Математика. 11 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1) Решите уравнение

$$2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2.$$

2) Дана возрастающая положительная геометрическая прогрессия b_n. Известно, что $b_4+b_3-b_2-b_1=9$. Докажите, что $b_5+b_6\geq 36$.

3) Около пятиугольника $ABCDE$ описана окружность, P – точка пересечения отрезков AC и BD, Q – точка касания отрезка CE и описанной около треугольника ABP окружности. Найдите $\angle CQP$, если известно, что $\angle ECD=40^{\circ}$.

4) Сколькими способами можно поставить 17 фишек на шахматную доску 6×6, если фишки нельзя ставить на клетки, имеющие общую сторону?

5) Найдите все тройки попарно простых натуральных чисел (a,b,c) $(a\leq b\leq c)$, для которых $a^n+b^n+c^n$ делится на $a+b+c$ для всех натуральных $2\leq n\leq 12$.

Математика. 11 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

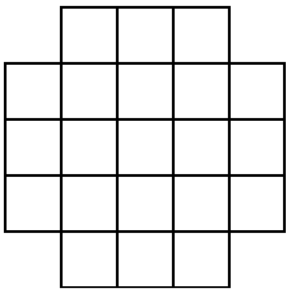
1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1, \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1. \end{cases}$$

2) Натуральное число N имеет 30 делителей, а число $5N$ имеет 40 делителей. Приведите пример такого числа.

3) Окружность, проходящая через вершины A и B остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно, а также проходит через центр описанной около треугольника PQC окружности. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке K, а $\angle ACB = 2\angle AKP$. Найдите $\angle ACB$.

4) Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, и две из них покрасили в синий цвет, а остальные клетки остались белыми. Сколько существует таких раскрасок, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются за одну?



5) Даны 50 неотрицательных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{49} \leq a_{50}$. Сумма первых 48 чисел не превышает 50, и сумма двух последних также не превышает 50. Найдите максимальное возможное значение суммы квадратов этих чисел $A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{49}^2 + a_{50}^2$, и укажите все последовательности чисел, для которых этот максимум достигается.

Математика. 11 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1, \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1. \end{cases}$$

2) Существует ли натуральное число N, имеющее 24 делителя, такое, что число $3N$ имеет 32 делителя?

3) Окружность, проходящая через вершины B и C остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно, а также проходит через центр описанной около треугольника APQ окружности. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K, а $\angle BAC = 3\angle BKP$. Найдите $\angle BAC$.

4) Квадрат 5×5 расчертили на 25 одинаковых клеток, и две из них покрасили в синий цвет, а остальные клетки остались белыми. Сколько существует таких раскрасок, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются за одну?

5) Даны 30 действительных чисел a_i $(1 \leq i \leq 30)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{29} \leq a_{30}, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{28} \leq 30, \\ a_{29} + a_{30} \leq 30. \end{cases}$$

Найдите максимальное возможное значение суммы квадратов этих чисел $A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{29}^2 + a_{30}^2$, и укажите все последовательности чисел, для которых этот максимум достигается.