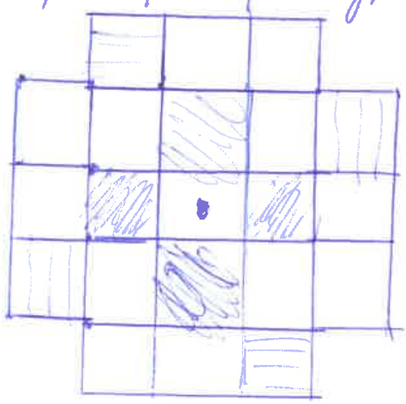
№2 (продолжение)

Не нарушая ~~общ~~ условий систему предположим, что $k_1=1$ и $k_2=4$, и одно из чисел будет иметь вид $p_1^1 \cdot p_2^4 \cdot 5^2$. Пусть $p_1=7$ и $p_2=2$. $N=7^1\cdot 2^4 \cdot 5^2 = \cancel{5600}\ 2800$

Ответ: ~~5600~~ 2800.

N4

Общее количество раскрасок будет равно $\frac{21!}{19!2!}=210$ комбинаций. С любой ~~клеткой~~ клетки (кроме центральной, так как является осью симметрии) фигуры можно подобрать такую, чтобы у них была осевая симметрия относительно центра фигуры пример: данных случаев покраски



будет $\frac{21-1}{2}=10$, а данный покрас могут закрасить или еще одну тогда будет $\frac{10}{2}=5$ видов покра тогда остальных ~~видов~~ комбинат покраски будет $210-10=200$

В остальных 200 случаях симметрии ~~и~~ не будет и поворотом фигуры можно будет ~~покрыть~~ ~~закрасить~~ ~~из двух 2 начальных клетки мы с 8 поворотами.~~

Лист 4 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

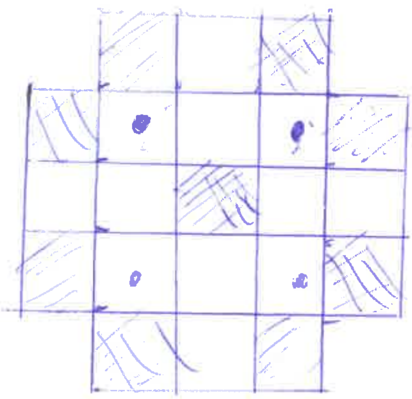
Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 (продолжение).

получить еще 3 комбинации
Вот пример:

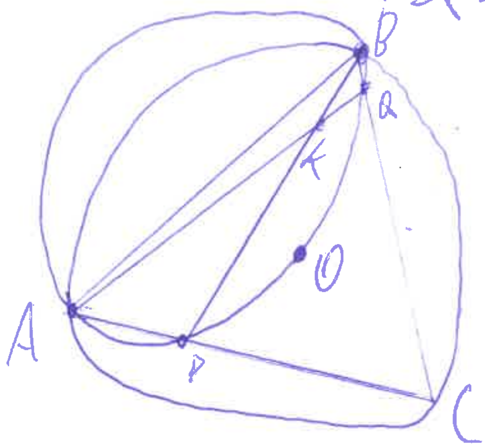


то есть запросок будет
$\frac{200}{4}=50$

Тогда общее количество запросок будет равно $50+5=55$.

Ответ: 55.

№3



Дано: $\triangle ABC$ - ост
$\angle ACB = 2\angle AKP$

Решение

Не смог решить.

Ответ: ∅

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 4 | 9 | 6 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 5

Пусть $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{49} = 0$ $a_{50} = 50$

тогда $A = 2500$

Пусть $a_{50} = 49$ тогда $a_1 = a_2 = \ldots = a_{49} = 1$.

$A = 49^2 + 49 = 49 \cdot 50 < 2500$

Пусть $a_{50} = 48$. тогда $a_{49} = 2$. и $a_{\ldots}$

$a_{23} = a_{24} = \ldots = a_{48} = 2$. а остальные равны 0.

$48^2 + 26 \cdot 2^2 < 2500$

$a_{50} = 47$

Д-ва нет.

$47 + 3^2 \cdot 16 + 2^2 < 2500$

⋮

при уменьш a_{50} - сумма становится меньше так что 2500 нужно представить в другом виде например

$a_{50} = 25$ $a_{49} = 25$ $a_{48} = 25$ $a_{47} = 25$ получ

$25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 = 2^2 \cdot 25^2 = 50^2 = 2500$

Лист 6 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 (продолжение)

продолжим отбор.

пусть $a_{50}=26$

$a_{49}=24$

$a_{48}=24$

$a_{47}=24$

$a_{46}=\cancel{4}2$

$a_1 \ldots a_{45}=0$

$26^2+3\cdot 24^2+2^2<2500$

$a_{50}=27$

$a_{49}=23$

$a_{48}=23$

$a_{47}=\cancel{4}23$

$a_{46}=4$.

$27^2+3\cdot 23^2+4^2<2500$

Смотреть последовательности в которых $a_{50}<25$ нет смысла так, как сумма $a_{49}+a_{50}$ — будут становится меньше.

~~$a_1+\ldots a_2$~~ $a_1+a_2\ldots+a_{48}$ будет состоять из ~~ст~~ тех же наборов, что при $a_{50}>25$ и. => Максимальное значение $A=2500$ и этому удовлетворяет две последовательность:

1 — $a_1=a_2=a_3\ldots=a_{49}=0$ $a_{50}=50$ => $A=2500$

2 — $a_1=a_2=a_3\ldots=a_{46}=0$ $a_{47}=a_{48}=a_{49}=a_{50}=25$

Ответ: $A=2500$ при 1) $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{49}=0$ $a_{50}=50$

2) $a_1=a_2=a_3\ldots=a_{46}=0$ ~~4~~; $a_{47}=a_{48}=a_{49}=a_{50}=25$

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

город Ангарск

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	1	9	1	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Чечурин

Имя Лев

Отчество Олегович

Дата рождения 17.7.2002 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 13 **листах** **Дата выполнения работы**______________

Номер телефона 8-904-152-66-18 **Подпись** Чечурин

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 18 | 0 | 78

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	1	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

Замена $\sin 4x = a$, $|a| \leq 1$

$\sin 9x = b$, $|b| \leq 1$

Тогда $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b^2-2b+1+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 2b^2-2b=0 \quad |:2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b(b-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right.$

$|a| \leq 1$
$|b| \leq 1$ выполняется.

Значит

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 4x=0 \\ \sin 9x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 4x=1 \\ \sin 9x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x=\pi k_1, \ k \in \mathbb{Z} \\ 9x=\frac{\pi}{2}+2\pi k_2, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k_3, \ k_3 \in \mathbb{Z} \\ 9x=\pi k_4, \ k_4 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА000091912О

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi k_1}{4}, k_1 \in \mathbb{Z} & (1) \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_3}{2}, k_3 \in \mathbb{Z} & (3) \\ x = \frac{\pi k_4}{9}, k_4 \in \mathbb{Z} & (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

Обьедиеним серию (1) и (2)

У серии (1) период $\frac{\pi}{4}$, у серии (2) $\frac{2}{9}\pi$, соответственно их общий период, это 2π т.к. $2\pi = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 8$ и $2\pi = \left(\frac{2}{9}\pi\right) \cdot 9$, т.е. ~~[illegible]~~ период 2π содержит 8 периодов (1) серии и 9 периодов (2) серии.

Значит можно рассмотреть кусочек числовой прямой, длины 2π, например, от 0 до 2π и утвердить, что все остальные решения являются теми же самыми, только удалёнными от этих на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим отрезок от 0 до 2π, не включающий в себя ноль.

Из (1) серии подходят значения $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$

Из (2): $\left\{\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{\pi}{2}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{7\pi}{6}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 1 | 9 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Из ~~эти~~ этих двух множеств общим значением является только $\frac{\pi}{2}$, значит, при объединении этих двух серий, выявляется новая серия

$\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

Таким же образом объединим серии (3) и (4): правда период уже можно взять π, т.к.

$\pi=\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2$ и $\pi=\left(\frac{\pi}{9}\right)\cdot 9$ и рассмотреть кусок числовой прямой, где $x\in(0;\pi]$

$(3): \left\{\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \cancel{\frac{9\pi}{8}}; \cancel{\frac{13\pi}{8}}; \cancel{\frac{17\pi}{8}}\right\}$

$(4): \left\{\frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}; \pi\right\}$

Заметим, что (3) и (4) серии общих решений не имеют, значит их пересечением является пустое множество, а все наши серии для x теперь принимают такой вид $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 9 1 9 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

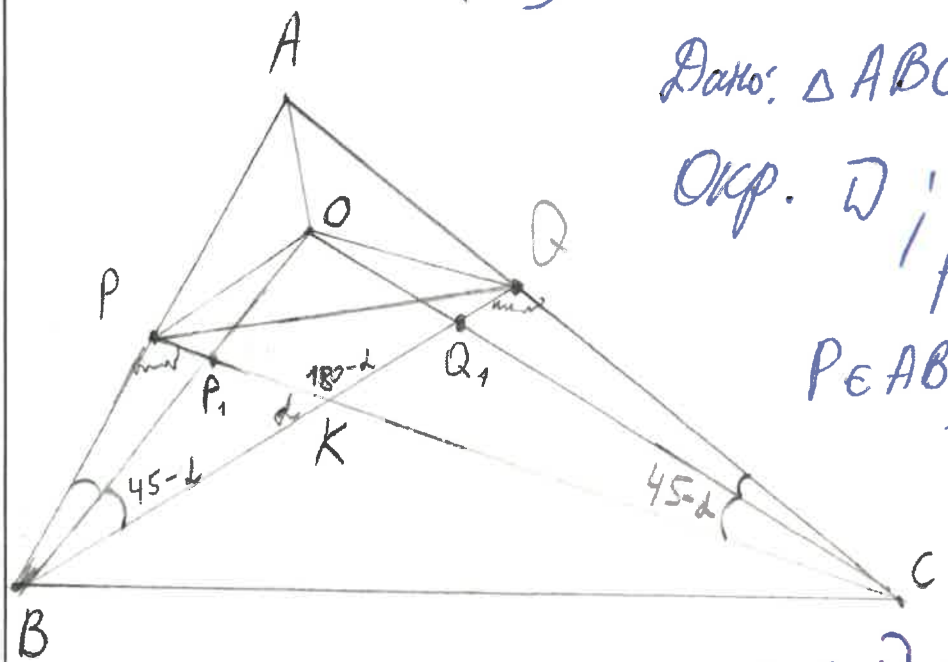
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Да, существует, например, $N=2^7\cdot 3^2$, которое содержит $(7+1)(2+1)=8\cdot 3=24$ делителя. А $3N=2^7\cdot 3^3$ содержит $(7+1)(3+1)=$ $=8\cdot 4=32$ делителя.

Ответ: существует.

№3



Дано: $\triangle ABC$;

Окр. ω; $B\in\omega$; $C\in\omega$;

$P\in\omega$; $Q\in\omega$;

$P\in AB$; $Q\in AC$;

~~∠BAO=3∠BKP~~

$BQ\cap CP=K$

$\angle BAC=3\angle BKP$.

окр. $\omega_1(O;R)$ описана около $\triangle APQ$; $O\in\omega$;

Найти: $\angle BAC$ — ?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	1	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Решение:

1) Пусть $\angle BKP = \alpha$, тогда $\angle BAC = 3\angle BKP = 3\alpha$ (по усл.)

Значит смежный с ним $\angle PKQ = 180^\circ - \alpha$.

2) Т.к. точки B, P, Q и $C \in \omega$, то $\angle BPC = \angle BQC$, как опирающиеся на общую дугу BC. Значит смежные с ними углы APC и BQA, соответственно, тоже равны.

3) Рассм. четырёхуг. $KPAQ$:

$$\left.\begin{aligned} &\angle PKQ = 180^\circ - \alpha \\ &\angle CPA = \angle BQA = 180^\circ - \angle CPB \\ &\angle BAC = 3\alpha \\ &\angle PKQ + \angle CPA + \angle BAC + \angle BQA = 360^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \alpha + 2(180^\circ - \angle CPB) + 3\alpha = 360^\circ$$

$$540^\circ + 2\alpha - 2\angle CPB = 360^\circ$$

$$\angle CPB - \alpha = 90^\circ$$

$$\angle CPB = 90^\circ + \alpha$$

4) В ΔBKP сумма углов равна 180°, значит

$$\left.\begin{aligned} &\angle PBK = 180^\circ - \angle CPB - \angle BKP \\ &\angle BKP = \alpha \\ &\angle CPB = 90 + \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle PBK = 90 - 2\alpha$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) В $\triangle CKQ$ сумма углов равна $180°$, значит

$$\left.\begin{aligned}&\angle KCQ = 180° - \angle CQK - \angle CKQ\\ &\angle CPB = \angle CQK = 90° + \alpha\\ &\angle QKC = \angle PKB = \alpha,\ \text{как вертикальные}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle KCQ = 90 - 2\alpha$$

6) Т.к. O – центр опис. около $\triangle APQ$ окр-ти, то $OP = OQ$, значит OP и OQ – равные хорды окр-ти, а т.к. равные хорды всегда сжимают (опираются на) равные дуги окр-ти, то $\smile OP = \smile OQ$ в окр. ω. Значит и все углы, опир-ся на эти дуги равны м/у собой, т.е.

$$\left.\begin{aligned}&\angle BPO = \angle OBQ = \angle PCO = \angle OCQ\\ &\angle BPO + \angle OBQ = \angle PBQ = 90° - 2\alpha\\ &\angle PCO + \angle OCQ = \angle PCQ = 90° - 2\alpha\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BPO = \angle OBQ = \frac{1}{2}\angle PBQ = 45° - \alpha$$

$$\angle PCO = \angle OCQ = \frac{1}{2}\angle PCQ = 45° - \alpha$$

7) Пусть $PC \cap BO = P_1$

$BQ \cap CO = Q_1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 9 1 9 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда можно рассмотреть 2 треугольника:
~~$\triangle P_1BQ$~~
$\triangle P_1BK$ и $\triangle Q_1CK$, внешними углами которых, соответственно, являются $\angle CP_1O$ и $\angle BQ_1O$

Значит $\angle CP_1O = \angle P_1BK + \angle BKP$
$\angle BQ_1O = \angle QKC + \angle Q_1CK$

$\angle OBQ$, это и есть $\angle P_1BK$, значит $\angle P_1BK = 45°-\alpha$
$\angle PCO$, это и есть $\angle Q_1CK$, значит $\angle Q_1CK = 45°-\alpha$
$\angle BKP = \angle CKQ = \alpha$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CP_1O = \angle BQ_1O = 45°$

8) Рассм. четырёхугольник OQ_1KP_1, сумма углов которого равна 360°, значит $\angle P_1OQ_1$ ($\angle BOC$) =

$= 360° - \angle KP_1O - \angle P_1KQ_1 - \angle KQ_1O$
$\angle KP_1O = \angle KQ_1O = 45°$
$\angle P_1KQ_1 = \angle PKQ = 180° - \alpha$

$\Rightarrow \angle BOC = 90 + \alpha$

9) Т.к. $PCQO$ – вписанный в ω 4-хуг., то $\angle OQP = \angle OCP$ (опираются на дугу OP), а $\angle OCP = 45-\alpha$, значит $\angle OQP = 45-\alpha$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 1 | 9 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

10) Т.к. PBQO – вписанный в ⊙ 4-хуг., то $\angle OBQ = \angle OPQ$,
а т.к. $OBQ = 45 - \alpha$, то $\angle OPQ = 45 - \alpha$

11) Т.к. O – центр. опис. около $\triangle APQ$ окр-ти, то
$OA = OQ = OP$, значит $\triangle AOQ$ – равноб. и $\triangle AOP$ – равноб. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OQA = \angle OAQ$ и $\angle OPA = \angle OAP$
Т.к. $\angle OAP + \angle OAQ = \angle PAQ = 3\alpha$, то
$\angle OPA + \angle OQA = 3\alpha$ тоже.

12) Значит суммой углов $\triangle APQ$ является
$\angle PAQ + \angle APO + \angle OPQ + \angle OQP + \angle OQA = 180°$
$\angle PAQ = 3\alpha$
$\angle APO + \angle OQA = 3\alpha$
$\angle OPQ = 45° - \alpha$
$\angle OQP = 45° - \alpha$
$\Rightarrow$

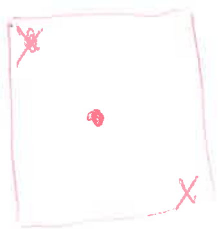
$\Rightarrow 90° + 4\alpha = 180° \Rightarrow 4\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 22{,}5° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAC = 3\alpha = 67{,}5°$

Ответ: 67,5°

№4

Существует 2 вида раскрасок:
1-й вид: когда при перевороте квадрата на 180° получается эта же самая раскраска
2-й вид: все остальные.
Всего у нас раскрасок $\frac{25\cdot 24}{2}$ вида,
но некоторые из них повторяются при повороте.
25·24, т.к. первую клетку можно выбрать 25 способами, а вторую 24 способами, т.к. одна клетка уже занята.
Заметим, что нет таких раскрасок, которые при повороте на 90° остаются такими же, т.к. если посмотреть на рисунок:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25



Центр.-симм. дают 2 варианта, не центр. симм. — — 4 варианта

Ваши рассуждения верны.

то можно понять, что 1-й квадратик переходит в 5-й, 2-й в 10-й и т.д. И только 3-й

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

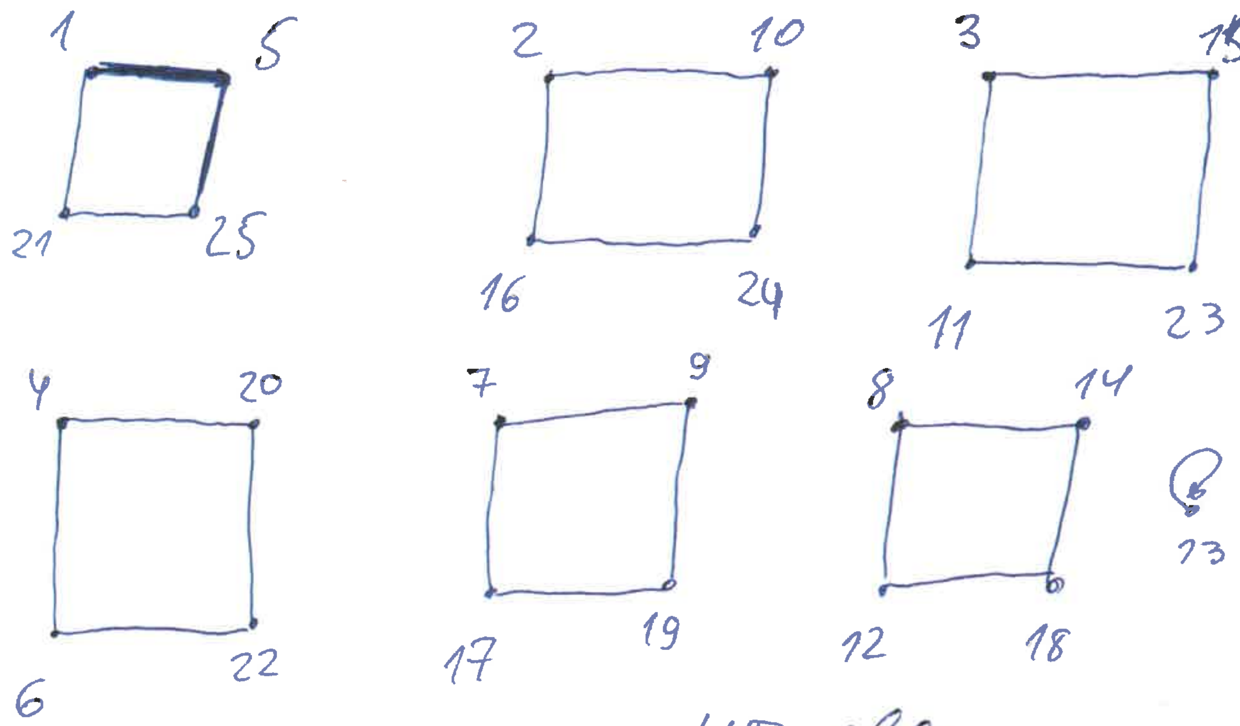
Вариант № 3

M	A	0	0	0	0	9	1	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

переходит в себя.
Если перенести все эти данные переходов на граф, то



образовалось 7 компонент связности, 6 из которых являются циклами из 4 вершин, степень каждой из которых равна двум, и 7я компонента из 1-й вершины, переходящей в саму себя.
Т.к. мы выбираем 2 из этих вершин, то они не будут принадлежать одной компоненте и быть всеми её вершинами или несколькими такими компонентами, т.к.

выбирая из чисел $\{1,4,4,4,4,4,4\}$ мы никогда не сможем выбрать одно или несколько чисел, суммой которых является 2, ~~значит~~ т.к. ~~остаток~~ эта сумма даёт при делении на 4 остаток 0 или 1 и не может быть 2-кой.

А только при условии полной заполненности компоненты закрашенными ~~точками~~ квадратиками все ~~точки~~ квадратики при повороте на 90° этой компоненты перейдут в ~~себя~~ самих себя, т.к. поворот на 90° означает переход по ребру нашего графа (каждое соседнее с ~~закрашенной~~ точкой, обозначающей закр. квадратик, число ~~тоже~~ должно тоже ~~обозначать~~ быть номером закр. квадратика, соотв. ~~все~~ если в ~~эту~~ компоненте есть число, обозначающее закр. квадратик, то в ней все числа обозначают закр. квадратик.

Значит при любом повороте на 90° квадрата раскраска меняется.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000091912 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Чего не скажешь про поворот на 180°.
Если перенести такой поворот на наш граф, то это будет обозначать переход по 2-м ребрам. А у нас 2 числа, т.е. выбрав одну компоненту и выбрав в ней 2 противоположных (удалённых друг от друга на 2 ребра) числа мы добьёмся такой ситуации, что при повороте на 180° ~~на~~ раскраски квадрата не изменится.
То есть в таком случае, кол-во раскрасок, которые мы можем получить при вращении равно двум (на 90° и на 0°) и те, которые (на 270° и на 180°) с ними совпадают.
Значит кол-во вариантов выбрать одну компоненту (из 6) и выбрать в ней 2 возм. ~~вар~~ места для чисел (первого и второго) необходимо делить на 2, и все

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	1	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

остальные делить на 4.

Вариантов выбрать ~~одну~~ компоненту из ~~4~~ шесть. Вариантов выбрать одно число - 4, второе будет противоположным, которое только одно. Значит таких вариантов 24.

А итоговое число ~~вариантов~~ раскрасок: ~~$\frac{24\cdot 25}{2}+$~~

$$\frac{24\cdot25-24}{4}+\frac{24}{2}=\frac{24\cdot24}{4}+\frac{24}{2}=$$

$$=12^2+12=12\cdot13=156$$ ~~вариантов~~ раскрасок.

Ответ: 156.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	9	6	4	4	2	0

город Калининград

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Тарасенко

Имя Карина

Отчество Валерьевна

Дата рождения 30.04.2002 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89114835128 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

15|20|16|20|0 71

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M A 0 0 0 0 9 6 4 4 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1

$$\begin{cases}\sin 7x + \sin 4x = 1\\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1\end{cases}$$

$(\sin 7x + \sin 4x)^2 - \sin 7x \cdot \sin 4x = 1$

$\sin 7x \cdot \sin 4x = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 7x = 0\\ \sin 4x = 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi n}{7},\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

С-но возможно два варианта решения: ?

В обоих случаях д.б. $= 1$.

$\sin 4x < 1$? или $\sin 7x = 0$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

При пересечении с $\frac{\pi k}{7}$ – решений нет (нет пересечений) $\Rightarrow \varnothing$

Не показано, что нет.

При пересечении с $\frac{\pi n}{4}$ – решения есть

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Не показано, как найдено.

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Задание 2.

Пусть число N равно $5^2 \cdot 7 \cdot 11^4$. Тогда делители степени 5 будут: 5; 25; 1, то есть 3 делителя. Делителей степени 7 – 2 штуки (1; 7), а делителей степени 11 – 5 (1; 11; 121; 1331; 14641). С-но для числа $5^2 \cdot 7 \cdot 11^4$ делителей будет:

$3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$

Пусть число $5N$ будет $5^3 \cdot 7 \cdot 11^4$. У этого числа делителей будет: $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ (у степени 5 – 4 делителя, у степени 7 – 2 делителя, а у степени 11 – 5 делителей)

С-но число равное $5N = 5^3 \cdot 7 \cdot 11^4 = 12810875$

$\Rightarrow$ Число N равно 2562175 $(5^2 \cdot 7 \cdot 11^4)$

Ответ: ~~12810875~~ 2562175

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

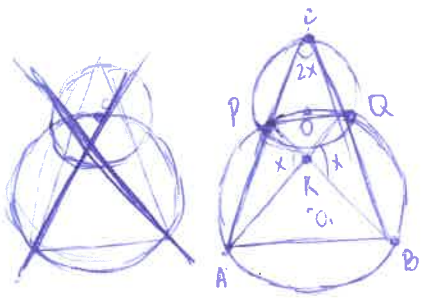
Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	9	6	4	4	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3.



Дано: окружность $(O; r)$, треугол. ABC

$PB \cup AQ$ в $(\cdot) K$

$\angle ACB = 2\angle AKP$

Найти: $\angle ACB$

Решение:

Пусть $\angle AKP = x$, тогда по условию: $\angle ACB = 2x$

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\frown AC - \frown QP)$, (обозначим дугу знаком «$\frown$»), AB

ACB! ?

а значит $2x = \frac{1}{2}(\frown AC - \frown QP)$, $x = \frac{1}{2}(\frown QC + \frown PA)$

$\angle QOP = \frac{1}{2}\frown QP = \frac{1}{2}(\frown PA + \frown AC + \frown QC)$

Сложим $2x$ и x: $3x = \frac{1}{2}(\frown PA + \frown QC + \frown AC - \frown QP) =$

$= \angle QOP - \frac{1}{2}\frown QP = \angle QOP - (180° - \angle QOP) = 2\angle QOP - 180°$

Кажется, буквы B и C перепутаны.

т.к. $\angle QOP$ – центральный угол в треугол. QBP,

то $\angle QOP = 4x$

С-но: $3x = 8x - 180°$

$5x = 180°$

$x = 35°$ $(\angle AKP)$

$180 \,|\, 15$
$15 \quad 36$
30

1) $35° \cdot 2 = 75°$ $(\angle ABC)$

Ответ: $\angle ABC = 75°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	9	6	4	4	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4

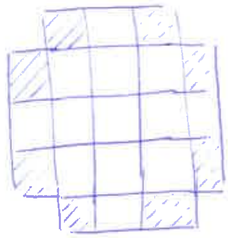


рис. 1

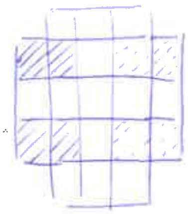


рис. 2

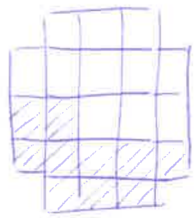


рис. 3

Так как всего фигура состоит из 21 клетки, а закрашиваем мы только 2, то общее количество решений будет равно C_{21}^2. При этом при закрашивании клеток, как на рис. 1, нам нужно общее число способов разделить на 4, а часть на 2 (рис. 2).

Чтобы получить из выбранного количества вторых достаточно выбрать одну клетку из закрашенных 10 (рис. 3). Данная клетка определит оставшиеся, чтобы рисунок был симметричным. Значит в данном случае общее число способов равно C_{10}^1

С-но существует: $\frac{C_{21}^2 - C_{10}^1}{4} + \frac{C_{10}^1}{2}$ числа раскрасок.

Ответ: $\frac{C_{21}^2 - C_{10}^1}{4} + \frac{C_{10}^1}{2} = ?$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

город Калининград

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	7	0	1	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Кулешова

Имя Дарья

Отчество Ивановна

Дата рождения 23.08.2002 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89118601900 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

20 20 20 20 16 96

Вариант № 3

М А 0 0 0 0 9 7 0 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (N - нат. число; N - имеет 24 дел; $3N$ имеет 32 дел, существует ли?

Количество делителей вычисляется по формуле $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1)$, где $p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$ исходное число. Тогда пусть мы имеем число: $2^7\cdot 3^2$, тогда оно имеет $(7+1)(2+1)=24$ делителя, а $2^7\cdot 3^3$ имеет $(7+1)(3+1)=32$ делителя $\Rightarrow$ $N=2^7\cdot 3^2$ подходит. $\Rightarrow$ существует такое N, кот. имеет 24 делит, а $3N$ имеет 32 делителя Ответ: существует

№5 $a_i\ (1\le i\le 30)$; $\begin{cases} 0\le a_1\le a_2\le\dots\le a_{29}\le a_{30} \\ a_1+a_2+\dots+a_{28}\le 30 \\ a_{29}+a_{30}\le 30 \end{cases}$ | Найти: Σ_{max} - ? все посл - ?

Пусть $a_{30}=k$, где очевидно $15\le k\le 30$, тогда

Σ кв max при $a_{29}=30-k$, тогда по методу Шнурыва для максимализации суммы квадратов необходимо загрузить max число элементов в равенстве $a_1+a_2+\dots+a_{28}=30$. Т.к $a_{28}\le 30-k$, то для этого потребуется $\left[\frac{30}{30-k}\right]$ членов, каждый из которых равен $30-k$, тогда итоговая Σ квадратов $\le$ $k^2+(30-k)^2+\left[\frac{30}{30-k}\right]\cdot(30-k)^2\le k^2+(30-k^2)+30(30-k)=$ $=2k^2-90k+1800$, где $k\in[15;30]$.

Это надо было доказать

При $k=30$?

Заметим, что $2k^2-90k+1800$ парабола с ветвями напр. вверх, max значение на отрезке будет в точке наиболее удаленной от вершины параболы, вершина $k_0=22,5$ (15 и 30 равноуд.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 9 7 0 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

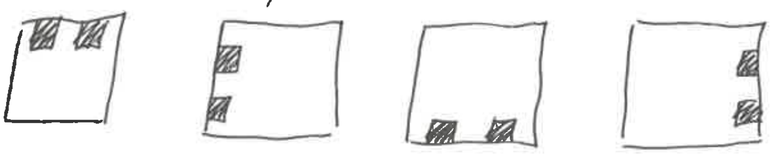
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

=> в них обоих значение максимально и равно 900. Эти варианта задают случаи: $(0;0;\ldots,15;15;15,15)$ и $(0,\ldots,0,30)$.

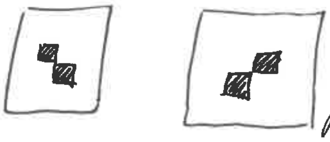
Ответ: 300, $(0,\ldots,0;15;15;15;15)$, $(0,\ldots,0;30)$

Дано: квадрат 5×5; две клетки синие. Найти: кол-во исходов

№4 Если нам нужно выбрать 2 клетки прямоугольника для покраски, то для этого существует C_{25}^2 способов. С учетом поворотов почти каждый вариант подсчитан 4 раза как на картинке



, но есть способы, которые при поворотах переходят сами в себя



Они считаются всего два раза. Чтобы подсчитать их кол-во нам нужно покрасить только одну вершину квадрата, а вторая будет определена автоматически (т.к. такие квадраты симметричны) тогда способов C_{12}^1 (12, т.к нельзя выбирать центральную клетку).

Всего $\dfrac{C_{25}^2+2\cdot C_{12}^1}{4}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 24+12}{4}=75+3=78$

Ответ: 78

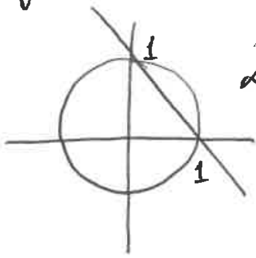
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 9 7 0 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ 1) Пусть $\sin 9x = \alpha$, $\sin 4x = \beta$.

2) тогда в плоскости $\alpha\beta$ имеем: $\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=1 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases}$



$\alpha^2+\beta^2=1$; общие точки $\alpha=0$, $\beta=1$

$\alpha=1$, $\beta=0$,

$\alpha+\beta=1$ больше точек быть не может, т.к окружность и прямая имеют не более двух общих точек.

3) При $\alpha=0$ $9x=\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi k}{9}$, тогда $\sin\frac{4\pi k}{9}=1$

$\Rightarrow \frac{4\pi k}{9} = \frac{\pi}{2}+2\pi l$, $4k=\frac{9}{2}+18\pi l$ Это невозможно т.к слева целое число, а справа дробное.

4) При $\beta=0$ $4x=\pi k$; $x=\frac{\pi k}{4}$, тогда $\sin\frac{9\pi k}{4}=1$

$\frac{9\pi k}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, что возможно только при

$k=2+8m$, тогда итоговое решение: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$,

$m\in Z$ $[k, l, n, m \in Z]$!

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi m$,

$m\in Z$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

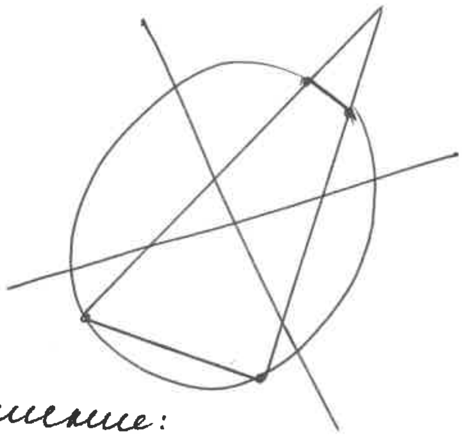
Вариант № 3

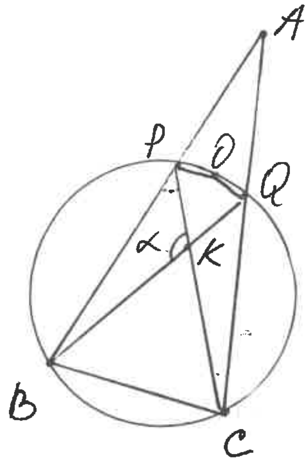
М	А	0	0	0	0	9	7	0	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3





Дано:
$\angle BAC = 3\angle BKP$

$\angle BAC = ?$

$\triangle ABC$; B и C ∈ окр$(O;R)$, $\triangle APQ$

$BQ \cap CP = K$

Решение:

1) $\angle BAC = 3\angle BKP$

Пусть $\angle BKP = \alpha$, тогда $\angle BAC = 3\alpha$, $\angle BOQ = 6\alpha$, по св-ву вписанного угла; 2) $\angle PCQ = 180° - 6\alpha$, по св-ву вписанного четырехугольника CPOQ, тогда $\angle CPB = \angle PCA + \angle PAC = 3\alpha + 180 - 6\alpha = 180 - 3\alpha$, при этом $\angle PBQ = \angle PCQ = 180 - 6\alpha \Rightarrow$ по сумме углов $\triangle BKP$: $180 = 180 - 6\alpha + \alpha + 180 - 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180}{8} = 22{,}5 \Rightarrow \angle BAC = 3 \cdot 22{,}5° = \underline{67{,}5°}$

Ответ: $67{,}5° = \angle BAC$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	9	6	9	9	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия ТРОФИМОВ

Имя ДМИТРИЙ

Отчество ГЕОРГИЕВИЧ

Дата рождения 16.03.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7916 5704181 **Подпись** ДТ

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

16 | 20 | 10 | 20 | 0

66

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	9	6	9	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Заметим, что $\sin\alpha \le 1$, и если $\left[\begin{array}{l}\sin 4x < 0\\ \sin 7x < 0\end{array}\right.$, то первое уравнение невозможно

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 1 \geq \sin 4x \geq 0 \\ 1 \geq \sin 7x \geq 0 \end{cases}$$

а) Пусть ни один из них не равен 1 (тогда, чтобы первое ~~уравнение~~ уравнение $(\sin 4x + \sin 7x = 1)$ было верно, $\left(\begin{cases}\sin 4x > 0\\ \sin 7x > 0\end{cases}\right)$)

$$\Downarrow$$

$$1 > \sin 4x > 0$$

$$1 > \sin 7x > 0$$

но тогда $\begin{cases} 0 < \sin^2 4x < \sin 4x < 1 \\ 0 < \sin^2 7x < \sin 7x < 1 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2 7x + \sin^2 4x < \sin 4x + \sin 7x = 1$$

$$\Downarrow$$

неверно

б) Тогда, либо $\sin 4x = 1$, либо $\sin 7x = 1$, но тогда по первому уравнению либо $\sin 7x = 0$, либо $\sin 4x = 0$ соответственно.

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases}\sin 4x = 1\\ \sin 7x = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 7x = \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi k}{7} \end{cases} \\ ② \begin{cases}\sin 7x = 1\\ \sin 4x = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 4x = \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi k}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	9	6	9	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi k}{7} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ и k одинаковый поскольку x одинаковый

разные буквы!

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi k}{7}$$

$$\frac{\pi + 4\pi k}{8} = \frac{\pi k}{7}$$

$$\frac{\pi(1+4k)}{8} = \frac{\pi k}{7}$$

$$7(1+4k) = 8k$$

$$7 + 28k = 8k$$

$$20k = -7$$

$k = -\frac{7}{20}$ – не целое $\Rightarrow$ не подходит, поскольку

$\sin 7x = \sin\left(-\frac{7 \cdot 20}{20}\right) \neq 0$, а по условию (1) оно должно равняться

2) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi k}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ разные буквы!

$$\frac{\pi(4k+1)}{14} = \frac{\pi k}{4}$$

$$16k + 4 = 14k$$

$$2k = -4$$

$k = -2$ – подходит

При $k = -2$: $x = -\frac{\pi}{2}$

$\sin\left(-\frac{2\pi}{2}\right) = 1$; $\sin(-2\pi) = 0$

$\Downarrow$

Подходит.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 9 6 9 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N2

~~Ответ~~ $N=2^9 5^2$

Докажем, что подходит.

Посмотрим, сколько делителей у числа $2^9 \cdot 5^2$

1	5 · 2	5 · 2	$5^2 \cdot 2$
$\Sigma=1$	5^2 · 2^2	$5 \cdot 2^2$	$5^2 \cdot 2^2$
	$\Sigma=2$ ⋮	⋮	⋮
	2^9	$5 \cdot 2^9$	$5^2 \cdot 2^9$
	$+\Sigma=9$	$+\Sigma=9$	$+\Sigma=9$

$\Longrightarrow 9+9+9+2+1=30$

Также это можно узнать по формуле

$N=p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$; к-во делит $=(\alpha_1+1)\cdot \ldots \cdot(\alpha_n+1)$

$\Downarrow$

к-во дел. $N=(9+1)(2+1)=10\cdot 3=30$

Теперь рассмотрим $5N$: $5N=2^9\, 5^3$

Это число имеет все старые делители и:

5^3	$2 \cdot 5^3$
	$2^2 \cdot 5^3$
	⋮
	$2^9 \cdot 5^3$
$\Sigma=1$	$+\Sigma=9$

$1+9=10$ новых делителей или 40 всего.

И по формуле: $(1+9)(3+1)=10\cdot 4=40$

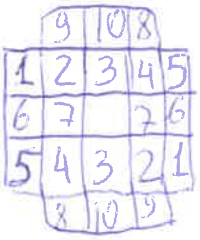
$\Downarrow$

$N=2^9\cdot 5^2$ подходит. Ч.Т.Д.

№4.

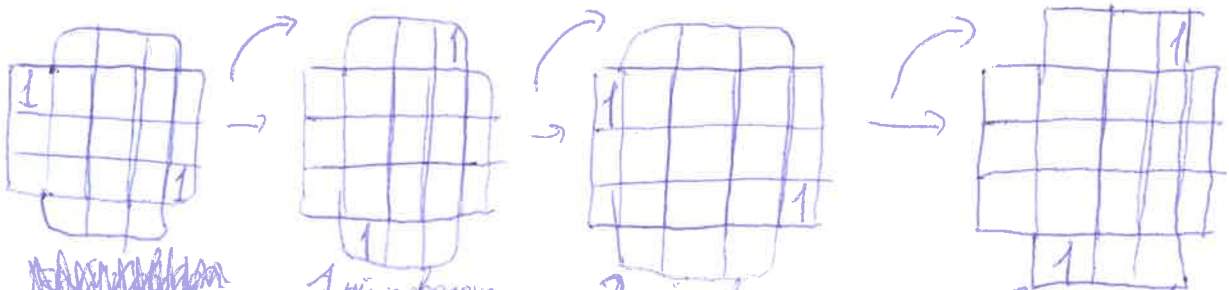
Разобьем все раскраски на симметричные и нет.

Рассмотрим, какие раскраски симметричные и сколько их



их 10. (1-1, 2-2, 3-3, …, 10-10 → раскраски)

Рассмотрим, что будет при повороте такой раскраски. Возьмем 1-1 (с остальными аналогично):



изначально — 1-ый поворот — 2-ой поворот — 3-ий поворот.

Заметим, что на ~~на~~ 1 и 3 повороте раскраска 1-1 совпадает с 8-8 => их можно получить поворотом. Аналогично с остальными

⇓

Из 10 симметричных раскрасок можно выбрать только 5 чтобы нельзя было получить поворотом одного другой.

Посчитаем общее к-во раскрасок

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00009699 20

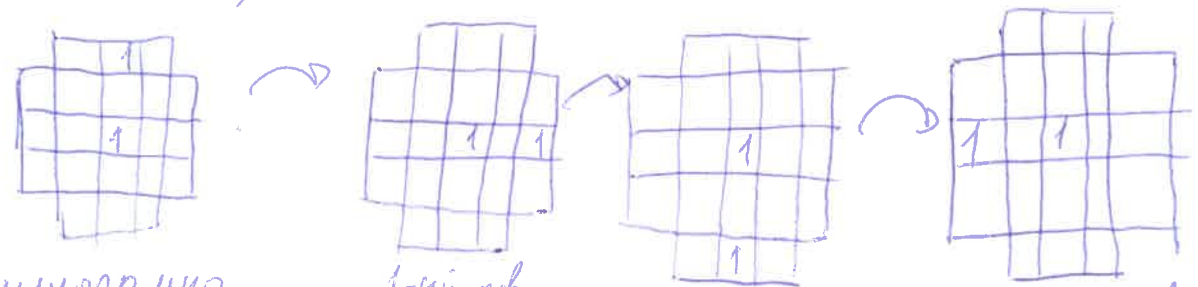
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{21\cdot 20}{2} = 210$ раскрасок. Вычтем к-во симметричных

$210-10=200$ раскрасок. Все они несимметричные

Заметим, что:



изначально 1-ый пов. 2-ой пов 3-ий поворот

все 4 раскраски будут различны, но каждую можно получить поворотом. Аналогично будет для всех ~~...~~ несимметричных

$\Downarrow$

К-во раскрасок, таких, чтобы нельзя было получить поворотом у несимметричных: $\frac{200}{4}=50$

$\Downarrow$

Всего: $50+5=55$

Ответ: 55

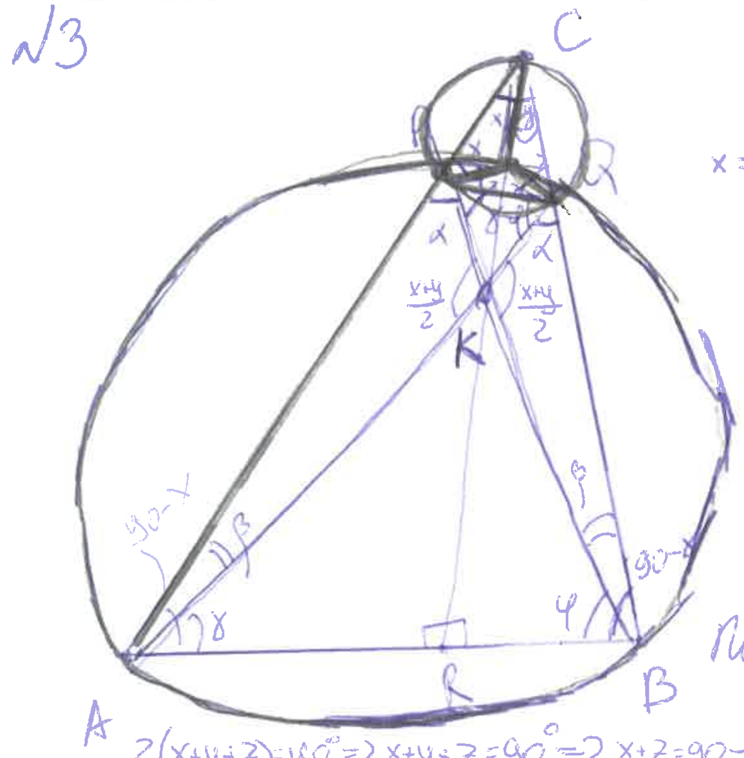
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 0 9 6 9 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



O – центр опис. окр

$PO=CO=QO$

$x=\angle PCO=\angle CPO$; $\angle OCQ=\angle OQC = y$;

$\angle OPQ=\angle OQP = z$

$\angle APB=\angle BQA=\alpha$

$\angle PAQ=\angle PBQ=\beta$

$\angle QPB=\angle QAB=\gamma$

$\angle ABP=\angle AQP=\varphi$ } вписан.

По условию: $\angle ACB=2\angle AKP \Rightarrow \angle AKP=\frac{x+y}{2}$

$2(x+y+z)=180^\circ \Rightarrow x+y+z=90^\circ \Rightarrow x+z=90-y$

$x+z+\gamma+\alpha=180^\circ$

$\frac{x+y}{2}=180-\alpha-\beta$ В каком 4-угольнике?

сумма прот углов во впис $=180^\circ \Rightarrow \alpha+\gamma+\beta+\varphi=180^\circ$

$180^\circ-\alpha-\beta=\gamma+\varphi=\frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y=2\gamma+2\varphi$

В APQB углы $\beta+\gamma$ и $\alpha+\varphi$ – противоположные Верно.

$\Rightarrow 90-y+\gamma+\alpha=180^\circ$

$90-y=180^\circ-\gamma-\alpha=\varphi+\beta=\angle ABC$

$\angle BAC=180-(90-y)-y-x=90-x$

Продлим CO до пересеч с AB в R

$\angle ARC=180-x-(90-x)=90^\circ$

Почему точки C, O, K лежат на одной прямой?

$\angle X=180-90=90$

AROP-впис $\Rightarrow \angle APO=180-90^\circ=90^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА0000969920

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

R BQO - вписанный $\Rightarrow \angle BQO = 180 - 90^\circ = 90$

$\Downarrow$

$y = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\angle ACB = x + y = 180^\circ$

Это странно, но это так

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000096 9920

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

$\sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 = \sin^2 4x + \cos^2 4x$

$\Downarrow$

$\sin^2 7x = \cos^2 4x$

① $\sin 7x = \cos 4x$ 　　 $\sin 7x = -\cos 4x$

① $\sin 7x = \cos 4x$:

$\cos 4x + \sin 4x = 1$

$1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 1$

$2\sin 2x(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \sin 2x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 + \pi k \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \end{array}\right.$$

Подставим

1. $x = 0 + \cancel{\pi k}$ 　 2. $x = 0 + \frac{\pi}{2}$ 　 3. $x = \frac{\pi}{8}$ 　 4. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$

$\sin 7x + \sin 4x = 0 + 0 \neq 1$ 　 $\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \sin\frac{4\pi}{2}$ ||

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КГЭУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	0	5	6	2	0

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 2

Фамилия ГОРЯЧЕВ

Имя ИГОРЬ

Отчество АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 07.02.2002 **Класс** 11

ОУ, местоположение МАОУ „Физико-математический лицей N93", г. Уфа

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89625222659 **Подпись** Игу

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

18 | 20 | 20 | 10 | 0   68

Вариант № 2

М А 0 0 0 0 9 0 5 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1. $\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin 7x = 1 - \sin 4x \\ (1-\sin 4x)^2 + \sin 4x^2 = 1. \end{cases}$

$\begin{cases} \sin 7x = 1 - \sin 4x \\ 1 - 2\sin 4x + \sin^2 4x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin 7x = 1 - \sin 4x \\ 2\sin^2 4x - 2\sin 4x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin 7x = 1 - \sin 4x \\ 2\sin 4x(\sin 4x - 1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin 7x = 1 - \sin 4x \\ \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z \\ 4x = \pi k, k \in z \end{cases} \\ \begin{cases} 7x = \pi a, a \in z \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in z \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, n \in z \\ x = \frac{\pi k}{4}, k \in z \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi a}{7}, a \in z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi t}{4} \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ надо решить в целых числах Диофантовое уравнение 1й степени

1) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} = \frac{\pi k}{4} \Big| : \pi$

$\frac{1}{14} + \frac{n}{7} = \frac{k}{4}$

$2 + 4n = 7k$

$7k - 4n = 2$ $k_0 = 2$ $n_0 = 3$

Те общая серия реш. такова: $k = 2 - 4t$, $n = 3 - 7t$, t

2) $\frac{\pi a}{7} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi t}{4} \Big| \times 56 : \pi$

$8a = 7 + 14t$

$2(7t - 4a) = 7$ не имеет Z реш.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{4}$, где $k = 2 - 4t$, $t \in Z$

N2. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad 40 = 2 \cdot 4 \cdot 5$

Формула кол-ва делителей: $(d_1+1)(d_2+1)\ldots(d_n+n)$ (*)

Заметим, что умножая число N на 5 мы увеличиваем на единицу одну из скобочек ф-ло (*), а именно ту, где d_n - степень вхождения 5

Заметим: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot (3+1) \cdot 5$

$2, 3, 5$; $1+1$, $2+1$, $4+1$. $\Rightarrow$ нам достаточно найти число $N = p_1^1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^4$, где $p_2 = 5$, а p_1 и p_2 какие-то простые числа

Положим:
$p_1 = 3$
$p_3 = 2$

Тогда наше число: $3 \cdot 5^2 \cdot 2^4 = 1200 = N$

$5N = 6000 = 3 \cdot 5^3 \cdot 2^4$.

