ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
10 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. На поляне в лесу за круглым столом собрались 450 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый за столом сказал: «Из сидящего справа от меня и сидящего сразу за ним ровно один лжец». Сколько лжецов могло быть на поляне?

Ответ. 150 или 450.

Решение. За столом могут сидеть все лжецы, тогда их 450. Предположим, что за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда есть и рыцарь, справа от которого сидит лжец (иначе они все рыцари, что невозможно). Тогда правый сосед этого лжеца должен быть рыцарем. Но справа от второго рыцари также обязан сидеть рыцарь, поскольку лжец врет. Второй рыцарь говорит правду, поэтому справа от третьего рыцаря должен сидеть лжец. Рассуждая так далее, мы получим, что все сидящие за столом разбиваются на тройки вида рыцарь, лжец и рыцарь. Поэтому лжецов в точности треть.

Комментарий. *Верно рассмотрен один из двух существенных случаев – 12 баллов.*

2. В командной олимпиаде по математике для получения призового места необходимо набрать n баллов. В составе команды «Бельчата» 3 участника: Вася, Коля и Петя. Оказалось, что сумма набранных баллов команды «Бельчата» меньше n. Если бы Вася получил вдвое больше баллов, то у команды было бы $2n-34$ баллов. С другой стороны, если бы Пете добавили бы вдвое больше баллов, чем у него было, то у команды было бы $2n+6$ баллов. Найдите n, если известно, что у Коли было на 9 баллов больше, чем у Васи.

Ответ. $n=35$.

Решение. Пусть у Васи x баллов, у Коли – y баллов, у Пети – z баллов. Тогда из условия задачи вытекает:

$$\begin{cases} x+y+z<n, \\ y=x+9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z+9<n, \\ 3x+9+z=2n-34, \\ 2x+9+3z=2n+6. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x<-z+25, \\ x=2z-40. \end{cases}$$

Учитывая, что $x>0$, приходим к выводу, что $20<z<21$. Отсюда $\begin{cases} x=2, \\ z=21. \end{cases}$ Итак, $n=35$.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BE, пересекающиеся в точке H. Около треугольника ABH описана окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках F и G, отличных от концов. Докажите, что $FG=2DE$.

Решение. Заметим, что точка E – середина отрезка CF. Действительно, так как точки A, H, B и F лежат на одной окружности, то $\angle HBF=\angle HAC=90^{\circ}-\angle C=\angle HBC$. Значит, в треугольнике CBF высота совпадает с биссектрисой, т.е. он равнобедренный, и тогда $CE=EF$. Аналогично, точка D – середина отрезка CG. Тогда ED – средняя линия в треугольнике FCG, а значит, $2ED=FG$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. Катя записала на доске 2020 ненулевых действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$, а Лена дописала к ним на доску произведение всех пар соседних чисел x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, … , $x_{2019}x_{2020}$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться на доске?

Решение. Рассмотрим тройки чисел

$$(x_1,\ x_2,\ x_1x_2),(x_3,\ x_4,\ x_3x_4),\dots,(x_{2019},\ x_{2020},\ x_{2019}x_{2020}).$$

Произведение чисел в каждой тройке положительно (оно равно произведению квадратов двух ненулевых чисел); значит, среди трёх её чисел есть хотя бы одно положительное, так как произведение трёх отрицательных чисел отрицательно. Указанные тройки чисел не пересекаются, поэтому среди написанных на доске чисел не менее 1010 положительных. Покажем теперь, что можно выбрать такие 2020 исходных чисел, что на доске окажется ровно 1010 положительных чисел. Для этого сделаем все числа a_i с нечётными номерами положительными (их количество – 1010), а чётными номерами – отрицательными. Тогда каждое из произведений отрицательно (как произведение двух чисел разных знаков), и положительными являются только 1010 исходных чисел с нечётными номерами. Следовательно, наибольшее количество отрицательных чисел на доске равно $4039-1010=3029$. Существуют и другие примеры, в которых ровно 3029 отрицательных чисел.

Ответ. 3029.

Комментарий. *Предложена реализация – 8 баллов, сделана оценка – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Ответ без обоснования – 2 балла.*

5. Пусть a, b, c – целые числа, такие что многочлен x^3+ax^2+bx+c имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня и многочлен ax^2+bx+c имеет натуральный корень. Докажите, что число $|a|$ – составное.

Решение. Пусть y – корень многочлена ax^2+bx+c, x_1, x_2, x_3 – корни многочлена x^3+ax^2+bx+c. Предположим, что y – число нечетное, тогда при всех нечетных x число ax^2+bx+c – четно, а число x^3+ax^2+bx+c – нечетно. Значит, корни многочлена x^3+ax^2+bx+c – числа четные, что противоречит их взаимной простоте. Таким образом, y – число четное. Тогда c – тоже четное. По теореме Виета, $c=-x_1x_2x_3$. Следовательно, одно из чисел x_1, x_2, x_3 – четное, а два других нечетные. Но тогда $a=-(x_1+x_2+x_3)$ – число четное и не менее 3 по модулю, то есть не простое.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Вариант 2

1. На поляне в лесу собрались бельчата. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится на поляне?». От всех бельчат были получены все возможные ответы от 1 до 100 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько лжецов могло быть на поляне?