$S(n)$ - кол-во делителей

+ Проверка: $S(1200) = (1+1)(2+1)(4+1) = 30$, верно.

$S(6000) = (1+1)(3+1)(4+1) = 40$, верно.

Ответ: $N = 1200$

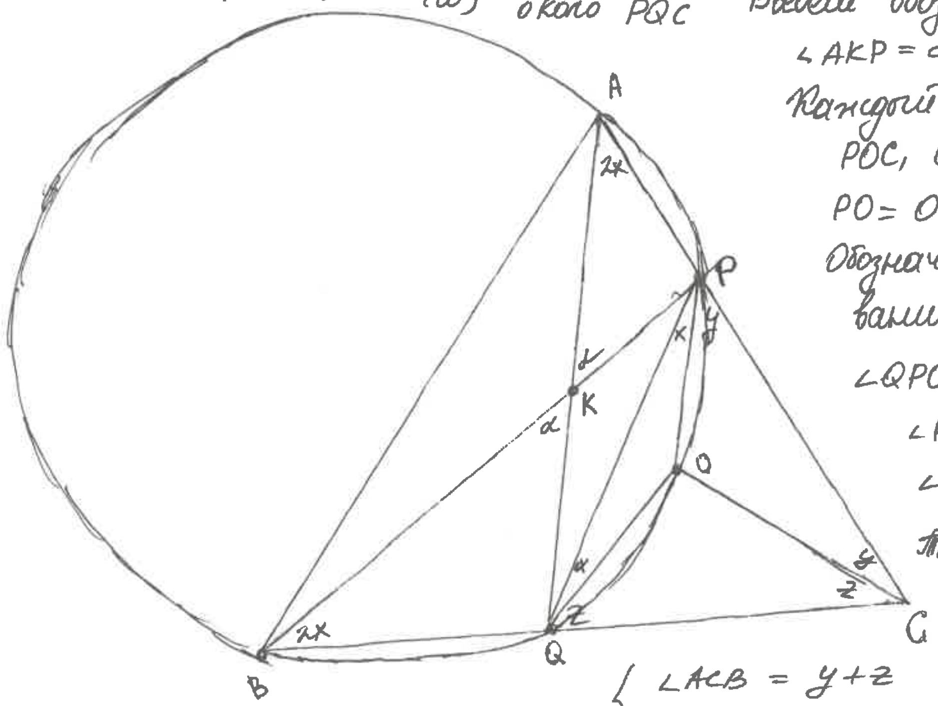
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 | 5 | 6 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3. O – центр окружности (ω), опис. около PQC



Введём обозначения:

$\angle AKP = \alpha$

Каждый из Δ-ков PQO, POC, QOC – равнобедр, т.к. $PO = OQ = OC = R_\omega$

Обозначим углы при основаниях каждого Δ-ка

$\angle QPO = \angle PQO = x$

$\angle POC = \angle PCO = y$

$\angle OQC = \angle OCQ = z$

Тогда: $2x + 2y + 2z = 180^\circ \Rightarrow x + y + z = 90^\circ$ (1)

$\begin{cases} \angle ACB = y + z \\ \angle ACB = 2\alpha \text{ (по усл)} \end{cases} \Rightarrow y + z = 2\alpha$ (2)

~~угол~~ $\angle OQP$ и $\angle OPQ$ – вписанные $\Rightarrow \begin{cases} \breve{PO} = 2x \\ \breve{OQ} = 2x \end{cases}$

$\angle PBQ = \angle QAP = \frac{1}{2}\breve{PQ} = \frac{1}{2}(\breve{PO} + \breve{QO}) = \frac{4x}{2} = 2x$ (т.к. вписанный)

$\angle APK + \alpha + 2x = 180^\circ$ (как сумма углов Δ-ка APK) $\Rightarrow \angle APK = 180^\circ - 2x - \alpha$

$\angle APK + \angle BPQ + \angle QPO + \angle OPC = 180^\circ$ (развернутый угол)

$\Rightarrow \angle BPQ = 180^\circ - \underbrace{(180^\circ - 2x - \alpha)}_{APK} - x - y = x + \alpha - y$

$\angle PKQ = 180^\circ - \alpha$ (как смежный с α)

$\angle KPQ + PKQ + KQP = 180^\circ$ (сумма углов Δ-ка) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KQP = 180^\circ - \underbrace{(x + \alpha - y)}_{KPQ} - \underbrace{(180^\circ - \alpha)}_{PKQ} = y - x.$

Аналогично $\angle BKQ = 180^\circ - 2x - \alpha$ Запишем сумму развернутого угла BQC

$180^\circ = \angle BKQ + \angle KQP + \angle PQO + OQC$

$180^\circ = 180^\circ - 2x - \alpha + y - x + x + z \Rightarrow y + z = 2x + \alpha$ (3)

(3) = (2) $\quad 2\alpha = 2x + \alpha \Rightarrow \alpha = 2x \Rightarrow y + z = 4x$

(1) $\Rightarrow x + y + z = 90^\circ \Leftrightarrow x + 4x = 90^\circ \Rightarrow x = 18^\circ \Rightarrow \alpha = 2x = 36^\circ$

$\angle ACB = 2\alpha = 36^\circ \cdot 2 = 72^\circ$

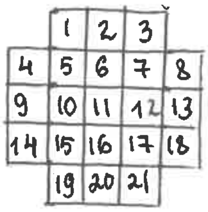
Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 0 9 0 5 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4. Фигура центрально симметрична и имеет 2 оси симметрии



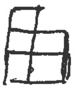
Без учёта поворота всего способов раскрасить:

$$\frac{21\cdot 20}{2} = 210$$

Клетка под номером 11 является центром симметрии фигуры

Заметим, что если мы возьмём любые 2 клетки из набора {1, 2, 4, 5, 6, 9, 10 } то мы сможем получить аналогичные раскраски других таких же трех и блоков.

Пусть закрашена клетка под номером 11. ~~Тогда~~ Выбрав любую из клеток такого сектора:

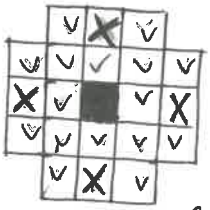


мы сможем получить остальные аналогичные раскраски.

Если клетка 11 закрашена, то существует 5 способов выбора второй клетки в этом секторе

Если клетка под номером 11 НЕ ЗАКРАШЕНА

Рассмотрим случай когда закрашена ~~одна~~ одна из клеток 2, 9, 20, 13.



Выбрав, например, клетку под номером 13 и взяв любую клетку из сектора

мы получим аналогичные случаи для клеток 2, 9, 20. поворотом на 90°

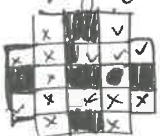
$$\boxed{4+16 = 20}$$

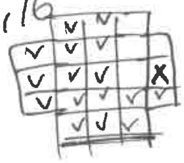
$$3 + 11 = 14.$$

$$\frac{3\cdot 2}{2} = 3.$$

Есть случаи, когда совпадает только при повороте на 180°.

Случай для 6, 10, 12, 16





$$14 + 3 + 20 + 5 = 42$$

Ответ: 42

№5. $a_1 \le a_2 \le \dots a_{48} \le a_{49} \le a_{50}$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots a_{48} \le 50 \\ a_{49} + a_{50} \le 50. \end{cases}$$

$48a_1 \le 50$

$a_{49} \le 25$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + \dots a_{48}^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots 2a_{47}a_{48} \le 2500 \\ a_{49}^2 + a_{50}^2 + 2a_{49}a_{50} \le 2500 \end{cases}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots a_{49}^2 + a_{50}^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots 2a_{47}\cdot a_{48} + 2a_{49}a_{50} \le 2500+2500=5000$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots a_{50}^2 \le 5000 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 - \dots 2a_{47}\cdot a_{48} = 5000 - 2(a_1a_2 + \dots a_{47}\cdot a_{48} + a_{49}\cdot a_{50})$$

$$\le 5000 - 2(48a_1^2 + a_{49}\cdot a_{50}) \le 5000 - 2(48a_1^2 + a_{49}^2)$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

гор. Калининград

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	7	9	0	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Меклерис

Имя Ксения

Отчество Александровна

Дата рождения 08.10.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона +79114972404 **Подпись** АК

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

6 | 20 | 20 | 20 | 4

70

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	7	9	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 Дано:

$O_1(r) \cap AB, AC = P, Q$

$O_1(r)$ проходит через ~~...~~ вершины B, C

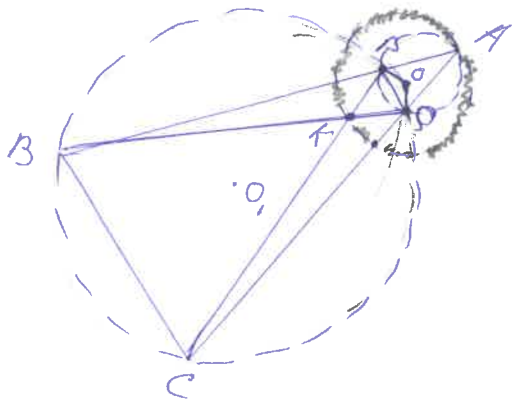
O — центр $O(R)$

$O(R)$ — окруж, описанная вокруг $\triangle APQ$

$BQ \cup CP = K$

$\angle BAC = 3\angle BKP$

Найти: $\angle BAC$



Решение:

$\angle BKP = \angle CKQ$ (как вертикальные)

пусть $\angle BKP = \angle CKQ = a$. $\angle POQ$ опирается на центр $O(R)$, так же как и $\angle BAC$, но $\angle BAC$ вписанный $\Rightarrow$ $\angle POQ = 6a$. (т.к $\angle POQ$ - центральный)

рассмотрим $O_1(r)$, описанную вокруг вершин B и C:

$\angle POQ$ явл. вписанным для неё $\Rightarrow$ $12a = \cup BP + \cup BC + \cup CQ$ (речь идёт о дугах)

$\angle BKP = (\cup BP + QC) \cdot \frac{1}{2} = a$ (т.к $\cup BP = \cup QC$)

$\Rightarrow \cup BP + \cup QC = 2a$

$\angle BAC = (\cup BC - \cup PQ)\ \frac{1}{2} = 3a$

$\Rightarrow \cup BC - \cup PQ = 6a$

$BP + QC + BC - PQ = 8a$

т.к $\cup BP + \cup QC = 2a$, а $\cup BC - \cup PQ = 6a$ $\Rightarrow$ $\cup BP + \cup QC + \cup BC - \cup PQ = 8a$,

$360 - 2PQ = 8a$

$PQ = 2(180 - \angle POQ) = 360 - 12a$

$360 - 720 + 24a = 8a$

~~24~~ $16a = 360$

$a = 22{,}5^\circ$,

значит $\angle BAC = 3a = 67{,}5^\circ$

Ответ: $67{,}5^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	7	9	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 & (2) \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 & (1) \end{cases}$

возведем обе части в квадрат во (2)

$-\begin{cases} \sin^2 9x + 2\sin 9x \cdot \sin 4x + \sin^2 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ вычитаем

$2\sin 9x \cdot \sin 4x = 0$

либо $\sin 9x = 0$ При этом $\sin 4x = 1$

$\sin 9x = 0$ при

$9x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{9}$, n - целое

не подходит и не имеет решений (при пересечении)

либо $\sin 4x = 0$

$\sin 4x = 0$ при

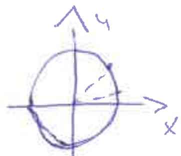
~~$4x = \pi n +$~~

$4x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z$

имеет решения

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$



При этом $\sin 9x = 1$

Д.б. системы уравнений

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

② Возьмём число $3^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11 = N$, тогда его делитель будет иметь вид $3^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 11^{\alpha_4}$, где $\alpha_1 \in \{0; 1; 2\}$, $\alpha_2 \in \{0; 1\}$, $\alpha_3 \in \{0; 1\}$, $\alpha_4 \in \{0; 1\}$. Всего делителей у него соответственно будет: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$. Тогда у числа $3N = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ по аналогии будет $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ делителя. Что доказывает, что такое число существует.

Ответ: да

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	7	9	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) Способов закрасить 2 клетки у квадрата, (25×25 по усл-ю) который находится в неподвижном положении (т.е "прибит" и не двигается) будет равным 24×25, а с условием повторений $\frac{24\times25}{2}$. Способов покрасить квадрат, который будет симметричен оси относительно центра - 12 (т.к одна клетка будет определять вторую)

Тогда искомое количество будет равно: $\frac{25\times24}{4}+\frac{12}{2}=78$ (с учетом того, что 4 раза (деление на 4) будет закрашена несимметричная точка, 2 раза (дел.на 2) симметричная т.к.)

Ответ: 78

5) 30 действ. чисел. условия:

$$\begin{cases} 0\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_{29}\le a_{30}, \\ a_1+a_2+\ldots+a_{28}\le 30 \\ a_{29}+a_{30}\le 30 \end{cases}$$

Найти: $A_{max}=a_1^2+a_2^2+\ldots a_{29}^2+a_{30}^2$

Квадрат суммы всегда больше, нежели сумма квадратов. разложив $(a^2+b)^2=a^2+2ab+b^2$, мы видим $a^2+b^2\le a^2+2ab+b^2$, а равны они лишь в одном случае: если одно из слагаемых $=0$. (так как все слагаемые $a_1\ldots a_{30}\ge0$)

Также чем меньше слагаемых в сумме квадратов, тем больше A (т.к слагаемые становятся больше)

$A_{max}=900$, если $a_1\ldots a_{26}=0$ $a_{27}=15$ $a_{28}=15$ $a_{29}=15$ $a_{30}=15$

$A=0^2\ldots 225+225+225+225=900$ (последовательность)

Д-ва нет.

Ответ: 900

Одна посл-ть.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Калининград

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	9	7	9	1	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Гращенков

Имя Пётр

Отчество Андреевич

Дата рождения 31.05.2002 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29 февраля 2020 г.

Номер телефона +79632925297 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 20 | 2

82

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	9	7	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1.

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases} \quad \sin 7x = a \quad \sin 4x = b \quad a+b=1 \quad a^2+b^2=1$$

$$a^2 + a^2 - 2a + 1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right.$$

Подставим в исходное и получим пары $(0;1)$ и $(1;0)$, тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 4x = \pi n \end{cases} \\ \begin{cases} 7x = \pi k \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi n}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} = \frac{\pi n}{4} \Leftrightarrow 2 + 8k = 7n$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi k}{7} \Leftrightarrow 8k = 7 + 28n$$

второе невозможно, т.к. слева чётное, а справа нечётное. Первое решим как линейное диофантовое ур-ние угадав корни $n=-2$; $k=-2$, тогда общее решение $n=-2+8t$, $k=-2+7t$, где $t \in \mathbb{Z}$, подставим n в исходное

получим: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi t$

N2.

Рассмотрим число $2^9 \cdot 5^2$. По формуле кол-во делителей оно имеет $(9+1)(2+1) = 30$ делителей, а число $2^9 \cdot 5^3$ имеет $(9+1)(3+1) = 40$ делителей

Ответ: Сущ., $2^9 \cdot 5^2$.

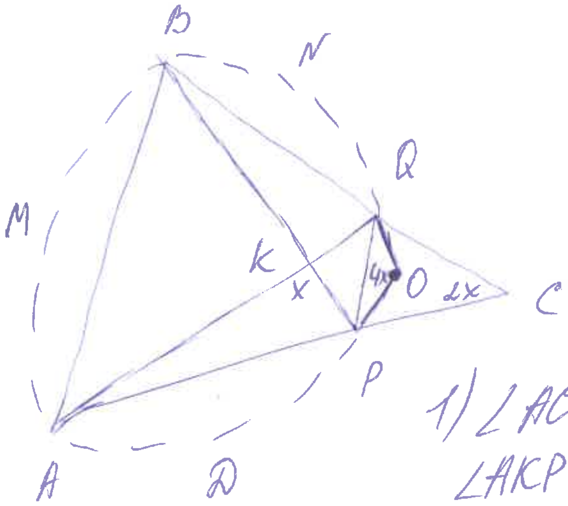
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 9 7 9 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.



Дано.
$\angle ACB = 2\angle AKP$

$\angle ACB = ?$

1) $\angle ACB = 2x$
$\angle AKP = x$
$\angle QOP = 4x$ (центральный)

2) ~~ACB~~ $\angle ACB = (\smile AMB - \smile QOP)\frac{1}{2}$
$\angle BKQ = \angle AKP = \frac{1}{2}(\smile BNQ + \smile ADP)$

3) $\smile QOP = 360 - 8x$
$360 - 720 + 16x = 6x$
$10x = 360$
$x = 36$

Ответ: 72°.

$6x = \frac{\smile AMB + \smile BNQ + \smile ADP}{360 - \smile QOP} - \smile QOP =$
$= 360 - 2\smile QOP$

№4.

Заметив, что крестик можно повернуть 4 раза $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ кол-во непереходящих = все − переходящие $=$
$= \frac{A_{21}^2}{2} - \frac{20}{2}$ ($\frac{20}{2}$ т.к из любой клетки кроме центральной можно выбрать одну, но не забыть учесть повторяющиеся случаи), итог: $\frac{21 \cdot 20}{8} - \frac{20}{8} + \frac{20}{4} =$
$= 55$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000097912 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{49} \le a_{50}$

$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{49}^2 + a_{50}^2$

$\cancel{a_1 \le \ldots \le a}$

$a_{47} = 25$; $a_{48} = 25$; $a_{49} = 25$; $a_{50} = 25$.

$\Leftarrow \; a_1 + a_2 + \ldots + a_{50} \le 100$

$0 + 0 + 0 + \ldots + 25 + 25 + 25 + 25$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{48} \le 50$ $\quad a_{47} + a_{48} \le 50$ $\quad a_{49} + a_{50} \le 50.$

$a_{49} + a_{50} \le 50$ $\quad a_{47} = a_{48} = a_{49} = a_{50} = 25$

Ответ: $0 + 0 + 0 + \ldots + 25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2$

1 посл-ть.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	8	9	3	9	2	0

КГЭУ
Адрес площадки проведения

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 3

Фамилия РОСТОВ

Имя АЛЕКСАНДР

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 10.05.2002 **Класс** 11

ОУ, местоположение МБУ „Лицей №19", САМАРСКАЯ ОБЛ., г. ТОЛЬЯТТИ

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +79277720795 **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

20 | 20 | 20 | 15 | 14 89

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 9 | 3 | 9 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ $\sin 9x \in [-1;1]$, $\sin 4x \in [-1;1]$

1) Если хоть одно слагаемое отрицательное, то сумма 1 недостижима даже при макс. значении второго:
$\sin\alpha < 0$
$\sin\alpha + 1 < 1$

2) Значит, можно возвести в квадрат первое равенство.

$\begin{cases} \sin^2 9x + \sin^2 4x + 2\sin 9x \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ ↓ −

Вычтем,
$\sin^2 9x - \sin^2 9x + \sin^2 4x - \sin^2 4x + 2\sin 9x \sin 4x = 1 - 1$
$2\sin 9x \sin 4x = 0$. Два случая:

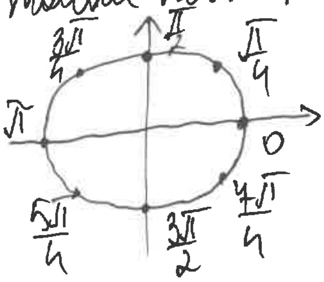
1) $\sin 9x = 0$, тогда $\sin 4x = 1$
$\begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 9x = \pi n \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$; $n, k \in \mathbb{Z}$
$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{9} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$ Приравняем: $\frac{\pi n}{9} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ $\Big| \cdot 72$

$8\pi n = 9\pi + 36\pi k$
Но т.к. $n, k \in \mathbb{Z}$, слева всегда четное, а справа нечетное, значит, корней нет

2) $\sin 4x = 0$, тогда $\sin 9x = 1$
$\begin{cases} \sin 9x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 4x = \pi n \end{cases}$
$\begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9} \\ x = \frac{\pi n}{4} \end{cases} \to \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9} \Big| \cdot 36$

$9\pi n = 2\pi + 8\pi k$ (равенство достижимо, т.к. слева либо четное, либо нечетное, а справа четное)

Рассмотрим все точки $\frac{\pi n}{4}$ на промежутке $[0; 2\pi]$
Мы можем рассмотреть только один оборот, т.к. на следующих точки повторяются.



$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}$ должно совпадать с какими-то из этих точек.

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi k}{18}$ Заметим, что 18 не кратно 4, а значит, точки с 4 в знаменателе получить нельзя

Остаются $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. 0 получить нельзя т.к. $\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi k}{18}$ никогда не $= 0$
$\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$. можно получить, например, при $k = 2 \to \frac{\pi}{18} + \frac{8\pi}{18} = \frac{9\pi}{18}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 9 | 3 | 9 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\pi = \frac{18\pi}{18}$ получить нельзя, т.к. $\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi k}{18}$ при $k \in \mathbb{Z}$ имеет в ~~знаменателе~~ нечетное число.

$\frac{3\pi}{2} = \frac{27\pi}{18}$ получить нельзя, т.к. в числителе $\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi k}{18}$ всегда число, дающее ост. 1 от деления на 4.

Следовательно, на первом обороте можно получить только $\frac{\pi}{2}$, а значит, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ для $(-\infty; +\infty)$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

№2. Представим число N в виде $p_1^a \cdot p_2^b \cdot p_3^c \ldots p_n^k$, где $p_1, p_2 \ldots p_n$ простые множители, а $a, b, c \ldots k$ их степени при разложении. Тогда кол-во делителей числа N можно найти по формуле $(a+1)(b+1)\ldots(k+1)$

Число, удовлетворяющее условию: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = N$.

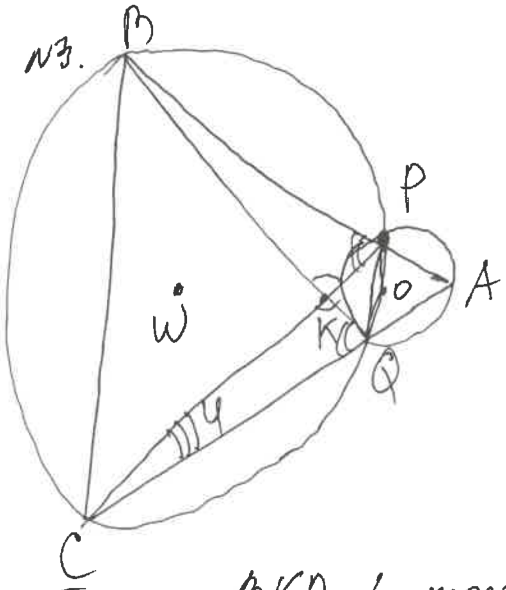
Кол-во делителей: $(3+1)(2+1)(1+1) = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

$3N = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$. Значит, $N = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$

$3N = 1080$

Ответ: $N = 360$

№3.



Дано: ω - окр-ть

$\omega \cap AB = P$

$\omega \cap AC = Q$

O - центр., опис. около $\triangle APQ$, окр-ти

$O \in \omega$

$BQ \cap PC = K$

$\angle BAC = 3\angle BKP$

Найти: $\angle BAC$ - ?

Решение:

1) Пусть $\angle BKP = \alpha$, тогда $\angle BAC = 3\alpha$

2) $\angle POQ$ - центральный для окр-ти O и вписанный для ω

$\angle POQ = 2\angle PAQ$ (как центр. и впис.)

$\angle POQ = 2 \cdot 3\alpha = 6\alpha$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 9 | 3 | 9 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) $\angle POQ = \frac{1}{2} \smile PQ$ как вписанный
$\smile PQ = 2\angle POQ = 12\alpha$

4) $\smile PQ = \smile BP + \smile CQ + \smile BC$

5) Угол, образованный хордами, равен полусумме дуг, на которые они опираются $\rightarrow \angle BKP = \angle CKQ = \frac{\smile BP + \smile CQ}{2} = \alpha$
$\smile BP + \smile CQ = 2\angle BKP = 2\alpha$

6) $12\alpha = \smile BP + \smile CQ + \smile BC = 2\alpha + \smile BC \rightarrow \smile BC = 10\alpha$

7) $\angle BPC = \angle BQC = \frac{1}{2} \smile BC$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу) $\rightarrow \angle BPC = 5\alpha = \angle BQC$

8) Пусть $\angle PCA = \varphi$, тогда из т-ка CPA: $180° = \angle CPA + \angle CAP + \angle PCA$

$\begin{cases} 180° = \angle CPA + \varphi + 3\alpha \\ \text{В тоже время: } \angle CPA = 180° - \angle BPC \text{, как смежные} \\ \angle CPA = 180° - 5\alpha \end{cases}$

$\angle CPA = 180° - \varphi - 3\alpha$
$\angle CPA = 180° - 5\alpha$ $\rightarrow \varphi = 2\alpha = \angle PCA$

9) Тогда из т-ка CKQ: $180° = \angle PCA + \angle CKQ + \angle KQC = \varphi + \alpha + 5\alpha = 2\alpha + \alpha + 5\alpha = 8\alpha \rightarrow 180° = 8\alpha \rightarrow \alpha = \frac{180°}{8} = 22{,}5°$

10) $\angle BAC = 3\alpha = 3 \cdot 22{,}5° = 67{,}5°$

Ответ: $67{,}5°$

N5. $\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le a_{30} \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{28} \le 30 \\ a_{29} + a_{30} \le 30 \end{cases}$

~~Докажем, что для всех:~~
~~Очевидно, что максимальная сумма квадратов достигается, когда все~~

$a_1 \ldots a_{28} \le 15$, т.к. если $a_{28} > 15$, то $a_{30} \ge a_{29} > 15$, но $a_{30} + a_{29} \le 30$, а если $a_{30} > 15$ и $a_{29} > 15$, то даже при $a_{29} = a_{30}$ их сумма будет больше 30.

Очевидно, что $a_{29} + a_{30} = 30$, т.к. a_{30} самый большой член последовательности, и, если $a_{29} + a_{30} < 30$, то имеет смысл ~~[illegible]~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 9 | 3 | 9 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

увеличить a_{30}, чтобы увеличить a_{30}^2, т.к. при $a_{30} \geq 0$ квадрат монотонно возрастает.

1) ~~Пусть $a_1+a_2+\ldots+a_{28} < 30$ Докажем, что для максима-~~

~~Тогда a_{29} и~~

Докажем, что $x^2+y^2 < (x-a)^2+(y+a)^2$, где $a>0, y \geq x$, $y, x \geq 0$

1) Пусть $x=1$ $y=2$: $1+4 \vee (1-a)^2+(2+a)^2$

$5 \vee 1-2a+a^2+4+4a+a^2$

$5 \vee 5+2a+2a^2 \to 5 < 5+2a+2a^2$

2) Пусть $x=k$, $y=m$

$k^2+m^2 < (k-a)^2+(m+a)^2$

$k^2+m^2 < k^2-2ka+a^2+m^2+2ma+a^2$

$k^2+m^2 < k^2+m^2+2a^2+2a(m-k)$ ($m-k \geq 0$, т.к. $m \geq k$)

3) Пусть $x=k+1$, $y=m+1$

$(k+1)^2+(m+1)^2 < (k+1-a)^2+(m+1+a)^2$

$k^2+2k+1+m^2+2m+1 < k^2+2k-2ak-\cancel{2a}+a^2+1+m^2+2m+2am+\cancel{2a}+a^2+1$

$k^2+2k+m^2+2m+2 < k^2+2k+m^2+2m+2+2a^2+2a\underbrace{(m-k)}_{\geq 0}$

ЧТД

1) Пусть $a_1+a_2\ldots+a_{28} \neq 0$

Тогда из доказанного нами методом математической индукции следует, что $a_1^2+a_2^2 < (a_1-a_1)^2+(a_2+a_1)^2$

Таким образом мы будем увеличивать и уменьшать члены последовательности до тех пор, пока ~~один из членов не станет $=15$~~ ($a_1 = a_1 - a_1$, $a_2 = a_2+a_1 \to a_3 = a_3+a_2 \to \ldots a_{28} = a_{28}+a_{24}$)

$a_1=a_2\ldots=a_{24}=0$, $a_{28}=a_{28}+a_{24}+\ldots+a_1=S$

Но нам известно, что $S \leq 30$, $a_{28} \leq 15$. Для $a_{28}^2 \to max$ следует взять максимальное значение $a_{28}=S=30$, но т.к. $a_{28} \leq 15$, то следует взять еще один член последовательности $a_{24} \leq a_{28}$, $a_{24} = S - a_{28} - 15 = 30-15=15$

Значит, $a_{24}=a_{28}=15$. Тогда $a_{29}+a_{30}=30$, и $a_{24} \leq a_{28} \leq a_{29} \leq a_{30}$

Значит, $a_{30}=a_{29}=a_{28}=a_{24}=15 \to a_{24}^2+a_{28}^2+a_{29}^2+a_{30}^2=S_{max}=$

$=4 \cdot 15^2 = 900$

Это уже подбор. Максимизировать надо всю сумму, а не части по отдельности.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 9 | 3 | 9 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Пусть $a_1+a_2+\ldots+a_{28}=0$

Тогда ~~a_{29}~~ $0\le a_{29}\le a_{30}$ ~~и~~ $a_{29}+a_{30}=30$.

$a_{29}^2+a_{30}^2\to max$. Из доказанного нами следует, что

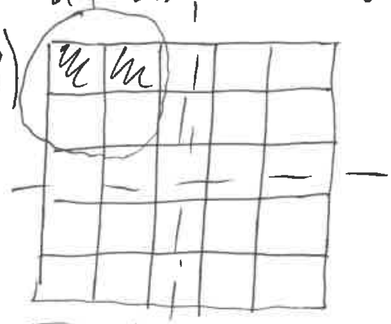
$a_{29}^2+a_{30}^2<(a_{29}-a_{29})^2+(a_{30}+a_{29})^2=(a_{30}+a_{29})^2=30^2=900$

~~Значит, следует для~~ Значит, максимальная сумма будет при $a_1=a_2=\ldots=a_{29}=0$, $a_{30}=30$

Ответ: ~~$a_1=a_2$~~ $a_1=a_2=\ldots=a_{26}=0$, $a_{27}=a_{28}=a_{29}=a_{30}=15\to S_{max}=900$

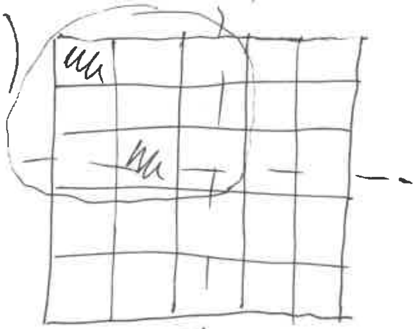
$a_1=a_2=\ldots=a_{29}=0$, $a_{30}=30\to S_{max}=900$

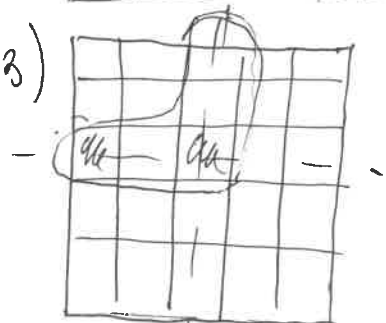
№4.

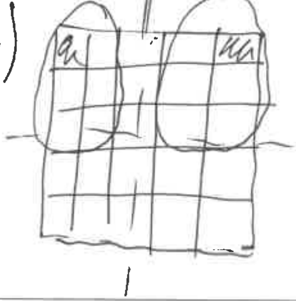
1) 

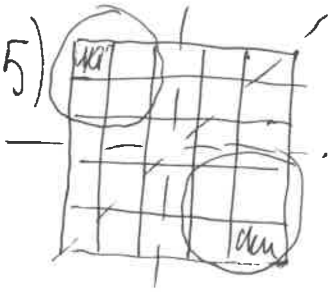
Квадрат делится осями симметрии на 4 равные части. Значит, раскраски в одной части будут соответствовать раскраскам в других при повороте. Всего 5 случаев:

1) В одной четверти
2) В четверти и на оси
3) На осях с одной стороны
4) ~~В разных четвертях~~ Все не общая
5) В соседних ~~уг~~ четвертях + прилегающая ось
5) В противоположных четвертях

2) 

3) 

4) 

5) 

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

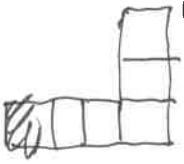
Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 9 3 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

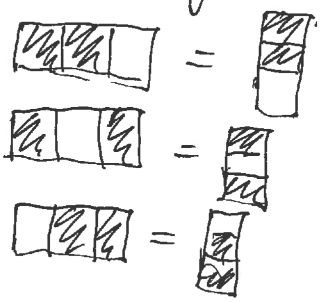
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Для случая 1: $C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$ случаев

2) Для случая 2: 4 клетки в четверти и 5 на ~~обеих~~ осях
При повороте клетка с оси будет попадать на другую ось, поэтому следует рассмотреть только клетки с одной стороны относительно диагонали. (в силу симметрии)
Кол-во будет равно $4\cdot 5 = 20$ случаев

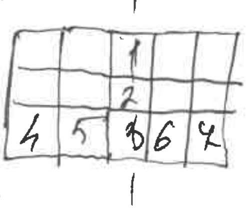
3) 

Всего случаев $C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$, но



при повороте.
Значит, следует вычесть 3 лишних
Итого: 7

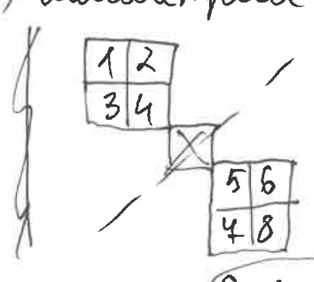
4) ~~Во~~ Рассмотрим соседние четверти и прилегающие оси



Клетки 1, 2, 3 принадлежат обеим четвертям ~~Значит,~~ Мы их учли в случае 2).

~~Остается 6 клеток в~~ Клетки 4 и 6 дают то же самое, что 5 и 7 при повороте. ~~Аналогично~~
~~для~~ Итого, чтобы подсчитать кол-во случаев нужно ~~кол-во~~ ~~вариан~~ кол-во вариантов выбрать по одной клетке из половинки: $6\cdot 6 = 36$ и вычесть лишние $36-2=34$

5) Симметрия относительно диагонали ~~Ответ:~~



Всего случаев выбрать по одной клетке из каждой части: $4\cdot 4 = 16$

Но 1 и 5 = 8 и 4, ~~4 и 8~~
~~4 и 2~~ 4 и 7 = 2 и 5
6 и 4 = 3 и 5
6 и 1 = 3 и 8
4 и 1 = 2 и 8

1 и 5 = 8 и 4
4 и 3 = 6 и 2
~~4 и 7 = 2 и 5~~

При этом каждая раскраска учитывается дважды, кроме 1 и 8 и 4 и 5 2 и 7?

~~Значит~~
Значит, всего $\frac{16}{2}+2=10$

Ответ:
Всего: 6+20+7+34+10 = 87
26 33 77
77

Ответ: 87.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КГЭУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	2	2	6	2	0

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 3

Фамилия ЛАТЫПОВА

Имя АДЕЛИНА

Отчество ИЛЬНУРОВНА

Дата рождения 18.07.2002 **Класс** 11

ОУ, местоположение МАОУ „Гимназия 19" г. Казань, ул. Проспект Победы 48

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89872131918 **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

20 | 20 | 20 | 20 | 14

94

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	2	2	6	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа.

Задание № 1

$$\begin{cases} (1)\ \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ (2)\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

(1) $(\sin 9x + \sin 4x)^2 = 1^2$

$\sin^2 9x + 2\sin 9x \cdot \sin 4x + \sin^2 4x = 1$

Вычтем из (1) (2):

$\cancel{\sin^2 9x} + 2\sin 9x \cdot \sin 4x + \cancel{\sin^2 4x} - \cancel{\sin^2 9x} - \cancel{\sin^2 4x} = 0$

$2\sin 9x \cdot \sin 4x = 0$

$\sin 9x = 0$ или $\sin 4x = 0$

$9x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $4x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}$

~~Ответ:~~

Когда одно из них 0, второе должно быть 1:

1) $\begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases}$ ~~$\sin 4x = 1$~~

$\sin 9x = 0$ $\quad$ $\sin 4x = 1$

$x = \frac{\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{9} k = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n \quad | \cdot 72$

$8\pi k = 9\pi + 36\pi n \quad | : \pi$

$8k = 9 + 36n$

$8k - 36n = 9$

$2(4k - 18n) = 9$

$9 \not\vdots 2 \Rightarrow$ нет решений в целых числах

2) $\begin{cases} \sin 9x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases}$

$\sin 9x = 1$ $\quad$ $\sin 4x = 0$

$9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} k = \frac{\pi}{4} n \quad | \cdot 36$

$2\pi + 8\pi k = 9\pi n \quad | : \pi$

$2 + 8k = 9n$

$2(1 + 4k) = 9n \Rightarrow n \vdots 2$

$n = \frac{2(1+4k)}{9} \Rightarrow 1 + 4k \vdots 9 \Rightarrow 4k \underset{9}{\equiv} 8 \Rightarrow k \underset{9}{\equiv} 2$

$k = 2$ $\quad$ $n = 2$

$k = 11$ $\quad$ $n = 10$

$k = 20$ $\quad$ $n = 18$

...

$k = 9m + 2$

$n = \frac{2(1 + 4(9m+2))}{9} = \frac{2(1 + 36m + 8)}{9} = \frac{2(9 + 36m)}{9} = 2(1 + 4m)$

$\begin{cases} k = 9m + 2 \\ n = 2 + 8m \end{cases}$, где $m \in \mathbb{Z}$

$k = 2$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{2}$

$k = 11$ $\quad$ $n = 10$ $\quad$ $x = \frac{5\pi}{2}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \cdot (2 + 8m) = \frac{(1+4m)\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	2	2	6	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2

Да, существует

$N = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = 630$

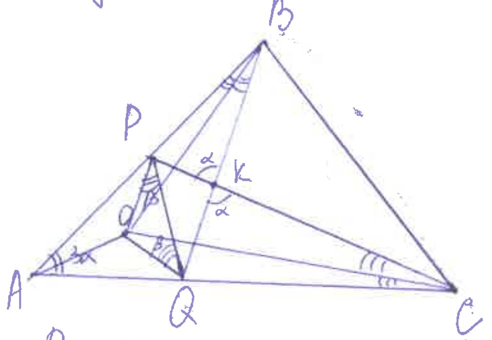
Кол-во делителей N: $(1+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 2\cdot3\cdot2\cdot2 = 24$

$3N = 2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7 = 1890$

Кол-во делителей $3N$: $(1+1)(3+1)(1+1)(1+1) = 2\cdot4\cdot2\cdot2 = 32$

Ответ: 630

Задача №3



Дано: $\triangle ABC$; Окр ω: $P; Q; B; C; O \in$ Окр ω, $P\in AB$; $Q \in AC$; $PC \cap BQ = K$; O - центр описанной окр. около $\triangle APQ$; $\angle BAC = 3\angle BKP$

Найти: $\angle BAC$

Решение:

Пусть $\angle BKP = \alpha$ => $\angle BAC = 3\alpha$

O - центр опис. окр. => $PO = OQ$, пусть $\angle QPO = \beta$ => $\angle PQO = \beta$

$OPCQ$ - вписанный => $\angle OPQ = \angle OCQ$ (т.к опираются на одну дугу)

$\angle OQP = \angle OCP$ (т.к. опираются на одну дугу)

Аналогично:

~~$\angle BQO = \angle Q$~~

$\angle QBO = \angle QPO = \beta$

$\angle OBP = \angle PQO = \beta$

$\angle PKQ + \angle PKB = 180°$ (как смежные)

=> $\angle PKQ = 180° - \angle PKB = 180° - \alpha$

$\angle KPA$ - внешний к $\triangle PBK$ => $\angle KPA = 2\beta + \alpha$

Аналогично $\angle KQA = 2\beta + \alpha$

$(APKQ)$: $\angle PAQ + \angle AQK + \angle QKP + \angle KPA = 360°$

$3\alpha + 2\beta + \alpha + 2\beta + \cancel{\alpha} + 180° - \cancel{\alpha} = 360°$

$4\alpha + 4\beta = 180°$

$\boxed{\alpha + \beta = 45°}$

O-центр опис. окр. =>

$PO = OA$ => $\angle OPA = \angle OAP$
$AO = OQ$ => $\angle OQA = \angle OAQ$
} => $\angle OPA + \angle OQA = \angle OAP + \angle OAQ = 3\alpha$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	2	2	6	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

К задаче №3

$\Rightarrow (\triangle APQ)$:

$\angle PAQ + \angle APQ + \angle AQP = 180°$

$3\alpha + 3\alpha + 2\beta = 180°$

$6\alpha + 2\beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta + 4\alpha = 180°$

$2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{45°} + 4\alpha = 180°$

$90° + 4\alpha = 180°$

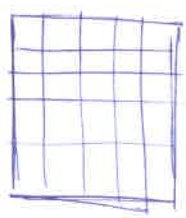
$4\alpha = 90°$

$\alpha = 22{,}5°$

$\Rightarrow \angle BAC = 3\alpha = 3 \cdot 22{,}5 = 67{,}5°$

Ответ: 67,5°

Задача №4



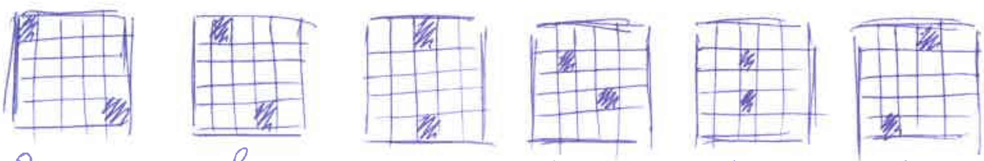
Если считать раскраски, получающиеся друг из друга поворотом разными, то всего вариантов:

$C_{25}^{2} = \dfrac{25!}{23!\cdot 2!} = \dfrac{\overset{12}{\cancel{24}}\cdot 25}{\cancel{2}} = 300$

Однако какие-то варианты мы посчитали здесь 4 раза, а какие-то два

Два раза мы посчитали варианты ~~отличающиеся~~, в которых клетки симметричны относительно центра квадрата.

Таких вариантов 6:



Остальные варианты мы посчитали 4 раза (по кол-ву поворотов доски): $\dfrac{300-12}{4} = \dfrac{288}{4} = 72$

Значит всего вариантов: $72 + 6 = 78$

Ответ: 78

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 2 | 2 | 6 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

Заметим, что $a_{28} \leq 15$, т.к. если $a_{28} > 15$, то $a_{29} > 15$, то $a_{30} > 15$, а $a_{29} + a_{30} \geqslant 30$

Все числа положительные => чем больше их сумма, тем больше сумма их квадратов

Пусть сумма k чисел будет S, ~~докажем~~

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq a_k$ докажем, что

$\cancel{a_k^2} \Rightarrow S^2 \geq b^2 + (S-b)^2 \geq (S-b)^2 + c^2 + (b-c)^2 \dots$

Квадрат всей суммы будет больше, чем сумма ~~чисел~~ квадратов нескольких чисел, которые в сумме тоже дают S

$S^2 \vee b^2 + S^2 - 2Sb + b^2$

$0 \vee 2b^2 - 2Sb$

$0 \vee 2b(b-S)$ $\qquad S \geq b$

$0 \geq 2b(b-S)$ $\qquad \Rightarrow b - S \leq 0$

$\Rightarrow S^2 \geq b^2 + (S-b)^2$

Аналогично дальше, если мы раздробим b, сделав 3 слагаемых, то сумма квадратов будет меньше

$a_{28} \leq 15$

$a_1 + a_2 + \dots + a_{28} \leq 30$

Значит наибольшая сумма квадратов ~~их~~ чисел от a_1 до a_{28} будет $15^2 + 15^2$, т.к. если сделать 3 слагаемых то будет меньше

$\Rightarrow 0 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \dots + a_{28}^2 \leq 2 \cdot 15^2 = 450$

Надо искать max общей суммы, а не по отдельности, они связаны

~~А~~ А ~~су~~ в случае с a_{29} и a_{30}, то наиб. сумма квадратов:

$0 \leq a_{29}^2 + a_{30}^2 \leq 30^2$ $\qquad 30 \geq b \geq 15$

Пусть a_{30} будет каким-то $b \Rightarrow a_{29} \leq 30 - b \Rightarrow$ Возьмем максимальное кол-во чисел равных $30-b$, $(n-1)$

$\Rightarrow a_{28} \leq 30 - b \Rightarrow a_{27} \leq 30 - b$ ~~a_{26}, a_{25}~~ а остальные пусть будут равны 0, т.к. ~~если~~ ~~сумму~~ чем больше слагаемых, тем меньше сумма квадратов

При $b = 30$? ~~Почему?~~ (Выше доказано)

$n = \dfrac{30}{30-b} + 1$

$\Rightarrow$ Сумма квадратов

$b^2 + (30-b)^2 \cdot n = b^2 + (900 - 60b + b^2)n = b^2 + 900n - 60bn + b^2 n$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 9 2 2 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

К задаче №5

$b^2(n+1)-60bn+900n=f(b)$

$x_0=\frac{60n}{2n+2}=\frac{30n}{n+1}$

$y_0=\frac{900n}{n+1}$

$\left(\frac{30n}{n+1}\right)^2(n+1)-60\cdot\frac{30n}{n+1}\cdot n+900n=$

$=\frac{900n^2}{n+1}-\frac{1800n^2}{n+1}+\frac{900n^2+900n}{n+1}=$

$=\frac{900n}{n+1}$

~~30~~

$b^2\left(\frac{30}{30-b}+2\right)-60b\left(\frac{30}{30-b}+1\right)+900\left(\frac{30}{30-b}+1\right)=f(b)$

$b^2\left(\frac{30+30-b}{30-b}\right)-\frac{60b\cdot30}{30-b}+\frac{900\cdot30}{30-b}=f(b)$

$\frac{b^2(60-b)-60b\cdot30+900\cdot30}{30-b}=f(b)$

$\frac{60b^2-b^3-1800b+27000}{30-b}=f(b)$

$\frac{-b^3+60b^2-1800b+27000}{30-b}=f(b)$

$b^2-30b+900=f(b)$

$x_0=\frac{30}{2}=15$

$y_0=15^2-30\cdot15+900=225-450+900=225+450=675$

$b^2\left(\frac{30+60-2b}{30-b}\right)-60b\left(\frac{30+30-b}{30-b}\right)+900\left(\frac{30+30-b}{30-b}\right)=f(b)$

$\frac{b^2(90-2b)-60b(60-b)+900(60-b)}{30-b}=f(b)$

$\frac{-2b^3+90b^2-3600b+60b^2+54000-900b}{30-b}=f(b)$

$\frac{-2b^3+150b^2-4500b+54000}{30-b}=f(b)$

$2b^2-90b+1800=f(b)$

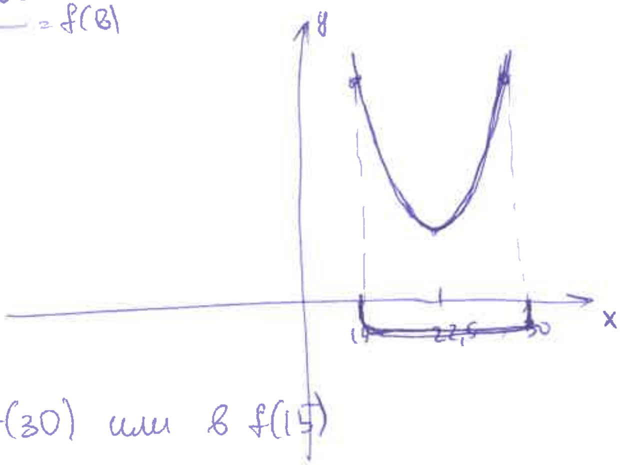
$b^2-45b+900=f(b)$

$x_0=\frac{45}{2}=22{,}5$

~~$y_0=$~~

$22{,}5^2-45\cdot22{,}5+900$

$=22{,}5(-22{,}5)+900>0$



$\Rightarrow f(b)$ – наиб. в $f(30)$ или в $f(15)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	9	2	2	6	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

к задаче №5

=> 2 варианта: максим. возм значение достигается, когда

$a_{27}=a_{28}=a_{29}=a_{30}=15^2$

$15^2\cdot 4=30^2=900$

или

$a_{30}=30$

$30^2=900$

Ответ: 900

1) $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{29}=0 \quad a_{30}=30$

2) $a_1=a_2=a_3=\ldots a_{26}=0 \quad a_{27}=a_{28}=a_{29}=a_{30}=15$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КГЭУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	5	9	7	2	2	0

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 2

Фамилия ГЛИНСКИХ

Имя РОМАН

Отчество ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 17.09.2002 **Класс** 11

ОУ, местоположение Тольятти, МБУ Лицей № 19

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2002

Номер телефона 8987 817 5091 **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

20 | 20 | 20 | 20 | 4

84

195

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	5	9	7	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1)
$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

Возведем обе части I ур-я в квадрат:

$$\begin{cases} \sin^2 7x + \sin^2 4x + 2\sin 7x \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

Подставим второе ур-е в первое

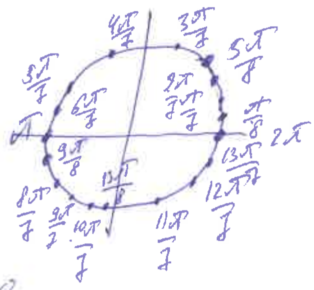
$$2\sin 7x \sin 4x = 0$$

Значит $\left[\begin{array}{l} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right.$, но чтобы выполнялось ~~на~~ II ур-е системы нужно, чтобы один из множителей был равен единице

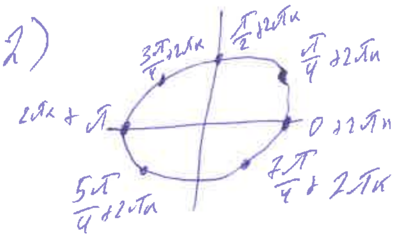
1) $\begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases}$ $\vee$ 2) $\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 7x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \end{cases}$ $n \in Z$ $\vee$ $\begin{cases} x = \frac{\pi k}{4} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}$ $k \in Z$

1)



2)



совпадающих точек нет

Проверим точку для каждого к II ур-я

1) $k=1: \frac{5\pi}{14}$ $k=2: \frac{9\pi}{14}$ $k=3: \frac{13\pi}{14}$

$k=4: \frac{17\pi}{14}$ $k=5: \frac{21\pi}{14} = \frac{3\pi}{2}$ $k=6: \frac{25\pi}{16}$ $k=7: \frac{29\pi}{14}$

Лист 1 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Значит совпадает только одна точка.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; $k\in Z$

(2) $30=2\cdot3\cdot5$ $\quad 40=2\cdot4\cdot5$

Воспользуемся формулой для кол-ва делителей числа. Пусть наше число такое: $2^n\cdot3^k\cdot5^m$

тогда кол-во его делителей $=(n+1)(k+1)(m+1)=30$

Тогда число $5N=2^n\cdot3^k\cdot5^{m+1}$,

тогда кол-во делителей: $(n+1)(k+1)(m+2)=40$

Пусть $n=4$

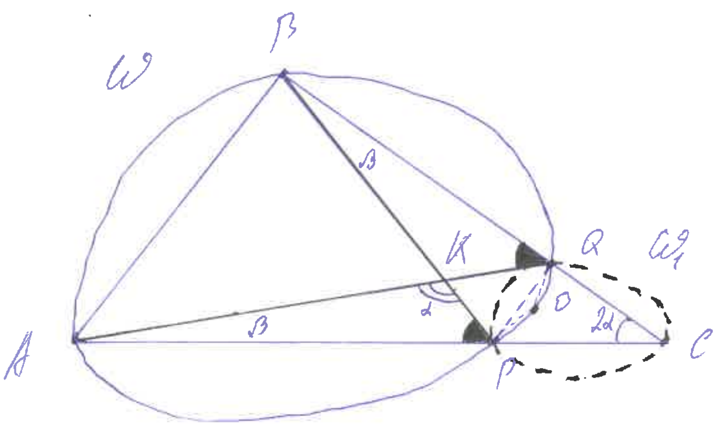
$k=1$ тогда $(4+1)(1+1)(2+1)=5\cdot2\cdot3=30$

$m=2$ $\quad (4+1)(1+1)(2+2)=5\cdot2\cdot4=40$

$N=2^4\cdot3^1\cdot5^2=16\cdot3\cdot25=1200$

Отв: 1200

(3)



Дано:

ABC - треуг.

$AQ\cap BP=K$

$\angle ACB=2\angle AKP$

Найти:

$\angle ACB$ - ?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Пусть $\angle AKP = \alpha$, тогда $\angle ACB = 2\alpha$

2) т.к. O (центр окружности ω_1) $\in \omega$:
$\angle QOP = 2\angle ACB = 4\alpha$ (т.к. $\angle ACB$ – вписанный и опирается на дугу $\breve{QP}$, а $\angle QOP$ – центральный и опирается на ту же дугу)

3) в окружности ω: $\angle QOP$ – вписанный, опирается на дугу $\breve{QP} \Rightarrow \breve{QP} = 2\angle QOP = 2\cdot 4\alpha = 8\alpha$

4) $\breve{QP} = \breve{BQ} + \breve{AB} + \breve{AP} = 8\alpha$ (1)

5) $\angle AKP$ – угол, образованный двумя хордами $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AKP = \dfrac{\breve{BQ} + \breve{AP}}{2} = \alpha \Rightarrow \breve{BQ} + \breve{AP} = 2\alpha$

6) Подставим в (1): $2\alpha + \breve{AB} = 8\alpha$
$\breve{AB} = 6\alpha$ (2)

7) $\angle BPA$ – впис., опирается на $\breve{AB} \Rightarrow \angle BPA = \frac{1}{2}\breve{AB} = \frac{1}{2}(6\alpha) = 3\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BQA = 3\alpha$ (опир. на ту же дугу)

8) Пусть $\angle KAP = \beta$, тогда из $\triangle AKP$: $\beta = 180 - \alpha - 3\alpha = 180 - 4\alpha$ (3)

9) из $\triangle AQC$: $\angle AQC = 180 - 2\alpha - \beta$

~~10) т. $\triangle AQC$~~

11) $\angle BQA$ и $\angle AQC$ – смежные $\Rightarrow \angle AQC = 180 - 3\alpha$

$\Rightarrow 180 - 2\alpha - \beta = 180 - 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Подставим это в (3):
$\beta = 180 - 4\alpha$
$\alpha = 180 - 4\alpha \Rightarrow \alpha = 36^\circ \Rightarrow 2\alpha = \angle ACB = 72^\circ$

Ответ: 72°

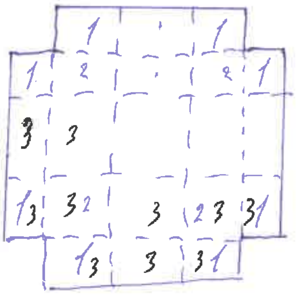
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 9 | 7 | 2 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(4)



~~Все~~ Всего вариантов, без учета поворота: C_{21}^2

В силу симметрии заметим, что есть два принципиально разных случая поворота: на 90° и на 180° (при них случаи совпадают).

Получается, что клетки, которые совпали при повороте на 90° нужно разделить на 4, а клетки, которые совпали на 180° пополам

Значит перед тем, как делить на 4 общее кол-во вариантов, нужно убрать 10 вариантов.

Но заметим, что некоторые клетки мы убрали дважды => нужно вернуть эти 5 клеток

Значит всего вариантов: $\frac{C_{21}^2-10}{4}+5=\frac{\frac{21\cdot 20}{2}-10}{4}+5=5\cdot 10+5=\underline{55}$

Ответ: 55.

(5) Заметим, что если оставить последнее число равное 50, то другие комбинации элементов, в силу условия не смогут „перевесить" 50^2, а т.к. каждый следующий элемент не меньше предыдущего $a_{49}+a_{50}=50$ =>

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 5 9 7 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Получается, что если мы берем последнее число 50, то предыдущее должно быть нулём, ~~но~~ и из условия все остальные числа тоже нули, тогда сумма их квадратов равна:

$0^2+0^2+\ldots+0^2+50^2=50^2=2500$

~~Ответ: 2500~~ Т.е. т.к. квадрат числа быстрее стремится к ∞, чем само число, выгоднее взять одно ~~максимальное~~ число максимальным, а остальные максимально ~~возможными~~ насколько, насколько позволяет условие, но наше условие предполагает при $a_{50}=50$ остальные числа только нули.

Ответ: 2500.

Есть еще одна посл-ть.

Д-ва max нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КГЭУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	0	8	5	2	0

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 3

Фамилия Ойгер

Имя Никита

Отчество Александрович

Дата рождения 16.03.2003 **Класс** 11

ОУ, местоположение МБОУ „Гимназия № 26" г. Набережные Челны, РТ

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7(963) 122 71 45 **Подпись** [подпись]

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

10|20|20|20|0 (80)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 С 0 7 0 8 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1, & (1) \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1. & (2) \end{cases}$ Из (1): $\sin 9x + \sin 4x = 1 \Rightarrow \sin 9x + \sin 4x > 0$. С учётом неотрицательности обеих частей уравнения, возведём обе части в квадрат:

$(\sin 9x + \sin 4x)^2 = 1^2 \Rightarrow \sin^2 9x + \sin^2 4x + 2\sin 9x \cdot \sin 4x = 1$.

Т.к. из (2): $\sin^2 9x + \sin^2 4x = 1$, имеем: $1 + 2\sin 9x \cdot \sin 4x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin 9x \cdot \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0$ или $\sin 9x = 0$

$4x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\qquad 9x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$ $\qquad x = \frac{\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$.

Причём из (1) при $\sin 4x = 0$ имеем: $\sin 9x + 0 = 1 \Rightarrow \sin 9x = 1$, а при $\sin 9x = 0$ имеем: $0 + \sin 4x = 1 \Rightarrow \sin 4x = 1$.

Перепишем результат в виде системы:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3) \\ \begin{cases} x = \frac{\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4) \end{array}\right.$

Здесь и далее $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

Из (3): $\frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{9} \quad \Big| \cdot (18 \cdot 2)$

$9\pi n = 2\pi + 8\pi m \quad |:\pi$

$9n = 2 + 8m \quad (5)$.

Из (4): $\frac{\pi k}{9} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2} \quad \Big| \cdot \frac{72}{\pi}$

$8k = 9 + 36l$

Однако при любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $8k$ – чётно, $36l$ – чётно, а $9 + 36l$ – нечётно, а значит $\underbrace{8k}_{\text{чёт}} = \underbrace{9+36l}_{\text{нечёт}}$ не имеет решений в целых числах.

Найдём, при каких $n, m \in \mathbb{Z}$ верно (5): $9n = 2 + 8m$.

Т.к. $9n \,\vdots\, 9$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, то $2 + 8m \,\vdots\, 9$.

Будем обозначать $a \underset{c}{\equiv} b$ как а сравнимо по модулю с с числом b, иначе говоря, а даёт остаток при делении на с такой же, какой даёт число b при делении на c.

Имеем: $(8m + 2) \underset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 8m \underset{9}{\equiv} -2 \Rightarrow 8m \underset{9}{\equiv} 9 - 2 \Rightarrow 8m \underset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow (9-1)m \underset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow 9m - m \underset{9}{\equiv} 7$ [т.к. $9m \,\vdots\, 9$ при $m \in \mathbb{Z}$] $\Rightarrow -m \underset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow 9 - m \underset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow$

$m \underset{9}{\equiv} 2$. То есть при $m \underset{9}{\equiv} 2$, т.е. при $m = 2 + 9t$, где $t \in \mathbb{Z}$, имеем:

$\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi m}{9} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi(2+9t)}{9} = \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi(2+9t)}{18} = \frac{\pi + 8\pi + 4\pi \cdot 9t}{18} = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, \ t \in \mathbb{Z}$,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

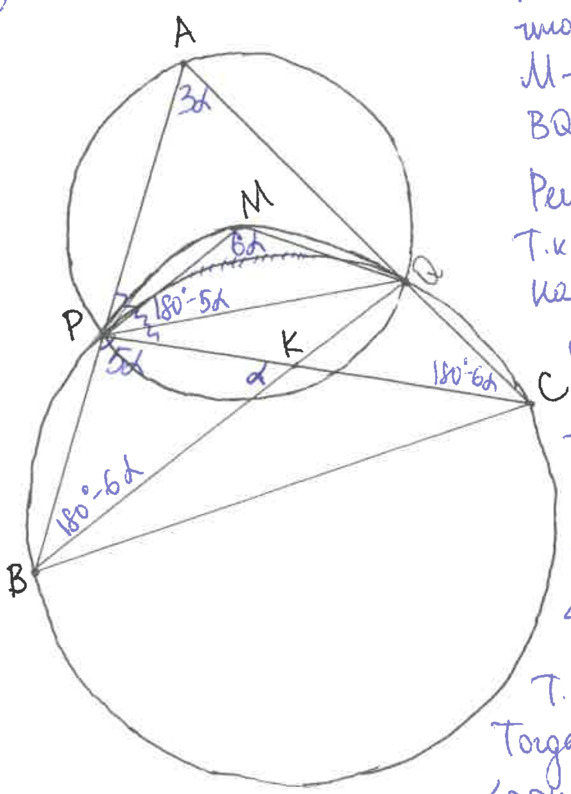
Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 8 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

то бишь верно $\sin 9x = 1$, $\sin 4x = 0$, $\sin 9x + \sin 4x = 1 > 0$.
А значит, что единственная серия корней это $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

③



Дано: $\triangle ABC$ - остроуг, окружность ω_1 такова, что $B \in \omega_1$, $C \in \omega_1$; $AB \cap \omega_1 = P$, $AC \cap \omega_1 = Q$.
M - центр опис. окр. $\triangle APQ$, $M \in \omega_1$.
$BQ \cap CP = K$, $\angle BAC = 3\angle BKP$. Найти: $\angle BAC = ?$

Решение: Пусть $\angle BKP = \alpha \Rightarrow$ по условию $\angle BAC = 3\alpha$
Т.к. если окружность, описанную около $\triangle APQ$ назвать ω_2, то в ω_2 $\angle PAQ$ опирается на $\overset{\frown}{QP}$, а центральный угол $\angle PMQ$ тоже опирается на $\overset{\frown}{QP}$ $\Rightarrow$
$\angle PMQ = 2 \cdot \angle PAQ = 2 \cdot 3\alpha = 6\alpha$
Т.к точки B, P, M, Q, C лежат на ω_1, что для вписанных в окружность ω_1 четырёхугольников $PMQC$ и $PMQB$ верно: $\angle PMQ + \angle PCQ = 180°$ и $\angle PMQ + \angle PBQ = 180°$ соотв.

Т.к. $\angle PMQ = 6\alpha$, то $\angle PCQ = \angle PBQ = 180° - 6\alpha$
Тогда в $\triangle BPK$: $\angle BPK + \angle PBK + \angle PKB = 180° \Rightarrow$
$\angle BPK = 180° - \angle PBK - \angle PKB = 180° - (180° - 6\alpha) - \alpha = 6\alpha - \alpha = 5\alpha$
$\Rightarrow \angle APC = 180° - \angle BPC = 180° - 5\alpha$. Тогда в $\triangle APC$ $\angle PAC + \angle APC + \angle ACP = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\alpha + (180° - 5\alpha) + (180° - 6\alpha) = 180° \Rightarrow 5\alpha + 6\alpha - 3\alpha = 180° \Rightarrow 8\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{8} = \frac{90°}{4} = 22{,}5°$
Тогда искомый $\angle BAC = 3\alpha = 3 \cdot 22{,}5° = 67{,}5°$. Ответ: $\angle BAC = 67{,}5°$.

② Да, существует, например $N = 1152 = 2^7 \cdot 3^2$. Докажем, что N имеет 24 делителя, а $3N$ — 32 делителя.
Докажем сперва, что если натур. число $A = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где $A \neq 1$, где $p_1, p_2 \ldots p_n$ - все различные простые делители числа A, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - степени, в которых эти делители содержатся, то кол-во делителей числа A будет равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n+1)$.
Заметим, что каждый делитель числа A представляет собой произведение некоторых из (возможно и всех) простых делителей числа A в некоторых степенях.
Притом делитель p_1 может содержаться от 1 до α_1 раз или не содержаться вовсе (т.б. 0 раз) $\Rightarrow$ способов выбрать для числа B - делителя A - некоторое кол-во делителей p_1 будет равно (α_1+1), для делителя p_2 аналогично можно выбрать от 1 до α_2 числа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 8 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

делителей p_2 или не выбрать вовсе (0 раз), т.б. (α_2+1) способов и т.д. до (α_n+1) возможных способов взять p_n, а значит кол-во возможных способов выбрать различные делители A (а это и есть кол-во различных делителей A) будет равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1)$, г.т.д.

Тогда число $N=1152=2^7\cdot 3^2$ имеет вид $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}$, где $p_1=2, \alpha_1=7; p_2=3, \alpha_2=2$, т.б. имеет $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)=(7+1)(2+1)=8\cdot 3=24$ делителя.

Число $3N=3456=2^7\cdot 3^3$ имеет вид $q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}$ (по аналогии с p_1 и α_1, p_2 и α_2), где $q_1=2, \beta_1=7; q_2=3, \beta_2=3$ [где q_1, q_2 — всевозм. различные простые дел. числа 3N, а β_1 и β_2 — степени, в которых они соотв. содержатся в числе], тогда 3N имеет $(\beta_1+1)(\beta_2+1)=(7+1)(3+1)=8\cdot 4=32$ делителя.

Ответ: да, существует, например $N=1152$.

4) ~~Будем называть раскраску уникальной, если~~

~~Для начала найдём всевозможн~~

Сперва найдём кол-во закрасить в синий цвет 2 клетки из 25-ти в квадрате, причём нам не важен порядок раскрашивания. Таких способов $\frac{25\cdot 24}{2!}=\frac{25\cdot 24}{2}=25\cdot 12=6\cdot 50=300$.

ставим на любое из 25 мест

ставим на любое из оставшихся 24 мест

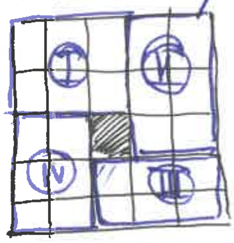
порядок не важен.

Теперь найдём, сколько среди них уникальных то есть таких, что при любом повороте квадрата (на 90°, 180° или 270°) не получалась та же раскраска, что уже есть, но притом кол-во ~~среди~~ ~~всех~~ раскрасок, получаемых при всевозможных поворотах было равно общему числу способов раскрасить 2 клетки из 25 без учёта порядка (т.б. 300).

~~Расставим произвольном~~ Раскрасим произвольным образом 2 клетки из 25 в квадрате.

Тогда могло получится одно из следующих положений:

рис. 1



· одна из закрашенных клеток центральная.

Тогда другая клетка (закрашенная) лежит в одном из четырёх прямоуг., обведённых на рис. 1 на каком-то из 6 мест. Притом если повернуть

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 0 8 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

полученную раскраску на 90° центральная клетка перейдёт сама в себя, а прямоугольник I перейдёт в II, II в III, III в IV и IV в I [см. рис. 1], то есть если повернуть раскраску на 90°, на 180° и на 270° мы получим любую из раскрасок таких, что одна клетка — центральная, а всего ~~из них~~ их $1 \cdot 24$, а уникальных тогда $\frac{1 \cdot 24}{4} = 1 \cdot 6$ (т.б. одна в центре и любая из 6-ти в прямоугольнике)

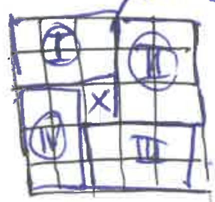
• ни одна из клеток не центральная

Теперь и в дальнейшем рассмотрим случаи, когда ни одна закр. клетка не явл. центральной.

Возьмём любую из закр. клеток и зафиксируем прямоуг. в котором она находится [см. рис. 2]

Не умаляя общности (т.к. картинку в любом случае можно повернуть, а прямоуг. переобозначить), пусть она лежит в I прямоуг.

рис. 2.



Тогда возможны 3 случая.

• клетки лежат в одном и том же прямоуг.

Таких вариантов возможно $\frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 3 \cdot 5 = 15$, притом при повороте на 90°, 180° и 270° соотв. I → II, I → III и I → IV соответственно,

(клетка стоит на любом из 6 мест в прямоуг; порядок не важен; вторая стоит на любом из оставшихся 5 мест)

а это значит, что каждая из $3 \cdot 5 = 15$ раскрасок уникальна и при всевозможных поворотах даёт любую из $15 \cdot 4 = 60$ раскрасок, где 2 клетки лежат в одном прямоуг.

~~уникальна, так~~

Притом случаи разделяются так, что ни при каких поворотах в каждом случае невозможно получить раскраску, которую мы уже учли в др. случае!

• клетки лежат в соседних (т.б. граничащих друг с другом) прямоуг.

[например на рис. 2 I и III не граничат, а I и II и I и IV соседние]

Таких вариантов возможно $6 \cdot 6 = 36$

(на любом из 6 мест в первом прямоуг; на любом из 6 мест во втором прямоуг)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 8 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Докажем, что ~~при~~ но 'они ~~уник~~ тоже могут быть уникальными.
Во-первых, при повороте на 90°, 180° и 270° клетки будут всегда лежать в разных прямоуг, однако также соседних, поскольку I→II, II→III, III→IV, а IV→I, ~~и~~ притом переворот на 90°, 180°, 270° гр. соотв. даёт из положения I и II клеток положения II и III, III и IV, IV и I, т.б. всевозможные положения расстановки без учёта порядка 2-х клеток так, чтобы они лежали в соседних прямоуг, то бишь среди 6·6 уникальных способов при 3 поворотах получается 6·6·4 различных (но не до поворота расскраск) (3 поворота + 1 исх. полож)

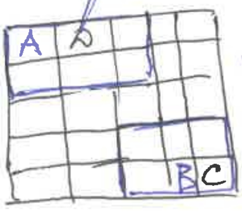
клетки лежат в разных, НО не граничащих друг с другом прямоугольниках. Среди таких вариантов возможно 2 подслучая:

1) закрашенные клетки симметричны относ-но центра квадрата.
Для каждого из 6 возможных расстановок первой закр. клетки вторая клетка определяется „автоматически", притом при повороте на 90° и 270° в таком случае получается одинаковая, но новая (не учтённая ранее) раскраска, а при повороте на 180° раскраска переходит сама в себя, то бишь каждая из 6·1 уникальных раскрасок при всевозможных поворотах даёт лишь одну новую раскраску, и всего получается 6·1·2 раскрасок.
выбор 1 клетки
„автоматич" выбор второй клетки

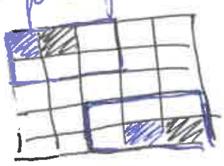
2) закрашенные клетки НЕ симметричны относ-но центра квадрата.
Таких раскрасок всего 6·5 и при повороте на 90° I→II и III→IV ⇒ I и III → II и IV появляется новая раскраска, однако для каждого расположения клеток A и B (см. рис. 3), если взять клетку C, симметричную A относительно центра квадрата и D, симм. B относ-но центра квадрата

выбор в I прямоуг; выбор во III прямоуг (кроме 1 симм) → раскрасок 6·5·2

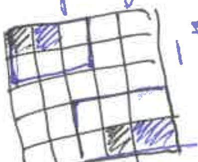
рис. 3



при повороте симметричной относительно центра, но учтённой ранее раскраски C и D получим раскраску A и B. (см. рис 4)



поворот на 180°



, ~~то бишь~~ и аналогично для поворотов на 90° и 270°, то бишь среди этих 6·5·2 раскрасок уникальных лишь $\frac{6\cdot5\cdot2}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	7	0	8	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~$=3\cdot 5 = 15$. $3\cdot 5\cdot 2 = 30$~~ $60/4 = 15$.

Теперь покажем, почему учтены все случаи:

Случаи

→ есть центральная закрашенная клетка

$\boxed{\text{Случаев: } 1\cdot 6\cdot 4 = 24 \quad \text{уникальных: } 1\cdot 6 = 6}$

→ нет центральной закрашенной клетки

→ Обе зак. клетки лежат в одном прямоуг.

$\boxed{\text{случаев: } \frac{6\cdot 5}{2!}\cdot 4 = 60 \quad \text{уникальных: } \frac{6\cdot 5}{2!} = 15}$

→ Обе клетки лежат в разных, но граничащих прямоуг.

$\boxed{\text{Случаев: } 6\cdot 6\cdot 4 = 144 \quad \text{уникальных: } 6\cdot 6 = 36}$

→ Обе клетки лежат в разных, НО НЕ граничащих прямоуг.

→ Они центрально симметричны

$\boxed{\text{случаев: } 6\cdot 1\cdot 2 = 12 \quad \text{уникальных: } 6\cdot 1 = 6}$

→ Они не центр. симметричны

$\boxed{\text{случаев: } 6\cdot 5\cdot 2 \;\; 30\cdot 2 = 60 \quad \text{уникальных: } \frac{6\cdot 5\cdot 2}{4} = 15}$

т.к. изначальное кол-во способов было равно (см. лист 3) 300, а мы учли

$24+60+144+12+60=$

$=204+12+60+24=$

$=204+36+60=300$, то мы учли все случаи, а искомое кол-во раскрасок есть сумма числа всех уникальных раскрасок, а их:

$6+15+36+6+\cancel{30}\,15=$

$=12+15+\cancel{66}\,(36+15)=$ ~~...~~

$=\cancel{12}+\cancel{...}+66=\cancel{93}.\ 78$

Ответ: ~~93~~. 78.

(5) $A = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{28}^2+(a_{29}^2+a_{30}^2) \le (a_1+a_2+\ldots+a_{28})^2+(a_{29}+a_{30})^2 \le$

$\le 30^2+30^2 = 2\cdot 30^2 = 2\cdot 900 = 1800.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

МБОУ „ШКОЛА N 44"
КРЕПОСТНОЙ 139

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	4	3	5	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия ЛОЗОВАЯ

Имя Дарья

Отчество ОЛЕГОВНА

Дата рождения 10.06.2002г. **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 10 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2002 г.

Номер телефона 8(918)-553-68-86 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 18 | 20 | 20 | 8 | 86

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	1	0	0	0	0	1	4	3	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

Замена. Пусть $\sin 9x = a$, а $\sin 4x = b$, тогда $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1-a \\ a^2+(1-a)^2 = 1 \quad (1) \end{cases}$

Решим (1):

$a^2+(1-a)^2=1$

$a^2+1-2a+a^2=1$

$2a^2-2a=0$

$a(a-1)=0$

$\begin{cases} a=0; \\ b=1; \end{cases}$ $\begin{cases} a=1; \\ b=0; \end{cases}$

$\begin{cases} \sin 9x = 0, \\ \sin 4x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin 9x = 1, \\ \sin 4x = 0; \end{cases}$

А $\begin{cases} 9x = \pi n, n \in Z \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in Z \end{cases}$ Б $\begin{cases} 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ 4x = \pi k, k \in Z \end{cases}$

А $\begin{cases} x = \frac{\pi n}{9}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases}$

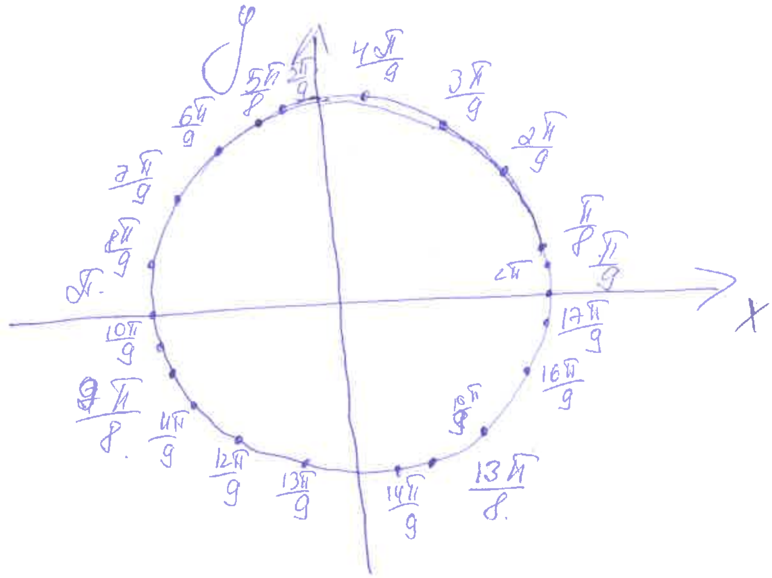
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000008435 20

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

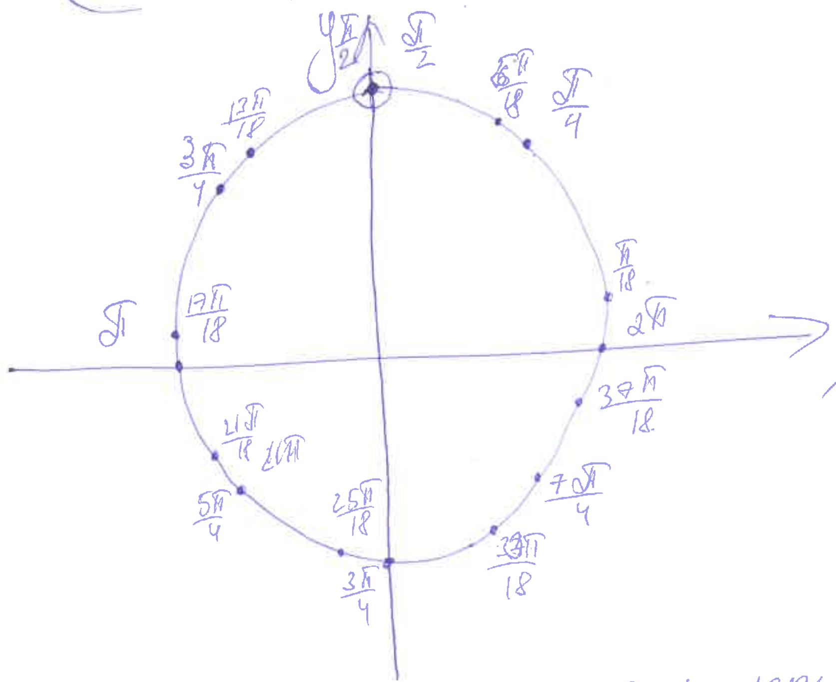
А)



Общих точек нет ⇒ нет решения

Б)

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9}, \; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi k}{4}, \; k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$



Заметим, что при $n=2$ и при $k=2$ обе строчки принимают значение $\frac{\pi}{2}$ ⇒ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

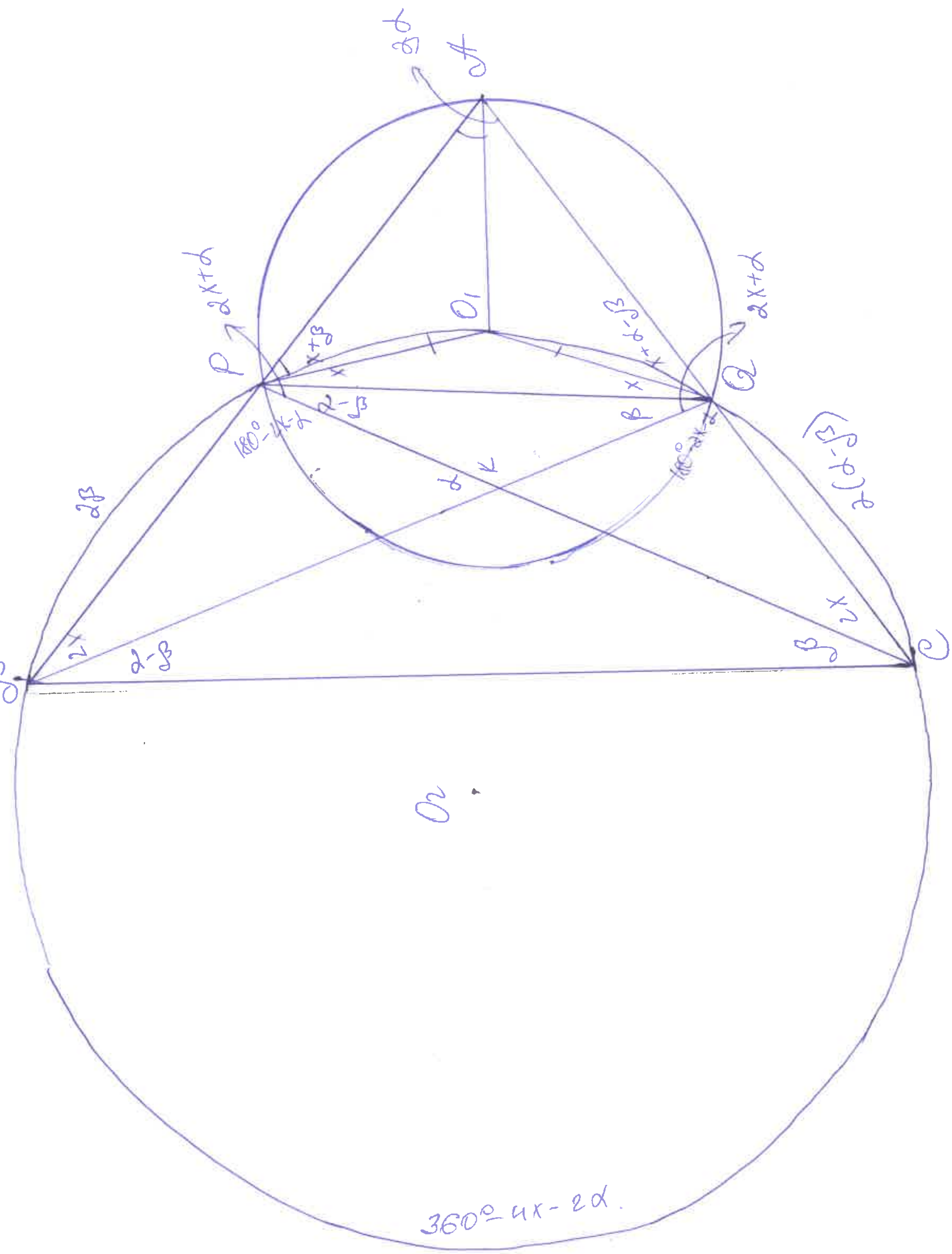
М	А	0	0	0	0	8	4	3	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Дано: $\angle BAC = 3\angle BKP$

Найти: $\angle BAC$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	4	3	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Обозначим центр описаной около $\triangle PQA$ окружности за O_1, а далее проведём ти радиуса: $O_1P = O_1A = O_1Q = R$; Обозначим $\angle BCP$ за β;

2) т. $\angle BCP$ вписанный, то $\cup BP$ (меньшая) равна 2β, но $\angle BKP = \cup BP + \cup CQ = \alpha \Rightarrow$ меньшая $\cup CQ = 2(\alpha - \beta)$;

3) Обозначим $\angle O_1PQ$ за x, т.к. в $\triangle PO_1Q$: $O_1P = O_1Q \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_1PQ = \angle O_1QP = x$; тогда $\cup PO_1 = \cup O_1Q = 2x \Rightarrow$
$\cup PQ = 4x$;

4) Далее найдём большую $\cup BC$; $\cup BC = 360° - \cup PQ - \cup BP - \cup CQ = 360° - 4x - 2\alpha$;

5) $\angle BPC = \angle BQC$ (т.к. опираются на одну дугу $\cup BC$), тогда $\angle BPC = \angle BQC = \frac{\cup BC}{2} = 180° - 2x - \alpha$;

6) $\angle PBQ = \angle PCQ$ (опираются на $\cup PC$) и равны $2x$,
$\angle BCP = \angle BQP$ (опираются на $\cup BP$) и равны 2β,
$\angle BCP = \angle BQP$ (опираются на $\cup CQ$) и равны $\alpha - \beta$

7) $\angle CBQ = \angle CPQ$ (опираются на $\cup CQ$) и равны $\alpha - \beta$

8) $\angle CPA = 180° - \angle CPB = 180° - 180° + 2x + \alpha = 2x + \alpha$,
$\angle BQA = 180° - \angle BQC = 180° - 180° + 2x + \alpha =$ такие же и
$= 2x + \alpha$;

9) $\angle O_1PA = 180° - \cancel{\alpha} + \beta - x - 180° + 2x + \cancel{\alpha} = x + \beta = \angle O_1AP$ (т.к. в $\triangle PO_1A$: $PO_1 = O_1A$); $\angle O_1QA = 180° - 180° + 2x + \alpha - \beta - x =$
$= x + \alpha - \beta = \angle QO_1A$ (т.к. в $\triangle O_1AQ$: $O_1A = O_1Q$).

10) $\angle PAQ = 3\alpha = \angle PAO_1 + \angle O_1AQ = \cancel{2x+\alpha+2x+\alpha-\beta} =$
$= x + \beta + x + \alpha - \beta = 2x + \alpha \Rightarrow 2x + \alpha = 3\alpha$
$2x = 2\alpha$
$x = \alpha$,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА0000843520

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

11) В $\triangle BQA$: $\angle QBA = 2x$, $\angle BQA = 2x+\alpha$, $\angle BAQ = 3\alpha$, тогда т.к. $\angle QBA + \angle BAQ + \angle AQB = 180°$, то

$2x + 2x + \alpha + 3\alpha = 180°$

$4x + 4\alpha = 180°$ (зная, что $x = \alpha$, получаем)

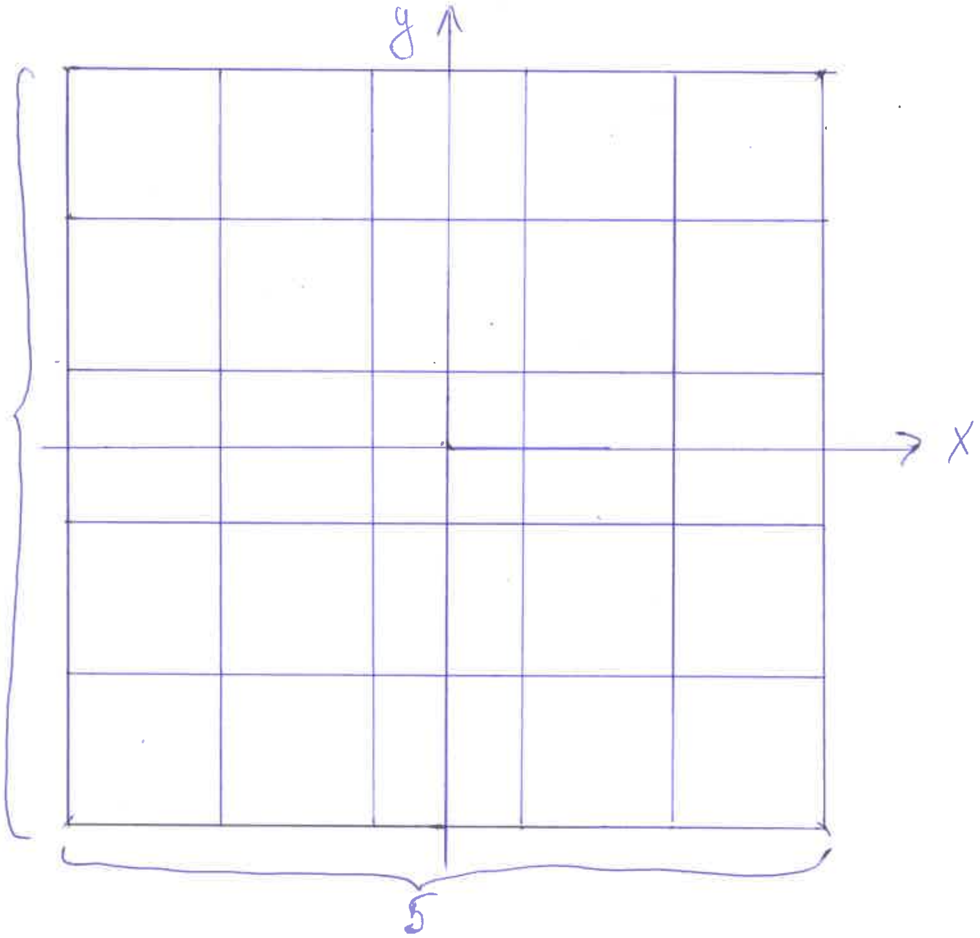
$4\alpha + 4\alpha = 180°$

$8\alpha = 180°$

$\alpha = 22{,}5° \Rightarrow 3\alpha = 67{,}5°$

Ответ: $67{,}5°$

4)



Решение:

1) найдём количество различных раскрасок:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 3 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) В ~~первом~~ первый раз мы можем взять любую 25 шестом, затем одну из 24 оставшихся, тогда т.к. мы уже учли первую пару мы можем взять любую из 23 и т.д., т.е. всего таких $25+24+\ldots+1$, т.е.

~~$\frac{25+1}{2}$ шагов~~ $\frac{25+1}{2}\cdot 25 = 13\cdot 25 = \cancel{325}\ 300$

или же кол-во различных расстановок можно ~~ра~~ посчитать так $\frac{25!}{2!\,23!} = \frac{25\cdot 24}{2} = 25\cdot 12 = 300$

2) Введём ~~систе~~ систему координат с точкой (0;0) в центре квадрата.

Выбираем точку и смотрим можно ли повернуть её симметричную и учитываем количество таких точек, тогда получ. ~~300~~ чаем, что у нас есть 12 таких случаев, значит всего не симметричных будет $300-12=288$, всего поворотов 4, тогда всего таких расстановок существует будет: $\frac{288}{4}+\frac{16}{2} = 72+6 = 78$.

Ответ: 78.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 1 4 3 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

а) $\begin{cases} N = 3^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_n^{\alpha_n} \\ 3N = 3^{\alpha_0+1} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \end{cases}$ разложение на простые множители.

Тогда для числа φ количество делителей для этих чисел будет:

$$\varphi(N) = (\alpha_0+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1) = 24$$

$$\varphi(3N) = (\alpha_0+2)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1) = 32$$

$$\frac{\varphi(3N)}{\varphi(N)} = \frac{(\alpha_0+2)\cancel{(\alpha_1+1)}\cancel{(\alpha_2+1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(\alpha_n+1)}}{(\alpha_0+1)\cancel{(\alpha_1+1)}\cancel{(\alpha_2+1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{(\alpha_n+1)}} = \frac{32}{24}$$

$$\frac{\alpha_0+2}{\alpha_0+1} = \frac{4}{3}$$

$$4\alpha_0 + 4 = 3\alpha_0 + 6$$

$$\alpha_0 = 2.$$

Следовательно $\varphi(N) = 3(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1) = 24 \Rightarrow (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1) = 8$.

Т.к. $\alpha_i \in \mathbb{Z}$; $\alpha_i \geq 0$ и $i \in [0; N]$, то

$\cancel{\begin{cases} \alpha_i+1 = 2 \\ \alpha_j+1 = 4 \end{cases}}$ $\begin{cases} \alpha_i + 1 = 2 \\ \alpha_j + 1 = 4 \end{cases}$ Это не $\varphi(3N)$, а N

Т.е. $\begin{cases} \alpha_i = 1 \\ \alpha_j = 3 \end{cases} \Rightarrow \varphi(3N) = 3^2 \cdot p_i \cdot p_j^3$, где p_i и p_j — это любые простые числа

или $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) = 8$,

т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \Rightarrow$ ~~цед~~ $\varphi(3N) = 3^2 \cdot p_j \cdot p_i \cdot p_q$, где p_i, p_j, p_q — любые простые числа

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Следовательно такие числа существуют.
Приведём пример:

$p_j = 7;\ p_i = 11;\ p_q = 13$

$\varphi(3N) = 9 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13 = 63 \cdot 11 \cdot 13 = 9009$?

$\varphi(N) = 3003$ $\varphi(3N) = 32,\ \varphi(N) = 24$

Ответ: существует.

5) $1 \le i \le 30$

$$\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le a_{30} \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{28} \le 30 \\ a_{29} + a_{30} \le 30 \end{cases}$$

Найти максимально возможное

$A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2$

Решение:

введём x и y: $f(x, y) = x^2 + y^2$,

$x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - x$, подставим в $f(x, y)$:

$f(x) = x^2 + (30 - x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(30 - x)(-1) = 4x - 60 = 0$

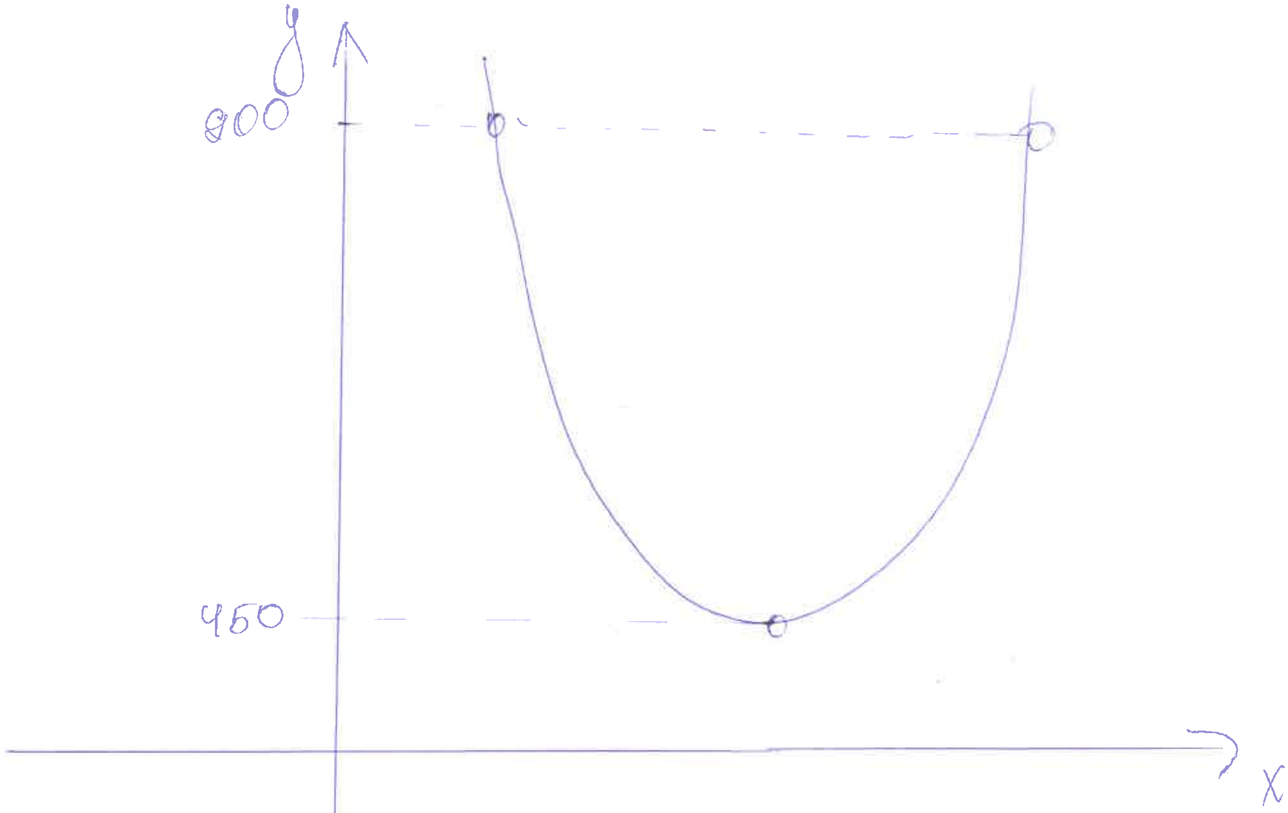
$4x = 60$

$x = 15$. $f(x) = 15^2 + 15^2 = 225 + 225 = 450$.