Ответ. 99 или 100.

Решение. Поскольку всего получено 100 разных ответов и один из них точно правильный, остальные 99 ответов неверные. Значит, в комнате минимум 99 лжецов. Больше ста их тоже быть не может, так как верный ответ не превосходит 100. Убедимся, что оба ответа возможны. Действительно, 99 лжецов бывает, когда в комнате 100 человек и все дают разные ответы, а 100 лжецов – когда 101 человек, и какой-то неправильный ответ дают двое.

Комментарий. *Верно рассмотрен один из двух существенных случаев – 12 баллов.*

2. В командной олимпиаде по математике были лёгкие, средние и трудные задачи. За правильный ответ на лёгкую задачу можно было получить 4 балла, среднюю – 5 баллов, трудную – 6 баллов. За неверный ответ на лёгкую задачу вычиталось 2 балла, за неверный ответ на среднюю задачу – 1 балл, а за неверный ответ на трудную задачу баллы не вычитались. Участники команды «Бельчата» ответили правильно на 10 задач и получили на 30 баллов меньше максимально возможного числа баллов. Сколько всего задач было предложено на олимпиаде?

Ответ. 15.

Решение. Пусть на олимпиаде было x легких, y средних и z трудных задач, а участники команды «Бельчата» ответили правильно на a легких, b средних и c трудных задач. Тогда они неправильно ответили на $x-a$ легких задач и $y-b$ средних задач. Поэтому они получили $4a-2(x-a)+5b-(y-b)+6c=6(a+b+c)-2x-y$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c)-2x-y=4x+5y+6z-30$, или $30+6\cdot 10=6(x+y+z)$, или $x+y+z=15$.

3. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Описанная окружность треугольника ABD проходит через центр вписанной окружности треугольника BCD. Найдите $\angle ACB$, если известно, что $\angle ABC=40°$.

Ответ. $100°$.

Решение. Пусть O – центр вписанной в треугольник DBC окружности. По условию четырехугольник $ADOB$ вписанный, следовательно, $\angle BAO=\angle BDO=\frac{1}{2}\angle BDC$ и $\angle CAO=$

$\angle DBO = \frac{1}{2}\angle DBC$. Таким образом, $\angle CAB = \angle BAO + \angle CAO = \frac{1}{2}(\angle BDC + \angle DBC) = \frac{1}{2}(180° - \angle ACB) = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$. Подсчитаем сумму углов треугольника ABC:

$$180° = \angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 40° + \angle ACB + \left(90° - \frac{1}{2}\angle ACB\right) = 130° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Следовательно, $\angle ACB = 100°$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. Катя выписывает на доску нечётные числа из отрезка $[16; 2020]$ так, что ни одно из выписанных чисел не делится ни на одно другое. Какое наибольшее количество чисел могло оказаться на доске?

Ответ. 673.

Решение. Если выбрать, к примеру, все нечётные числа от 675 до 2019, количество которых равно $\frac{2019-673}{2} = 673$, то ни одно из этих чисел не делится на другое, так как при делении должно было бы получиться нечётное число, которое не меньше 3, но $675 \cdot 3 > 2019$. Больше 673 чисел, удовлетворяющих условию задачи, выбрать нельзя. В самом деле, если разбить все нечётные числа от 17 до 2019 на 673 кучки, порождённые выбранными выше числами и включающие вместе с каждым порождающим числом все его делители, дающие в частном степень тройки, то получатся следующие 673 кучки:

$$\{2019, 673\}, \{2017\}, \{2015\}, \{2013, 671\}, \{2011\}, \{2009\},$$
$$\{2007, 669, 223\}, \dots, \{675, 225, 75, 25\}.$$

Поэтому если будет выбрано больше чем 673 числа, удовлетворяющих условию задачи, то по принципу Дирихле хотя бы два из них окажутся в одной кучке, а значит, одно из них будет делиться на другое.

Комментарий. *Предложена реализация – 8 баллов, сделана оценка – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Ответ без обоснования – 2 балла.*

5. Многочлен $x^3 + ax^2 + 17x + 3b$, где a и b – целые, имеет три целых корня. Докажите, что они различны.

Решение. Обозначим корни многочлена через p, q, r. По теореме Виета $pqr = 3b$. Значит, какой-то из корней, скажем p, делится на 3; пусть $p = 3s$. С другой стороны, по теореме Виета $3qs + 3rs + qr = 17$, так что qr даёт остаток 2 при делении на 3, поэтому одно из чисел q, r дает остаток 1, а другое – 2 при делении на 3. Итак, корни имеют разные остатки при делении на 3 и поэтому различны.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Вариант 3

1. На поляне в лесу собрались бельчата. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится на поляне?». От всех бельчат были получены все возможные ответы от 1 до 200 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько лжецов могло быть на поляне?