т.е. 450 - это минимум функции, тогда максимум функции равен 900, он достигается при $x = 0$; $x = 30$

Ищется максимум общей суммы

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



~~Ааа,~~ теперь будем добавлять по одному слагаемому:

$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{t} + x_3^2$

~~Заметим $t = x_1^2 + x_2^2$~~

Заметим, что т.к. в самом начале мы берём $x+y$ за 30, то по условию каждое следующее слагаемое не может превосходить 0, т.е. каждое следующее слагаемое не будет влиять на значение, т.к. будут иметь значение 0, тогда ответом к задаче будет являться максимум функции $f(x) = x^2 + y^2$ при $x+y=30$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 3 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Максимум функции находится через производную и равен 900, при этом он достигается при $x=30$ и $x=0$, теперь вернёмся к условию о том, что нам требуется привести пример последовательности при которой он достигается:

1 пример: $a_{29}=30; a_{30}=0$ $a_{29} \le a_{30}$

$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2 = 0+0+900+0 =$
$= 900.$

2 пример: $a_{29}=0; \; a_{30}=30$

$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2 = 0+0+\ldots+0+900 =$
$= 900.$

Ответ: 900.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Крепостной 139

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	4	9	2	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Тихомиров

Имя Кирилл

Отчество Сергеевич

Дата рождения 09.12.2003 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +79185580440 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

12 | 20 | 20 | 20 | 0 | 72

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	4	9	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1, \Rightarrow \sin 4x = 1 - \sin 7x \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

Пусть $\sin 7x = a$, $\sin 4x = b$, тогда из 2 ур-я следует:

$a^2 + (1-a)^2 = 1$

$a^2 + a^2 - 2a + 1 = 1$

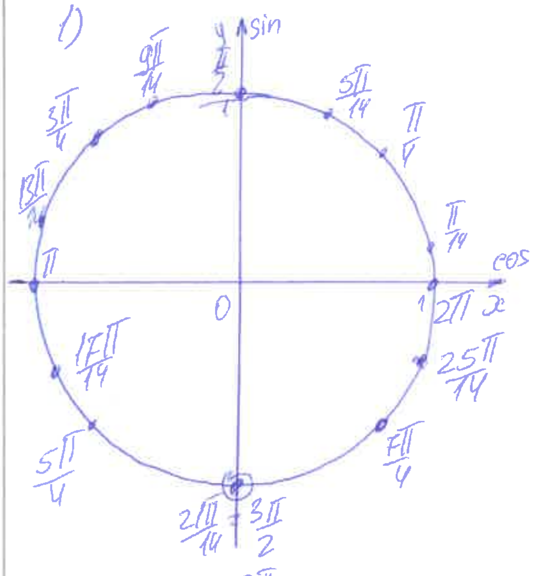
$a(a-1) = 0$

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$, тогда получим систему

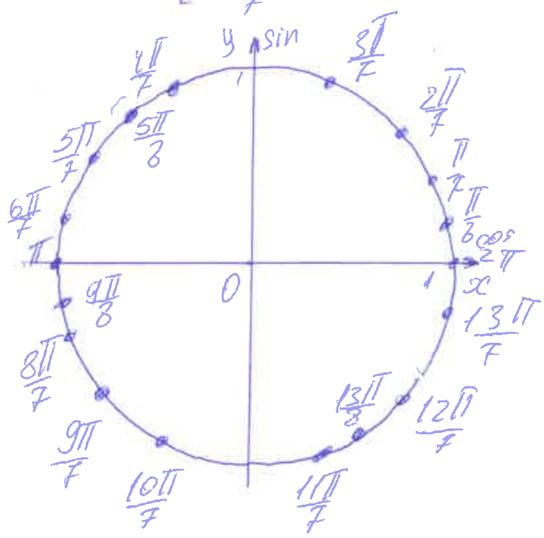
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 7x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \sin 7x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x = \pi k \\ 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 7x = \pi k \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} k \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{4\pi}{14} k \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} k \\ x = \frac{\pi}{7} k \end{cases} \end{array}\right.$

буквы д.б. разные!

1)



$x = \frac{3\pi}{2}$



корней нет

Ответ: $x = \frac{3\pi}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0000849220

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) Всего в фигуре 21 клетка. Мы выбираем по 2 клетки, => всего таких вариантов выбора $\frac{21!}{(21-2)!\cdot 2!} = \frac{21!}{19!\cdot 2} = \frac{20\cdot 21}{2} = 210$. Есть 2 способа выбора:

1) Выбор клеток симметрично относительно центра. В этом случае достаточно выбрать одну клетку, тогда вторая определяется, т.е. всего вариантов выбрать 20 (т.к. центр не считаем), но в этом случае мы можем выбрать одну клетку дважды, => вариантов выбора 2-ух симметричных клеток относительно центра $\frac{20}{2} = 10$. При этом, при единичном повороте получается другой вариант, а при повторном ~~уж~~ тот же.

2) Из 1-го действия следует, что случаев несимметричного выбора $210 - 10 = 200$. В этом случае, при каждом повороте получаются различные варианты, => всего требуемых вариантов раскрасок $\frac{200}{4} + \frac{10}{2} = 55$

Ответ: 55

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2)

$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$ - число, разложенное на множители

$f(N) = (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_k+1)$ - кол-во делителей

Пусть a_1 - степень 5-ки, тогда, логично, у $5N$ она на 1 больше, чем у N.

$f(5N) = (a_1+2)(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_k+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta f = 40-30 = 10 = (a_2+1)(a_3+1)\dots(a_k+1)(a_1+2-a_1-1)$

$(a_2+1)(a_3+1)\dots(a_k+1) = 10$

1) $10 = 10 \cdot 1$

2) $10 = 5 \cdot 2$

В случае 1) один из множителей $= 1$, но тогда получается, что одна из степеней будет $= 0$ и не будет являться делителем, тогда возможен только 2) случай, тогда одна из степеней $= 5-1 = 4$, другая 1, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ пример такого числа $- 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 4050$

Ответ: 4050

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА0000849220

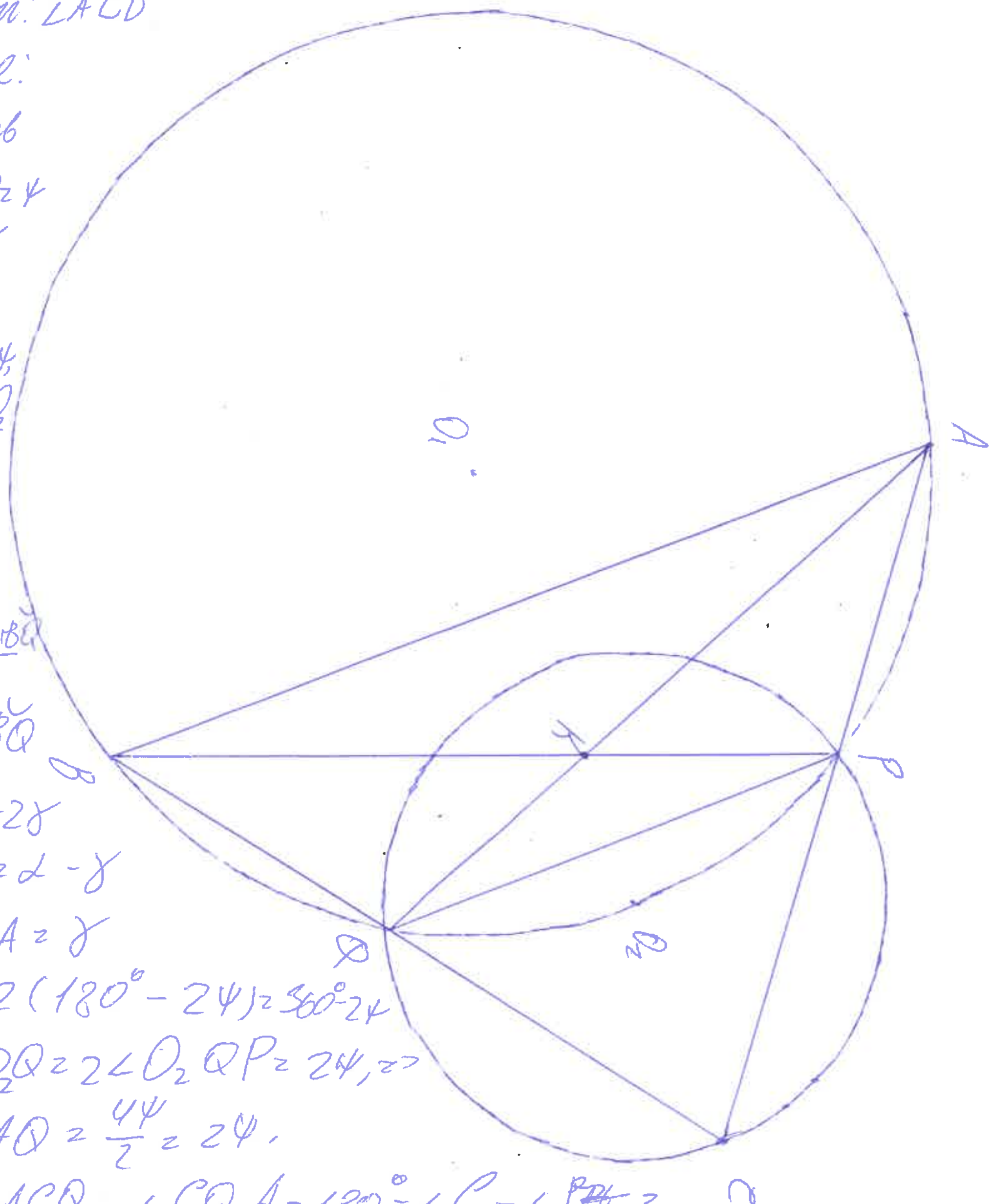
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный, $\angle ACB = 2\angle AKP$

Найти: $\angle ACB$

Решение:



1) Пусть $\angle O_2QP = \psi$

$\overset{\smile}{QB} = \gamma$

$\angle O_2PQ = \angle O_2QP = \psi$, $\Rightarrow O_2P = O_2Q$

Пусть $\angle QKB = \alpha$

$\overset{\smile}{PA} = 2\gamma$

$\angle PKA = \dfrac{\overset{\smile}{PA} + \overset{\smile}{BQ}}{2}$

$2\alpha = 2\gamma + \overset{\smile}{BQ}$

$\overset{\smile}{BQ} = 2\alpha - 2\gamma$

$\angle QPB = \alpha - \gamma$

$\angle PQA = \gamma$

$\overset{\smile}{AB} = 2(180^\circ - 2\psi) = 360^\circ - 2\psi$

$\overset{\smile}{O_2P} = \overset{\smile}{O_2Q} = 2\angle O_2QP = 2\psi$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAQ = \dfrac{4\psi}{2} = 2\psi$.

Из $\triangle ACQ$ $\angle CQA = 180^\circ - \angle C - \angle P\cancel{A} =$

$= 180^\circ - 2\alpha - 2\psi$

$\angle CQO_2 = \angle CQA - \psi - \gamma = 180^\circ - 2\alpha - 3\psi - \gamma$, $\Rightarrow \angle QCO_2 =$

$= 180^\circ - 3\psi - \gamma - 2\alpha$

$\angle QBP = 2\psi$, $\angle CPB = 180^\circ - 2\alpha - 2\psi$, $\angle CPO_2 = 180^\circ - 2\alpha - 2\psi -$

$- \psi - (\alpha - \gamma) = 180^\circ - 3\alpha - 3\psi + \gamma$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000084922 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle PCQ = 2\alpha = 180^\circ - 3\alpha - 3\varphi + \gamma + 180^\circ - 3\varphi - \gamma - 2\alpha = 360^\circ - 5\alpha - 6\varphi =$

$= 2\alpha$, $\quad 360^\circ = 7\alpha + 6\varphi$

Из $\triangle CPQ$ $\quad 180^\circ = 2\alpha + 180^\circ - 3\alpha - 2\cancel{\beta}\varphi + \gamma + 180^\circ - 2\varphi - \gamma - \alpha$

$0 = 180^\circ - 3\alpha - 4\varphi$

$3\alpha + 4\varphi = 180^\circ$

$\begin{cases} 6\alpha + 8\beta = 360^\circ \\ 7\alpha + 6\beta = 360^\circ \end{cases}$ $\quad 6\alpha + 8\varphi = 7\alpha + 6\varphi$

$2\varphi = \alpha$

$\Downarrow$

$\alpha = 36^\circ$, $\Rightarrow \angle ACB = 72^\circ$

Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ростов-на-Дону, г. Крепостной 139 | М А 0 0 0 0 8 4 5 3 2 0

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 2

Фамилия Поштаренко Ан.

Имя Андрей

Отчество Андреевич

Дата рождения 13.12.2003 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона 89094017251 **Подпись** [signature]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 20 | 0 | 80

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	4	5	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 & 1) \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 & 2) \end{cases}$ $\quad 1) \Rightarrow \sin 4x = 1 - \sin 7x$

$\cancel{\sin^2 7x + \sin^2 4x - \sin 7x - \sin 4x = 1 - 1}$

Из 2ур: $\sin^2 7x + (1 - \sin 7x)^2 = 1$

$\sin^2 7x + 1 - 2\sin 7x + \sin^2 7x = 1$

$2\sin^2 7x - 2\sin 7x = 0$

$\sin 7x(\sin 7x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{ll} \sin 7x = 0 & а) \\ \sin 7x = 1 & б) \end{array} \right.$

а) $\sin 7x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 1$ (из 1ур)

$\sin 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi k}{7}$; $k \in Z$

$\sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{2}\pi n$

$x = \frac{\pi + 4\pi n}{8}$; $n \in Z$

$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi + 4\pi n}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi k}{7} = \frac{\pi(1 + 4n)}{8}$

$8k = 7(1 + 4n)$

~~чётн, т.к. 8:2=0~~
чётн, т.к. 8 делится на 2

нечет, т.к. 7 нечетное, 1+4n тоже нечетное, поскольку 1 нечетное, а 4n четное. Сумма четного и нечетного нечетна. Значит при умножении на 7 (нечет) получается нечетное.

В этой системе нет решений.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

б) $\sin 7x = 1 \Rightarrow \sin 4x = 0$

$$\begin{cases} \sin 7x = 1 \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{2}\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi(1+4k)}{14}, k \in Z \\ \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z \end{cases}$$

$$\frac{\pi(1+4k)}{14} = \frac{\pi n}{4}$$

$$2(1+4k) = 7n$$

$$7n - 8k - 2 = 0$$

$n_0 = k_0 = -2$ (подбор) Проверка: $7(-2) - 8(-2) - 2 = -14 + 16 - 2 = 0$

$$\begin{cases} 7n - 8k - 2 = 0 \\ 7(-2) - 8(-2) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$7(n+2) - 8(k+2) = 0$$

$$7(n+2) = 8(k+2)$$

Пусть $n+2 = 8p, p \in Z \Rightarrow n = 8p - 2$

Тогда $7 \cdot 8p = 8(k+2)$

$$k+2 = 7p$$

$$k = 7p - 2$$

Тогда $x = \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi(8p-2)}{4} = \frac{\pi}{2}(4p-1), p \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(4p-1), p \in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Воспользуемся теоремой о том, что если число a представить в виде $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, ~~то~~ где p_i – простой делитель 'a', а k_i его степень, то количество делителей равно $(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)$. Не нарушая общности пусть k_1 – степень 5 при разложении N на множители, тогда для $5N$ она будет на 1 больше.

Для N: $\begin{cases} 30 = (1+k_1)(1+k_2)\cdot\ldots\cdot(1+k_n) \\ 40 = (1+k_1+1)(1+k_2)\dots(1+k_n) \end{cases}$

$$40-30=10=(1+k_1+1)(1+k_2)\dots(1+k_n)-(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)=$$
$$=(1+k_2)(1+k_3)\dots(1+k_n)(1+k_1+1-1-k_1)=(1+k_2)(1+k_3)\dots(1+k_n)=10$$

Т.к. k целые, то и $k+1$ целые. 10 можно представить в виде произведения 2 и 5 или 10 и 1, причем на 1 можно умножать сколько угодно и от этого произведение не меняется. Не нарушая общности пусть $(k_2+1)=10 \Rightarrow k_2=9$, тогда остальные $k=0$. Или пусть $(k_2+1)=2 \Rightarrow (k_3+1)=5 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_2=1$

$k_3=4$.

~~Получаем~~

из ур-я $30=(1+k_1)\dots(1+k_n)$

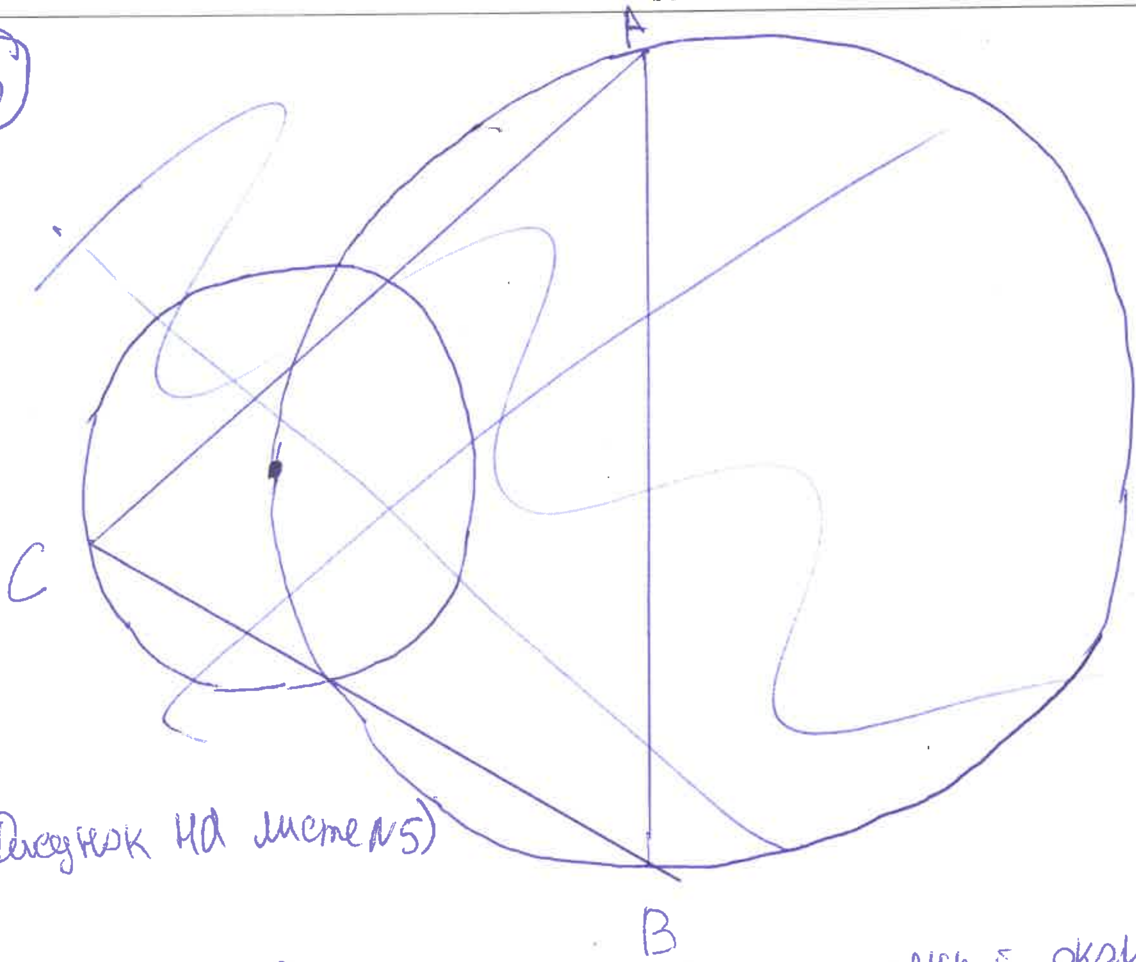
$30=(1+k_1)\cdot 10 \Rightarrow k_1=2$

Получается $\left[\begin{array}{l} N=5^2\cdot p_1\cdot p_2^4 \\ N=5^2\cdot p_1^9 \end{array}\right.$, где p_1 и p_2 различные простые числа, не равные 1 и не равные 5.

Например подходит $N=5^2\cdot 2^9$

Ответ: $5^2\cdot 2^9$

(3)



(Рисунок на листе N5)

Пусть O - центр окружности, описанной около треугольника PCQ. Проведем радиусы OP, OC, OQ

Пусть $\angle AKP = \alpha \Rightarrow \angle ACB = 2\alpha$ (по усл). Пусть

$\angle OQP = \beta \Rightarrow \angle OPQ = \beta$ т.к $OP = OQ$ как радиусы

~~OP~~ $\angle OQP = \overset{\frown}{OP} \Rightarrow \overset{\frown}{OP} = 2\beta$ Аналогично с OPQ и OQ

$\angle PAQ = \frac{\overset{\frown}{PQ}}{2} = \cancel{2\beta}\ \frac{4\beta}{2} = 2\beta$ Аналогично $QBP = 2\beta$

Пусть $\overset{\frown}{PA} = 2\varphi \Rightarrow \angle PQA = \frac{\overset{\frown}{PA}}{2} = \varphi$ как вписанный

Тогда

$\angle PKA = \frac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{BQ}}{2}$

$2\alpha = 2\varphi + \overset{\frown}{BQ}$

$\overset{\frown}{BQ} = 2\alpha - 2\varphi \Rightarrow \angle QPB = \alpha - \varphi$ т.к вписанный и опир. на $\overset{\frown}{BQ}$

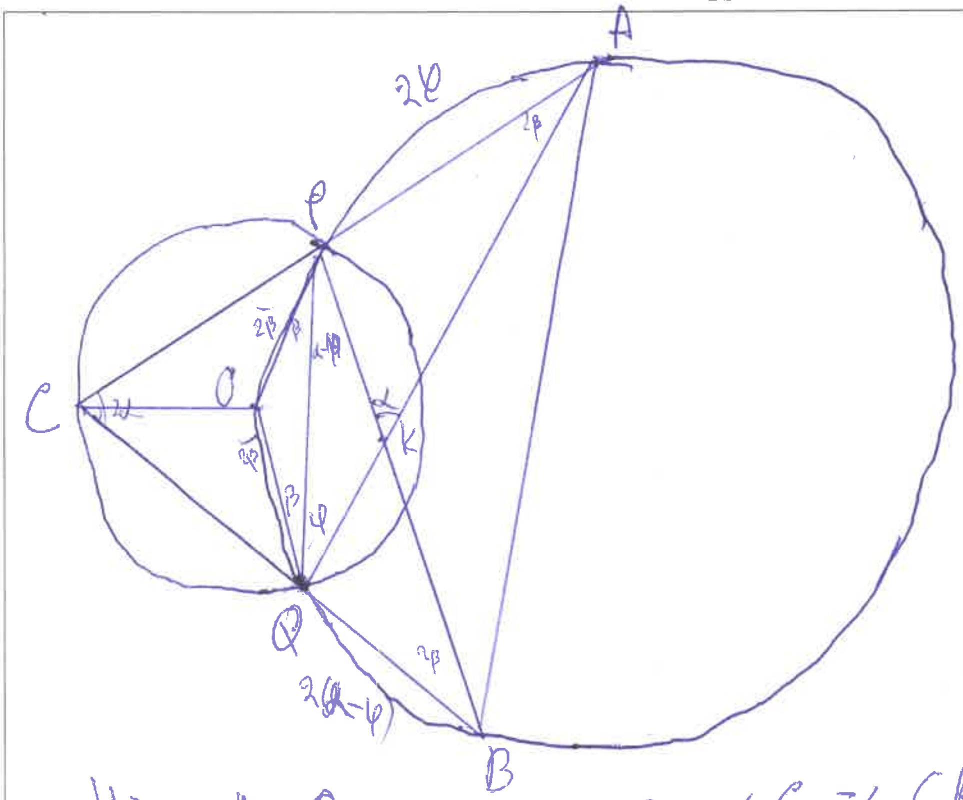
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

МА0000845320

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Из $\triangle ACQ$: $\angle CQA = 180 - \angle C - \angle CAQ = 180 - 2\alpha - 2\beta$

$\angle CQO = \angle CQA - \angle OQB - \angle PQA = 180 - 2\alpha - 2\beta - \beta - \varphi = 180 - 2\alpha - 3\beta - \varphi$

Из $\triangle CPB$: $\angle CPB = 180 - \angle C - \angle CBP = 180 - 2\alpha - 2\beta$

$\angle CPO = \angle CPB - \angle OPQ - \angle QPB = 180 - 2\alpha - 2\beta - \beta - (\alpha - \varphi) = 180 - 3\alpha - 3\beta + \varphi$

$\angle PCQ = \begin{cases} \angle PCO + \angle OCQ \\ \angle PCO = \angle CPO \text{ т.к. } CO = OP \text{ как радиуса} \\ \angle OCQ = \angle OQC \text{ т.к. } CO = OQ \text{ как радиусы} \end{cases}$

$\Rightarrow \angle PCQ = \cancel{\angle OCQ}\ \angle CPO + \angle OQC = 180 - 3\alpha - 3\beta + \varphi + 180 - 2\alpha - 3\beta - \varphi$

$= 360 - 5\alpha - 6\beta = 2\alpha$ (т.к. $\angle PCQ = 2\alpha$)

$360 = 7\alpha + 6\beta$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 5 3 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Из ΔCPQ: $180 = \angle C + \angle CPQ + \angle CQP =$

$= 2\alpha + \angle CPO + \angle OPQ + \angle CQO + \angle OQP =$

$= \cancel{2\alpha} + 180 - 3\alpha - 3\beta + \cancel{\varphi} + \beta + 180 - \cancel{3\alpha} - 3\beta - \cancel{\varphi} + \beta = \cancel{180}$

$180 - 3\alpha - 4\beta = 0$

$180 = 3\alpha + 4\beta$

$360 = 6\alpha + 8\beta$

$$\begin{cases} 360 = 6\alpha + 8\beta \\ 360 = 7\alpha + 6\beta \end{cases} \Rightarrow$$

~~$3\alpha + 4\beta = 7\alpha + 6\beta$~~

$6\alpha + 8\beta = 7\alpha + 6\beta$

$\alpha = 2\beta$

Тогда

$180 = 3\alpha + 4\beta = 3\alpha + 2 \cdot 2\beta = 3\alpha + 2\alpha = 5\alpha$

$5\alpha = 180$

$\alpha = 36 \Rightarrow 2\alpha = 72 \Rightarrow \angle ACB = 72$

Ответ: 72

4) Очевидно, что если две синие клетки симметричны относительно центра фигуры, то при 2 вращениях ~~на~~ квадрата, то есть при повороте точек на 180 они поменяются местами и получится одна и ~~таже~~ та же раскраска. Поэтому из двух симметричных точек можно получить 2 разные раскраски.

Разные, если ~~считать~~ при повороте считать раскраски разными даже если их можно получить поворотом. Если те точки не симметричны, то при повороте получается 4 раскраски.

Всего вариантов раскрасок $C_{21}^{2} = \frac{21!}{19!\,2!} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$

Из них симметричных $\frac{C_{20}^{1}}{2} = 10$ т.к. нельзя получить клетку симметричную центральной и не совпадающую с ней и каждое симметричное расположение мы посчитали дважды, ~~потом~~ когда выбирали первую ~~клет~~ клетку, а ~~по~~ потом когда

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	4	5	3	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Выбираем вторую половину $\frac{C^{4}_{21-1}}{2}$

Остается $210-10=200$ не симметричных раскрасок

Ответ $\frac{10}{2}+\frac{200}{4}=5+50=55$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Крепостной, 139

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	4	5	0	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Степанова

Имя Анна

Отчество Никитовна

Дата рождения 10.11.2002 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89185715402 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

16 | 20 | 10 | 20 | 4

70

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 0 8 4 5 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

Пусть $\sin 7x = a$, $\sin 4x = b$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)^2+b^2=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=1-b \\ 1-2b+2b^2=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=1-b \\ 2b(b-1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1-b \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ 4x = \pi k, k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} 7x = \pi n, n \in Z \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, n \in Z \\ x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi n}{7}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$ (2)

(1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}, n \in Z \\ x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z \end{cases}$

Ответ не объединен.

Составим таблицу и найдем общее решение.

n	x	k	x
0	$\frac{\pi}{14}$	0	0
1	$\frac{5\pi}{14}$	1	$\frac{\pi}{4}$
2	$\frac{9\pi}{14}$	2	$\frac{\pi}{2}$
3	$\frac{13\pi}{14}$	3	$\frac{3\pi}{4}$
4	$\frac{17\pi}{14}$	4	π
5	$\underline{\underline{\frac{21\pi}{14} = \frac{3\pi}{2}}}$	5	$\frac{5\pi}{4}$
6	$\frac{25\pi}{14}$	6	$\underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$
7	$\frac{29\pi}{14} > 2\pi$	7	$\frac{7\pi}{4}$

Найдено 1 решение $x = \frac{3\pi}{2}$ (для 1 полного оборота)

Таким образом,

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 5 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② $\begin{cases} x=\frac{\pi n}{7}, n\in Z \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z \end{cases}$

Аналогично:

Нетрудно понять, что у этой системы нет общих решений, т.к. решениями уравнений, которые составляют систему, являются несократимые дроби с различными знаменателями

n	x	k	x
0	$\frac{\pi}{7}\cdot 0=0$	0	$\frac{\pi}{8}$
1	$\frac{\pi}{7}$	1	$\frac{5\pi}{8}$
2	$\frac{2\pi}{7}$	2	$\frac{9\pi}{8}$
3	$\frac{3\pi}{7}$	3	$\frac{13\pi}{8}$
4	$\frac{4\pi}{7}$	4	$\frac{17\pi}{8}$ $>2\pi$
5	$\frac{5\pi}{7}$...		
6	$\frac{6\pi}{7}$		
7	π		

Тогда единственное решение $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$

№2

Если число N представить в виде $N=a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\cdot a_3^{k_3}\cdot a_4^{k_4}\dots a_n^{k_n}$, где $a_1, a_2\dots a_n$ – простые множители, $k_1, k_2\dots k_n$ – степени, то количество делителей находится по формуле: $(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)$

Для числа N: $(1+k_1)\underbrace{(1+k_2)\dots(1+k_n)}_{A}=30$

Допустим, что k_1 соответствует степени 5, тогда для числа $5N$:

$(1+k_1+1)\underbrace{(1+k_2)\dots(1+k_n)}_{A}=40$

$\begin{cases}(1+k_1)\cdot A=30 \\ (2+k_1)\cdot A=40\end{cases} \Rightarrow \frac{30}{1+k_1}=\frac{40}{2+k_1}$, откуда $k_1=2$

$(2+1)\cdot A=30 \Rightarrow A=10$, где $A-(1+k_2)\dots(k_n+1)$

Т.к. $1+k_2, 1+k_3, \dots 1+k_n$ – натур. числа, то A содержит не более 2х скобок

Пусть $(1+k_2)(1+k_3)=10$, не нарушая общности $\begin{cases}1+k_2=2 \\ 1+k_3=5\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}k_2=1 \\ k_3=4\end{matrix}$

Таким образом, число $p_1^1\cdot p_2^4\cdot p_3^2$ имеет 30 делителей, причём $p_3=5$

Число N может быть: $2^1\cdot 3^4\cdot 5^2=2\cdot 81\cdot 25=4050$

Ответ: 4050

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

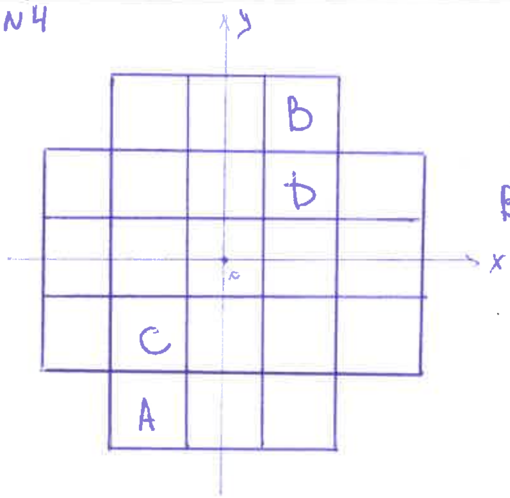
Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	8	4	5	0	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Всего раскрасок, включая повторяющиеся:

$\frac{21!}{2!\cdot 19!} = \frac{20\cdot 21}{2} = 210$

Введём для удобства систему координат

Заметим, что:

а) Две клетки, выбранные симметрично относительно осей координат (например, A и B; C и D), при постепенном повороте на 90° до тех пор, пока не будет получена изначальная раскраска (т.е. произведём поворот на 360°), дают две одинаковые раскраски.

б) Две клетки, выбранные несимметрично относительно осей координат дают 4 одинаковые раскраски

Ясно, что для любой точки (клетки), не являющейся началом координат, можно подобрать симметричную. Тогда всего различных симметр. точек (клеток): $\frac{21-1}{2} = 10$ (всего 21 клетка, одной из них подобрать симметричную невозможно)

Тогда количество раскрасок с несимметрично расположенными точками (клетками): $210-10=200$

Тогда различных раскрасок: $\frac{200}{4} + \frac{10}{2} = 55$ (раскраска с несимметрично расположенными клетками дает 4 одинаковых, с симметрично — 2 одинаковых)

Ответ: 55

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 8 4 5 0 2 0 |

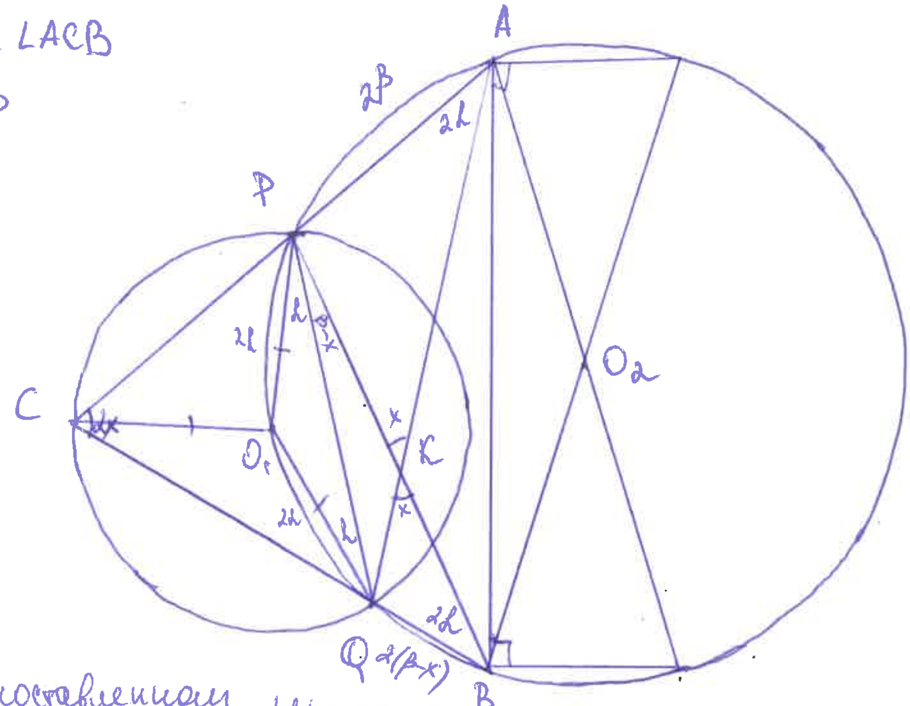
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Дано: $\angle AKP = \angle ACB$

Найти: $\angle ACB$



1) Пот. об угле, составленном пересекающимися хордами,
$x = \dfrac{\cup AP + \cup QB}{2}$ Пусть $\cup AP = 2\beta$, тогда $\cup QB = 2(\beta - x)$,

2) $CO_1 = PO_1 = O_1Q = R_{\triangle CPQ} \Rightarrow \cup PO_1 = \cup O_1Q = 2\alpha \Rightarrow \angle PQO_1 = \angle O_1PQ = \alpha$

$\angle PAQ = \angle PBQ = \frac{1}{2} \cup PQ = 2\alpha$

3) $\angle QPB = \frac{1}{2} \cup QB = \beta - x$;

Если $\angle ACB$ выразить как $\angle CPO_1 + \angle AQC$, а те выразить через другие углы (например из $\triangle ACQ$), то можно прийти к тому, что $2\alpha = 72^\circ \Rightarrow \angle ACB = 72^\circ$

Не увеверено Не закончено

Ответ: 72°

№5

Максимальным возможным значением суммы квадратов будет 2500, достигаемое в последовательности:

$a_1 = a_2 = \ldots = a_{46} = 0$, $a_{47} = a_{48} = a_{49} = a_{50} = 25$

Если мы возьмём $a_{49} < a_{50}$, то $a_1, a_2 \ldots a_{48}$ уменьшатся автоматически и будут $\leq a_{49} \Rightarrow$ сумма квадратов уменьшится ?

Ответ: 2500 Д-ва нет. Только 1 посл-ть

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ангарск. лицей № 2 | М А 0 0 0 0 5 9 8 5 2 0

Адрес площадки проведения — Шифр

Вариант № 2

Фамилия Украинцев

Имя Алексей

Отчество Александрович

Дата рождения 11.04.2002 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89501049971 **Подпись** [подпись]

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

18 | 20 | 0 | 20 | 10 | 68

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	5	9	8	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases}\sin 7x+\sin 4x=1\\ \sin^2 7x+\sin^2 4x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 7x+\sin^2 4x+2\sin 4x\cdot\sin 7x=1\\ \sin^2 7x+\sin^2 4x=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}2\sin 4x\cdot\sin 7x=0\\ \sin 7x+\sin 4x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 7x=0\\ \sin 4x=0\end{array}\right.\\ \sin 7x+\sin 4x=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 7x=0\\ \sin 4x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 4x=0\\ \sin 7x=1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}7x=\pi+2\pi n,\ n\in Z\\ 7x=2\pi n,\ n\in Z\end{array}\right.\\ 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}4x=\pi+2\pi k,\ k\in Z\\ 4x=2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.\\ 7x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

(1) 1) $\begin{cases}7x=\pi+2\pi n\\ 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7}\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\end{cases}$

$$\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\ \Big|\cdot 56$$

$$8\pi+16\pi n=7\pi+28\pi k\ \Big|:\pi$$

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\text{чётное}}{8}+\underset{\text{чётное}}{16n}=\underset{\text{нечет}}{7}+\underset{\text{чётное}}{28k}\\ n\in Z;\ k\in Z\end{array}\right\} \Rightarrow n\in\varnothing;\ k\in\varnothing \Rightarrow x\in\varnothing$$

2) $\begin{cases}7x=2\pi n\ |\cdot 8\\ 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\ |\cdot 14\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}56x=16\pi n\\ 56x=7\pi+28\pi k\end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}16n=7+28k\\ n\in Z;\ k\in Z\end{array}\right\} \Rightarrow n\in\varnothing;\ k\in\varnothing \Rightarrow x\in\varnothing$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2   M A 0 0 0 0 5 9 8 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(2) 1) $\begin{cases} 4x = \pi + 2\pi k \mid \cdot 14 \\ 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 56x = 14\pi + 28\pi k \\ 56x = 4\pi + 16\pi n \end{cases} \Rightarrow$

$14 + 28k = 4 + 16n$.

$\left.\begin{array}{l} 7 + 14k = 2 + 8n \\ n \in Z \ ; k \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow n \in \varnothing ; k \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing$

2) $\begin{cases} 4x = 2\pi k \mid \cdot 7 \\ 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28x = 14\pi k \\ 28x = 2\pi + 8\pi n \end{cases} \Rightarrow$

$14\pi k = 2\pi + 8\pi n$

$14k = 2 + 8n \mid : 2$

$7k = 1 + 4n \Rightarrow 4n + 1 \vdots 7$. $n \in Z \Rightarrow$ n может давать остаток при делении на 7 от 0 до 6 включ

~~$4n+1 \equiv 5$~~

~~$4n \equiv_7 2$~~

1) $n \equiv_7 0 \Rightarrow 4n+1 \equiv_7 1$ - против

2) $n \equiv 1 \Rightarrow 4n+1 \equiv_7 5$ - против

3) $n \equiv 2 \Rightarrow 4n+1 \equiv_7 2$ - против

4) $n \equiv 3 \Rightarrow 4n+1 \equiv_7 6$ - против. До этого места верно

5) $n \equiv 4 \Rightarrow 4n+1 \equiv_7 3$ - против

6) $n \equiv 5 \Rightarrow 4n+1 \equiv_7 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$; $n \equiv_7 5$, $n \in Z$

7) $n \equiv 6 \Rightarrow 4n+1 \equiv_7 4$ - против

Общая формула не найдена.

Ответ: $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$; $n \in Z$; $n \equiv_7 5$

№2

$N = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 4050$

q – кол-во делителей N

$q = (1+1)\cdot(4+1)\cdot(2+1) = 30$

$5N = 20250 = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

p – кол-во делителей $5N$

$p = (1+1)(4+1)(3+1) = 40$

Ответ: $N = 4050$

№4

	5б	3б	4а	
4б	1а	2б	1б	5а
3а	2а	6	2а	3б
5а	1б	2б	1а	4б
	4а	3б	5б	

рис. 1

1) Обозначим клетки, как показано на рис. 1. Клетки с одинаковой цифрой те, которые получаются при повороте картинки. Клетки с одинаковой цифрой и буквой те, которые получаются при $2^{ух}$ поворотах в одну сторону.

2) ~~При выборе~~ ~~как~~ Выберем 2 группы от $1^{ой}$ до $5^{ой}$ (по номеру группы). ~~Какие бы мы в них клетки не выбирали мы всего получим 4 раскраски в первой выбранной группе мы выбираем одну клетку~~ и ~~во второй выбранной~~

Поочерёдно будем выбирать клетку из первой выбранной группы и из второй выбранной группы.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 5 9 8 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

всего будет 4 раскраски (т.к. всего выборов раскраски $4 \cdot 4 = 16$; каждая раскраска даёт ещё 3 при повороте на $90°$; $180°$ и $270°$).

3) Всего вариантов выбрать 2 группы из 5: ~~вар~~

$$C_2^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

4) Выбрав клетку с 6 номером и любую из 5 групп. мы получим 1 раскраску. Значит, что раскрасок с номером 6 всего 5.

5) Выберем ~~одну~~ ~~любую~~ группу с номером от 1 до 5. При раскраске 2х клеток с одной буквой мы получаем раскраску других двух клеток => при покраске клеток с одинаковой буквой есть только 1 раскраска. При раскраске 2х клеток с разной буквой мы получаем ещё 3 раскраски отличающиеся на поворот $90°$; $180°$ и $270°$. Значит при покраске 2х клеток в одной группе можно получить только 2 различные раскраски.

6) Итого раскрасок: $4 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot 5 = \cancel{60}\ 55$ ~~раск~~ различных раскрасок доски существует.

Ответ: ~~60~~ 55

№ 5

1) Пусть $a_{49} = d \neq 0$; $d \leq 25$, ~~так~~ т.к. $a_{49} + a_{50} \leq 50$, а чтобы сумма квадратов $(a_{49}^2 + a_{50}^2)$ была наиб $a_{49} + a_{50} = 50$.

Ищется максимум общей суммы, а не этой

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	5	9	8	5	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Тогда $a_{50} = 50 - \alpha$

$a_{49}^2 + a_{50}^2 = \alpha^2 + 2500 - 100\alpha + \alpha^2$

~~3) Пусть $a_{47}, a_{46}, \ldots a_{47-n} = \alpha$; а $a_{47-n-1} = 50 - n\alpha$~~

3) Т. к. $a_{49} \geq a_{48} \geq \ldots \geq a_1$, $a_{49} = \alpha$ ← Обозначение Допущение $\Rightarrow$

$\alpha \geq a_{48} \geq a_{47} \ldots \geq a_1$

4) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{48} \leq 50$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{48}^2$ – должно быть max $\Rightarrow$

Ищется max обязат. сумм

$\Rightarrow a_{48}; a_{47}; \ldots a_{48-n} = \alpha$, где $n \cdot \alpha \leq 50$; $a_{48-n-1} = 50 - n \cdot \alpha$

А остальные a_i чему равны? Это то же самое α?

5) $A = n^{n+1} \cdot \alpha^2 + (50 - n\alpha)^2 + 2500 - 100\alpha + 2\alpha^2 =$

$= 5000 - (n^2 - n - 2)\alpha^2 - 100(n+1)\alpha$
знак!

при $n > 2$; $-(n^2 - n - 2) \cdot \alpha^2$ – отрицательно отрицательна $\Rightarrow$

~~$A = 5000$~~ – A max – при $n = 2$

6) Значит, $A = 2 \cdot 625 + 0^2 + 2500 - ~~100 \cdot 2 \cdot 25~~ \; 2500 + 2 \cdot 625 = 2500$

Ответ: $A = 2500$, при

1) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $\ldots$, $a_{47} = 25$, $a_{48} = 25$, $a_{49} = 25$, $a_{50} = 25$

2) $a_1 = 0$, $\ldots$, $a_{49} = 0$, $a_{50} = 50$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ | МА0000624520

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия Михайлов

Имя Михаил

Отчество Васильевич

Дата рождения 18.03.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона +7-(909)-930-20-35 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

12 | 20 | 10 | 15 | 10 (67)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 2 4 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1.

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1. \\ \sin^2 9x + 1 - \cos^2 4x = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ (\sin 9x - \cos 4x)(\sin 9x + \cos 4x) = 0 \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} \sin 9x - \cos 4x = 0 \\ \sin 9x + \sin 4x = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} \sin 9x = \cos 4x \\ \sin 4x + \cos 4x = 1.* \end{cases}$

$* \ 1\cdot\sin 4x + 1\cdot\cos 4x = 1$ Поделим на корень из суммы квадратов коэффициентов и „соберём" в синус суммы.

$$\frac{\sin 4x}{\sqrt2} + \frac{\cos 4x}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt2}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$\sin 9x$?

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4}, k \in Z. \end{array}\right.$$

(2) $\begin{cases} \sin 9x + \cos 4x = 0 \\ \sin 9x + \sin 4x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin 9x = -\cos 4x \\ \sin 4x - \cos 4x = 1^{**} \end{cases}$

$** \ \sin 4x - \cos 4x = 1$ Сделаем аналогичное преобразование

$$\frac{\sin 4x}{\sqrt2} - \frac{\cos 4x}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}$$

$$\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt2}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z \\ 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi p, p \in Z. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi m}{4}, m \in Z. \\ x = \frac{\pi + 2\pi p}{4}, p \in Z, \end{array}\right.$$

. Доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 2 4 5 2 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Объединим пункты (1) и (2)

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z \\ x = \frac{\pi + 2p\pi}{4},\ p \in Z. \\ x = \frac{\pi + 4\pi m}{8},\ m \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;

$\frac{\pi + 2p\pi}{4}$, $p \in Z$;

$\frac{\pi + 4\pi m}{8}$, $m \in Z$.

№2.

Оценка: Разобьем число N на простые множители: $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\delta}$. Тогда кол-во делителей $= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$

$24 = 8 \cdot 3 = 8(2+1)$ То есть, в числе n было два простых множителя, равных двум, а стало три.

$32 = 8 \cdot 4 = 8(2+2)$

$8 = 2 \cdot 4 = (3+1)(1+1)$

Значит, такое число получить возможно

Пример: $N = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Изначально было ~~множителей~~ делителей: $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

~~Множ~~ Делители: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

В числе $(3N) = 1080$ стало делителей: $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 2 | 4 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Делители в числе 3N те же, что и в N, но ещё: 27, 54, 108, 216, 270, 540, 1080, 135.

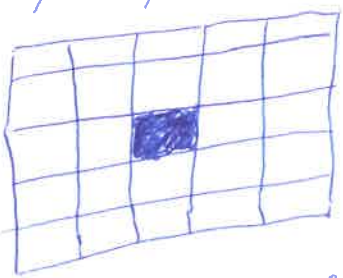
Ответ: существует (пример: $N=360$)

№4

Имеется поле 5×5.

Способов расставить две одинаковые клетки: $C_n^k = C_{25}^2 = \frac{25!}{2!\cdot 23!} = 12\cdot 25 = 300$

Теперь рассмотрим само поле



Закрашенная клетка — центр доски.

Если две синие клетки, которые мы закрасим, будут симметричны относительно центра доски, то поворотом можно получить только два рисунка. Таких пар $n=16$. ??

Если же две закрашенные синие клетки не симметричны относительно середины доски, то поворотами можно получить четыре рисунка.

Тогда всего возможных расстановок:

$$\frac{C_{25}^2-16}{4}+\frac{16}{2} = \frac{300-16}{4}+8 = 71+8=79$$

Ответ: 79.

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 2 | 4 | 5 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$a_{28} \le 15$, докажем это от противного:

Допустим, что $a_{28} > 15$

$a_{28} \le a_{29} \le a_{30} \Rightarrow a_{29} + a_{30} \ge 2a_{28} > 2 \cdot 15 = 30$

$a_{29} + a_{30} > 30$, но по условию задачи (из последней строки системы) $a_{29} + a_{30} \le 30$.

Противоречие. Значит, $a_{28} \le 15$.

Пусть $a_{30} = b$, тогда $a_{29} = 30 - b$ (для достижения максимума третьей строки)

$$30 - b \le b \Rightarrow b \ge 15.$$

$$a_{29}^2 + a_{30}^2 = (30-b)^2 + b^2 = 2b^2 - 60b + 900 = f(b)$$

$$f'(b) = 4b - 60 = 0 \Rightarrow b = 15$$

$f'(b)$: $-$ $+$; 0, 15, 30; $f(b)$: $\searrow$ $\nearrow$

На промежутке $[15; 30]$ $f(b)$ возрастает.

$$f(b)_{max} = (30-30)^2 + 30^2 = 900$$

Такое получается при $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_{28} = 0, a_{29} = 0, a_{30} = 30$.

доп. лист.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 2 4 5 2 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Большую сумму квадратов, чем $A=900$, получить при таких условиях невозможно.

Но у нас имеется второе „подходящие" точка $b=15$. Попробуем при ней получить максимальную сумму квадратов.

$a_1=0, a_2=0 \dots a_{27}=15, a_{28}=15, a_{29}=15, a_{30}=15$

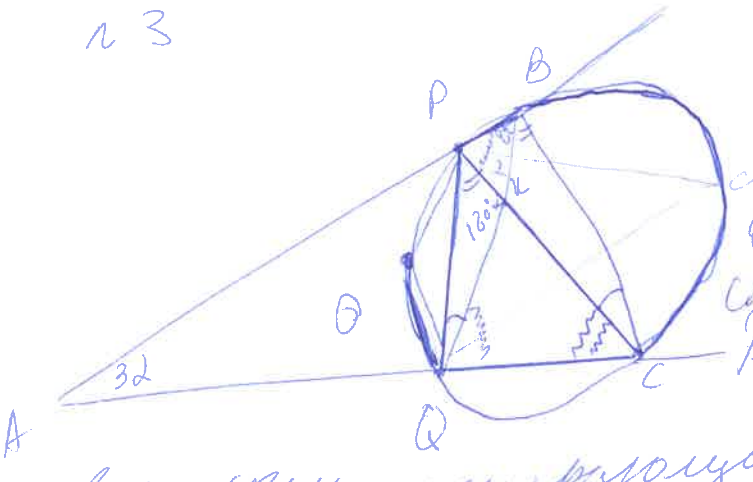
Ответ: $A_{max}=900$

1) $a_1=a_2=a_3=\dots=a_{29}=0,\ a_{30}=30$

2) $a_1=a_2=a_3=\dots=a_{26}=0,\ a_{27}=a_{28}=a_{29}=a_{30}=15.$

Таких последовательности всего две.

№ 3



Пусть $\angle BKP=\alpha$, тогда $\angle BAC=3\alpha$

Т.к. BPQC - вписанный четырёхугольник. Распишем все равные углы, опирающиеся на равные дуги. Тогда $\begin{cases} (+((=\alpha \\ \xi+\xi\xi=180°-\alpha \end{cases}$

$\angle BAC = \frac{\smile BC - \smile PQ}{2} = \frac{2\xi-2\xi\xi}{2} = \xi - \xi\xi = 3\alpha$

Лист 5 из 6

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 2 4 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} \xi + \xi\xi = 180^\circ - \alpha \\ \xi - \xi\xi = 3\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = 90^\circ + \alpha \\ \xi\xi = 90^\circ - 2\alpha \end{cases}$$

Теперь нужно рассмотреть точку O, являющуюся центром описанной окружности $\triangle APQ$

$OP = OQ$

$POQC$ – вписанный четырёхугольник

$\angle POQ + \angle PCQ = 180^\circ \Rightarrow \angle POQ = 90^\circ + 2\alpha$

$\angle OPQ = \angle OQP = \frac{180^\circ - \angle QOP}{2} = 45^\circ - \alpha$

~~Учитывая~~

$3\alpha < 90^\circ$, т.к. $\triangle ABC$ - остроугольный

$\alpha < 30^\circ$

$\angle APQ + ((+ \xi = 180^\circ \qquad \angle AQP + (+ \xi = 180^\circ$

$\angle APQ + ((= 90^\circ - \alpha \qquad \angle AQP + (= 90^\circ - \alpha$

$\cup OQ + \cup BC = 2(45^\circ - \alpha + \xi) = 2(45^\circ - \alpha + 90^\circ + \alpha) = 270$

$\cup OB + \cup QC = 90^\circ$

Тогда $\cup OB + \cup QC = 90^\circ$

$2(45^\circ - \alpha) + \cup PB + \cup QC = 90^\circ$

$\cup PB + \cup QC = 45^\circ + \alpha = 2((+() = 2\alpha$

$\alpha = 45^\circ$

Значит, точка O была поставлена не с той стороны, т. $O \in BC$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ „МЭИ"

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	9	2	9	2	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Вагапов

Имя Артем

Отчество Рустамович

Дата рождения 20.03.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8(965) 446-32-23 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 20 20 20 6 86

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА000092922120

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 & (1) \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 & (2) \end{cases}$$

Возведём выражение (1) в квадрат в обеих частях:

$(\sin 7x + \sin 4x)^2 = 1^2$

$\sin^2 7x + 2\sin 7x \cdot \sin 4x + \sin^2 4x = 1$ (3)

(3) − (2): $2\sin 7x \cdot \sin 4x = 0$ (4)

(4) → (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} (5) \\ \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} (6) \end{array}\right.$

Из системы (5):

$\begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = \pi n \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{7} = \frac{1}{8} + \frac{k}{2} \Rightarrow 2n = \frac{7}{4} + 7k \Rightarrow \varnothing,$

Т.к. числа $n, k \in \mathbb{Z}$, а число $\frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}$

Из системы (6):

$\begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 4x = \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi k}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{14} + \frac{2n}{7} = \frac{k}{4} \Rightarrow 2 + 8n = 7k$ (7)

Т.к. $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, то $2+8n$ делится на 7 $\Rightarrow n = 7m - 2$ (8), $m \in \mathbb{Z}$

Из условий (7), (8):

При $m=0$, $n=-2$.
При $n=-2$, $k=-2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

При $m=1$, $n=5$
При $n=5$, $k=6 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

При $m=2$, $n=12$
При $n=12$, $k=14 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2}$

Т.к. x - число периодичное, то из $\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi k}{4} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000092920

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$N = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot p_3^{q_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{q_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - простые числа

n - количество делителей

$n_N = (q_1+1)(q_2+1)(q_3+1) \cdot \ldots \cdot (q_n+1)$

Дано:

$n_N = 30$

$n_{5N} = 40$

Решение:

$$\begin{cases} n_N = 2\cdot3\cdot5 = (1+1)(2+1)(4+1) \\ n_{5N} = 2\cdot4\cdot5 = (1+1)(3+1)(4+1) \end{cases}$$

Из системы можем сделать вывод, что:

$$\begin{cases} N = p_1^1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^4 & (1) \\ 5N = p_1^1 \cdot p_2^3 \cdot p_3^4 & (2) \end{cases}$$

$(2):(1) \Rightarrow p_2 = 5 \Rightarrow N$ кратно p_2^2, то есть N кратно 25

Приведём пример подходящего числа N:

Допустим $p_1 = 3$, $p_3 = 2$:

Тогда: $N = p_1^1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^4 = 3 \cdot 5^2 \cdot 2^4 = 100 \cdot 3 \cdot 2^2 = 1200$

$5N = 1200 \cdot 5 = 6000$

$2\cdot3\cdot5 = 30$, верно.

Ответ: 1200

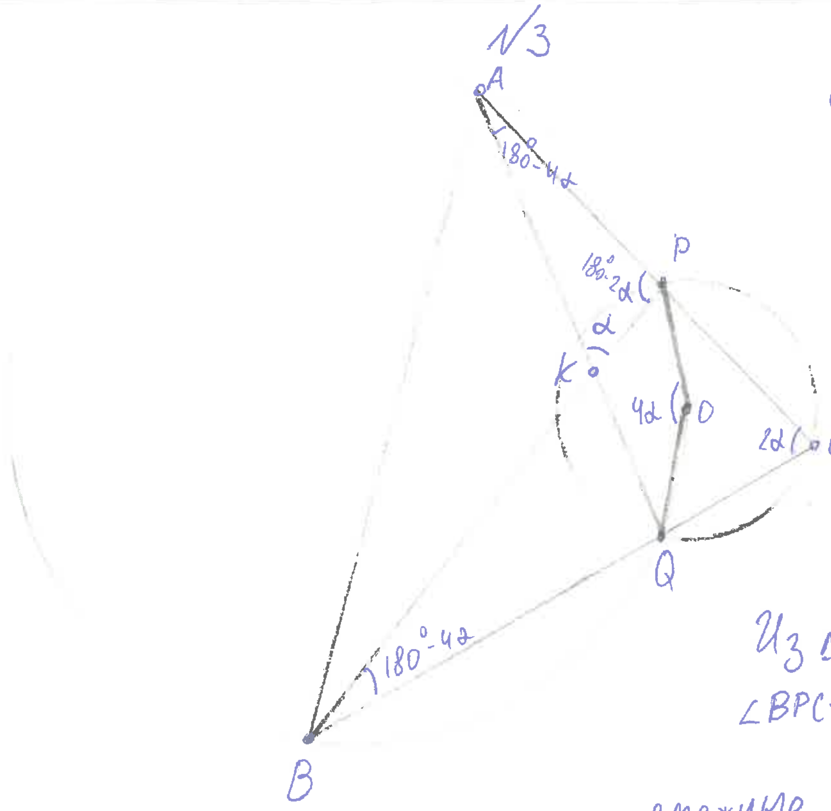
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 0 9 2 9 2 2 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Пусть $\angle AKP = \alpha$, тогда $\angle ACB = 2\alpha$

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 4\alpha$, как центральный угол.

$\angle QAP = 180° - \angle POQ = 180° - 4\alpha$, т.к. четырёхугольник $APOQ$ является вписанным.

$\angle QBP = \angle QAP$, т.к опираются на одну дугу QP. $\angle QBP = 180° - 4\alpha$

Из $\triangle BPC \Rightarrow \angle BPC = 180° - \angle PBC - \angle PCB$

$\angle BPC = 180° - (180° - 4\alpha) - 2\alpha = 2\alpha$

$\angle BPA = 180° - \angle BPC = 180° - 2\alpha$, как смежные

Из $\triangle KPA \Rightarrow \alpha + (180° - 2\alpha) + (180° - 4\alpha) = 180°$

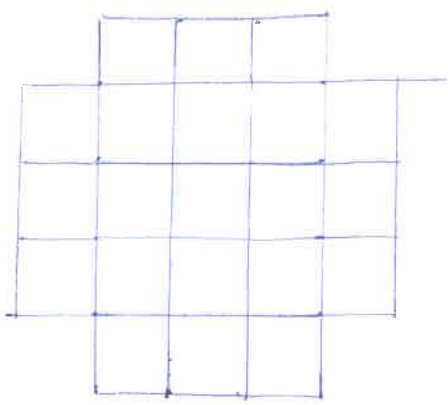
$5\alpha = 180°$

$\alpha = 36°$

Тогда $\angle ACB = 2\alpha = 72°$

Ответ: $72°$

№4



Мы можем выбрать две точки для раскраски C_{21}^{2} способами.

Но сразу заметим, что по этой формуле мы учитываем раскраски, которые повторяются при повороте фигуры

Заметим, что есть 2 случая раскраски двух точек.

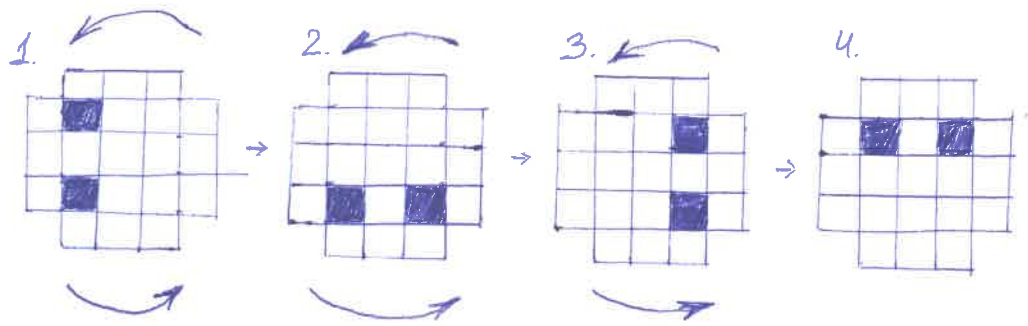
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 2 | 9 | 2 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 (продолжение)

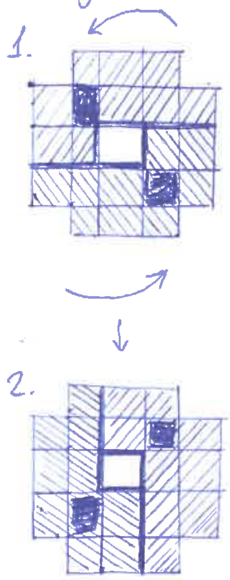
Случай №1: общий



В этом случае фигура при повороте имеет 4 разных способа расстановки закрашенных точек.

То есть формулой C_{21}^2 мы учли такие фигуры 4 раза

Случай №2: симметрия.



Разобьём нашу фигуру на две симметричные части, которые будут совпадать при двойном повороте фигуры (центральную точку не смотрим, т.к. она при повороте положение не меняет)

В этом случае фигура имеет два разных способа расстановки точек при повороте

То есть формулой C_{21}^2 мы учли такие фигуры 2 раза

Т.к. верхняя и нижняя фигуры симметричны, рассматриваем количество способов постановки одной точки на 10 клеток формулой C_{10}^1

Тогда общее количество точек для случая №1 и для случая №2:

$$N = \frac{C_{21}^2 + C_{10}^1}{4} = \frac{\frac{20\cdot 21}{2} + 10}{4} = \frac{10(21+1)}{4} = \frac{5\cdot 11\cdot 4}{4} = 55$$

Ответ: 55

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА000092922 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{49} \le a_{50} & (1) \\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} \le 50 & (2) \\ a_{49} + a_{50} \le 50 & (3) \end{cases}$$

Рассмотрим условие (3)

$$\begin{cases} a_{49} + a_{50} \le 50 \\ a_{49} \le a_{50} \end{cases}$$

Максимальная сумма $a_{49}^2 + a_{50}^2$ будет, когда $a_{50} = 50$

Тогда $a_{49} = 0$ и из условия (1) $\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_{48} = 0$

В этом случае $A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{50}^2 = 50^2 = 2500$

Рассмотрим условия (1) и (2)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} \le 50 \\ a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{50} \end{cases}$$

Максимальная сумма квадратов будет при $a_{48} = 50$, но тогда не будет выполняться условие (3)

Пусть $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} = 50 \\ a_{49} + a_{50} = 50 \end{cases}$

Тогда, с учетом условия $a_{47} \le a_{48} \le a_{49} \le a_{50}$, максимальная сумма квадратов будет достигаться при $a_{47} = a_{48} = a_{49} = a_{50} = 25$

$A = 25^2 \cdot 4 = 100 \cdot 25 = 2500$

То есть $A_{max} = 2500$ достигается в двух случаях.

Д-ва максимума нет, есть значение и последовательн.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = a_2 = \ldots = a_{49} = 0 \\ a_{50} = 50 \\ A = 2500 \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = a_2 = \ldots = a_{46} = 0 \\ a_{47} = a_{48} = a_{49} = a_{50} = 25 \\ A = 2500 \end{cases} \end{array}\right.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Бийск АНО ДО „ЦЯП"

Адрес площадки проведения

M	A	0	0	0	0	9	0	9	6	2	0

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ДАРЕНСКАЯ

Имя АРИНА

Отчество КОНСТАНТИНОВНА

Дата рождения 19.12.2001 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 7 листах Дата выполнения работы 15.02.2020

Номер телефона 89529463344 Подпись

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1 2 3 4 5

20 20 20 10 3 73

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 9 0 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

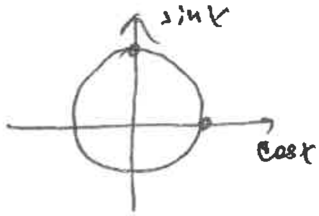
№1

$$2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2$$

$$\sin\frac{9x}{4}+\cos x=2$$

Т.к. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha \in [-1;1]$, то такое равенство возможно тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны 1.

$$\begin{cases}\sin\frac{9x}{4}=1\\ \cos x=1\end{cases}$$



$$\begin{cases}\frac{9x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\\ x=2\pi n,\ n\in Z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8\pi k}{9},\ k\in Z\\ x=2\pi n,\ n\in Z\end{cases}$$

равенства должны выполняться одновременно ⇒ найдем общий период.

$$2\pi n=\frac{2\pi}{9}+\frac{8\pi k}{9} \quad \Big|:2\pi$$

$$n=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}k$$ ~~подставим в ур-е системы~~

$$\cancel{x=2\pi n,\ n\in Z = 2\pi\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}k\right),\ k\in Z =}$$

$$\cancel{=\frac{2\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}k,\ k\in Z}$$

~~Ответ: $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}k,\ k\in Z$~~

см. след. стр.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 9 0 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$n = \frac{4k+1}{9} \Rightarrow 9n = 4k+1 \Rightarrow 9n - 4k = 1$

Решим диафантовое ур-е

$9n - 9\cdot 1 = 4k - 4\cdot 8$

$9(n-1) = 4(k-2)$

$n-1 \,\vdots\, 4 \qquad n = 4m+1$

$k-2 \,\vdots\, 9 \qquad k = 9m+2$, где $m \in Z$

Подставим в ур-е системы

$x = 2\pi n = 2\pi(4m+1) = 8\pi m + 2\pi$

$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{8\pi}{9}k = \frac{2\pi}{9} + \frac{8\pi}{9}(9m+2) =$

$= \frac{2\pi + 72\pi m + 16\pi}{9} = \frac{18\pi}{9} + \frac{72\pi m}{9} =$

$= 2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$

Ответ: $2\pi + 8\pi m$, $m \in Z$

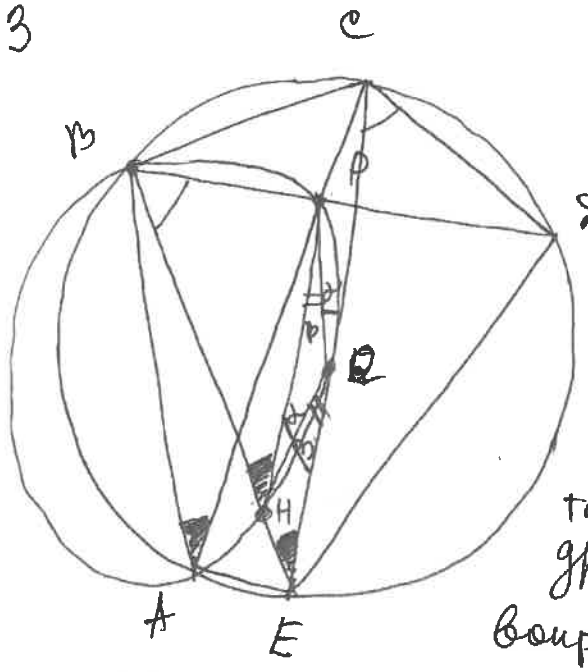
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 9 0 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3



1) По условию $\angle ECD = 40°$
$\angle ECD$ опирается на $\overset{\frown}{ED}$ и $\angle ECD$ - вписанный $\Rightarrow$
$\angle EBD = \angle ECD$ тк. он тоже вписанный и опирается на дугу $\overset{\frown}{ED}$.

2) Заметим, что $\angle EBD$ также вписан и в другую окружност (описанную вокруг $\triangle BAP$). Он опирается на дугу PH, где H - точка пересечения окружности, описанной вокруг $\triangle ABP$ и прямой BE. ~~Соединим PH~~ Проведем PH

3) Рассмотрим $\triangle HQP$. Пусть искомый угол, который нам нужно найти $\angle PQC = \alpha$. И пусть $\angle HQE = \beta$.
Тк. $\angle PHQ$ опирается на дугу $\overset{\frown}{QP}$ и он вписанный, а $\angle\alpha$ равен половине дуги $\overset{\frown}{QP}$ тк. CQ - касательная, а QP - секущая, то $\angle PQC = \angle\alpha = \angle PHQ$.
Аналогично $\angle HPQ = \angle HQE = \beta$

4) $\overset{\frown}{HP} = \overset{\frown}{HQ} + \overset{\frown}{QP} \Rightarrow 2\angle HBP = 2(\beta + \alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha + \beta = 40°$

5) Заметим, что $\angle BEC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \angle BAC$.
Заметим также, что $\angle BAP$ вписан в две окружности, а в окружности, которая описана вокруг $\triangle BAP$, $\angle BAP$ опирается на $\overset{\frown}{BP}$ также, как $\angle BHP \Rightarrow \angle BAP = \angle BHP = \angle BEC$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0000909620

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

6) Можем сделать вывод, что $HP \parallel EC$ тк BE – секущая, а $\angle BHP = \angle BEC$.

7) Тк $HP \parallel EC$, то QP также является секущей, а $\angle\alpha = \angle\beta$ как накрестлежащие при паралельных прямых HP и EC и секущей QP.

8) Тк $\alpha = \beta$, $\alpha + \beta = 40^\circ \Rightarrow 2\alpha = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$. За α мы обозначали искомый угол $\angle PQC$.

Ответ: 20°

№4 ~~Рассмотрим, какие~~ Рассмотрим, какими могут быть случаи расставления фишек. Обозначим фишки за точки, а крестики за места, куда мы не можем поставить фишки. Всего есть два способа:

В угловом квадр. 2×2 3 возможных места, чтобы поставить единственную фишку

•	X	•	X	•	X
X	•	X	•	X	•
•	X	•	X	•	X
X	•	X	•	X	•
•	X	•	X	•	X
X	•	X	•	X	•

X	•	X	•	X	•
•	X	•	X	•	X
X	•	X	•	X	•
•	X	•	X	•	X
X	•	X	•	X	•
•	X	•	X	•	X

Чтобы понять, что эти два способа единственные, стоит просто поставить фишку на любое из 36 мест, затем зачеркнуть места куда нельзя ставить фишки, затем расставлять другие фишки по оставшимся местам.

Таким образом мы убедимся, что вариантов расстановки всего два. Фишки будут стоять по диагоналям, т.е. либо только на черных местах, либо только на белых. Рассмотрим один случай расстановки, тк второй аналогичный. Всего мест, куда мы можем поставить фишки 18, а наших фишек 17. Сколькими способами мы можем расставить 17 одинаковых фишек, на 18 мест. Одно место будет оставаться всегда пустым, каждый раз меняя это пустое место, получим, что всего 18 вариантов расстановки наших 17 фишек по 18 местам. Итак, 18 вариантов расстановки фишек в одном случае (например, когда фишки стоят на черной диагонали), а тк случая два (когда фишки стоят на белой диагонали), то всего вариантов расстановки фишек $18 \cdot 2 = 36$. Итак всего 36 способов расставить фишки.

Ответ: 36.

№2 $b_4+b_3-b_2-b_1=9$ по условию $b_1>0$, $q>1$

Выразим b_n через b_1 по формуле для геом. прогрессии.

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, где b_1 – первый член геом прогрессии, а q – знаменатель геом. прогрессии

$b_2=b_1\cdot q$; $b_3=b_1\cdot q^2$; $b_4=b_1\cdot q^3$; $b_5=b_1\cdot q^4$; $b_6=b_1\cdot q^5$

$b_1\cdot q^3+b_1\cdot q^2-b_1\cdot q-b_1=9$

$b_1(q^3+q^2-q-1)=9$

$b_1(q^2(q+1)-(q+1))=9$

$b_1(q^2-1)(q+1)=9 \Rightarrow b_1=\dfrac{9}{(q^2-1)(q+1)}$

Требуется доказать, что $b_5+b_6\geq 36$. Можем доказать, что $b_5+b_6-36\geq 0$. Будем сравнивать наше выражение с нулем. Знак сравнения обозначим за V.

$b_5+b_6-36 \vee 0$

$b_1\cdot q^4+b_1\cdot q^5 \vee 36$

$b_1(q^4+q^5) \vee 36$

$b_1\cdot q^4(q+1) \vee 36$ подставим b_1: $\dfrac{9}{(q^2-1)\cancel{(q+1)}}\cdot q^4\cancel{(q+1)} \vee 36$

$\dfrac{9\cdot q^4}{q^2-1}-36 \vee 0 \Rightarrow \dfrac{9q^4-36(q^2-1)}{q^2-1} \vee 0$

$\dfrac{9q^4-36q^2+36}{q^2-1} \vee 0$ Обозначим q^2 за t

$q^2=t$, $t>0$. Тогда

Выделим полный квадрат: $\dfrac{9t^2-36t+36}{t-1}=\dfrac{(3t-6)^2}{t-1}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 М А 0 0 0 0 9 0 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в рамке справа

Осталось сравнить с нулем выражение

$\frac{(3t-6)^2}{t-1} \vee 0$ Видим, что числитель всегда положительный

$(3t-6)^2 \geq 0$.

Разберемся со знаменателем $q^2-1 \vee 0$.

Мы знаем, что прогрессия возрастающая и положительная $\Rightarrow$ знаменатель геометрической прогрессии больше 1 $\Rightarrow q^2>1 \Rightarrow q^2-1>0$

Т.к. $(3t-6)^2 \geq 0$, $q^2-1>0 \Rightarrow$

$t-1>0$

$\frac{(3t-6)^2}{t-1} \geq 0$ ч.т.д. ■

№5 $a^n+b^n+c^n \,\vdots\, a+b+c$ $n \in [2;12]$

Рассмотрим нечетные степени:

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-\ldots)$

$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)(a^4+b^4+c^4-\ldots)$

Заметим, что сумма a, b и c в нечетных степенях всегда будет делится на сумму $a+b+c$

$a^n+b^n+c^n \,\vdots\, a+b+c$, если n – нечетная.

Значит нам надо разобратся, что будет при n – четном.

Заметим, что при $a=b=c=1$, $1^n+1^n+1^n \,\vdots\, 3$

т.к. $3 \cdot 1^n \,\vdots\, 3$.

Рассмотрим ряд натуральных чисел 1 2 3 5 7 11...

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Бийск АНОДО „ЦДБ" | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 | 9 | 5 | 2 | 0

Адрес площадки проведения Шифр

Вариант № 1

Фамилия ПЯТНИЦКИЙ

Имя НИКИТА

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 04.11.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 15.02.2020

Номер телефона 89513666184 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1 2 3 4 5
18 | 16 | 20 | 10 | 2 | 66

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 9 0 9 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2$$

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{9x}{4}+\cos x=2\\ \sin\frac{9x}{4}\le 1\\ \cos x\le 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\sin\frac{9x}{4}=1\\ \cos x=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{9x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\\ x=2\pi k,\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{9}\pi+\frac{8}{9}\pi n,\ n\in Z\\ x=2\pi k,\ k\in Z\end{cases}$$

Буквы к и n перепутаны.

$$\frac{2}{9}\pi+\frac{8}{9}\pi n=2\pi k$$

$$k=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}n\Rightarrow x=\frac{2}{9}\pi+\frac{8}{9}\pi n,\ n\in Z$$

$$9k=1+4n \quad \Big|\ 9n-9\cdot 1=4k-4\cdot 8$$

$$9(n-1)=4(k-2) \quad n-1\ \vdots\ 4,\ k-2\ \vdots\ 9 \Rightarrow \begin{matrix}n=4a+1\\ k=9a+2\end{matrix}$$

~~Ответ: $\frac{2}{9}\pi+\frac{8}{9}\pi n,\ n\in Z\ (9k=1+4n,\ k\in Z)$~~

Ответ: $4\pi+18\pi a$.

№2

1) $b_4+b_3-b_2-b_1=9$

$b_4=qb_3=q^2b_2=q^3b_1$

$q^3b_1+q^2b_1-qb_1-b_1=9$

$b_1(q^3+q^2-q-1)=9$

$b_1(q(q^2-1)+(q^2-1))=9$

$b_1(q^2-1)(q+1)=9$

$b_1(q-1)(q+1)^2=9$

$$b_1=\frac{9}{(q-1)(q+1)^2}$$

2) $b_5+b_6-36=b_1q^4+b_1q^5-36=$

$$=b_1q^4(q+1)-36=\frac{9q^4(q+1)}{(q-1)(q+1)^2}-36=$$

$$=\frac{9q^4-36q^2+36q}{(q-1)(q+1)}=$$

ошибка в преобразования

$$=\frac{(3q^2-4)^2}{(q-1)(q+1)}$$

$$\left.\begin{matrix}b_1>0\ (\text{возр положит прогр})\\ q>1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow b_5+b_6-36\ge 0\Rightarrow b_5+b_6\ge 36$ (!)

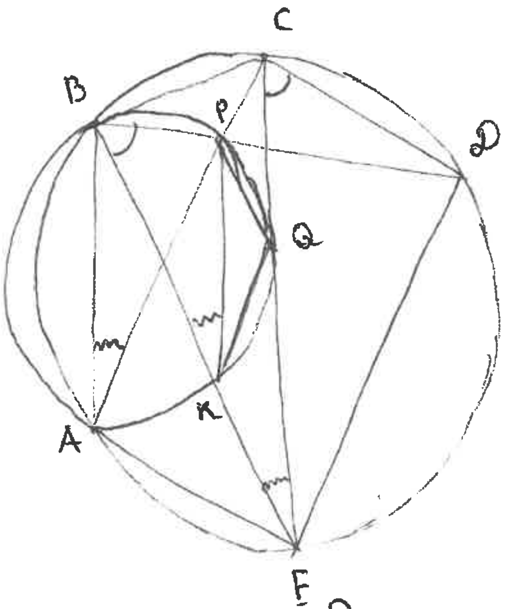
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 9 0 9 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Дано: ABCDE - пятиуг;
$AC \cap BD =$ т P;
окр $(O_2; R_2)$ описана около $\triangle ABP$;
окр $(O_1; R_1)$ описана около $\triangle ABCDE$;
CE кас. окр$(O_2; R) =$ т Q
$\angle ECD = 40^\circ$

Найти. $\angle CQP$

Решение.

1) Проведём $BE \cap$ окр$(O_2; R_2) =$ т K
Проведём PK

2) $\angle DCE = \frac{1}{2} \smile DE = \angle DBE = \frac{1}{2} \smile PK = \frac{1}{2}(\smile PQ + \smile QK) =$
$= \angle PQC + \angle KQE$

3) $\angle BEC = \frac{1}{2} \smile BC = \angle BAP = \angle BKP$

4) Рассмотрим прямые PK и EC и сек. BE
$\angle BKP = \angle BEC \Rightarrow PK \parallel EC$ (по 2-м соотв углам)

5) $PK \parallel EC \Rightarrow \angle PQC = \angle KPQ = \frac{1}{2} \smile KQ = \angle KQE \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DCE = 2\angle PQC = 40^\circ$
$\angle CQP = 20^\circ$

Ответ: 20°

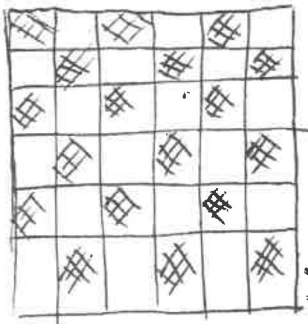
Олим пиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 М А 0 0 0 0 9 0 9 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



~~На~~ шахматной доске 6×6 18 черних и 18 белых клеток. Причём ни одна черная клетка не касается других черних клеток

Поставить хотя бы 1 фишку на кл. друг. цвета и кол-во мест уменьше на 2 (min) что недопуст

Значит все 17 фишек будет находиться на клетках одного ~~та~~ цвета.

Количество вариантов расстановки 17 фишек на черних клетках $= C_{18}^{17} = 18$

Та же ситуация и с белыми клетками.

Значит $N_{общ} = 18 \cdot 2 = 36$

В угловых клетках 2x2 не 2, а 3 способа поставить единств фишку.

Ответ: 36.

№5

1) При ~~n ≥ 2~~ n нечетных
$a^n + b^n + c^n = (a+b+c)(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + \ldots) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ остается рассмотреть случай $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$

2) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ba + ca + cb) =$

Нельзя вынести $(a+b+c) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ этих троек не существует.

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Бийск АНОДО "ЦДП"

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	6	7	2	2	0

Шифр

Вариант № 1

Фамилия КУЗНЕЦОВ

Имя АРТЕМ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 24.09.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 15.02.2020

Номер телефона 89095098351 **Подпись** Куз

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1 2 3 4 5

20 | 20 | 20 | 10 | 2

72

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 8 6 7 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2$$

$$\sin\frac{9x}{4}+\cos x=2.$$

$$\begin{cases}\sin\frac{9x}{4}=1 \to x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8k_1\pi}{9}\\ \cos x=1 \to x=2\pi k_2.\end{cases} \quad k_{1,2}\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi}{9}+\frac{8k_1\pi}{9}=2\pi k_2$$

$$k_2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}k_1$$

$$x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8}{9}\pi k_1 \quad k_1\in\mathbb{Z}$$

$9(k_2-1)=4(k_1-2)$

$(k_2-1)\vdots 4$ и $(k_1-2)\vdots 9$

$k_2=4p+1$ $k_1=9p+2$ $p\in\mathbb{Z}$

$x=2\pi k_2=2\pi(4p+1)=8\pi p+2\pi$

$x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8}{9}\pi(9p+2)=\frac{2\pi}{9}+8\pi p+\frac{16\pi}{9}=$

$=\frac{18\pi}{9}+8\pi p=2\pi+8\pi p$

Ответ

№2 возраст. $\to q>1$
полож. $\to b_1>0$.

$b_4+b_3-b_2-b_1=9$; $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ и $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

$b_6=b_1q^5$; $b_5=b_1q^4\ldots$

$b_1q^3+b_1q^2-b_1q-b_1=9$

$b_1(q^3+q^2-q-1)=9$

$b_1(q+1)(q^2-1)=9$

$b_1=\frac{9}{(q^2-1)(q+1)}$

$b_5+b_6\geqslant 36$

$b_1q^5+b_1q^4\geqslant 36.$

$b_1q^4(q+1)\geqslant 36$

$\frac{9q^4(q+1)}{(q^2-1)(q+1)}\geqslant 36$

$\frac{9q^4}{q^2-1}\geqslant 36 \to \frac{9q^4-36q^2+36}{q^2-1}\geqslant 0$

пусть $q^2=t$

$\frac{9t^2-36t+36}{t-1}\geqslant 0$

$\frac{t^2-4t+4}{t-1}\geqslant 0$

$\frac{(t-2)^2}{t-1}\geqslant 0.$

числитель всегда $\geqslant 0$

$t-1>0$, т.к. $q>1$,

$q\,t=q^2$

Лист 1 из 3

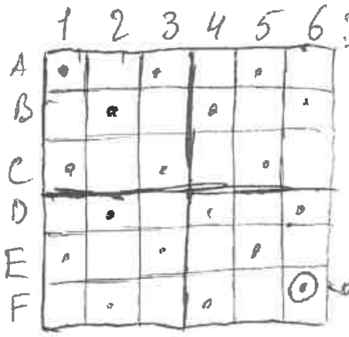
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

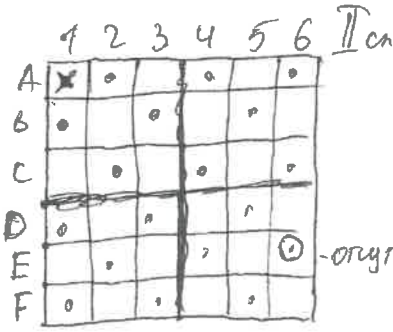
Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 8 6 7 2 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке справа

№4

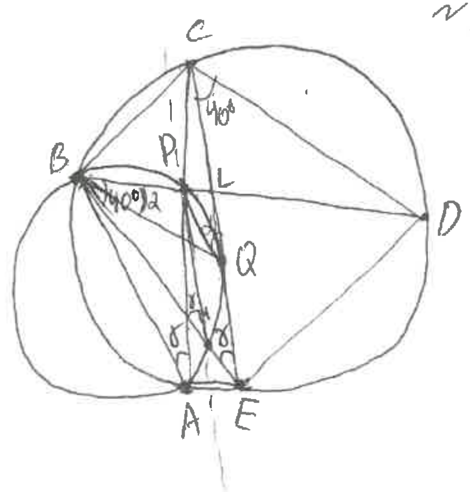




I сл Разделим поле на 4 куска по 3x3. Расставим все фишки; ~~они могут~~ ~~стать и~~ может стать 5шт или 4шт
В разных случаях фишка стоит на разных клетке (I сл - A1; II сл - A2).
Всего так может стать - 18 фишек, но имеется всего 17ф. → одна из расположенных этих фишек будет отсутствовать →
Мы можем эту пустую клетку расставлять по всем возможным местам фишек, (которых 18 мест) → в I случае расставим в 18 разных значений и во II случае расставим в 18 разных значений →
→ Ответ: 36 способов. 2x2

В угловом квадрате не 2, а 3 способа поставить единственную фишку.

№3



Дано:
$\angle ECD = 40^\circ$
Найти: $\angle CQP$
Решение:
Т.К. одна дуга
$\angle ECD = \angle EBD = 40$

$\frac{1}{2} PQ = \angle PQC$

$\frac{1}{2} \smile MP = \frac{1}{2} \smile MQ + \frac{1}{2} \smile PQ = 40^\circ = \angle QBD + \angle QBE$

$\smile MP = 80^\circ$

Т.К. $\angle QBD$ на дуге $PQ \Rightarrow \angle PQC = \angle QBD = \alpha$.

еще $\angle CEB = \angle CAB$ т.к одна дуга BC, $\angle BAP = \angle MBP = \gamma$; [redacted] $PM \parallel CE$

Т.К $\angle PMB = \angle CEB$; $\to \angle QBE = \angle QB = \alpha \to 40^\circ = \alpha + \alpha \to \alpha = 20^\circ$

опирается на QM как QPM

Ответ: 20°.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	8	6	7	2	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$a \le b \le c$; $a^n + b^n + c^n \vdots a+b+c$ для $2 \le n \le 12$

a и b
a и c — не имеют общих дел.
b и c

рассмотрим $n=2$

$a^2+b^2+c^2 \vdots a+b+c.$

пусть среди чисел есть равные; $a=b \to (a,b)=1$; пусть $a=1$.

~~$(a^2+b^2+c^2=n)$~~ $\quad (a+b+c=k)$ где k какие-то целые числа

$a+b=mc$
$a+c=lb$ где m и l — натуральные
$a+b=$

$a^2+b^2+c^2 = k(a+b+c)$

$2+c^2 = n(2+c)$

$n = \dfrac{2+c^2}{2+c}$, $n = \dfrac{\left(\frac{2}{c}+c\right)c}{2+c} =$

$= \dfrac{\frac{2}{c}+c}{2+c}\cdot c = 1$ подойдет при $c=1$

подойдет $a=b=c=1$

при $c=2$

$\dfrac{1+2}{2+2}\cdot 2 = \dfrac{3}{2}$ — не целое.

при $c>2$ — тоже не целое

тоже будет и при $a^n+b^n+c^n$ где $n \in [2;12]$

$2+c^n = k(2+c)$

$k = \dfrac{2+c^n}{2+c} = \dfrac{\frac{2+c}{c^{n-1}}}{2+c}c^{n-1}$

$c^{n-1} \vdots 2$ и не >2.

при $c=1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Бийск АНО ДО „ЦДП"

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	7	5	0	2	0

Шифр

Вариант № 1

Фамилия ДЕЙС

Имя ЕКАТЕРИНА

Отчество СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 15.05.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 15.02.2020

Номер телефона 89137587783 **Подпись** Дейс

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1 2 3 4 5
| 20 | 20 | 20 | 10 | 2 |

72

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 8 7 5 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2$

$2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}=\sin(\frac{9x}{8}-\frac{9x}{8})+\sin(\frac{9x}{8}+\frac{9x}{8})=\underbrace{\sin 0}_{0}+\sin\frac{18x}{8}=0+\sin\frac{9x}{4}=$
$=\sin\frac{9x}{4}$

$\sin\frac{9x}{4}+\cos x=2$

$|\sin\frac{9x}{4}|\leq 1$ $|\cos x|\leq 1$ $\Rightarrow$ Получается что это равенство может достигаться только когда обе функции ~~достигают~~ имеют максимальное значение, т.е.:

$\begin{cases}\sin\frac{9x}{4}=1\\ \cos x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{9x}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=2\pi n\end{cases}\Rightarrow$ где $n\in Z, k\in Z$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{9}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4}{9}\cdot 2k\pi\\ x=2\pi n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8}{9}k\pi\ (1)\\ x=2\pi n\ (2)\end{cases}\Rightarrow \frac{2\pi}{9}+\frac{8k\pi}{9}=2\pi n$

$\frac{2+8k}{9}=2n$

$2+8k=18n$

$1+4k=9n$

$n=\frac{1+4k}{9}$ – подставляем это значение во (2) уравнение $\Rightarrow$

~~$x=2\pi n=2\pi\cdot\frac{1+4k}{9}=\frac{2\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}k$, где $k\in Z$~~

~~Ответ: $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8\pi}{9}k$, $k\in Z$~~

Продолжение решения после 5 задачи

№2

b_n – возрастающая положительная геометрическая прогрессия
первый член прогрессии – b_1, а $b_n=b_1q^{n-1}$, тогда

$b_2=b_1q$ $b_3=b_1q^2$ $b_4=b_1q^3$ $b_5=b_1q^4$ $b_6=b_1q^5$

мы знаем, что

$b_4+b_3-b_2-b_1=9$

Подставим значения b_4, b_3, b_2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 8 7 5 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$b_1q^3+b_1q^2-b_1q-b_1=9$

$b_1(q^3+q^2-q-1)=9$

$b_1(q^2(q+1)-(q+1))=9$

$b_1((q+1)(q^2-1))=9$

$b_1=\frac{9}{(q+1)(q^2-1)}$

Нам надо доказать, что $b_5+b_6\geq 36$

Предположим, что это правда, подставим значения b_5 и b_6

$b_1q^4+b_1q^5\geq 36$

$b_1q^4(1+q)\geq 36$

Подставим b_1

$\frac{9q^4\cancel{(1+q)}}{\cancel{(q+1)}(q^2-1)}\geq 36$ из-за того что прогрессия возрастающая положительная и геометрическая мы знаем что $q>1$ $b_1\geq 0$, поэтому мы можем сократить дробь

$\frac{9q^4-36(q^2-1)}{q^2-1}\geq 0$

$\frac{9q^4-36q^2+36}{q^2-1}\geq 0$

$q>1 \Rightarrow q^2>1$

Пусть $q^2=a$ $a>0$ $a>1$ (т.к $q>1$)

$\frac{9a^2-36a+36}{t-1}\geq 0$

$\frac{(3a-6)^2}{t-1}\geq 0$

$a-1\geq 0$ всегда так как $a>1$

$(3t-6)^2\geq 0$ всегда так как квадрат

Следовательно это равенство верно при любых a удовлетворяющих условию, значит наше предположение было верно. $\Rightarrow$

$\Rightarrow b_5+b_6\geq 36$ ЧТД

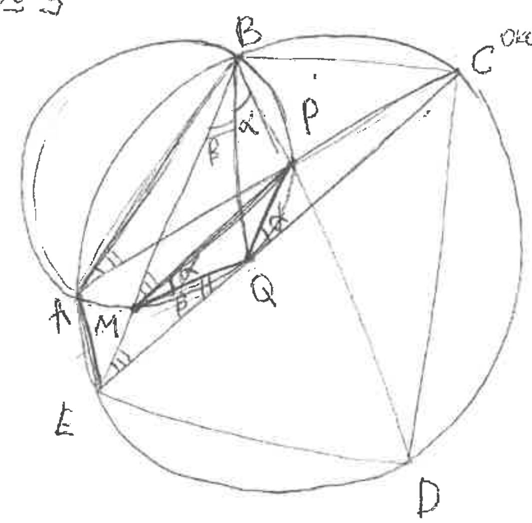
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 8 7 5 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3



Дано: около $ABCDE$ описана окружность

$AC \cap BD = \{P\}$

CE касается окр. описанной около $\triangle ABP$ в точке Q $\angle ECD = 40^\circ$

Найти: $\angle CQP$

Решение:

Пусть $\angle CQP = \alpha$

$\angle EBD = 40^\circ$ – опирается на дугу ED

CQ – касательная $\Rightarrow$

$\angle PQC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{QP}$

$\angle PMQ = \frac{1}{2} \overset{\frown}{PQ} \Rightarrow \angle PMQ = \angle PQC$ ~~$\angle PQC = \angle PMQ$ – опирае~~

вписанный угол опирающийся на дугу PQ

~~$\angle BQP$~~ По аналогии $\angle QBP = \alpha = \angle PQC$

Пусть угол $MBQ = \beta \Rightarrow \angle MBQ = \frac{1}{2} \overset{\frown}{MQ} = \angle EMQ$ – CQ касательная

$\angle EBD = \angle EBQ + QBD = 40^\circ = \alpha + \beta$

$\angle CEB = \angle CAB$ – опираются на одну дугу BC

$\begin{cases} \angle BAP = \angle BEC \\ \angle BMP = \angle BAP \end{cases}$ – опираются на дугу BC; ~~опираются на одну дугу~~; – опираются на дугу BP $\Rightarrow \angle BEC = \angle BMP$

$\angle BEC$ и $\angle BMP$ – это соответственные углы и если они равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow MP \parallel EC \Rightarrow \angle PMQ = \angle MQE$ – накрестлежащие углы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \beta$ $\quad \begin{cases} \alpha + \beta = 40^\circ \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha = 40^\circ \\ \alpha = 20^\circ \end{matrix}$

Ответ: $\angle CQP = 20^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 8 7 5 0 2 0

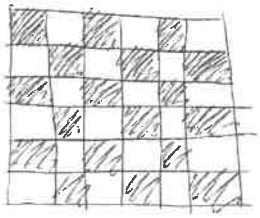
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и в рамке справа

№ 4

Давайте переформулируем условие задачи: сколькими способами можно поставить 18 фишек на шахматную доску 6×6, если фишки нельзя ставить на клетки, имеющие общую сторону и сколькими способами можно убрать одну фишку из поставленных? Эти зада[ч]и условия аналогичны условию задачи.

Давайте ~~нам~~ найдём сколькими способами можно расставить 18 фишек удовлетворяющих условию. Давайте покрасим доску 6×6 в шахматную раскраску.



Мы можем заметить, что белые клетки с белыми не имеют общих сторон, также как и черные клетки с чёрными, и при этом количество белых равно количеству черных клеток и равно $\frac{6\cdot 6}{2}=18$. Мы видим что условие размещения черных ~~а бе~~ клеток и белых клеток аналогично условию расставлению 18 фишек, и причем мы можем покрасить доску шахматной раскраской только 1 способом, получается что также как и с клетками нам подходят либо черные места для фишек, либо белые, т.е. существует всего 2 способа расстановки 18 фишек ~~как в~~ на шахматную доску 6×6, чтобы фишки не стояли на клетках имеющих общую сторону.

Теперь найдём сколькими способами можно убрать одну из 18 фишек, логично что 18 способами можно убрать одну из 18 фишек. Тогда получается что всего способов поставить 17 фишек на доску удовлетворяющим условиям, можно $2\cdot 18=36$ способами

Ответ: 36 способов

2 — кол-во способов расставить 18 фишек на доску 6×6 удовлетворяющим условиям; 18 — кол-во способов убрать 1 из 18 фишек

2×2

В угловом квадрате не 2, а 3 способа поставить единственную фишку

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 М А 0 0 0 0 8 7 5 0 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Частные случаи решения когда $a=1, b=1, c=1$

$1^n+1^n+1^n=3 \vdots 1^n$: $1+1+1=3$

-не взаимно просты!