Ответ. 199 или 200.

Решение. Поскольку всего получено 200 разных ответов и один из них точно правильный, остальные 199 ответов неверные. Значит, в комнате минимум 199 лжецов. Больше двухсот их тоже быть не может, так как верный ответ не превосходит 200. Убедимся, что оба ответа возможны. Действительно, 199 лжецов бывает, когда в комнате 200 человек и все дают разные ответы, а 200 лжецов – когда 201 человек, и какой-то неправильный ответ дают двое.

Комментарий. *Верно рассмотрен один из двух существенных случаев – 12 баллов.*

2. В командной олимпиаде по математике были лёгкие, средние и трудные задачи. За правильный ответ на лёгкую задачу можно было получить 4 балла, среднюю – 5 баллов, трудную – 6 баллов. За неверный ответ на лёгкую задачу вычиталось 2 балла, за неверный ответ на среднюю задачу – 1 балл, а за неверный ответ на трудную задачу баллы не вычитались. Участники команды «Бельчата» ответили правильно на 15 задач и получили на 30 баллов меньше максимально возможного числа баллов. Сколько всего задач было предложено на олимпиаде?

Ответ. 20.

Решение. Пусть на олимпиаде было x легких, y средних и z трудных задач, а участники команды «Бельчата» ответили правильно на a легких, b средних и c трудных задач. Тогда они неправильно ответили на $x-a$ легких задач и $y-b$ средних задач. Поэтому они получили $4a-2(x-a)+5b-(y-b)+6c=6(a+b+c)-2x-y$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c)-2x-y=4x+5y+6z-30$, или $30+6\cdot 15=6(x+y+z)$, или $x+y+z=20$.

3. На стороне KL треугольника KLM отмечена точка P. Описанная окружность треугольника KPM проходит через центр вписанной окружности треугольника PLM. Найдите $\angle KLM$, если известно, что $\angle KML=50°$.

Ответ. $80°$.

Решение. Пусть O – центр вписанной в треугольник PLM окружности. По условию четырехугольник $KPOM$ вписанный, следовательно, $\angle MKO=\angle MPO=\frac{1}{2}\angle MPL$ и $\angle LKO=\angle PMO=\frac{1}{2}\angle PML$. Таким образом, $\angle LKM=\angle MKO+\angle LKO=\frac{1}{2}(\angle MPL+\angle PML)=\frac{1}{2}(180°-\angle PLM)=90°-\frac{1}{2}\angle KLM$. Подсчитаем сумму углов треугольника KLM: $180°=\angle KML+\angle KLM+\angle LKM=50°+\angle KLM+\left(90°-\frac{1}{2}\angle KLM\right)=140°+\frac{1}{2}\angle KLM$. Следовательно, $\angle KLM=80°$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. Катя выписывает на доску нечётные числа из отрезка $[16; 2024]$ так, что ни одно из выписанных чисел не делится ни на одно другое. Какое наибольшее количество чисел могло оказаться на доске?

Ответ. 675.

Решение. Если выбрать, к примеру, все нечётные числа от 675 до 2023, количество которых равно $\frac{2023-673}{2}=675$, то ни одно из этих чисел не делится на другое, так как при делении должно было бы получиться нечётное число, которое не меньше 3, но $675\cdot 3>2024$. Больше 675 чисел, удовлетворяющих условию задачи, выбрать нельзя. В самом деле, если разбить все нечётные числа от 17 до 2023 на 675 кучек, порождённые выбранными выше числами и включающие вместе с каждым порождающим числом все его делители, дающие в частном степень тройки, то получатся следующие 675 кучки:

$$\{2023\}, \{2021\}, \{2019, 673\}, \{2017\}, \{2015\}, \{2013, 671\},$$
$$\{2011\}, \{2009\}, \{2007, 669, 223\}, \ldots, \{675, 225, 75, 25\}.$$

Поэтому если будет выбрано больше чем 675 чисел, удовлетворяющих условию задачи, то по принципу Дирихле хотя бы два из них окажутся в одной кучке, а значит, одно из них будет делиться на другое.

Комментарий. *Предложена реализация – 8 баллов, сделана оценка – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Ответ без обоснования – 2 балла.*

5. Многочлен $x^3 + bx^2 + 23x + 3a$, где a и b – целые, имеет три целых корня. Докажите, что они различны.

Решение. Обозначим корни многочлена через p, q, r. По теореме Виета $pqr = 3a$. Значит, какой-то из корней, скажем p, делится на 3; пусть $p = 3s$. С другой стороны, по теореме Виета $3qs + 3rs + qr = 23$, так что qr даёт остаток 2 при делении на 3, поэтому одно из чисел q, r дает остаток 1, а другое – 2 при делении на 3. Итак, корни имеют разные остатки при делении на 3 и поэтому различны.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*