Давайте рассмотрим случаи когда $a=b=c$, тогда мы получаем:

$x^n+x^n+x^n$ должно делиться на $x+x+x$

$3x^n \vdots 3x$ · и это верно для любого x, т.е. часть решения это когда $a=b=c$ условие выполняется

№1 Продолжение решения

$n=\frac{1+4k}{9}$ $n\in Z$ и $k\in Z$, так найдём все такие n и k при которых это условие будет выполняться

$9n-4k=1$

Частным решением является $n=1$ $k=2$

$9n-4k=9\cdot1-4\cdot2$

$9n-9\cdot1=4k-4\cdot2$

$9(n-1)=4(k-2)$

Поскольку $n\in Z$ и $k\in Z \Rightarrow k-2 \vdots 9$ $n-1 \vdots 4$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ их можно представить как

$\begin{cases} n-1=4a \\ k-2=9a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=4a+1 \\ k=9a+2 \end{cases}$ где $a\in Z$ подставим в изначальное уравнение

$x=2\pi n=2\pi(4a+1)=8\pi a+2\pi$

Ответ: $x=8\pi a+2\pi$ где $a\in Z$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	7	0	0	7	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия РОДИОНОВ

Имя ИВАН

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 15.10.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона +7(916)804-81-41 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 10 | 20 | 12 80

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 0 0 7 2 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

Возведём первое уравнение в квадрат и вычтем из него второе:

$2\sin 9x \sin 4x = 0$

Следовательно, возможны лишь следующие случаи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 9x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi l}{9}, l \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi t}{4}, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы получаем, что

$(:\pi)\ \frac{\pi n}{9} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ ($k, n \in \mathbb{Z}$ здесь и далее)

$\frac{n}{9} = \frac{1}{8} + \frac{k}{2}\ (\cdot 72)$

$8n - 36k = 9$

– получаем линейное диофантово уравнение. Заменим, что левая часть всегда чётная ~~(8(n-9k~~ $(4(2n-9k))$, а правая всегда нечётная. Следовательно, уравнение решений не имеет.

*Продолжение этой задачи (№1) на листе №2

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 7 0 0 7 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача1. Продолжение.
Из второй системы получаем, что

$(:\pi)\ \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi l}{9}=\frac{\pi t}{4}$ ($t, l \in \mathbb{Z}$ здесь и далее)

$\frac{1}{18}+\frac{2l}{9}=\frac{t}{4}\ (\cdot 36)$

$\cancel{8l-9t}\quad 2+8l=9t$

$9t-8l=2$

Снова получаем линейное диофантово уравнение. Подбором найдём корень $t=2$, $l=2$ $(9\cdot2-8\cdot2=18-16=2)$. Поскольку это уравнение в целых числах, ~~дальнейшие~~ все остальные корни не будут никак отражаться на исходных тригонометрических уравнениях из-за ~~как продолжение окружности (пер~~ периода. Подставим найденные значения, получим, что

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2\pi d,\ d\in\mathbb{Z}}$ $\left(\begin{matrix}\sin(9x)=1\\ \sin(4x)=0\end{matrix}\right.$ – всё прекрасно выполняется$\Big)$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi d,\ d\in\mathbb{Z}$

2. ~~Раз Рассмотрим число $360=2^3\cdot3^2\cdot5$~~
Рассмотрим число $360=2^3\cdot3^2\cdot5$:
Домножение числа на некоторое p^n (p-простое) порождает ~~4·3·2~~ $\cdot(n+1)$ ~~раз~~ чисел-делителей исходного. То есть тогда количество делителей числа ~~определяется как произведение~~ определяется как $b=4\cdot3\cdot2\cdot(n+1)$. Тогда нам следует найти такое N, для которого b (так назовём кол-во делителей)

*Продолжение этой задачи (№2) на листе (№3)

Доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 0 0 7 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2. Продолжение.

для которого ~~$\tau = 24$, а при данном~~

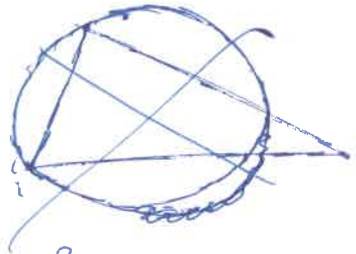
$\tau(N) = 24$, а $\tau(3N) = 32$

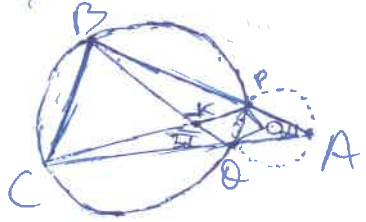
Число $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ как раз удовлетворяет этим условиям: $\tau(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

$\tau(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5) = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$

Ответ: да, существует. Например, число $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Задача 3.





Усл-я наоборот

1) $\angle BAC = \alpha$

2) $\angle BKP = 3\alpha$

$\angle POQ$ опирается на центр

$\Rightarrow \angle POQ = 5\alpha$?

Не соответствует ни одному варианту условий

2) $12\alpha = \cup BC + \cup BP + \cup CQ$

($\cup X$ – дуга x)

$\angle BKP = (\cup BP + \cup QC) \cdot \frac{1}{2} = \alpha$

$2\alpha = BP + QC$

$\angle BAC = (\cup BC + \cup PQ) \cdot \frac{1}{2} = 3\alpha$

$\cup BC - PQ = 5\alpha$

$\cup BP + \cup QC + \cup BC - \cup PQ = 8\alpha$

$PQ - PQ = 8\alpha$

$\begin{cases} 360 - 2PQ = 8\alpha \\ PQ = 360 - 12\alpha \end{cases}$

$360 - 720 + 24\alpha = 8\alpha$

$16\alpha = 360$

*Продолжение задачи №3 на листе №7

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА0000700720

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3 Продолжение.

$$\alpha = \frac{360}{16} = \frac{180}{8} = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22{,}5^0$$

$$\angle BAC = 3\cdot\alpha = 67{,}5^0$$

Ответ: $\angle BAC = 67{,}5^0$.

Задача 5.

$$\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le 30, \\ a_1 + \ldots + a_{28} \le 30, \\ a_{29} + a_{30} \le 30 \end{cases}$$

$A = a_1^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2 \to max.$

Согласно методу Штурма, мы стремимся минимизировать количество членов в итоговой сумме квадратов (то есть большую часть членов $=0$) для $A \to max$. (А для выполнения нер-ва Коши, все получившиеся члены должны быть равны между собой). (очевидно, что $15 \le L \le 30$ }- иначе max по-просту не будет) Для достижения нашей цели положим, что $a_{27} = L$. Тогда $a_{28} \le 30 - L$; ~~a_{29}, a_{30}~~

$a_{29} + a_{30} \le \left[\frac{30}{30-L}\right](30-L)$, где $[a]$ – целая часть числа – данное ограничение поможет нам соблюсти все условие.

при $L=30$ чему равно это выражение?

Это надо было доказать

Нер-во странное $a_{29}+a_{30}=30$

~~Тогда $\sum_{i=1}^{30} a_i^2 \le L^2 + (30-L)^2 + \left[\frac{30}{30} - L\right]$.~~

Тогда $\sum_{i=1}^{30} a_i^2$ $A \le L^2 + (30-L)^2 + \left[\frac{30}{30-L}\right](30-L)^2$

Это не следует из предыдущего

* Продолжение задачи №5 на листе №5

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 7 0 0 7 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5. Продолжение.

$L^2+(30-L)^2+\left[\frac{30}{30-L}\right](30-L)^2=$

$=L^2+900-60L+L^2+30(30-L)=$

$=2L^2-90L+1800$

Имеем ограничение на L: $15\le L\le 30$ =>

поскольку $2L^2-90L+1800$ – парабола с ветвями вверх, мы ищем наиболее удалённые от её вершины значения, удовлетворяющие $15\le L\le 30$.

$L_0=22{,}5$ – вершина;

$L=15$ и $L=30$ равноудалены от вершины и имеют одинаковые значение функции в этой точке: $\cancel{15^2-45\cdot15+1800}$ $\overset{900}{=}$

$2\cdot(15^2)-90\cdot15+1800=900$

$2\cdot(30)^2-90\cdot30+1800=900$

Искомый максимум – 900. ~~Проверим, достижим~~ Как мы получили ранее, он действительно достижим. При этом возможны всего 2 исходные последовательности, позволяющие достичь этого максимума:

$\cancel{\{0;0}$ $\{a_1;a_2;\ldots;a_{28};a_{29};a_{30}\}=$

$=\{0;0;\ldots;15;15;15;15\}$

и $\{a_1;a_2;\ldots;a_{28};a_{29};a_{30}\}=\{0;0;\ldots;0;0;30\}$

* продолжение задачи №5 на листе №6

Доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 7 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5. Продолжение.

Ответ: $A^{max} = 900$

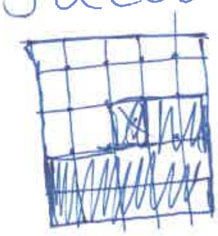
$\{0;0;\ldots;15;15;15;15\}$

$\{0;0;\ldots;0;0;30\}$

Задача 4.

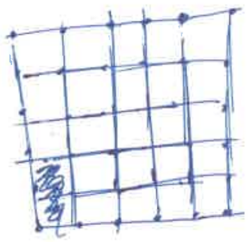
Для начала рассмотрим кол-во способов раскрасить 2 клетки из 25: C_{25}^{2}.
Однако, поворачивая исходный квадрат, мы сможем находить случаи, уже бывшие ранее, чего нам требуется избежать.

Рассмотрим случай 1:



Клетка, которую мы закрасим в одной половинке, автоматически задаёт вторую; кол-во случаев делим на: $C_{12}^{1} \cdot \frac{1}{2}$

Рассмотрим случай 2: Закрашивая клетки подобным образом (~~подряд~~ на рис.-ми), мы поворотом сможем получить ещё различные



вариации $\Rightarrow$ необходимо будет поделить число способов на 4.

* Продолжение этой задачи (№ 4) на листе (№ 7).

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

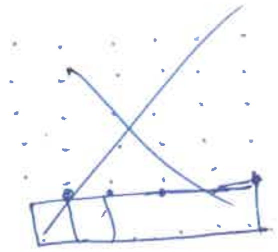
Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0 | 7 | 2 | 0

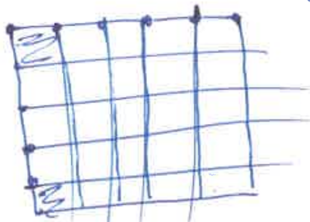
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4. Продолжение.

Рассмотрим случай 3:





Раскрашивая подобным образом, как на ~~рд~~ рисунке, мы рисунка => снова

вновь получим 4 ~~длин~~

длин на 4.

Таким образом, получаем $C_{12}^{1} \cdot \frac{1}{2}$ и

$\left(C_{25}^{2} - C_{12}^{1}\right) \cdot \frac{1}{4}$ — остаётся просто сложить их и мы получим искомое кол-во раскрасок:

$$\frac{1}{2}\left(\cdot \cancel{12}\frac{12!}{11!} + \frac{1}{2}\left(\frac{25!}{23!\cdot 2} - \frac{12!}{11!}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(12 + \frac{1}{2}\left(300 - 12\right)\right) = \frac{1}{2}\left(12 + 144\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(156) = 78$$ раскрасок.

Ответ: 78 раскрасок.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	6	9	3	5	2	0

Шифр (не заполнять!)

СВФУ, г. Якутск
Площадка проведения (город, ОУ)

Вариант № 2

Фамилия Попов

Имя Ньургун

Отчество Николаевич

Дата рождения 05.11.2002 **Класс** 11

ОУ, местоположение ГБНОУ РС(Я) «РЛИ», г. Якутск.

Предмет математика

Этап олимпиады заключительной

Работа выполнена на _____ **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89841031719 **Подпись** ________

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

16 | 20 | 20 | 20 | 6

82

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 6 9 3 5 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

$(\sin 7x + \sin 4x)^2 = 1^2$

$\sin^2 7x + 2\sin 7x \cdot \sin 4x + \sin^2 4x = 1$

$1 + 2\cdot \sin 7x \cdot \sin 4x = 1$

$2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 4x = 0$

$\sin 7x \cdot \sin 4x = 0$

Значит: $\sin 7x = 0$ или $\sin 4x = 0$

$7x = \pi k$ $\quad$ $4x = \pi k$

$x = \frac{\pi k}{7}$ $\quad$ $x = \frac{\pi k}{4}$

Проверим: $\sin\left(7\cdot\frac{\pi k}{7}\right) + \sin\left(4\cdot\frac{\pi k}{7}\right) = 1$ $\quad$ $\sin\left(7\cdot\frac{\pi k}{4}\right) + \sin\left(4\cdot\frac{\pi k}{4}\right) = 1$

$\sin \pi k + \sin\left(\frac{4}{7}\pi k\right) = 1$ $\quad$ $\sin\left(\frac{7}{4}\pi k\right) + \sin \pi k = 1$

$\sin \pi k$ всегда равно 0 $\quad$ $\sin \pi k$ всегда равно 0

$\sin \frac{4}{7}\pi k = 1$ $\quad$ $\sin \frac{7}{4}\pi k = 1$

$\frac{4}{7}\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\quad$ $\frac{7}{4}\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\frac{4}{7}k = \frac{1+4n}{2}$ $\quad$ $\frac{7}{4}k = \frac{1+4n}{2}$

$8k = 7 + 28n$ $\quad$ $7k = 2 + 8n$

При чётном k м. б. равенство

В обеих случаях нет решений, когда k и n ~~натуральные~~ целые числа.

Ответ: нет решений.

② N у мено равно $12800 = 2^9 \cdot 5^2$

Проверим подходит ли это число условию:

у него всего $9\cdot 2 + 9 + 2 + 1$ делителей, это ровно 30.

А 5N должно иметь 40 делителей, т.е. число ~~8~~ $2^9 \cdot 5^3$ должно иметь 40 делителей.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 6 9 3 5 2 0

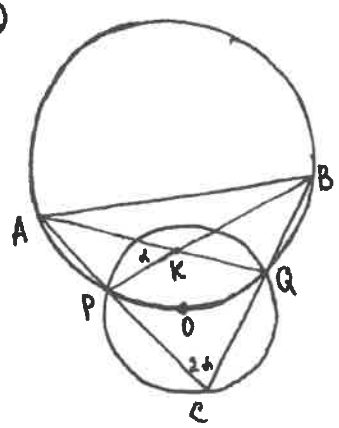
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Проверим сколько у него делителей:
у него всего $9\cdot3+9+3+1$ делителей, это ровно 40.
Значит наше число подходит условию. И достаточно привести один пример.

Ответ: 12800

③



$\angle ACB = 2\angle AKP$

$\angle ACB = ?$

Пусть $\angle AKP = \alpha \Rightarrow \angle ACB = 2\alpha$

Обозначим центр описанной около $\triangle PQC$ окружности, как O. Тогда $\angle POQ = 2\angle PCQ$, $\angle POQ = 4\alpha$. $\Rightarrow \angle PBQ = 180 - 4\alpha$, т.к. они опираются на одну хорду PQ и лежат по ту сторону.

A, B, P, Q - лежат в одной окружности, значит четырёхугольник ABPQ вписанный.

$\angle KAB + \angle KBA = \angle AKP$

$\angle KAB + \angle KBA = \alpha$

И $\angle PBQ = \angle PAQ$, т.к. они лежат на одной хорде PQ.

$\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = 180^\circ$

$2\alpha + (\angle PBQ + \angle KBA) + (\angle PAQ + \angle KAB) = 180^\circ$

$2\alpha + 2\cdot\angle PBQ + (\angle KBA + \angle KAB) = 180^\circ$

$2\alpha + 2\cdot(180^\circ - 4\alpha) + \alpha = 180^\circ$

$3\alpha + 360^\circ - 8\alpha = 180^\circ$

$5\alpha = 180^\circ$

$\alpha = 36^\circ$

$\angle ACB = 2\alpha = 2\cdot36^\circ = 72^\circ$

Ответ: $\angle ACB = 72^\circ$

④ В этой фигуре всего 21 клеток. И из них нужно 2 покрасить в синий. Существует $\frac{21!}{(21-2)!\,2!} = \frac{21!}{19!\,2!} = \frac{21\cdot20}{2} = 210$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

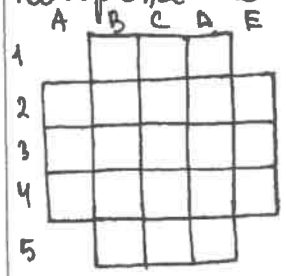
Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 9 | 3 | 5 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

способов покрасить 2 разные клетки, и чтобы они не повторялись.

И нам ещё нужно учитывать повороты, чтоб при повороте не были одинаковыми. Так как при поворотах фигура не меняется (повороты на 90°)



А существует всего 4 поворота (360°:90°=4)

Значит раскраска всего 4 раза может быть одинаковой. Т.е 4 раскраски при поворотах могут считаться за одну.

Но еще есть те случаи, когда 2 раскраски при поворотах могут считаться за одну. Т.е это такая раскраска, которая при повороте на 180° не меняется, т.к фигура симметрична по вертикали, по горизонтали и по диагоналям

Если по вертикали: (B3:D3) и (A3:E3)

Если по горизонтали: (C2:C4) и (C1:C5)

И по диагоналям: (B2:D4) и (B4:D2), и (B1:D5), и (B5:D1), и (A2:E4), и (A4:E2)

Их всего 10. Вычтем их из общей суммы: 210-10=200

Значит 200 раскрасок, где n - неповторяющихся раскрасок, которые повторяются 4 раза в этих 200 раскрасок

$n = \frac{200}{4} = 50$.

И еще 10:2=5

Значит всего существует 50+5=55 раскрасок

Ответ: 55

5. $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{49} \le a_{50}$.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{47} + a_{48} \le 50$

$a_{49} + a_{50} \le 50$

$A_{max} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{49}^2 + a_{50}^2 = ?$

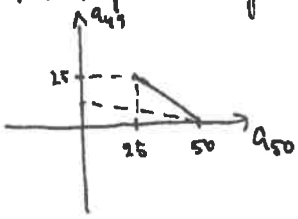
Замечание: будем считать, что они равны 50, т.к чем больше их сумма, тем больше сумма их квадратов, а 50 это максимальное.

Ответ показывает, что не обязательно

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Очевидно, что $a_{49} \le 25$, т.к., если $a_{49} > 25$, то $a_{50} \le 25$, но $a_{49} \le a_{50}$.

Построим график зависимости a_{49} от a_{50}:



Из этого графика видно, что ~~если~~ чем больше a_{50}, тем больше сумма квадратов a_{49} и a_{50}. Но сумма квадратов $a_1, a_2 \ldots a_{47}, a_{48}$ будет уменьшатся с увеличением a_{50}, т.к a_{49} уменьшается. Теперь проверим, что больше сумма квадратов $a_1, a_2 \ldots a_{47}, a_{48}$ или квадрат a_{50}. Максимальное значение примет сумма квадратов $a_1, a_2 \ldots a_{47}, a_{48}$, когда $a_{49} = a_{50} = 25$. Когда же это максимально? Если все 48 чисел возвести в квадрат или если взять $a_{47} = a_{48} = 25$. Проверим.

I) $\frac{50}{48} = \frac{25}{24} \Rightarrow \frac{25^2}{24^2} + \frac{25^2}{24^2} + \ldots + \frac{25^2}{24^2} = 48\frac{25^2}{24^2} = \frac{25^2}{12} = \frac{625}{12} \approx 52$

II) $a_{47} = a_{48} = 25$ $\quad 0^2 + 0^2 + \ldots + 25^2 + 25^2 = 625 + 625 = 1250$.

Значит на чем меньше чисел делим 50, тем больше сумма квадратов от a_1 до a_{48}, а максимальное 1250. Когда мы взяли $a_{47} = a_{48} = 25$, то $a_{49} = a_{50} = 25$. Значит $A = \underbrace{0^2 + 0^2 + \ldots}_{46} + 25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 = 4 \cdot 625 = 2500$.

А если $a_{48} < 25$, то макс a_{47} будет 24, тогда сумма ~~квадратов~~ 3 чисел будет 50. Значит сумма квадратов от a_1 до a_{49} уменьшится.

А ещё A будет равно 2500 когда $a_{50} = 50$

Ответ: $\{0, 0, \ldots, 0, 25, 25, 25, 25\}$

$\{0, 0, \ldots, 0, 50\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ | МА0000622920

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия Кошовец

Имя Анна

Отчество Игоревна

Дата рождения 22.07.2002 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона 8-915-148-97-96 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 5 | 20 | 14 (79)

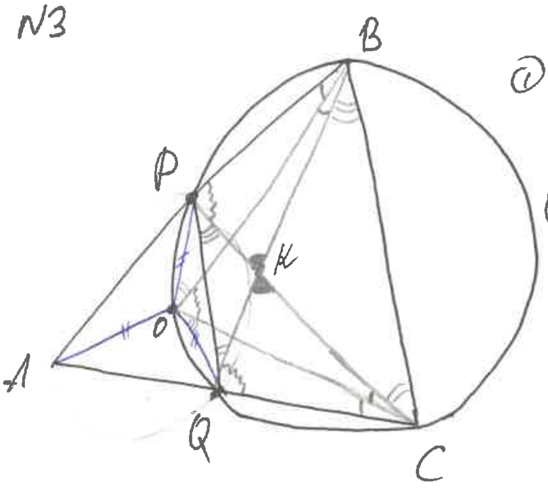
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 М А 0 0 0 0 6 2 2 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N3



Решение:

① PBCQ-впис $\Rightarrow \Sigma$ противоп. углов $= 180^\circ \Rightarrow$
$= \angle BPQ + \angle QCB = 180^\circ$.

При этом $\angle BPQ + \angle QPA = 180^\circ \Rightarrow \angle QPA = \angle QCB$

Аналог-но: $\angle AQP = \angle ABC$ (антипараллели PQ и BC)

② углы, опир. на равные хорды равны, т.е.:
$\angle PBO = \angle OBQ = \angle PCO = \angle OCQ$ и на одну хорду равны:
$\underbrace{\angle PQB = \angle PCB}_{= \angle POB}$; $\underbrace{\angle BQC = \angle BPC}_{= \angle BOC}$, $\angle QPC = \angle QBC = \angle QOC$

Не закончено

делители 3456 (= 3·1152):

1	1 вар
2, 4, ..., 2^7	7 вар
3, 9, 27	3 вар
7+7+7	21
	32 вар

$3\cdot2, 3\cdot4, \dots 3\cdot2^7$
$9\cdot2, 9\cdot4, \dots, 9\cdot2^7$
$27\cdot2, 27\cdot4, \dots, 27\cdot2^7$

делители 1152: 1 — 1 вар; 2, 4, ..., 2^7 — 7 вар; 3, 9 — 2 вар

7+7 = 14 вар.

т.к. $3\cdot2, 3\cdot4, 3\cdot\dots, 3\cdot2^7$ — 7 вар
$9\cdot2, 9\cdot4, 9\cdot\dots, 9\cdot2^7$ 7 вар

14+2+7+1 = 24 дел-ли

N2 Известен факт (из комбинаторики), что если число раскладывается на прост. множители, ~~то~~ $(2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\lambda \dots)$, то его кол-во делителей это $((\alpha+1)\cdot(\beta+1)(\lambda+1)\dots)$ ~~из комбинаторики~~. У нас число N имеет 24 делителя. Пусть простые делители числа N это только 2 и 3. Тогда $\begin{cases} N = 2^\alpha \cdot 3^\beta \\ (\alpha+1)(\beta+1) = 24 \end{cases}$

т.к. $24 = 2^3 \cdot 3 = 12\cdot2 = 6\cdot4 = 8\cdot3$

Т.о. возможны вар-ты:

$\begin{cases}\alpha = 11\\ \beta = 1\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = 11\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha = 5\\ \beta = 3\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha = 3\\ \beta = 5\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha = 7\\ \beta = 2\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = 7\end{cases}$

у числа 3N: для каждого найдем кол-во делителей

$\begin{cases}\alpha = 11\\ \beta = 2\end{cases}$ $(\alpha+1)(\beta+1) = 12\cdot3 = 36$

$\begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = 12\end{cases}$ $(\alpha+1)(\beta+1) = 2\cdot13 = 26$

$\begin{cases}\alpha = 5\\ \beta = 4\end{cases}$ $(\alpha+1)(\beta+1) = 6\cdot5 = 30$

$\begin{cases}\alpha = 3\\ \beta = 6\end{cases}$ $(\alpha+1)(\beta+1) = 4\cdot7 = 28$

$\begin{cases}\alpha = 7\\ \beta = 3\end{cases}$ $(\alpha+1)(\beta+1) = 8\cdot4 = 32$

$\begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = 8\end{cases}$ $(\alpha+1)(\beta+1) = 3\cdot9 = 27$

тогда подходит число $N = 2^7 \cdot 3^2 = 128\cdot9 = 1152$ Ответ: да, например 1152

доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 2 | 2 | 9 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 1 $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ Пусть $\begin{cases} \sin 9x = a \\ \sin 4x = b \end{cases}$, тогда сист. прим. вид:

$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)^2+b^2=1 \quad (*) \end{cases}$

$(*)$: $(1-b)^2+b^2=1$

$1-2b+b^2+b^2=1$

$2b^2-2b+1-1=0$

$2(b^2-b)=0$

$b^2-b=0$

$b(b-1)=0$

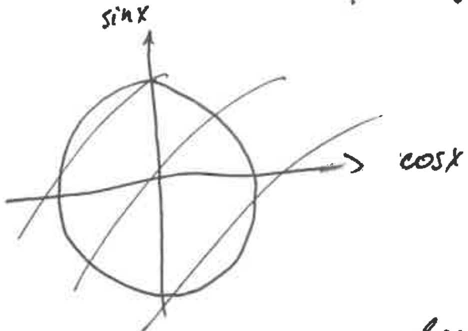
$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right.$

тогда сист. прим. вид:

$\begin{cases} a=1-b \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a=1-0=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1 \\ a=1-1=0 \end{cases} \end{array}\right.$ т.е. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1 \\ a=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Тогда исходная сист. принимает вид:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 9x=0 \\ \sin 4x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 9x=1 \\ \sin 4x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9x=\pi n \\ 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} 9x=\frac{\pi}{2}+2\pi l \\ 4x=\pi m \end{cases} \end{array}\right.$, $n,k,l,m \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $(**)$: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\pi n}{9} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi l}{9} \\ x=\frac{\pi m}{4} \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$



(1): чтобы было решение, должно вып-ся

$\frac{\pi n}{9}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2} \quad \Big| \cdot \frac{9\cdot 8}{\pi}$

$8n=9+36k$

$n=\frac{9+9\cdot 4k}{8}=\frac{9\cdot(1+4k)}{8}$

чтобы $n\in\mathbb{Z}$, нужно чтобы $(1+4k) \,\vdots\, 8$

но $4k \,\vdots\, 4 \Rightarrow (4k+1)$ ост 1 при дел на 4

т.е. $\not\vdots\, 4$, т.е. точно $\not\vdots\, 8$ $\forall$

значит нет таких n и k целых

$\varnothing$

(2): чтобы было реш, должно вып-ся:

$\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi l}{9}=\frac{\pi m}{4} \quad \Big| \frac{9\cdot 4}{\pi}$

$2+8l=9m$

$m=\frac{2+8l}{9}=\frac{2(1+4l)}{9}$

$(1+4l)$ должно быть $\vdots\, 9$

это возможно (например: $l=2,11,20,\ldots$; $l=9p+2$ ($p\in\mathbb{Z}$))

т.е. тогда:

$x=\frac{\pi m}{4}=\frac{\pi\cdot\cancel{2}\cdot(1+4l)}{9\cdot 4\cdot 2}=\frac{\pi(1+4l)}{18}=\frac{\pi\cdot(1+4\cdot(9p+2))}{18}=\frac{\pi(1+36p+8)}{18}=\frac{\pi\cdot(36p+9)}{18}=\frac{\pi(4p+1)}{2}$, $p\in\mathbb{Z}$

аналог-но если бы подставили: или: (проверим, сходится ли) $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi l}{9}=\frac{\pi+4\pi l}{18}=\frac{\pi(1+4l)}{18}=\frac{\pi(1+4\cdot(9p+2))}{18}=\frac{\pi(1+36p+8)}{18}=\frac{\pi(36p+9)}{18}=\frac{\pi\cdot 9(4p+1)}{18\,2}=\frac{\pi(4p+1)}{2}$ верно.

(Доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 2 2 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

тогда сис. (**) прим вид: $\left[\begin{array}{l} \varnothing \quad (1) \\ x = \frac{\pi(4p+1)}{2} \quad (2) \end{array}\right. \iff x = \frac{\pi(4p+1)}{2}$

Ответ: $\frac{\pi(4p+1)}{2}$

№5 Заметим, что если у нас есть (положит.) числа a и b, для которых $a+b=const$, то ~~(a^2+b^2)~~ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 > a^2+b^2$

т.е. если взять 1 число $=a+b$, 2ое $=0$, то сумма его квадратов будет больше, чем если взять как-то разделенное число $(a+b)$ на 2 ненулевых числа (на $a \neq 0$ и на $b \neq 0$ $(a,b \neq 0)$)

Аналогично для ~~всех~~ n чисел

$a_1+a_2+\ldots+a_n = const \quad (a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n+$
$\ldots+2a_2a_3+2a_2a_4+\ldots+2a_2a_n+\ldots+2a_{n-1}a_{n-1} > a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$

Т.е. для ~~Σ квадратов~~ n чисел, ~~её~~ сумма которых const, сумма квадратов будет наиб, когда одно из чисел = const, а остальные 0.

Но у нас сумма чисел не const, а $\leq const$. Тогда из системы $\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{30} \quad (1) \\ a_1+a_2+\ldots+a_{28} \leq 30 \quad (2) \\ a_{29}+a_{30} \leq 30 \quad (3) \end{cases}$ возможны 2 случая:

I: когда мы из доказанного выше возьмем наиб сумму квадратов для a_{29} и a_{30}, т.е. $\begin{cases} a_{29}=0 \\ a_{30}=30 \end{cases}$ т.к. $a_{29} \leq a_{30}$

но тогда (1): $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{29} = 0$, т.е. $a_1=a_2=\ldots=a_{28}=0$

Тогда $A = 0^2+0^2+\ldots+0^2+30^2 = 900$ наиб

II: когда мы стараемся максимизировать и (2) и (3), но с условием $a_{28} \leq a_{29}$, чтобы и там и там была сумма 30

ед. вар-т: $A = 0+0+\ldots+15^2+15^2 + 15^2+15^2 = 900$ $\begin{cases} a_1=a_2=\ldots=a_{26}=0 \\ a_{27}=a_{28}=15=a_{29}=a_{30} \end{cases}$

Док-ву, почему ~~лучше~~ наиб будет когда Σ чисел во (2) делится лишь между 2мя числами. Т.к. если 2 числа с суммой $=a+b+c$: $a^2+(b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2bc > a^2+b^2+c^2$, т.е. > чем когда сумма дел-ся на 3 числа

Аналогично и далее для n чисел: деление на $a_1^2+(a_2+a_3+\ldots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_2a_3+\ldots+2a_{n-1}a_{n-1} > a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$

Также нельзя делить на: $\overset{a_{27}\,a_{28}\,a_{29}}{2, 14, 14}$, $4,13,13$ .... т.к. Σ квадратов будет меньше, чем 900 $\underset{a_{29}\,a_{30}}{14, 16}$, $13, 17$

т.к. $\overset{a_{26}}{0}+\overset{a_{27}}{b^2}+\overset{a_{28}}{a^2}+\overset{a_{29}}{a^2}+a^2+\overset{a_{30}}{(a+b)^2}$ - так. выходит Σ кв-тов в таком случае. Она всегда меньше наиб II случая и I

Суммы максимизируются по отдельности.

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА0000622920

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~[illegible]~~

Т.о. Ответ: $A = 900$

последовательности: 1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_{29} = 0$, $a_{30} = 30$

2) $a_1 = a_2 = \ldots = a_{26} = 0$, $a_{27} = a_{28} = a_{29} = a_{30} = 15$

№4

(4)	5	1	6	4
6	(3)	2	3	(5)
(1)	(2)		(2)	(1)
(5)	3	2	(3)	(6)
4	6	1	5	(4)

Всего кол-во вариантов выбрать любые 2 клетки и закрасить на поле 5×5 это $C_{25}^{2} = \frac{25\cdot 24}{2} = 25\cdot 12 = 300$

При этом мы считали ~~[illegible]~~ повороты за разные раскраски. Почти каждый поворот мы считали 4 раза. Посмотрим, какие повороты мы считали по 2 раза: (это симметричные клетки отн. центра) это клетка 1-1 при повороте - мы их считали только 2 раза (т.к. через 2 поворота они приходят сами в себя). Клетки 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6 (на схеме в () указаны их места при повороте). Т.е. всего вычтем из 300 все вар-ты, посчитанные дважды: $300 - \overset{2\cdot 6}{12} = 288$ - столько вар-тов посчитано 4 раза (при каждом повороте доски). Тогда кол-во без у с учетом того, что поворот это один и тот же вариант: $\frac{288}{4} = 72$

И еще не забудем те вар-ты, которые вычли сначала (с учетом того, что поворот - это один случай). Их 6. Т.е. итого $72 + 6 = 78$ - всего раскрасок

Ответ: 78

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	6	9	3	7	2	0

Шифр (не заполнять!)

СВФУ г. Якутск

Площадка проведения (город, ОУ)

Вариант № 3

Фамилия Никифорова

Имя Кюннэй

Отчество Васильевна

Дата рождения 11.07.2002 Класс 11

ОУ, местоположение ГБНОУ РС(Я) „РЛИ" г. Якутск

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 4 листах Дата выполнения работы 29.02.2020

Номер телефона 89841066505 Подпись

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

20 | 20 | 20 | 18 | 4

82

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	9	3	7	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Да, существует. Например, $N=1152$. Проверим:

$N=1152=3^2\cdot 2^7$

$3N=3\cdot 1152=3^3\cdot 2^7$

По общеизвестному факту кол-во делителей числа n, разложение на простые множители которого выглядит так:

$n=p_1^{d_1}p_2^{d_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{d_m}$ кол-во делителей равно: $(d_1+1)(d_2+1)\ldots(d_m+1)$

Тогда кол-во делителей $N=1152$ равно: $(2+1)(7+1)=3\cdot 8=24$.

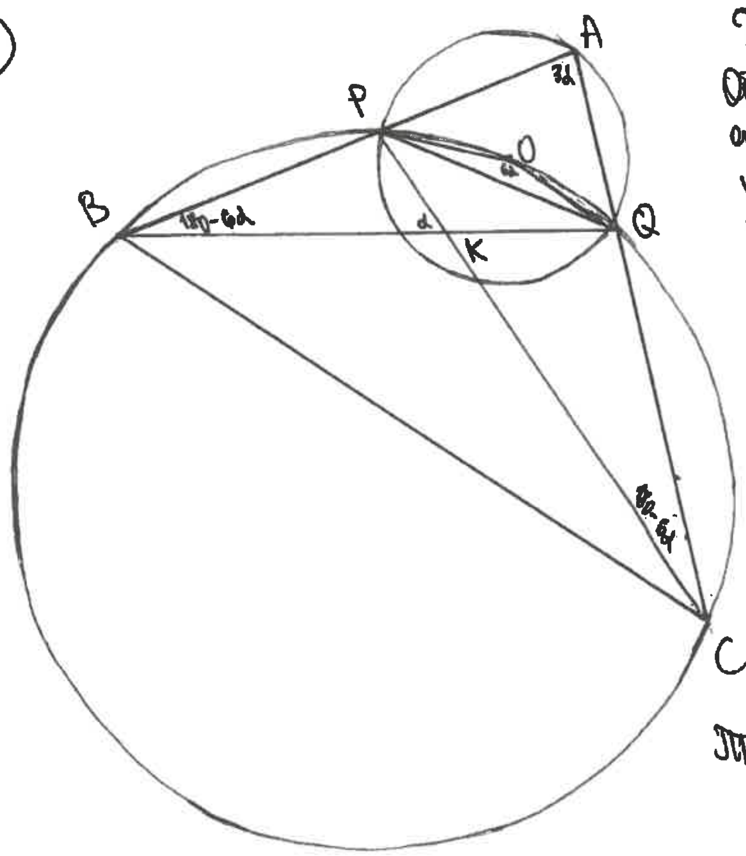
А кол-во делителей $3N=3456$ равно: $(3+1)(7+1)=4\cdot 8=32$

$3456=3^3\cdot 2^7$

Условие выполняется для $N=1152$

Отв: Да, существует

3)



Пусть $\angle BKP=\alpha$. Тогда $\angle BAC=3\alpha$

Обозначим центр описанной около $\triangle APQ$ окр-ти точкой O.

Соединим P и O, O и Q.

$\angle POQ=2\angle PAQ=6\alpha$, т.к. $\angle POQ$ - центральный угол, а $\angle PAQ$ - угол, опирающийся на дугу PQ.

Заметим, что 4-угольник BPOQ - вписанный

⇓

$\angle PBQ=180^\circ-\angle POQ=180^\circ-6\alpha$

Также POQC - вписанный 4-уг

⇓

$\angle PCQ=180^\circ-\angle POQ=180^\circ-6\alpha$

(продолжение на след. странице)

Лист 1 из 4

$\angle APC = 180° - \angle PAC - \angle PCQ = 180° - 3\alpha - (180° - 6\alpha) = 3\alpha$

$\angle BQA = 180° - \angle PAC - \angle PBQ = 180° - 3\alpha - (180° - 6\alpha) = 3\alpha$

Рассмотрим 4-угольник KPAQ:

Сумма его углов должна равняться 360°. При этом три его угла $\angle PAQ$, $\angle APK$, $\angle KQA$ равны 3α, а $\angle PKQ = 180° - \angle BKP = 180° - \alpha$

Суммируем и приравниваем к 360:

$3 \cdot 3\alpha + 180° - \alpha = 360°$

$8\alpha = 180°$

$\alpha = 22{,}5°$

Мы должны найти $\angle BAC = 3\alpha$, т.е. $\angle BAC = 3 \cdot 22{,}5 = 67{,}5°$

Ответ: $67{,}5°$

(1) $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

$(\sin 9x + \sin 4x)^2 - (\sin^2 9x + \sin^2 4x) = 2\sin 9x \sin 4x$

$(\sin 9x + \sin 4x)^2 = 1^2 = 1$
$\sin^2 9x + \sin^2 4x = 1$ } $1 - 1 = 0$ — $2\sin 9x \sin 4x = 0$

т.е. один из множителей равен 0:

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. \\ \sin 9x + \sin 4x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9x = \pi k_1 \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x = \pi k_3 \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi k_1}{9} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_2}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi k_3}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k_4}{9} \end{cases} \end{array}\right.$

где все $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

(Продолжение на след. стр)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

По сист. $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi k_1}{9} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_2}{2} \Big/ \times\frac{72}{\pi} \\ \frac{\pi k_3}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k_4}{9} \Big/ \times\frac{36}{\pi} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 8k_1 = 9+36k_2 & (1) \\ 9k_3 = 2+8k_4 & (2) \end{array}\right.$

В (1) нет решений, т.к. $8k_1$ - четное, $36k_2$ - четное, но 9 - нечетное. Тогда левая ~~сторона~~ часть - четная, правая - нечетная, чего не может быть. Рассмотрим (2):

$9k_3 = 2+8k_4 \Leftrightarrow k_4 = \frac{9k_3-2}{8}$ $9k_3 \equiv 2 \pmod 8$ только тогда, когда $k_3 \equiv 2 \pmod 8$ (я перебрала все остатки и подошел только $k_3 \equiv 2 \pmod 8$)

Тогда k_3 имеет вид: $k_3 = 8k+2$, где $k \in \mathbb{Z}$

А $x = \frac{\pi k_3}{4}$. Подставляем k_3: $x = \frac{\pi(8k+2)}{4} = \frac{\pi(4k+1)}{2}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$

4) Всего раскрасок, не учитывая поворотов, есть:

$\frac{25\cdot 24}{2} = 300$ (по комбинаторике и делим на 2, т.к. иначе одна раскраска будет считаться дважды)

1	2	3	4	5
8	9	10	11	6
7	12	•	12	7
6	11	10	9	8
5	4	3	2	1

Одинаковыми числами обозначены клетки, симметричные относительно центра квадрата 5×5. Таких пар всего 12. Т.к. клетки каждой пары симметричны относительно центра, то две раскраски получаются поворотом. Две раскраски это: как на картинке слева раскрашены две клетки, обозначенные одним числом и вторая - это первая раскраска, повернутая на 90° (если повернуть на 180°, то получится ровно первая раскраска). А среди оставшихся раскрасок четыре раскраски получаются поворотом.

(1,1) → (5,5)
(2,2) → (4,4)
и т.д.
6 пар!

(Продолжение на след. стр)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 6 9 3 7 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Четыре раскраски это:
первая - это где раскрашены 2 клетки, не симметричные относительно центра, вторая - это первая раскраска, повернутая на 90° вправо, третья - это первая раскраска, повернутая на 180° вправо, четвертая - это первая раскраска, повернутая на 270° вправо. Среди этих четырех раскрасок нет равных, т.к. две раскрашенные клетки не симметричны относительно центра квадрата. Тогда:

$300 = 4x + 2 \cdot 12$

$4x = 276$

$x = 69$

x - это кол-во раскрасок, не получающихся поворотом и где раскрашенные клетки не симметричны относительно центра. Прибавляем $2 \cdot 12$, т.к. 12 - это кол-во раскрасок, не получающихся поворотом и где раскрашенные клетки симметричны относительно центра, на 2 умножаем, т.к. две раскраски получаются поворотом.

Тогда всего раскрасок, учитывая повороты, получается:

$x + 12 = 69 + 12 = 81$

Ответ: 81

(5) $\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le a_{30} \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{28} \le 30 \\ a_{29} + a_{30} \le 30 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{29} + a_{30} \le 30 \\ a_{29} \le a_{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_{29} \le 30 \\ 2a_{30} \ge 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{29} \le 15 \\ a_{30} \ge 15 \end{cases}$

$\Downarrow$

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{28} \le 15$

Сумма квадратов чисел наибольшая при фиксированной сумме этих чисел получается, если наибольшее число равно фиксированной сумме всех чисел, но в нашем случае фиксированная сумма равна ≤ 30, т.е. 30, т.к. находим наибольшую сумму квадратов, и наибольшее число среди $a_1, \ldots, a_{28}$ равно ≤ 15, тогда наибольшая сумма квадратов получится при:

$a_1 = a_2 = \ldots = a_{25} = a_{26} = 0$, $a_{27} = a_{28} = a_{29} = a_{30} = 15$. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2 = 4 \cdot 15^2 = 900$

Отв: 900; $\underbrace{0; 0; 0; \ldots}_{26}$ $\underbrace{15; 15; 15; 15}_{4}$

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

ИИУ МЭИ | М А 0 0 0 0 6 8 0 8 2 0

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия Новиков

Имя Сергей

Отчество Александрович

Дата рождения 24.09.02 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона 8 964 535 10 31 **Подпись** Новиков

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

6 | 20 | 20 | 20 | 4 79

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	8	0	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1.

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

$\sin^2 9x + \sin^2 4x = (\sin 9x + \sin 4x)^2 - 2\cdot \sin 9x \cdot \sin 4x \Rightarrow$

$1^2 - 2\cdot \sin 9x \cdot \sin 4x = 1$

$2\sin 9x \cdot \sin 4x = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 9x = 0, \ \sin 4x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} k, k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} k, k \in Z \end{array}\right.$

Задание 2.

$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots$, где p_1, p_2, p_3 - простые делители N. кол-во делителей N:

По основной теореме арифметики:

$cnt_N = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots$

Разложим число 24 на простые множители:

$24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

Значит, чтобы получить 32 делителя, надо прибавить к 3 единицу: $32 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot(3+1)$

Приведём пример такого числа:

$N = 630 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 3^2$

Кол-во его делителей: $cnt_{630} = (1+1)(1+1)(1+1)(2+1) = 24$

$3N = 1890 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 3^3$

Кол-во его делителей: $cnt_{1890} = (1+1)(1+1)(1+1)(3+1) = 32$

Ответ: $N = 630$

Лист 1 из 4

Доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	8	0	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4.

1) Кол-во способов выбрать две клетки из 25:

$$C_{25}^2 = \frac{25!}{23!\cdot 2!} = 300$$

2) Но это с учётом повторяющихся раскрасок. Значит, нам надо вычесть их.

3) Заметим, что для пары клеток несимметричных относительно центра квадрата раскраски повторяются 4 раза (т.к. можем 4 раза повернуть квадрат и каждый раз раскраска будет иная, но будет получена путём поворота). Значит, их кол-во мы поделим на 4.

4) Теперь найдём кол-во симметричных относительно центра квадрата пар клеток. На чертеже нужные пары обозначены одинаковыми цифрами:

2	6	8	7	1
3	10	11	9	5
4	12	O	12	4
5	9	11	10	3
1	7	8	6	2

O — центр квадрата

Всего 12 пар. Для них заметим, что из-за симметрии раскраски при повороте будут повторяться 2 раза, а не 4, поэтому 12 пар поделим на 2.

5) Получаем итоговое кол-во:

$$N = \frac{C_{25}^2 - 12}{4} + \frac{12}{2} = \frac{300+12}{4} = 78$$

Ответ: 78.

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

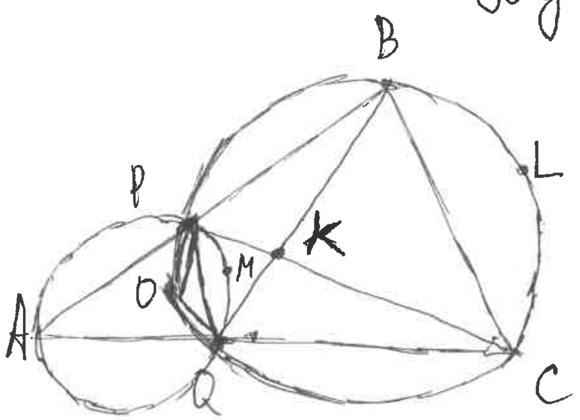
Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	6	8	0	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3.



Дано: $\angle BAC = 3\angle BKP$

O – центр опис. окр. около $\triangle APQ$

$\angle BAC$ – ?

Решение.

1) $\angle BAC$ будет равен полуразности дуг $\cup BLC$ и $\cup POQ$

$\angle BPC = \frac{1}{2}\cup BLC$, $\angle PBQ = \frac{1}{2}\cup POQ$ } впис. углы.

$\angle BAC = \angle BPC - \angle PBQ \Rightarrow -\angle PBQ = \angle BAC - \angle BPC$ (1)

2) Для $\triangle BPK$:

$180^\circ - \angle BPC - \angle PBQ = \angle BKP$

Подставим (1): $180^\circ - 2\angle BPC = -2\angle BKP \Rightarrow$

$180^\circ - 2\angle BPC - \angle BKP \Rightarrow$

$90^\circ = \angle BPC - \angle BKP$

$\angle BPC = 90^\circ + \angle BKP$ (2)

Запишем это же ещё раз для $\triangle BPK$, но уже с (2):

$90^\circ + \angle BKP + \angle BKP + \angle PBQ = 180^\circ$

$\angle BKP = \dfrac{90^\circ - \angle PBQ}{2}$ (3)

3) $\angle POQ$ – центральный (из условия) $\Rightarrow \angle POQ = \cup PMQ$

$\angle BAC = \frac{1}{2}\cup PMQ$ (впис. угол) $\Rightarrow$

$2\angle BAC = \angle POQ$

4) Так как четырёхугольник POQB – вписанный $\Rightarrow$

$\angle PBQ + \angle POQ = 180^\circ \Rightarrow$

$2\angle BAC = 180^\circ - \angle PBQ$

$\angle PBQ = 180^\circ - 2\cdot 3\angle BKP$

$\angle PBQ = 180^\circ - 6\angle BKP$ (4)

Лист 3 из 4

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) Подставим (4) в (3):

$2\angle BKP = 90^\circ + 6\angle BKP - 180^\circ$

$4\angle BKP = 90^\circ$

$\angle BKP = \frac{90^\circ}{4} \Rightarrow \angle BAC = \frac{3\cdot 90^\circ}{4} = 67{,}5^\circ$

Ответ: $67{,}5^\circ$

Задание 5.

$$\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le a_{30} & (1) \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{29} \le 30 & (2) \\ a_{29} + a_{30} \le 30. & (3) \end{cases}$$

1) ~~Из неравенства о средних.~~

$a_1^2 + a_2^2 <= (a_1 + a_2)^2$

$a_3^2 + a_4^2 <= (a_3 + a_4)^2$

$\ldots$

$a_{29}^2 + a_{30}^2 <= (a_{29} + a_{30})^2$

Равенство достигается, если одно из слагаемых равно нулю. $\Rightarrow$ $a_{29}^2 + a_{30}^2 <= 900$ при $\begin{cases} a_{29} = 0 \\ a_{30} = 30. \end{cases}$

Из этого следует, что оптимальнее взять $a_{30} = 30$, а в силу неравенства (1) сделать остальные числа нулями.

Ответ: $A_{max} = 900$ при $a_1 = a_2 = \ldots = a_{29} = 0$; $a_{30} = 30$

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	6	7	9	6	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Нигматуллина

Имя Диана

Отчество Дмитриевна

Дата рождения 22.10.2002 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2002

Номер телефона 8 985 119 50 28 **Подпись** Дииг

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 20 20 5 4 69

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА 0000679620

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Заметим, что число 1200 подходит.

$1200 = 3^1 \cdot 2^4 \cdot 5^2$. Тогда по формуле кол-ва делителей числа. ($A_{дел_N}$ – кол-во делителей)

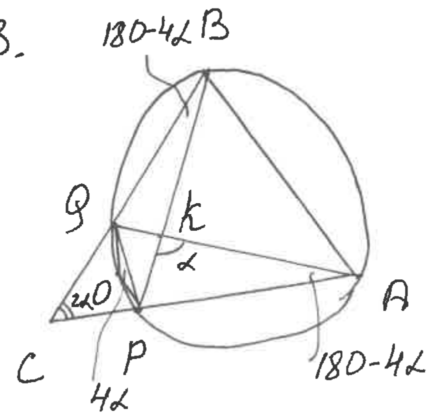
$A_{дел_N} = (1+1)(4+1)(2+1) = 2\cdot5\cdot3 = 30$ (1, 4, 2 – степени, в которых простые множители входят в N)

если $N = 3^1\cdot2^4\cdot5^2$, то $5N = 3^1\cdot2^4\cdot5^3$. Тогда

$A_{дел.5N} = (1+1)(4+1)(3+1) = 2\cdot5\cdot4 = 40$. Значит число 1200 подходит

Ответ: 1200

№3.



1) Пусть O – центр ω описанной около △PQC. O ∈ ∪PQ

Пусть ∠AKP = α, тогда ∠ACB = 2α

2) ∠~~QCP~~ QOP = 2∠ACB (т.к. ∠QOP – центральный и опирается на хорду QP, а ∠ACB – вписанный и опирается на хорду QP) Тогда ∠QOP = 4α.

3) 4-ик POQB – вписанный ⇒ ∠QBP = 180° – ∠QOP = = 180 – 4α

4) 4-ик PQBA – вписанный ⇒ ∠PAQ = ∠QBP = 180 – 4α = $\underset{=\angle CBP}{}$ $\underset{=\angle QAC}{}$

5) ∠AKP – внешний к △AKB ⇒ ∠QAB + ∠PBA = α

6) △ABC : ∠ACB + ∠CBP + ∠PBA + ∠QAB + ∠QAC = 180°

$2\alpha + 180 - 4\alpha + \alpha + 180 - 4\alpha = 180° \Rightarrow 180 - 5\alpha = 0$

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 6 7 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

$5\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 36$

$\angle ACB = 2\alpha = 2\cdot 36 = 72$

Ответ: 72°

№1.

$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ пусть $\begin{cases} \sin 7x = a \\ \sin 4x = b \end{cases}$

$\begin{cases} a+b = 1 \Rightarrow a^2+b^2+2ab = (a+b)^2 = 1 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+b^2+2ab = 1 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0,\ a+b=1 \Rightarrow b = 1 \\ b = 0,\ a+b = 1 \Rightarrow a = 1 \end{array} \right.$

I. Пусть $\begin{cases} \sin 7x = 0 \Rightarrow 7x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{7}k \quad (k = 0,1,2\ldots) \\ \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \ (n = 0,1,2) \end{cases}$

$\frac{\pi}{7}k = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \Rightarrow k = \frac{7}{8} + \frac{7n}{2} \Rightarrow 8k = 7 + 28n$, но

$8k$ всегда $\vdots\, 2$, а $7+28n$ всегда $\not\vdots\, 2$, т.к. $7 \not\vdots\, 2$, а $28n \vdots\, 2$.
значит не подходит

II $\begin{cases} \sin 7x = 1 \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7}k \ (k = 0,1\ldots) \\ \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}n \ (n = 0,1,2\ldots) \end{cases}$

$\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7}k = \frac{\pi}{4}n \Rightarrow \frac{1+4k}{14} = \frac{n}{4} \Rightarrow n = \frac{2+8k}{7} \Rightarrow 7n = 2+8k$

$7n - 2 = 8k$. n и k - целые числа. Рассмотрим остатки, которые дает $7n$ при делении на 8.

n	$7n$
0	0
1	1
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2

Получается, чтобы $7n - 2 \vdots\, 8$ надо чтобы $7n \equiv 2 \pmod 8$

$n \equiv 6 \pmod 8 \Rightarrow n = 8l + 6 \ (l = 0,1,2\ldots)$

$k = \frac{7n-2}{8} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}(8l+6) \ (l = 0,1,2\ldots)$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(8l+6) \ (l = 0,1,2\ldots)$

Доп. лист

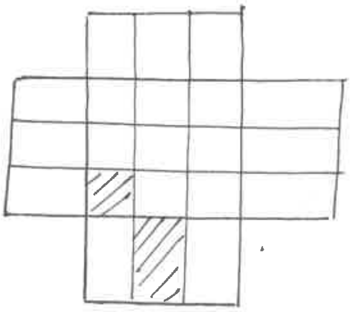
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 6 7 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

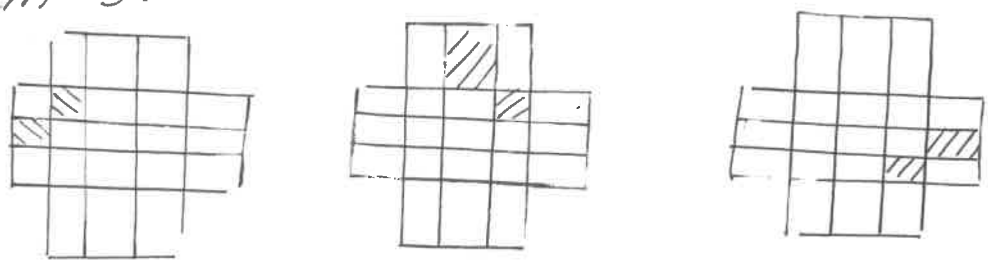
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Заметим, что всего клеток в этой фигуре – 21.
Тогда всего раскрасок (без учета поворотов)
$20 \cdot 21 = 420 : 2$

Т.к. 21 способом можно выбрать клетку, которую красим, и 20 способов выбрать еще одну из оставшихся 20 клеток.
Пусть покрасили какие-то 2 клетки (см. рисунок), тогда раскрасок, отличающихся от данной поворотом будет 3:



Заметим, что при любой раскраске будет еще 3 которые получаются из нее поворотом. Мы можем 4 раза повернуть фигуру на 90°, вернемся в изначальное положение. Каждый раз будет получаться новая раскраска относительно первоначальной ~~(т.к. каждый раз клетка переходит на 90°)~~
Даже если мы покрасим центральную клетка которая при повороте будет переходить сама в себя, за счет движения второй покрашенной клетки получится еще 3 раскраски. => всего раскрасок (с учетом поворота) $21 \cdot 20 : 4 = 105$

Ответ: 105

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 0 6 7 9 6 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$a_1 \le a_2 \le a_3 \dots \le a_{50}$

$a_1 + a_2 + \dots a_{48} \le 50$

$a_{49} + a_{50} \le 50$

$A = a_1^2 + a_2^2 \dots a_{50}^2$

Заметим, что $A \le 48a_{48}^2 + a_{49}^2 + a_{50}^2$, т.к.

$a_1^2, a_2^2 \dots a_{47}^2 \le a_{48}^2$

~~Заметим, что если $A \le 48a_{48}^2 + a_{49}^2 + a_{50}^2$ то надо найти max $48a_{48}^2 + a_{49}^2 + a_{50}^2$ и мы найдем max A.~~

Заметим, что a_{48} max равно 25, т.к. если $a_{48} > 25$, то a_{49} и $a_{50} > 25 \Rightarrow a_{49} + a_{50} > 50 \Rightarrow a_{48} \le 25$

Если $a_{48} = 25$, то a_{49} и a_{50} тоже равны 25.

Тогда $A = 3 \cdot 25^2 + a_1^2 \dots a_{47}^2$ тогда

max $a_1 + \dots a_{47} = 25$

max A будет если $a_1 = a_2 \dots = a_{46} = 0$

$a_{47} = a_{48} = a_{49} = a_{50} = 25$, тогда $A = 4 \cdot 25^2$.

Докажем, что ~~меньше~~ больше нельзя.

Пусть $A > 4 \cdot 25^2 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 \dots a_{48}^2 + a_{49}^2 + a_{50}^2 > 4 \cdot 25^2$

Все числа $a_1 \dots a_{50} \le 50$, но какое-то $a_i^2 > 50$, т.к. иначе $a_1^2 + \dots a_{50}^2 < 50 \cdot 50 = 4 \cdot 25^2$

$a_i > \sqrt{50} \approx 7$ тогда $i < 41$ (>), т.к. сумма первых 48 < 50, а все a_j где $j > i$ $> a_i$. Тогда max $a_1^2 + \dots a_{48}^2 = \cancel{49} \ne < 2 \cdot 25^2$ а max $a_{49}^2 + a_{50}^2 = 2 \cdot 25^2$

$\Rightarrow$ $A_{max} = 4 \cdot 25^2$ Ответ: 2500 max $= 0 + 50^2 = 4 \cdot 25^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ.

М	А	0	0	0	0	5	8	9	1	2	0

Адрес площадки проведения

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Федоров

Имя Тимур

Отчество Александрович

Дата рождения 20.12.2002 **Класс** 11

Предмет математика.

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89003339255 **Подпись** Федор.

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 5 | 8 | 6

69

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА000058912О

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. $\begin{cases} \cancel{\sin 7x + \sin 4x = 1} \ \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

Пусть $a = \sin 7x + \sin 4x$,
$b = \sin 7x \cdot \sin 4x$,
тогда: $\sin^2 7x + \sin^2 4x = a^2 - 2b$.

$\Downarrow$

$\begin{cases} a = 1 \\ a^2 - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 1.$ $1 - 2b = 1 \Rightarrow b = 0$

$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin 7x \cdot \sin 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 7x = 1 \end{cases} (2) \end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} \sin 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{7} \cdot n \\ \sin 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot m \end{cases}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\pi}{7} \cdot n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot m \quad | : \pi$

$\frac{n}{7} = \frac{1}{8} + \frac{m}{2} \quad | \cdot 56.$

$8n = 7 + 28m$

$8n - 28m = 7$ – не имеет решений в целых числах, так как левая часть всегда четная.

(2) $\begin{cases} \sin 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \cdot k \\ \sin 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7} \cdot p \end{cases}$, где $k, p \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4} \cdot k = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7} \cdot p \quad | : \pi$

$\frac{k}{4} = \frac{1}{14} + \frac{2}{7} p \quad \cdot | 28$

$7k = 2 + 8p$

$7k - 8p = 2$

$\left. \begin{array}{l} k_1 = -2;\ p_1 = -2 \\ k_2 = 6;\ p_2 = 5 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} k = -2 + 8t \\ p = -2 + 7t \end{array}$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Откуда $x = \frac{\pi}{4} \cdot (-2 + 8t) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi t.$

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	5	8	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

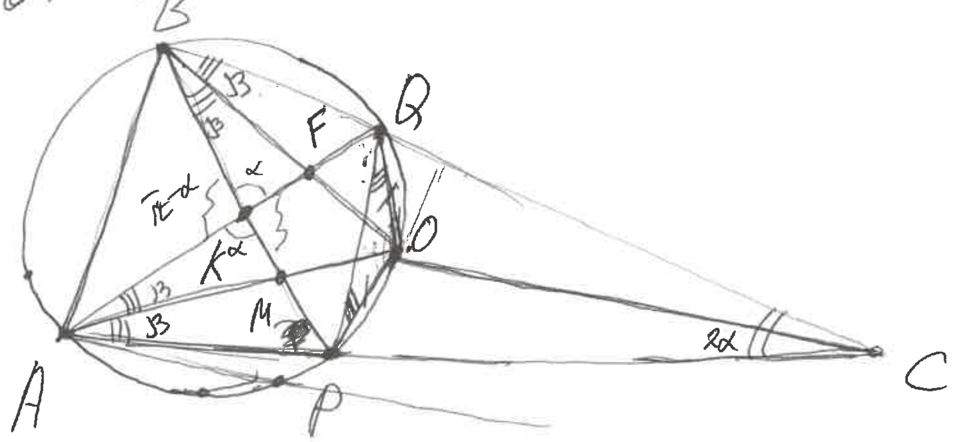
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. Условимся считать единицу тоже делителем числа N. Тогда для $N=5^2\cdot 2^9$ число делителей, отличных от 1, будет: $2+9+2\cdot 9=29$. Прибавив единицу, получим 30 делителей.

$5N=5^3\cdot 2^9$. число делителей будет, отл. от 1 будет:
$3+9+3\cdot 9=39$. Прибавив единицу, получим 40 делителей.

Ответ: $5^2\cdot 2^9=\underline{12800}$.

3.



Обозначим за O центр окружности, описанной около △-ка PQC. Тогда OQ=OP. А так как равные хорды стягивают равные дуги, то $\smile OQ=\smile OP$. И так как равны углы, опирающиеся на равные дуги, то $\angle PBO=\angle OBQ=$ $=\angle QAO=\angle OAP=\angle PQO=\angle QPO=\beta$.

$\cancel{\angle QOP=\pi-2\beta}$.

Угол, образованный двумя хордами равен полусумме дуг, ~~образова~~ заключенных между этими хордами:

$\pi-\alpha=\smile BA+\smile QP \Rightarrow \pi-\alpha=\smile BA+4\beta \Rightarrow$
$\smile BA=\pi-\alpha-4\beta \Rightarrow \angle BOA=\frac{\pi-\alpha-4\beta}{2}$.

Не закончено.

Доп. лист

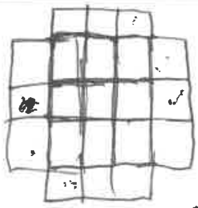
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2.

М	А	0	0	0	0	5	8	9	1	20

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. 

Посчитаем сколько всего способов выбрать две клеточки и раскрасить их:

$$C_{21}^2 = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210. \text{ (раскрасок).}$$

Заметим, что некоторые из раскрасок при повороте дают еще ~~четы~~ три раскраски, а некоторые отображаются в самих себя и дают только одну лишнюю раскраску. ~~Так~~ Это происходит для тех клеточек, которые симметричны относительно центральной. Всего клеточек 21, вычитаем одну центральную и получаем 10 пар клеточек, симметричных относительно центральной клетки.

Не доведено до ответа

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА00005891 20

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. Максимально возможное значение этой суммы $A = 2500$
~~Докажем~~, что большее быть не ~~может~~:
Данная сумма достигается при:
1) $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{49} = 0$; $a_{50} = 50$
2) $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{46} = 0$; $a_{47} = a_{48} = a_{49} = a_{50} = 25$.
Очевидно, что максимальное число, которое может стоять на 48-ом ~~последнем~~ месте - это 25. Иначе сумма двух последних превысит 50.
~~Так как~~ ~~Пусть сумма двух последних равна 50~~, ~~Тогда. Это будут числа~~. Сумма квадратов двух последних чисел всегда больше либо равна сумме квадратов остальных чисел. Значит выгодно будет сделать их

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

пер Крепостной 139

Адрес площадки проведения

8 4 4 3

М	А	0	0	0	0	~~8~~	~~4~~	~~0~~	~~8~~	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Шуляк

Имя Георгий

Отчество Владимирович

Дата рождения 08.10.2002 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 10 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89188963286 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 20 | 8

88

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК» 4 3

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	4	0	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 1.

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$$

Пусть $\sin 9x = p$; $\sin 4x = q$, тогда:

$$\begin{cases} p + q = 1 \\ p^2 + q^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 1 - q \\ (1-q)^2 + q^2 = 1 \end{cases}$$

$$1 - 2q + q^2 + q^2 = 1$$

$$q^2 - q = 0$$

$$q(q-1) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} q_1 = 0 \Rightarrow p_1 = 1 \\ q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

Получаем 2 системы

$$\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \sin 9x = 0 \end{cases}$$

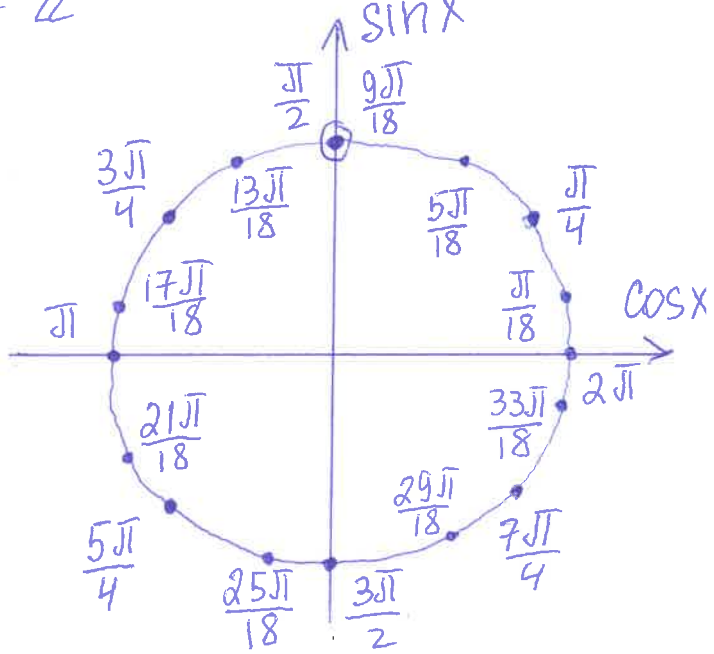
Рассмотрим каждую систему и отобразим решения на тригонометрической окружности.

1) $\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 9x = 1 \end{cases}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} 4x = \pi k \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} ; k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9} \end{cases}$$

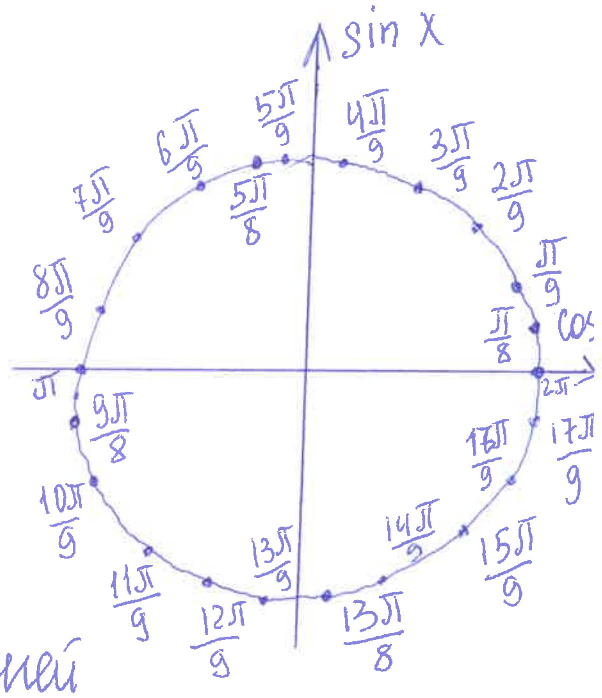


Решением системы является пересечение множеств решения первого и второго уравнений => решением первой системы является ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

2) $\begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \sin 9x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 9x = \pi k \end{cases} ; k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi n}{9} \end{cases}$$



Система не имеет корней

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК» 4 3

Вариант № 3

МА	0	0	0	0	5	4	8	8	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №2.

Воспользуемся ~~в~~ формулой разложения числа на простые множители:

$N = 3^{x_0} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$, тогда

$3N = 3^{x_0+1} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - просты

Введем обозначение $f(N)$ для нахождения количества делителей числа.

$f(N) = (x_0+1) \cdot (x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) \cdot \ldots \cdot (x_n+1) = 24$

$f(3N) = (x_0+2)(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) \cdot \ldots \cdot (x_n+1) = 32$

Обозначим $(x_1+1)(x_2+1) \cdot \ldots \cdot (x_n+1)$, как B.

Тогда:

$f(N) = (x_0+1) \cdot B = 24$

$f(3N) = (x_0+2) \cdot B = 32$

Выразим B из обеих функций:

$B = \frac{24}{x_0+1} = \frac{32}{x_0+2}$; $\frac{3}{x_0+1} = \frac{4}{x_0+2} \Rightarrow 3x_0+6 = 4x_0+4 =$

$\Rightarrow x_0 = 2$. Подставим $x_0 = 2$ в $f(N)$ и найдем B.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$3B = 24$

$B = 8$

Заметим, что $8 = 2^3$ т.к. B - произведение 3 простых чисел, то количество скобок не превосходит 3.

$(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) = 8$

Не нарушая общности, предположим, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, тогда

$N = 3^2 \cdot p_1^1 \cdot p_2^1 \cdot p_3^1$

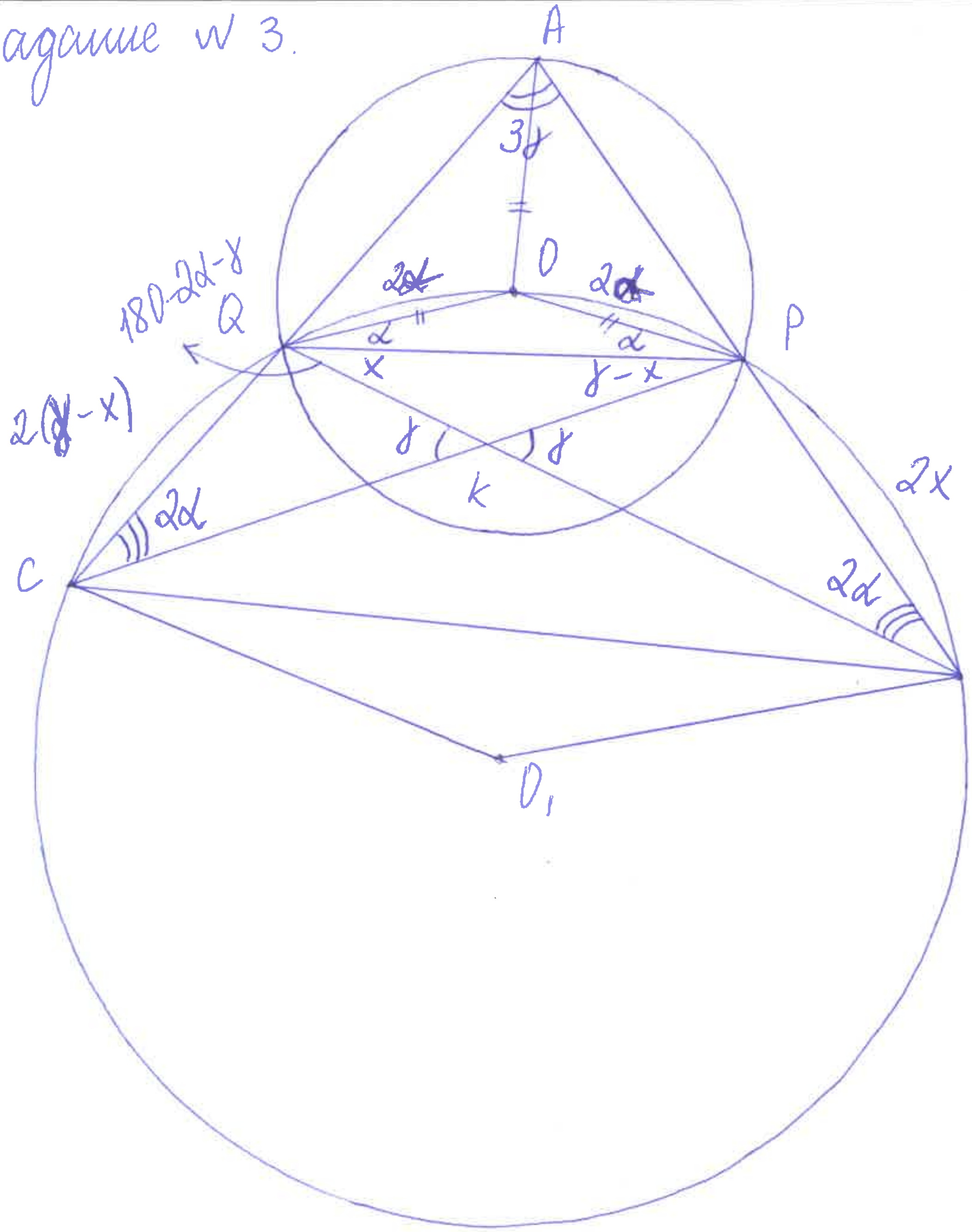
p_1, p_2 и p_3 - простые числа $\Rightarrow$

$\Rightarrow N = 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 270$

Ответ: Да, такое N существует

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 3.



Дано: ΔAPQ вписан в окружность с центром в точке O.

$\angle BAC = 3\angle BKP$

Найти: $\angle BAC$

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 0 8 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Решение: 1) Пусть $\angle BKP = \gamma$, тогда $\angle BAC = 3\gamma$

2) Пусть $\angle PBQ = 2\alpha$, он вписан в окружность $\Rightarrow \angle PBQ = \frac{1}{2} \smile QOP \Rightarrow \smile QOP = 4\alpha$

3) Точка O - центр описаной около $\triangle APQ$ $QO = OP = AO$, как радиусы одной окружности $\Rightarrow \smile QO = \smile OP = 2\alpha$, т.к. равные хорды стягивают равные дуги

4) По свойству угла между двумя хордами, $\angle BKP = \frac{1}{2}(\smile BP + \smile QC) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}(\smile BP + \smile QC)$

5) Пусть $\smile BP = 2x$, $2\gamma = 2x + \smile QC \Rightarrow \smile QC = 2(\gamma - x)$

6) Выразим градусную меру $\smile BC$.

$\smile BC =$ ~~360-4α 2x -2~~ $= 360 - 4\alpha - 2x - 2\gamma + 2x =$

$= 360 - 4\alpha - 2\gamma$

7) $\angle CQB = \frac{1}{2} \smile BC = 180 - 2\alpha - \gamma = \angle CPB$

8) $\angle BQA$ является внешним углом $\triangle KCQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BQA = 2\alpha + \gamma$

9) $\angle CPA$ - внешний угол $\triangle BKP \Rightarrow \angle CPA = 2\alpha + \gamma$

10) Рассмотрим четырехугольник AQKP.

$3\gamma + 2\alpha + \gamma + 2\alpha + \gamma + 180 - \gamma = 360°$

$4\alpha + 4\gamma = 180°$

$\Downarrow$

$\alpha + \gamma = 45°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 0 8 2 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

11) $\angle OQP$ опирается на дугу $OP \Rightarrow \angle OQP = \alpha$;
ΔOQP - равнобедренный $\Rightarrow \angle OQP = \angle OPQ = \alpha$.

12) $\angle PQB$ опирается на дугу $BP \Rightarrow \angle PQB = x$;
$\angle QPC$ опирается на дугу $QC \Rightarrow \angle QPC = \gamma - x$.

13) $\angle AQO = \angle OAQ$, т.к. ΔQOA - равнобедренный
$\angle AQO = \angle OAQ = 2\alpha + \gamma - \alpha - x = \alpha + \gamma - x$

13) $\angle PAO = \angle APO$, т.к. ΔOAP - равнобедренный.
$\angle PAO = \angle APO = 2\alpha + \gamma - \alpha - \gamma + x = \alpha + x$

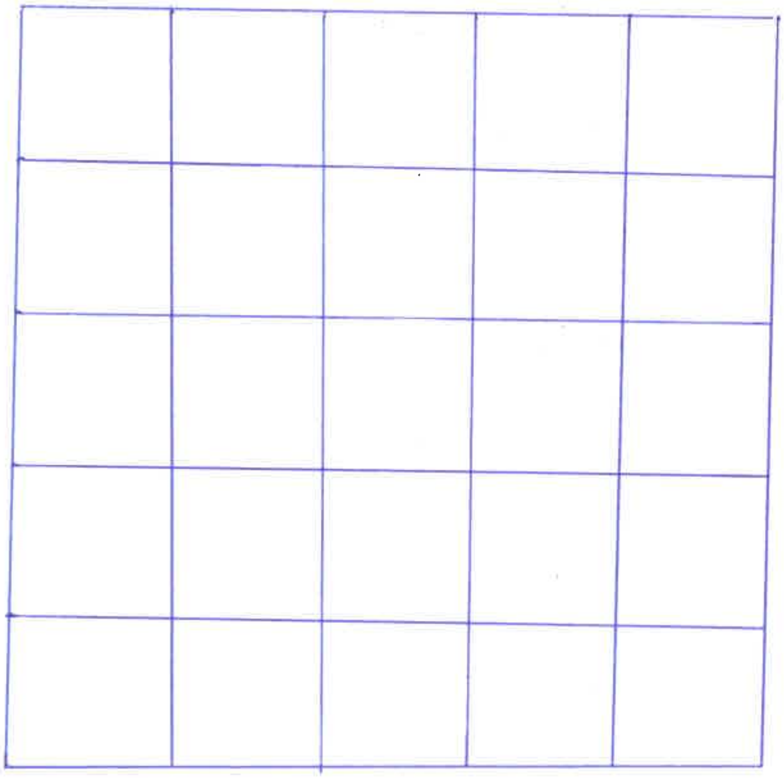
14) $\angle QAP = \angle AQO + \angle PAO = 3\alpha$
$2\alpha + \gamma = 3\alpha$
$\Downarrow$
$\alpha = \gamma$

15) Воспользуемся равенством из пункта 10.
$2\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22{,}5$
$\angle BAC = 3\alpha = 67{,}5^\circ$.

Ответ: $\angle BAC = 67{,}5^\circ$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 4.



Решение: Чтобы узнать сколько вариантов удовлетворяют условию воспользуемся формулой $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$C_2^{25} = \frac{25!}{2!\,23!} = 25 \cdot 12 = 300$

1) Рассмотрим случай, когда, не нарушая общности, мы выбираем одну клетку, а вторая выбирается автоматически, симметрично первой относительно центра.

Всего таких случаев $\frac{25-1}{2} = 12$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 4 0 8 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Мы исключаем центральную клетку, т.к. нет другой клетки, симметричной ей.

⇓

Симметричных случаев – 12

Несимметричных – (300-12) = 288

2) Заметим, что при повороте квадрата при симметричных случаях мы будем получать одну и ту же раскраску каждые 2 поворота. Всего можно сделать 4 поворота => => вариантов раскрасок для симметричных случаев, удовлетворяющих условию = $= \frac{12}{2} = 6$.

3) При повороте квадрата для не симметричных случаев мы будем каждый раз получать новую раскраску => всего подходящих вариантов – $\frac{288}{4} = 72$.

⇓

Соответствующих раскрасок всего – $72+6 = 78$

Ответ: 78

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание № 5.

$$\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le a_{30} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{28} \le 30 \\ a_{29} + a_{30} \le 30 \end{cases}; \text{ Найти: } A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2$$

Рассмотрим последнюю строчку системы: $a_{29} + a_{30} \le 30$

Не нарушая общности, предположим, что $a_{29} + a_{30} = 30$

Найдем значение выражения $a_{29}^2 + a_{30}^2$

Выразим a_{29} из уравнения $a_{29} + a_{30} = 30$.

$a_{29} = 30 - a_{30}$, тогда:

$(30 - a_{30})^2 + a_{30}^2 = f(a_{30})$

Наибольшее значение функции – $900 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{30} = 30$

Д-ва max нет, 1 посл-ть

$\Downarrow$

$a_{29} = 0$, т.к. по условию $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{28} \le 30$

и $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{30}$, то такое возможно, когда все члены последовательности с a_1 по a_{29} равны 0.

Ответ: 900.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ „МЭИ"

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	8	9	9	1	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия КАМАЛОВА

Имя ЧУЛПАН

Отчество АЯЗОВНА

Дата рождения 15.04.2002 Класс 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 4 листах Дата выполнения работы 29.02.2020

Номер телефона 89174951146 Подпись Камал.

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 20 | 0

89

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	9	9	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

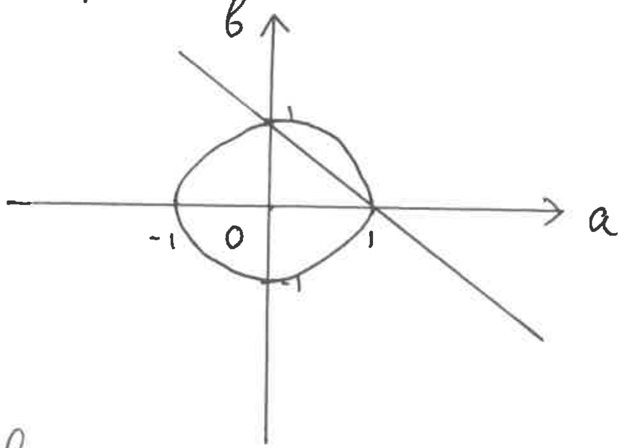
№1 $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

Сделаем замену, пусть $\sin 4x = a$
$\sin 9x = b$

Получим следующую систему:

$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

Заметим, что первое уравнение является уравнением прямой, а второе представляет уравнение окружности с центром в точке (a;b) и R=1. Построим графики этих (функций) уравнений.



Наглядно видно, что у нас есть только 2 возможных решения системы (т.к. прямая и окружность пересекаются всего в 2 точках).

1 случай: $a=0$; $b=1$

2 случай: $a=1$; $b=0$

① Рассмотрим первый случай:

$\sin 4x = 0$

$4x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z$

Тогда $\sin \frac{9\pi n}{4} = 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 8 9 9 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{9\pi n}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \mid \cdot 4$

$9\pi n = 2\pi + 8\pi n, n \in Z \mid : \pi$

$9n = 2 + 8n, n \in Z$

$n = 2$

② Рассмотрим второй случай:

$\sin 4x = 1$

$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Тогда $\sin \frac{9\pi}{8} + \frac{9\pi k}{2} = 0$

$\frac{9\pi}{8} + \frac{9\pi k}{2} = \pi k, k \in Z \mid \cdot 8$

$9\pi + 36\pi k = 8\pi k, k \in Z \mid : \pi$

$9 + 36k = 8k$

$28k = -9$

$k = -\frac{9}{28}$ – не удовлет. условию $k \in Z$.

Таким образом $x = \frac{\pi n}{4}$, при $n = 2$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

№2 Число N имеет 24 делителя

Число $3N$ имеет 32 делителя

Решение: 1) Вспомним, что если число имеет вид $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то количество его делителей будет равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n+1)$.

2) Т.к. число домножили на тройку, то степень одно из делителей увеличилась на 1.

3) Заметим, что $24 = 8 \cdot 3$

$32 = 8 \cdot 4$

То есть, исходное число N имело вид $p_1^7 \cdot p_2^2$, т.к. степень числа p_2 изменилась, а число N домножили на 3, то $p_2 = 3$.

Лист 2 из 4

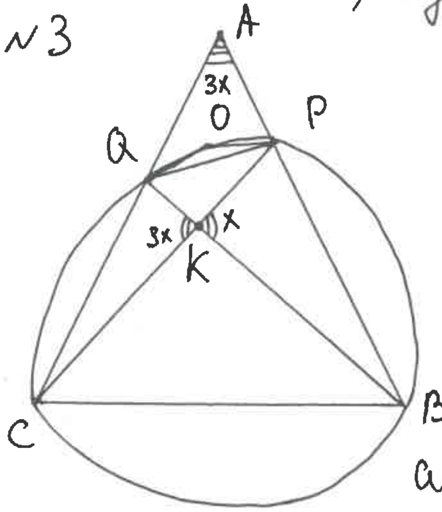
Значит, число $N = 2^7 \cdot 3^2 = 1152$

Проверка: 1) ~~Число~~ Кол-во делителей N: $(7+1)\cdot(2+1) = 8\cdot 3 = 24$

2) Кол-во делителей $3N$: $(7+1)(2+2) = 8\cdot 4 = 32$

Ответ: Да, существует. Число 1152

№3



Дано: $\angle BAC = 3\angle BKP$

Найти: $\angle BAC$

Решение:

1) Пусть $\angle BKP = x$, тогда $\angle BAC = 3x$

2) Докажем, что $\angle BKP = x = \frac{1}{2}(\cup BP + \cup QC)$

Док-во: $\angle QPC$ (вписанный) $= \frac{1}{2}\cup QC$, аналогично $\angle BQP = \frac{1}{2}\cup BP \Rightarrow$

$x = \frac{1}{2}(\cup PB + \cup QC)$ как внешний угол для $\angle QKP$ в $\triangle QKP$. 3) $\angle CAB = \frac{1}{2}(\cup BC - \cup PQ_M)$

4) $\angle QOP$ (вписанный) $= \frac{1}{2}\cup PQ$

5) Сложим углы $\angle BAC$ и $\angle PKB$, получим:

$4x = \frac{1}{2}(\cup BP + \cup QC + \cup BC - \cup PQ_M)$

$4x = \frac{1}{2}\cup PQ - \frac{1}{2}\cup PQ_M$

$4x = \angle QOP - \frac{1}{2}(360^\circ - \cup PQ)$

$4x = \angle QOP - 180^\circ + \frac{1}{2}\cup PQ$

$4x = \angle QOP - 180^\circ$

$4x = 2\angle QOP - 180^\circ$

6) $\angle QOP = 6x$, т.к. это центральный угол для окружности, описанной вокруг $\triangle QAP$.

7) Получаем: $4x = 12x - 180^\circ$

$8x = 180^\circ$

$x = \frac{45^\circ}{2}$

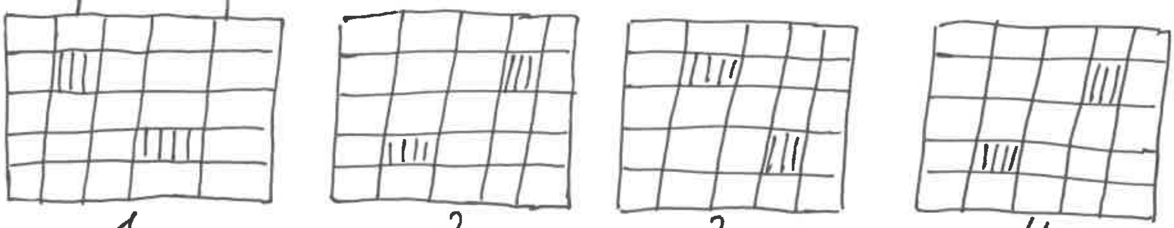
Тогда $3x = \frac{3\cdot 45^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$

Ответ: $67{,}5^\circ$

№4 Решение: 1) Количество способов выбрать 2 клетки из 25 (по формуле сочетаний) → C_{25}^2

2) Заметим, что все раскраски делятся на те, которые повторяются 4 раза и на те, которые повторяются 2 раза

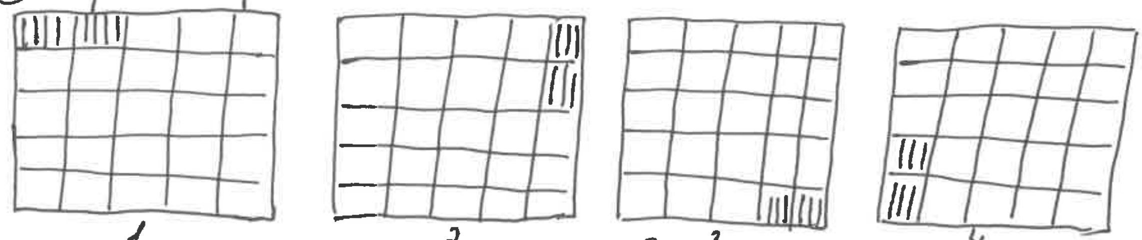
① Пример:



1 2 3 4

Наглядно видно, что раскраска №3 повторяет раскраску №1; раскраска №2 повторяет раскраску №4. То есть, каждая раскраска повторяется 2 раза.

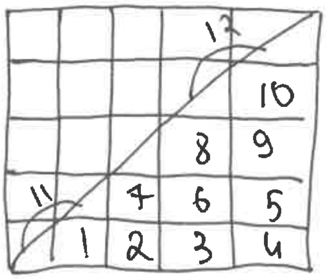
② Пример:



1 2 3 4

Раскраски 1, 2, 3, 4 повторяются 4 раза.

Найдем искомое количество различных раскрасок: $N=\frac{C_{25}^2+C_{12}^1}{4}$, где C_{12}^1 — количество раскрасок повторяющихся 2 раза.



Выбираем одну клетку из 12 (центральную клетку не берем), а вторая выбирается автоматически.

$$N=\frac{C_{25}^2+C_{12}}{4}=\frac{\frac{25\cdot 24}{2}+12}{4}=\frac{26\cdot 12}{4}=78 \text{ р.}$$

Ответ: 78 раскрасок.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ МЭИ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	6	9	4	1	2	0

Шифр

Вариант № 2

Фамилия Шпинева

Имя Полина

Отчество Сергеевна

Дата рождения 26.07.2002 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.20

Номер телефона +79213658282 **Подпись** П. Ш

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

20 | 20 | 20 | 20 | 16

96

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М А 0 0 0 0 6 9 4 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$. Пусть $\sin 7x = a$, $\sin 4x = b$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$

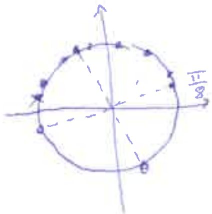
$\Rightarrow 2ab=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 7x=1 \\ \sin 4x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 7x=0 \\ \sin 4x=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x=\frac{\pi}{2}+2\pi k_1 \\ 4x=\pi+\pi k_2 \end{cases} \\ \begin{cases} 7x=\pi+\pi k_3 \\ 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi k_4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

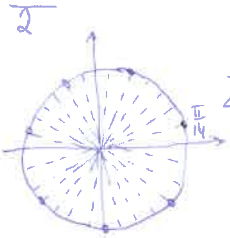
$k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k_1}{7} \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k_2}{4} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{7}+\frac{\pi k_3}{7} \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k_4}{2} \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$

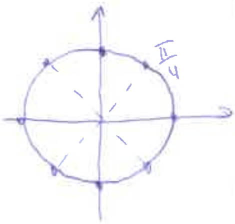
Из (2) мы видим, что ~~один x~~ в силу чётности/нечётности и шага изменения, значения x не будут совпадать $\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \varnothing$



Из (1)



$\measuredangle \frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k_1}{7}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ достаточно $\measuredangle 2\pi$, т.к. дальше происходит зацикливание



$\measuredangle \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k_2}{4}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$ (также достаточно $\measuredangle 2\pi$, т.к. далее происходит зацикливание), заметим, что корни совпадают лишь при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k_5$, $k_5 \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k_5$, $k_5 \in \mathbb{Z}$

Лист 1 из 5

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 6 9 4 1 2 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② N - натуральное число, кот. имеет 30 делителей

по формуле $\cancel{\ }$ 30 можно представить, как $(S_1+1)(S_2+1)\ldots(S_k+1)$,

$S_1, S_2 \ldots S_n$ - различные делители числа N

$5N$, если бы среди делителей числа N не было 5, то $5N$ это были бы все делители числа $N \cdot (1+1) = N \cdot 2$, но нам известно, что у $5N$ всего 40 делителей, а не 60, значит среди N был делитель 5.

$\exists$ этот делитель - это S_1, тогда $N = (S_1+1)m$, $m \in \mathbb{N}$

$5N = \ldots$

$m \in \mathbb{N}$

$30 = (S_1+1)m$

$40 = (S_1+2)m$, тогда S_1+1 и S_1+2 - 2 последовательных числа,

при $m = 10$ $\left.\begin{matrix} S_1+1 = 3 \\ S_1+2 = 4 \end{matrix}\right| \Rightarrow S_1 = 2$

Значит в N есть два делителя 5.

10 можно представить как $10 \cdot 1$

или как $5 \cdot 2$

возьмём ~~10~~ $5 \cdot 2$, т.к. надо привести пример, тогда $S_2 = 4$, $S_3 = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow N = 25 \cdot x^4 \cdot y^1$, для удобства возьмём $x = 2$, $y = 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow N = 25 \cdot 16 \cdot 3 = 1200$

Ответ: $N = 1200$

Доп лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | N A 0 0 0 0 6 9 4 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

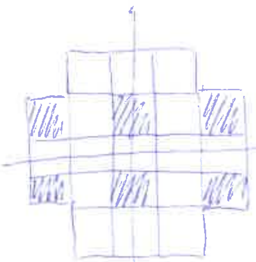
(3) (1) Всего клеток 21, значит найдём кол-во способов выбрать из них две – C_{21}^2, но при повороте нашей фигуры некоторые случаи будут совпадать, для этого некоторые случаи мы будем считать 4 раза, а некоторые – 2 в силу симметрии исходной фигуры, по 2 или по 4 осям. Центральная точка при повороте не меняется или переходит сама в себя

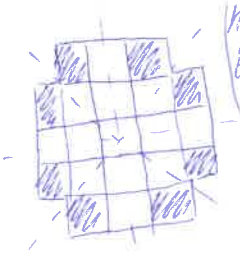
$\frac{C_{21}^2}{4}$, т.к считаем 4 раза $\frac{C_{21}^2 - C_{10}^1}{4}$, т.к считаем случаи, когда фигура симметрична относительно двух осей, а не 4, но их всё же надо учесть

$$\frac{C_{21}^2 - C_{10}^1}{4} + \frac{C_{10}^1}{2} = \frac{\frac{21!}{2!(21-2)!} - \frac{10!}{1!(10-1)!}}{4} + \frac{\frac{10!}{1!(10-1)!}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{21\cdot 20}{2} - 10}{4} + \frac{10}{2} = \frac{200}{4} + 5 = 55 \text{ раскрасок}$$

Ответ: 55





(симметрия относительно 4 осей равносильна повороту на 90°, (т.е. 4 поворота) а относительно 2 осей – повороту на 180°) (т.е. 2 поворота)

Доп. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 9 | 4 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $\begin{cases} 0 \le a_1 \le \ldots \le a_{50} \quad (1) \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{48} \le 50 \quad (2) \\ a_{49} + a_{50} \le 50 \\ A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{49}^2 + a_{50}^2 \end{cases}$ A_{max} - ?

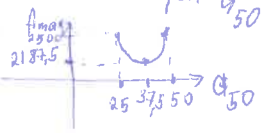
Чтобы квадрат числа был максимальным модуль числа также должен стремиться к максимальному числу, в силу (1) неравенства a_{50} должно быть максимально. Второй же граничный случай рассмотрим, когда a_{48} стремится также к максимальному числу, тогда a_{49} и a_{50} должны быть равны между собой, чтобы a_{49} было также максимально, тогда $a_{49} = a_{50} = \frac{50}{2} = 25$, тогда a_{48} можно взять также 25, но в силу (2) неравенства также можно взять $a_{47} = 25$, а остальные числа равными нулю, т.е. если $a+b=c$, то $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$

$y(a) = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ – парабола с ветвями вверх, тогда max значение будет приниматься при max значении a или b, т.е. мы как раз и нашли оба эти случая достижения max параболы, т.е. в I случае $a_{50} = 50$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{49} = 0 \Rightarrow A = 50^2 = 2500$

во 2 случае $a_{50} = a_{49} = a_{48} = a_{47} = 25$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_{46} = 0$

$A = 25^2 \cdot 4 = (25 \cdot 2)^2 = 50^2 = 2500$

при уменьшении a_{50}, будет увелич. a_{49}, а следовательно и a_{48} до $a_{50} = 25$ если a_{50} будет меньше 25, то и a_{49} и далее стоящие числа будут меньше 25, и следовательно $A = 2500$ достигаться не сможет, а при $a_{50} \in [25; 50]$ A будет принимать значения по параболе



при $a_{50} = \frac{25+50}{2} = 37,5$ A_{max} принимает min значение

Ответ: $A_{max} = 2500$

1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_{49} = 0$ $a_{50} = 50$

2) $a_{50} = a_{49} = a_{48} = a_{47} = 25$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_{46} = 0$

Максимизировать надо общую сумму, а не отдельные. Д-во только для сумм 2-х квадратов. Подбор

Лист 4 из 5

Доп. лист

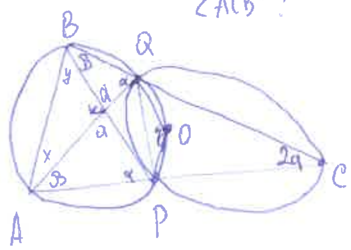
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 6 9 4 1 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

③ $\angle ACB$ - ?



1) (·) O - центр окр., описанного вокруг $\triangle PCQ$

2) $\exists \angle AKP = a$, тогда $\angle QCP = 2a$ (по усл.)

3) тогда из (1) $\angle QOP$ - центральный угол (2) $\Rightarrow \angle QOP = 4a$

4) $\angle PBQ = \angle QAP = \beta$, т.к. опираются на дугу PQ

5) $\angle BQA = \angle BPA = \alpha$, т.к. опир. на $\smile AB$

6) $\smile Q(O)P = 2\beta = 360 - 8a$, т.к. 4a лежит на окр $\Rightarrow \smile Q(A)P = 8a$

$\Rightarrow \beta = 180 - 4a$

7) из $\triangle ABC$ найдём $x+y$ $\Rightarrow x+y = 180 - 2a - 2\beta \Rightarrow$ из $\triangle ABQ$ $\alpha = 180 - x - y - \beta =$

$= 180 - 180 + 2a + 2\beta - \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2a$

8) т.к. $\angle AKP = a$, то из $\triangle AKP \Rightarrow \alpha + \beta + a = 180$

9) $\begin{cases} \beta = 180 - 4a \\ \alpha - \beta = 2a \\ \alpha + \beta = 180 - a \end{cases}$ $\alpha = 2a + \beta \Rightarrow 2a + 2\beta = 180 - a \Rightarrow 2a + 360 - 8a = 180 - a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180 = 5a \Rightarrow a = \frac{180}{5} = 36°$

10) $\angle ACB = 2a \Rightarrow \angle ACB = 36 \cdot 2 = 72°$

Ответ: $\angle ACB = 72°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

НИУ „МЭИ" | М А 0 0 0 0 1 2 7 9 2 0

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 3

Фамилия КИТАЕВА

Имя ЭЛЛИНА

Отчество РАШИДОВНА

Дата рождения 02.11.2003 **Класс** 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 8(929)537-01-87 **Подпись** ________

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

16 | 20 | 20 | 20 | 0 | 76

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	2	4	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N2 да, существует.

это число – 1152.

$1152 = 1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 2^7\cdot3^2$

посчитаем количество его делителей: $1+7+2+7\cdot2=24$ делителя

эти делители: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 3, 9, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 18, 36, 72, 144, 288, 576, 1152.

С умножением числа 1152 на 3 добавляются 8 делителей: 27, 54, 108, 216, 432, 864, 1728, 3456. В сумме получается 32 делителя.

Ответ: существует.

N4

5	6	7	8	9
12	1	2	3	10
11	4	•	4	11
10	3	2	1	12
9	8	7	6	5

рис. 1

при объяснении этой задачи я буду считать раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, не за одну.

всего раскрасок квадрата – $n = \frac{25\cdot24}{2} = 300$.

посчитаем, сколько раскрасок, которые переходят сами в себя при повороте:

фигура переходит в саму себя при повороте, если она симметрична относительно центра. Значит, нужно посчитать количество раскрасок, симметричных относительно центра. Закрашено всего 2 клетки – значит, нужно посчитать количество пар клеток, находящихся на равных расстояниях от центральной. На рис. 1 представлены они все – у каждой клетки есть своя пара, всего их $\frac{25-1}{2} = 12$. Если раскраска при повороте может переходить в саму себя, то при 4х поворотах получается не 4 различных варианта раскраски, а 2 (т.к. поворот на 90°). Значит, если считать раскраски, получающиеся из друг друга поворотом за одну, то всего симметричных относительно центра будет 6.

Рассмотрим несимметричные относительно центра. Они не переходят в самих себя, значит вариантов при повороте будет 4. Значит, если считать раскраски, получающиеся из друг друга поворотом за одну, их всего будет $\frac{300-12}{4} = 72$.

Сложим эти 2 числа и получим общее кол-во раскрасок:

$72+6=78$.

Ответ: 78

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	8	2	7	9	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1 $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$

$\sin 9x = 1 - \sin 4x$

$(1-\sin 4x)^2 + \sin^2 4x = 1$

$1 - 2\sin 4x + \sin^2 4x + \sin^2 4x = 1$

$\sin^2 4x = \sin 4x$

1. $\begin{cases} \sin 4x_1 = 0 \\ \sin 9x_1 = 1 - \sin 4x_1 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_1 = 0 + \pi k_1;\ k_1\text{-целое} \\ 9x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi l_1;\ l_1\text{-целое} \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi k_1}{4} \\ x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi l_1}{9} \end{cases}$ 0

$\frac{\pi k_1}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi l_1}{9}$

$\frac{\pi k_1}{4} = \frac{\pi + 2\pi l_1}{18}$

$\frac{k_1}{2} = \frac{1+2l_1}{9}$

$9k_1 = 2 + 4l_1$

$9k_1 \vdots 2;\ 9k_1 \not\vdots 4$

$k_1 = 2 + 4n_0;\ n_0\text{-целое}$

$x_1 = \frac{\pi(2+4n_0)}{4}$

$x_1 = \frac{2\pi + 4\pi n_0}{4}$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n_0$

2. $\begin{cases} \sin 4x_2 = 1 \\ \sin 9x_2 = 1 - \sin 4x_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2;\ k_2\text{-целое} \\ 9x_2 = 0 + \pi l_2;\ l_2\text{-целое} \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_2}{4} \\ x_2 = \frac{\pi l_2}{9} \end{cases}$ 2

$\frac{\pi l_2}{9} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_2}{4}$

$\frac{\pi l_2}{9} = \frac{\pi + 2k\pi}{8}$

$8l_2 = 9 + 18k_2$

$l_2 = \frac{18k_2 + 9}{8}$

$(18k_2 + 9) \vdots 8$

$(18k_2 + 1) \vdots 8$

однако, $(18k_2+1)$ - нечётное

значит, нет таких k_2 чтобы l_2 удовлетворяли равенству

значит, $x_2 \in \varnothing$

Ответ: $X = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n$-целое

N5 $\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{29} \le a_{30} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{28} \le 30 \\ a_{29} + a_{30} \le 30 \end{cases}$

$A_{max} = 870$, оно достигается при $a_1, \ldots, a_{29} = 1;\ a_{30} = 29$

$-$

Ответ: $A_{max} = 870;\ a_1, \ldots, a_{29} = 1;\ a_{30} = 29$

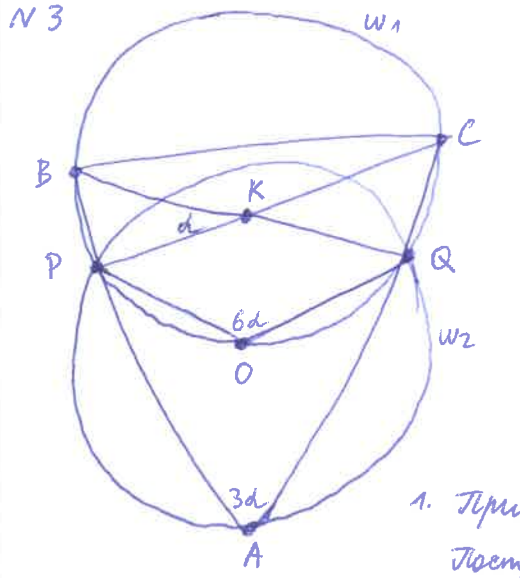
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 0 8 2 7 9 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 3



Дано: w_1, w_2 - окружности
O лежит на w_1
O - центр w_2
B, C, P, Q лежат на w_1
P, Q, A - лежат на w_2
$BQ \cap PC = K$
$3\angle BKP = \angle BAC$
Найти:
$\angle BAC = ?$

Решение:

1. Примем $\angle BKP = d$. тогда $\angle BAC = 3d$
Построим PO и QO. O - центр w_2, значит
$\angle POQ = 2\angle PAQ = 6d$

2. четырёхугольник BQOP - вписанный, значит $\angle PBQ + \angle QOP = 180°$
$\angle QOP = 6d$, значит $\angle PBQ = 180° - 6d$.

3. рассмотрим $\triangle PBK$. сумма его углов - $180°$. значит, $\angle PKB + \angle PBK + \angle BPK = 180°$.
$\angle PBQ$ это угол $\angle PBK = 180° - 6d$;
$\angle BKP = d$;
значит $\angle BPK = \cancel{180°} - \cancel{180°} + 6d - d = 5d$

4. $\angle BPA = 180° = \angle BPK + \angle CPA$
значит, $\angle CPA = 180° - 5d$

5. рассмотрим $\triangle CPA$.
сумма его углов - $180°$. значит, $\angle CPA + \angle PCA + \angle PAC = 180°$
$\angle PBQ$ и $\angle PCQ$ опираются на одну и ту же дугу, значит
$\angle PBQ = \angle PCQ = 180° - 6d$.
$\angle PCQ$ это $\angle PCA$, значит $\angle PCA = 180° - 6d$
$\angle CPA = 180° - 5d$
$\angle PAC$ это $\angle BAC = 3d$
Значит, $180° + \cancel{180°} - 6d - 5d + 3d = \cancel{180°}$
$180° + 3d = 11d$
$180° = 8d$
$d = 22{,}5°$

6. $\angle BAC = 3d = 22{,}5° \cdot 3 = 67{,}5°$

Ответ: $\angle BAC = 67{,}5°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Ульяновск	МА0000866420
Адрес площадки проведения	Шифр

Вариант № 1

Фамилия Шпак

Имя Дарья

Отчество Александровна

Дата рождения 08.04.2002 **Класс** 11

Предмет математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 15.02.2020

Номер телефона +7 906 3918119 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1 2 3 4 5
| 20 | 20 | 20 | 10 | 0 |

70

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	8	6	6	4	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

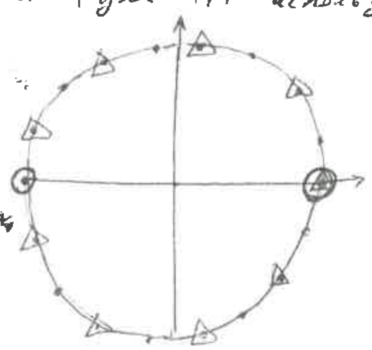
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2$ по формуле синуса двойного угла: $\sin 2t = 2\sin t\cdot\cos t$

$\sin\left(\frac{2\cdot 9}{8}x\right)+\cos x=2$; $\sin\left(\frac{9x}{4}\right)+\cos x=2$ т.к. $\sin(t)\in[-1;1]$ по определению и $\cos(t)\in[-1;1]$, то для того, чтобы ур-ние имело решение, необходимо выполнение условий:

$\begin{cases}\sin\frac{9x}{4}=1\\ \cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z \quad |\cdot\frac{4}{9}\\ x=\pi k, k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8\pi n}{9}, n\in Z \ (1)\\ x=\pi k, k\in Z \ (2)\end{cases}$

Отметим серии корней решения для каждого из ур-ний на единичной окр-ти (для (1) используя Δ, для (2) – $\circ$) и найдём пересечение:



серии корней совпадают только в точке вида: $2\pi m, m\in Z$

Тo есть, ур-ние (1) должно иметь корни с целым ~~[illegible]~~ четным значением.

Наим. положительный такой корень это $x=2\pi$ (при $n=2$ $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\cdot 8\pi}{9}=\frac{18}{9}\pi=2\pi$), следующий такой корень – $x=10\pi$ (при $n=11$), следующий – $x=18\pi$, тогда решением системы и исходного ур-ния является серия корней: $x=2\pi+8\pi m, m\in Z$

Ответ: $x=2\pi+8\pi m, m\in Z$.

② (b_n) – возр. геом. прогр. (положительная)

Пусть $b_1=b$, $b_2=bq$ $b_n=bq^{n-1}$ (исходя из условий $b>0$ т.к. (b_n) – положительная и $q\neq 0$ т.к. (b_n) – возрастающая)

$b_4+b_3-b_2-b_1=9 \Rightarrow bq^3+bq^2-bq-b=9 \Rightarrow b(q^3+q^2-q-1)=9$

$b(q(q^2-1)+q^2-1)=9 \Rightarrow b(q+1)(q^2-1)=9 \Rightarrow b(q+1)^2(q-1)=9$ *)

т.к. $b>0$ – по усл., $(q+1)^2\geq 0$, а произведение $=9 \Rightarrow q-1>0$ и $q>1$

Необходимо док-ть: $b_5+b_6\geq 36$; $bq^4+bq^5\geq 36$

$bq^4(1+q)\geq 36$ из *) выразим b: $b=\frac{9}{(q+1)^2(q-1)}$ и подставим в нер-во, получим: $\frac{9q^4(1+q)}{(q+1)^2(q-1)}\geq 36 \Rightarrow \frac{9q^4}{(q+1)(q-1)}\geq 36 \ |:9$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	8	6	6	4	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

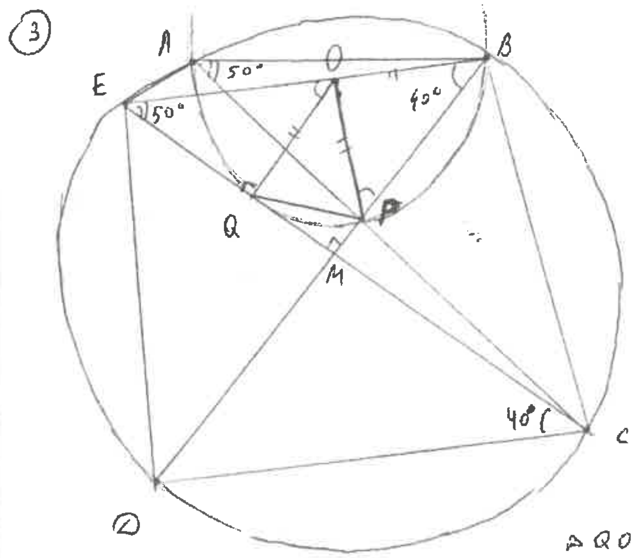
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{q^4}{(q+1)(q-1)} \geq 4 \;|\cdot (q+1)(q-1) > 0$ $\quad q^4 \geq 4(q+1)(q-1)$; $q^4 - 4(q^2-1) \geq 0$

$q^4 - 4q^2 + 4 \geq 0$; $(q^2)^2 - 2\cdot 2\cdot q + (2)^2 \geq 0$; $(q-2)^2 \geq 0$

Путём преобразований получили: $(q-2)^2 \geq 0$, что верно при любом q => $bq^4 + bq^5 \geq 36$ чтд.

③



Дано: $ABCDE$ – пятиуг., вписанный в ω_1; $AC \cap BD = P$, ω_2 – опис. около $\triangle ABP$, CE – кас. к ω_2, $CE \cap \omega_2 = Q$, $\angle ECD = 40°$

$\angle CQP$ - ?

Решение: $\angle ECD = \angle EBD$ т.к. они опир. на одну дугу $\smile ED$, пусть т. O – центр ω_2, тогда $OB = OP = QO$ (как радиусы ω_2) => $\triangle QOP$ и $\triangle OBP$ – равноб. и $\angle OBP = \angle OPB$, тогда $\angle BOP = 180° - 40°\cdot 2 = 100°$, а он центральный => $\smile PB = 100°$, а $\angle PAB = \frac{1}{2}\smile PB = 50°$, как впис., опир. на $\smile BP$

$\angle PAB$ это $\angle CAB$ => $\smile BC = 2\angle PAB = 2\angle CAB = 100°$ и $\angle BEC = \frac{1}{2}\smile BC = 50°$ (как опир. на $\smile BC$) => пусть $EC \cap DB = M$, тогда в $\triangle EMB$ $\angle EMB = 180° - 40° - 50° = 90°$ => $EM \perp MB$, $QO \perp EM$ (т.к. QO – радиус, проведённый в т. касания, а EM – касательная) => $QO \parallel MB$ и $\angle EOQ = \angle EBM = 40°$ как соотв. при $QO \parallel MB$, $\angle QOP = 180° - \angle EOQ - \angle BOP = 180° - 100° - 40° = 40°$, а он центральный => $\smile QP = 40°$

$\angle CQP$ – угол м-ду касательной и хордой => $\angle CQP = \frac{1}{2}\smile QP = \frac{1}{2}\, 40° = 20°$

Ответ: $\angle CQP = 20°$

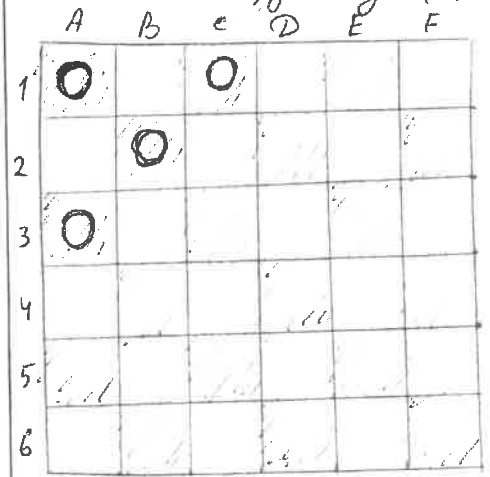
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0000866420

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(4) Нарисуем шахматную доску и обозначим её так, чтобы каждая клетка была покрашена в белый или чёрный и имела координату (например: (D;5) или (C;1))



Пусть клетка (A;1) – чёрная, (A;2) и (B;1) – белые и тд. (стандартная раскраска шахматной доски)

Доска 6×6 => всего клеток 36 и необходимо расставить 17 фишек так, чтобы две любые из них не стояли в соседних клетках.

Предположим, что 1 фишку мы ставим на (A;1), тогда (B;1) и (A;2) оказываются „заблокированными" (т.к. они соседние с (A;1)) => ближайшие клетки, на которые мы можем поставить фишки это (A;3), (B;2) и (C;1), поставим на них фишки. Аналогично рассуждая, получим, что в данном случае фишки можно ставить только по диагонали, относительно уже поставленных, то есть, на тот же цвет. Чёрных клеток $36:2=18$, а фишек 17. По формуле размещения 17 из 18: $\frac{18!}{17!(18-17)!} = \frac{17!\cdot 18}{17!\ 1!} = 18$ вариантов, тогда всего вариантов размещения $18\cdot 2 = 36$ т.к. можно выставлять фишки ~~так~~ на белые клетки и получить ту же ситуацию, что и с чёрными.

Предположим, что есть ещё варианты размещения, удовлетворяющие условию, кроме размещения всех фишек на один цвет клеток. Попробуем привести такой вариант. Первую фишку ставим на (A;1), а вторую на (D;1) (т.к. на (B;2) (C;1) и (A;3) мы ставили в другой расстановке, а (A;2) и (B;1) – „заблокированы"). Далее ставим на (B;2) и (A;3), на (C;1) нельзя поставить т.к. фишка стоит

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

	A	B	C	D	E	F
1	O			O		O
2		O			O	
3	O			O		O
4		⊗	O		O	
5	⊗	O		O		O
6	O		O		O	

на (D;1) т.к. на соседней клетке. Ставим на (E;2), (F;1), (D;3), (F;3) и т.д. таким образом заполняем столбцы 3×6 (D-E-F; 1-2-...-6). Т.к. нам необходимо разместить все 17 фишек, то их нужно располагать как можно ближе друг к другу, чтобы они поместились, тогда ставим на ~~(B;4), (A;5)~~, (C;4), (C;6), (B;5) и (A;6). Посчитав поставленные фишки, получаем, что их 16, а для 17-й места уже нет. Такая ситуация будет происходить каждый раз, когда хотя бы одна из фишек стоит не на том же цвете, что и остальные. То есть, наше предположение неверно и других вариантов размещения нет => всего 36 вариантов размещения. Ответ: 36 вариантов.

В угловом квадрате 2×2 не 2, а 3 способа поставить единственную фишку.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Бийск АНОДО „ЦАП" | М А 0 0 0 0 8 0 0 1 2 0

Адрес площадки проведения | Шифр

Вариант № 1

Фамилия Злобин

Имя Андрей

Отчество Сергеевич

Дата рождения 07.07.2002. **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 15.02.2020

Номер телефона 89530595753 **Подпись** Злобин

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

1 2 3 4 5
16 | 20 | 20 | 10 | 0

66

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

N1

$2\sin\frac{9x}{8}\cdot\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2.$

$\sin\frac{9x}{4}+\cos x=2.$

Функция $\sin(\alpha)$ принимает значения от -1 до 1
Функция $\cos(\beta)$ также принимает значения от -1 до 1

Значит $\sin\alpha+\cos\beta$ имеет максимальное значение 2, если $\sin\alpha=1$ и $\cos\beta=1$.
значит исходное уравнение можно записать в виде системы:

$$\begin{cases}\sin\frac{9x}{4}=1.\\ \cos x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8}{9}\pi n,\ n\in Z\\ x=2\pi k,\ k\in Z\end{cases}$$

x должен соответствовать и первому и второму уравнению системы, значит:

$$\frac{2\pi}{9}+\frac{8}{9}\pi n=2\pi k\quad, n,k\in Z$$

$$2+8n=18k\quad n,k\in Z$$

$$-8n+18k=7\quad n,k\in Z.$$

Значит, решением уравнения является множество x, которые удовлетворяют системе:

$$\begin{cases}x=\frac{2\pi}{9}+\frac{8}{9}\pi n\\ x=\pi+2\pi k\\ -8n+18k=7\end{cases}$$, где n и k - целые числа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	8	0	0	1	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{8}{9}\pi n \\ x = \pi + 2\pi k \quad , n \text{ и } k \in \mathbb{Z}. \\ 4n+1 = 9k \end{cases}$$

Не найдена связь между n и k. Вернее, найдена, но ответ не объединен и не упрощен.

N2.

$$b_4 + b_3 - b_2 - b_1 = 9.$$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, значит исходное выражение имеет вид:

$b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^2 - b_1 q - b_1 = 9$; выразим b_1

$$b_1 = \frac{9}{q^3+q^2-q-1} = \frac{9}{q^2(q+1)-(q+1)} = \frac{9}{(q-1)(q+1)^2}$$

Рассмотрим сумму $b_5 + b_6$.

$$b_5 + b_6 = b_1 q^4 + b_1 \cdot q^5 = b_1 \cdot q^4 (q+1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ подставим b_1 из первого выражения

$$b_5 + b_6 = \frac{9q^4}{q^2-1}$$

Получаем функцию $f(q)$ зависимости суммы b_5+b_6 от q; она имеет минимальное значение в точках:

$$f'(q) = \frac{(9q^4)'(q^2-1) - (q^2-1)' 9q^4}{(q^2-1)^2} =$$

$$= \frac{36q^3(q^2-1) - 2 \cdot q \cdot 9q^4}{(q^2-1)^2} = \frac{18q^3(q^2-2)}{(q^2-1)^2}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Производная $f(x)$ равна 0 в точках $q=0$, $q=\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$

$f'(q)$ + − − + q

$f(q)$ ↗ $-\sqrt{2}$ ↘ 0 ↘ $\sqrt{2}$ ↗

значит $q=\sqrt{2}$ - точка минимума

По условию прогрессия возрастающая, значит $q>1$. Следовательно $f(x)$ нужно рассматривать на интервале $(1;+\infty)$

q

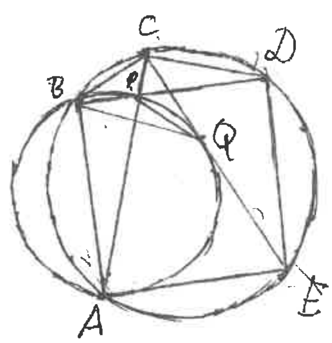
$f'(x)$ 1 ↘ $\sqrt{2}$ ↗

Значит минимальное значение сумма b_5+b_6 принимает при $q=\sqrt{2}$

$$(b_5+b_6)_{min} = \frac{9\cdot(\sqrt{2})^4}{(\sqrt{2})^2-1} = 36.$$

Значит $b_5+b_6 \geqslant 36$.

N3



Дано: $\angle ECD = 40°$

Найти: $\angle CQP$.

Решение:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle AED = 180^\circ - \angle DBA$ (т.к. $\smile ABD + \angle AED = 360^\circ$, $\angle AED = \frac{1}{2} \smile ABD$, $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AED$ как вписанные углы). $\Rightarrow \angle DBA = 180^\circ - \angle AED$.

$\angle DBA = \angle PBA = \frac{1}{2} \smile PA$ (т.к. вписанный угол)

$\angle PCQ = \frac{1}{2}(\smile AQ - \smile PQ)$ т.к. угол PCQ образован секущей и касательной, проведённой из одной точки.

$\smile AP = \smile PQ + \smile AQ = 2\angle DBA$.

$2PCQ - \smile PA = -2 \smile PQ$

$\smile PQ = 2\angle CQP$, т.к угол образован касательной и хордой

$2\angle PCQ - 2\angle DBA = -4\angle CQP$.

$2ADE - 2(180^\circ - \angle AED) = -4\angle CQP$.

$2\angle CQP = 180^\circ - (\angle ADE + \angle AED)$

$\angle AED + \angle ADE + 40^\circ = 180^\circ$ (т.к. ACDE вписан в окружность, сумма противоположных углов равна 180°)

$\angle ADE + \angle AED = 140^\circ$

$\angle CQP = \dfrac{180^\circ - (\angle ADE + \angle AED)}{2} = \dfrac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$

Ответ: $\angle CQP = 20^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 8 0 0 1 2 0

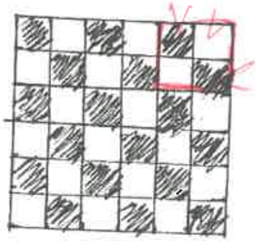
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4.

Всего на доске $6 \cdot 6 = 36$ клеток

Так как клетки раскрашены в шахматном порядке, то всего 18 белых и 18 чёрных клеток.



По условию, фишки можно ставить в клетки не имеющие общих сторон. Значит их можно ставить только на клетки шахматной доски, которые покрашены в один цвет.

Рассмотрим случай, когда фишки расставляют на чёрные клетки. Клеток 18, фишек 17. Значит 1 клетка, куда можно поставить фишку свободна и она может находиться на месте любой из 18 чёрных клеток. Следовательно, если ставить на чёрные, то возможно 18 вариантов. Аналогичные рассуждения применяются к белым клеткам. Значит при расстановки на белых возможны так же 18 вариантов

Следовательно, всего способов: $18 + 18 = 36$

Ответ: 36 способов.

В угловых клетках 2×2 не 2, а 3 способа поставить единств. фишку

№5 Очевидно, что условия будут выполняться для равных простых чисел:

$$\frac{a^n + a^n + a^n}{a + a + a} = \frac{3a^n}{3a} = a^{n-1}.$$

Взаимно!

Ответ: ~~все равные~~ простые числа $(a = b = c)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	5	9	6	7	2	0

Шифр

Вариант № 3

Фамилия Сухова

Имя Полина

Отчество Андреевна

Дата рождения 15.04.2003 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89135866520 **Подпись** Сухоф

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

20 | 20 | 20 | 20 | 16

96

Вариант № 3

М А 0 0 0 0 5 9 6 7 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 1. $\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1 \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin 9x = 1 - \sin 4x \quad (1) \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1 \quad (2) \end{cases}$

1) 1 ур. во 2 ур.: $(1-\sin 4x)^2 + \sin^2 4x = 1$

$1 - 2\sin 4x + 2\sin^2 4x = 1$

$\sin 4x \cdot (\sin 4x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{array}\right.$

2) С учётом 1 ур.: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 9x = 1 \end{cases} (3) \\ \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \sin 9x = 0 \end{cases} (4) \end{array}\right.$

3) 3 система: $\begin{cases} 4x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z} \quad (5) \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z} \quad (6) \end{cases}$

4) Рассмотрим значения, которые принимают 5 и 6 ~~ур.~~ серий корней от 0 до 2π:

$x = \frac{\pi}{4} n$: $n \in Z$

при $n = 0$: 0

при $n = 1$: $\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{при } n = 2: \frac{\pi}{2}}$

при $n = 3$: $\frac{3\pi}{4}$

при $n = 4$: π

при $n = 5$: $\frac{5\pi}{4}$

при $n = 6$: $\frac{3\pi}{2}$

при $n = 7$: $\frac{7\pi}{4}$

при $n = 8$: 2π

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z}$

при $n = 0$: $\frac{\pi}{18}$

при $n = 1$: $\frac{5\pi}{18}$

$\boxed{\text{при } n = 2: \frac{9\pi}{18} = \frac{\pi}{2}}$

при $n = 3$: $\frac{13\pi}{18}$

при $n = 4$: $\frac{17\pi}{18}$

при $n = 5$: $\frac{21\pi}{18}$

при $n = 6$: $\frac{24\pi}{18}$

при $n = 7$: $\frac{29\pi}{18}$

при $n = 8$: $\frac{33\pi}{18}$

при $n = 9$: $\frac{\pi}{18} + 2\pi = \frac{37\pi}{18} > 2\pi$

5) Пересечением двух серий корней является $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

6) 4 сист.: $\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \\ 9x = \pi q, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} l, l \in \mathbb{Z} \ (7) \\ x = \frac{\pi}{9} q, q \in \mathbb{Z} \ (8) \end{cases}$

7) Рассмотрим значения, которые принимают 7 и 8 серии корней от 0 до 2π:

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} l$: $\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{13\pi}{8}; \frac{17\pi}{8} > 2\pi$
$(l \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{9} q$: $\frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}; \pi; \frac{10\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}; \frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{9}; \frac{14\pi}{9}; \frac{5\pi}{3}; \frac{16\pi}{9}; \frac{17\pi}{9}; 2\pi$.

8) Пересечений у 7 и 8 серии корней нет.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

N2. 1) Т.к. любое натуральное число можно представить как произведение его простых множителей в некоторых степенях, то ($p = n_0^{\alpha_0} \cdot n_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot n_k^{\alpha_k}$, где p - натур. число; $n_0, n_1 \ldots n_k$ - простые числа); пусть $N = 2^n \cdot 3^k$, тогда $3N = 2^n \cdot 3^{k+1}$. 2) Из условия: $\begin{cases} (n+1)(k+1) = 24 \ (1) \\ (n+1)(k+2) = 32 \ (2) \end{cases}$

(т.к. $(\alpha_0+1)(\alpha_1+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k+1) = Q$, где Q - количество делителей числа).

3) $\frac{1 \text{ ур.}}{2 \text{ ур.}}$: $\frac{k+1}{k+2} = \frac{3}{4}$; $4k+4 = 3k+6$
$k = 2 \ (3)$

4) $n+1 = \frac{24}{3}$ - подставим (3) в (1).
$n = 7$

5) $N = 2^7 \cdot 3^2 = 128 \cdot 9 = 1152$

Ответ: 1152

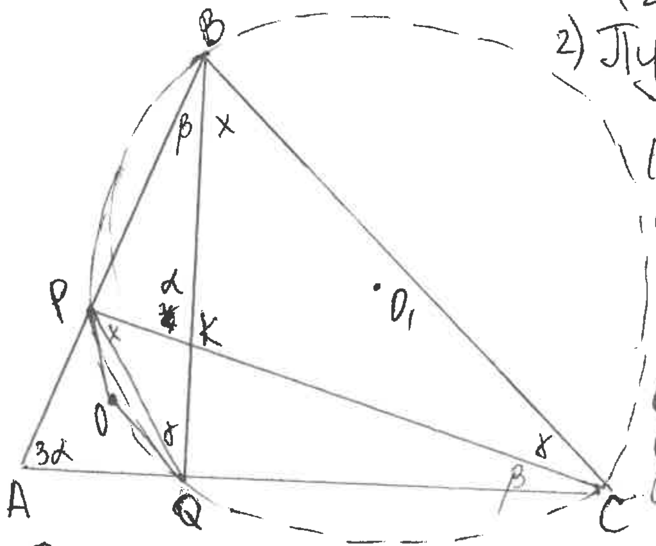
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 0 5 9 6 7 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N3.



1) Пусть $\angle BAC = 3\alpha$, $\angle BKP = \alpha$ ($\angle BAC = 3\angle BKP$);

2) Пусть $\angle PBQ = \angle\beta$, тогда $\angle QCP = \angle PBQ = \angle\beta$ (как углы, опирающиеся на одну дугу);

3) Пусть $\angle PCB = \gamma$, тогда $\angle PQB = \gamma = \angle PCB$ (как углы, опирающиеся на одну дугу);

4) Пусть $\angle QBC = x$, тогда $\angle QPC = \angle QBC = x$ (как углы, опирающиеся на одну дугу);

5) $\triangle PKQ$: $\angle PKQ = 180 - \angle\alpha$, тогда: $180 - (\gamma + x) = 180 - \alpha$
$\alpha = \gamma + x$

6) $\triangle ABC$: $180 - 3\alpha = 2\beta + \gamma + x$
$180 - 3\alpha = 2\beta + \alpha$ – подставим значение $\gamma + x$ из п.5.
$180 - 4\alpha = 2\beta$

7) $\triangle APQ$: т.к. окружность, проходящая через точки B и C, проходит через центр описанной вокруг $\triangle APQ$ окружности, то $\angle POQ = 2\angle PAQ$ (где O – центр описанной вокруг $\triangle APQ$ окружн., $\angle PAQ$ – вписанный угол, опир. на дугу $\smile PQ$, а $\angle POQ$ – центральный угол, опир. на дугу $\smile PQ$), тогда $\angle POQ = 6\alpha$.

8) Рассмотрим окр., проходящую через точки B и C $\triangle ABC$: $\angle POQ$ – вписанный угол, опирающийся на бо́льшую дугу $\smile PQ$, а $\angle QCP$ – вписанный угол, опирающ. на меньшую дугу $\smile PQ$. Градусная мера бо́льшей дуги $\smile PQ = 12\alpha$, а меньшей дуги $\smile PQ = 2\beta = 180 - 4\alpha$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	0	5	9	6	7	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

9) $12\alpha + 180 - 4\alpha = 360$

$8\alpha = 180$

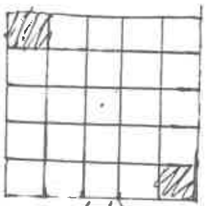
$\alpha = 22{,}5$

10) $\angle BAC = 3\alpha = 3 \cdot 22{,}5 = 67{,}5^\circ = \frac{135^\circ}{2}$

Ответ: $67{,}5^\circ$.

N4.

1) Всего способов выбрать 2 клетки из 25: $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

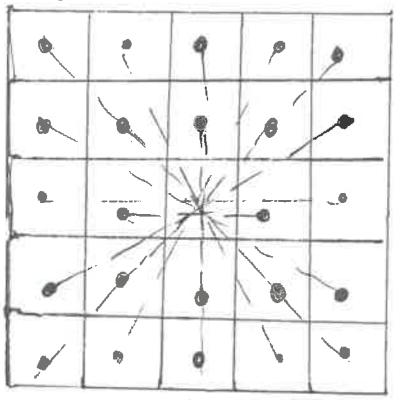


(1)

2) Раскраски, симметричные относительно центра, при повороте дают 2 раскраски, остальные возможные расстановки 2 клеток дают 4 раскраски (пример симметричной раскраски — рис. 1).

3) Возьмём произвольную клетку. Для данной клетки существует единственная клетка, которая дает симметричную относительно центра раскраску. Всего раскрасок, дающих 2 раскраски тогда:

$\frac{24}{2} = 12$



4) Количество раскрасок, дающих 4 раскраски: $300 - 12 = 288$.

5) $\frac{288}{4} + \frac{12}{2} = 72 + 6 = 78$

Ответ: 78.

N5 1) Рассмотрим $a_{29} + a_{30} \le 30$

т.к. $a_{29} \le a_{30}$, то $\underbrace{a_{29} + a_{30}}_{30} \ge 2a_{29}$

$a_{29} \le 15$, т.к. $0 \le a_1 \le a_2 \ldots \le a_{30}$, то ~~$0 \le a_{29} \le a_{30}$ 30.~~

2) $a_{30} \ge 30 - a_{29}$; $0 \le a_{29} \le 15$;

3) Рассмотрим некоторую величину $B = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{28}^2$

$a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \ldots + a_{28} \cdot a_{28} \le a_1 \cdot a_{29} + a_2 \cdot a_{29} + \ldots + a_{28} \cdot a_{29}$

$B \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_{28}) \cdot a_{29}$;

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ______ | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 9 | 6 | 7 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$B \le 30a_{29}$;

4) Рассмотрим величину $A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{30}^2$. Из п.3, п.2, п.1: $A = 30a_{29} + a_{29}^2 + (30 - a_{29})^2 = 30a_{29} + a_{29}^2 + a_{29}^2 + 900 - 60a_{29} = 2a_{29}^2 - 30a_{29} + 900 = 2a_{29}(a_{29} - 15) + 900$.

Т.к. $a_{29} \le 15$ и $a_{29} \ge 0$, то $2a_{29}(a_{29} - 15) + 900 \le 900$, тогда максимальное значение величины $A = 900$

Ответ: 900.

Последовательности, на которых достиг-ся максимум, не указаны.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	7	3	0	7	2	0

г. Красноярск, СФУ

Адрес площадки проведения — Шифр

Вариант № 2

Фамилия Супрунец

Имя Вадим

Отчество Васильевич

Дата рождения 14.03.2002 **Класс** 11

Предмет Математика

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 29.02.2020

Номер телефона 89082205550 **Подпись**

Впишите свои фамилию, имя и отчество, название предмета печатными буквами; дату рождения, класс, номер телефона, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы цифрами. Не забудьте поставить подпись.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК» 20 20 20 20 20

Вариант № 2

М	А	0	0	0	0	7	3	0	7	2	0

100

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

пусть $N = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \dots p_a^{s_a}$, где p - простые числа и $s_j > 1$; $s \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим 2 случая:

1) пусть среди $p_1, p_2, p_3 \dots p_a$ нет 5, тогда кол-во делителей N $(s_1+1)(s_2+1)\dots(s_a+1) = 30$, но т.к $5N$ имеет 40 делителей и $5N = 5^1 \cdot p_1^{s_1} \dots p_a^{s_a}$, то $2(s_1+1)(s_2+1)\dots(s_a+1) = 60$, а должно быть равным 40, противоречие

2) пусть $N = 5^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \dots p_a^{s_a}$, тогда

$(s_1+1)(s_2+1)\dots(s_a+1) = 30$ и т.к $5N = 5^{s_1+1} \cdot p_2^{s_2} \dots p_a^{s_a}$, то $(s_1+2)(s_2+1)\dots(s_a+1) = 40$, пусть $(s_2+1)\dots(s_a+1) = x \Rightarrow$

$(s_1+1)x = 30$ и $(s_1+2)x = 40$

$s_1 = \frac{30-x}{x}$ $\quad s_1 = \frac{40-2x}{x} \Rightarrow \frac{30-x}{x} = \frac{40-2x}{x}$, т.к $x \neq 0$ (по условию $s_j > 1$), то $40x - 2x^2 = 30x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 10x = 0$

$x(10-x) = 0 \Rightarrow$ т.к $x \neq 0$, то $x = 10 \Rightarrow s_1 + 1 = 3 \Rightarrow s_1 = 2 \Rightarrow$

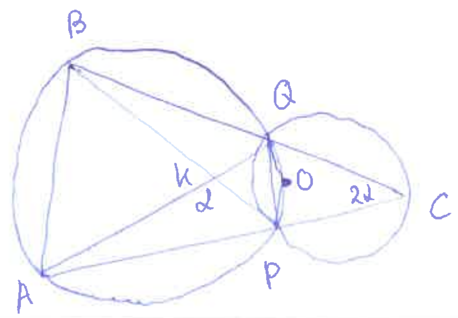
т.к $x = 10 = 2 \cdot 5$ и поэтому т.к $(s_j + 1) > 1$, то $x = (s_2+1)(s_3+1) = 10$

$s_2 + 1 = 2 \Rightarrow s_2 = 1$; $s_3 + 1 = 5 \Rightarrow s_3 = 4$, пусть $p_2 = 3$ и $p_3 = 2 \Rightarrow$

$N = 5^2 \cdot 3^1 \cdot 2^4 = 25 \cdot 48 = 1200$

Ответ: $N = 1200$

№ 3



пусть $\angle AKP = \alpha \Rightarrow \angle ACB = 2\alpha$, т.к по условию $\angle ACP = 2\angle AKP$. Пусть O центр окружности описанной около треугольника $PQC \Rightarrow$ т.к $\angle PCQ = 2\alpha \Rightarrow \angle POQ = 4\alpha$, т.к $\angle PQC$ - вписанный и опирается на дугу $\cup PQ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 7 3 0 7 2 0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

т.к $\angle POQ$ вписанный в окружность проходящую через точки A и B $\Rightarrow \cup PAQ = 2\angle POQ = 8\alpha$, т.к $\cup PAQ + \cup POQ = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cup POQ = 360 - 8\alpha \Rightarrow \angle QAP = \angle PBQ = \frac{1}{2}\cup POQ = 180 - 4\alpha$, т.к это вписанные углы опирающиеся на дугу $\cup POQ$. Рассмотрим $\triangle BPC$:

$\angle PBC = 180 - 4\alpha$, $\angle PCB = 2\alpha \Rightarrow \angle BPC = 180 - \angle PBC - \angle PCB = 180 - 180 + 4\alpha - 2\alpha = 2\alpha$. Т.к BP и AQ — хорды, а $\angle AKP$ — угол между ними $\Rightarrow$ по т. об угле между пересекающимися хордами $\angle AKP = \frac{\cup BQ + \cup AP}{2}$

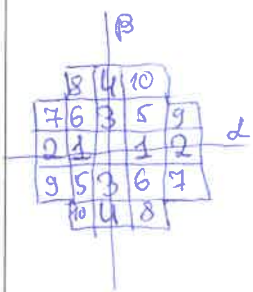
т.к $\angle AKP = \alpha \Rightarrow \cup BQ + \cup AP = 2\alpha$, т.к $\cup PAQ = 8\alpha \Rightarrow \cup AB = \cup PAQ - \cup BQ - \cup AP = 8\alpha - 2\alpha = 6\alpha \Rightarrow$ т.к $\angle APB$ опирается на дугу AB $\Rightarrow$

$\angle APB = \frac{\cup AB}{2} = \frac{6\alpha}{2} = 3\alpha$, т.к $\angle APB + \angle BPC = 180$ (смежные) $\Rightarrow$

$3\alpha + 2\alpha = 180 \Rightarrow 5\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 36$, т.к $\angle ACB = 2\alpha \Rightarrow \angle ACB = 36 \cdot 2 = 72$

Ответ: $\angle ACB = 72$

№4



Найдем кол-во способов закрасить 2 клетки в синий цвет без учета того, что из одной раскраски можно получить другие: это сочетания: $C_{21}^{2} = \frac{21!}{19!\,2!} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$

(т.к всего 21 клетка и надо закрасить 2 из них)

Проведем прямые α и β как показано на рисунке. Заметим, что если клетки мы будем закрашивать не симметрично центра (точки пересечения линий α и β) то из нашей раскраски мы сможем получить еще 3 раскраски, т.к при каждом повороте фигуры (всего их 3) мы будем получать новую раскраску. Но если закрашенные клетки симметричны относительно центра, то поворачивая фигуру мы получим только одну дополнительную раскраску. Т.к после первого поворота по часовой стрелке мы получили еще одну раскраску, а при повороте еще раз и еще раз раскраски будут повторяться. Найдем кол-во раскрасок, таких что закрашенные клетки симметричны относительно центра. Всего таких раскрасок 10 (они пронумерованы на рисунке (т.к если мы выберем любую клетку у нее есть только

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

одна симметричная ей относительно центра, т.к всего клеток 21 (не считая центральной 20), то получаем $\frac{20}{2}=10$, => посчитаем общее число раскрасок: $\frac{200}{4}+\frac{10}{2}=50+5=55$ (т.к из 1 следуют 3, но всего их 4, и аналогично 2)

Ответ: 55

N5

$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{50}^2=a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_2+\ldots+a_{50}\cdot a_{50}$, т.к $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{49}\le a_{50}$

то $A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{50}^2\le a_1\cdot a_{49}+a_2\cdot a_{49}+\ldots+a_{48}\cdot a_{49}+a_{49}^2+a_{50}^2$

т.к по условию известно, что $a_1+a_2+\ldots+a_{48}\le 50$, то

$a_1\cdot a_{49}+a_2\cdot a_{49}+\ldots+a_{49}^2+a_{50}^2\le a_{49}(a_1+a_2+\ldots+a_{48})+a_{49}^2+a_{50}^2\le$

$\le a_{49}\cdot 50+a_{49}^2+a_{50}^2$, т.к по условию $a_{50}+a_{49}\le 50$ => $a_{50}\le 50-a_{49}$,

т.к $a_{49}\le a_{50}$ => $a_{49}\le 50-a_{49}$ => $2a_{49}\le 50$ => $a_{49}\le 25$. Поэтому, т.к

$a_{50}\le 50-a_{49}$ => $a_{50}^2\le(50-a_{49})^2$ =>

$a_{49}\cdot 50+a_{49}^2+a_{50}^2\le a_{49}\cdot 50+a_{49}^2+(50-a_{49})^2\le 50\cdot a_{49}+a_{49}^2+2500-100\cdot a_{49}+$

$+a_{49}^2=2a_{49}^2-50a_{49}+2500=2a_{49}(a_{49}-25)+2500$, т.к $a_{49}\le 25$, то

$2a_{49}(a_{49}-25)+2500\le 2\cdot 25(25-25)+2500=2500$ => т.к $2a_{49}(a_{49}-25)+2500\le 2500$ =>

$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{50}^2\le 2500$ => $A_{max}=2500$. Это значение достигается при

$a_{49}=25$ или $a_{49}=0$ => если $a_{49}=0$ значит $a_1,a_2\ldots a_{48}=0$ => $a_{50}^2=2500$

$a_{50}=50$: 1 последовательность: $(\underbrace{0,0,0\ldots 0}_{49},50)$

Если $a_{49}=25$ => наша последовательность: $(\underbrace{0,0\ldots 0}_{26},25,25,25,25)$. Очевидно, что это единственный вариант, т.к если уменьшить одно из чисел a_{47} или a_{48}, для увеличения одно из $a_1\ldots a_{46}$, то сумма квадратов уменьшится и $A<2500$ (т.к $\le a_{48}\le a_{49}\le a_{48}\le a_{49}\le a_{50}$).

Ответ: $A_{max}=2500$

1) $(\underbrace{0,0,\ldots 0}_{49},50)$

2) $(\underbrace{0,0\ldots 0}_{26},25,25,25,25)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	7	3	0	7	2	0

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1 \quad (1) \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Возведем (1) уравнение в квадрат: $(\sin 7x + \sin 4x)^2 =$
$= \sin^2 7x + 2\sin 7x \sin 4x + \sin^2 4x = 1$ (3)

Отнимем из уравнения (3) уравнение (2), тогда:

$\cancel{\sin^2 7x} + \cancel{\sin^2 4x} + 2\sin 7x \sin 4x - \cancel{\sin^2 7x} - \sin^2 4x = 0 \Rightarrow 2\sin 7x \sin 4x = 0$ получаем

2 системы:
$$1) \begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases}$$

1) $\sin 7x = 0$

$7x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi n}{7}$

$\sin 4x = 1$

$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi n}{7} \quad | \cdot 56$

$7\pi + 28\pi k = 8\pi n \quad | \cdot \frac{1}{\pi}$

$7 + 28k = 8n$, заметим, что

т.к $8n \vdots 2$ и $28k \vdots 2 \Rightarrow 7 + 28k$ должны делится на 2, но т.к $7 \not\vdots 2 \Rightarrow$ решений нет.

2) $\begin{cases} \sin 7x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases}$

$\sin 7x = 1$

$7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7}$

$\sin 4x = 0$

$4x = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi k}{4}$

$\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi n}{7} = \frac{\pi k}{4} \quad | \cdot \frac{28}{\pi}$

$2 + 8n = 7k \Rightarrow 2 + 8n \vdots 7 \Rightarrow 8n \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow n = 7t + 5$

$n = \frac{7k - 2}{8}$, т.к $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7k \equiv 2 \pmod 8 \Rightarrow k = 8h + 6$, т.к $2 + 56t + 40 =$
$= 56h + 42 \Rightarrow 56t = 56h \Rightarrow h = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi(7t + 5)}{7} = \frac{\pi + 28\pi t + 20\pi}{14}$

$= \frac{21\pi + 28\pi t}{14} = 2\pi t + \frac{21\pi}{14} = 2\pi t + \frac{3\pi}{2},\ t \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi t$.