ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Для положительных действительных чисел x, y сравните значения выражений $\frac{x}{x^3+xy+1}$ и $\frac{1}{x+y+1}$.

Ответ. $\frac{x}{x^3+xy+1} \le \frac{1}{x+y+1}$.

Решение. Рассмотрим разность $\frac{x}{x^3+xy+1} - \frac{1}{x+y+1} = \frac{x(x+y+1)-(x^3+xy+1)}{(x^3+xy+1)(x+y+1)} = \frac{x^2+x-x^3-1}{(x^3+xy+1)(x+y+1)} = \frac{x^2(1-x)-(1-x)}{(x^3+xy+1)(x+y+1)} = \frac{-(1-x)^2\cdot(1+x)}{(x^3+xy+1)(x+y+1)} \le 0$. Следовательно, $\frac{x}{x^3+xy+1} \le \frac{1}{x+y+1}$.

2. Бельчата Билли, Вилли и Дилли были кандидатами в президенты леса. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты в сумме набрали 146% голосов. Оказалось, что по ошибке процент голосов за Билли был посчитан не от общего числа проголосовавших, а от числа голосовавших за Билли или Вилли. Остальные проценты были подсчитаны верно. Известно, что за Вилли проголосовало больше 2000 жителей леса. Докажите, что за Билли проголосовало больше 1700 жителей леса.

Решение. Пусть за Билли проголосовало x человек, за Вилли – y человек. Не будем пользоваться процентами, вместо этого будем писать соответствующие числа: 10% – это $0{,}1$; 146% – это $1{,}46$ и т.п. Вычисляя долю голосов за Билли, взяли дробь $\frac{x}{x+y}$. Далее прибавили к ней долю голосов, отданных за Вилли и Дилли. Поскольку эти вычисления делали правильно, эта доля не превосходит 1. В сумме было получено $1{,}46$. Следовательно, $\frac{x}{x+y} > 0{,}46$. Домножим на знаменатель и соберем слагаемые, содержащие

x в левой части. Получится неравенство $0{,}54x > 0.46y$. Вспомним, что $y > 2000$, получаем, что $x > \frac{0{,}46}{0{,}54}y > \frac{0{,}46}{0{,}54} \cdot 2000 = \frac{92000}{54} = 1703\frac{19}{27} > 1700$.

3. В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины оснований BC и AD – точки E и F, соответственно. Из точки D на сторону AB опущена высота DH. Докажите, что $BF = EH$.

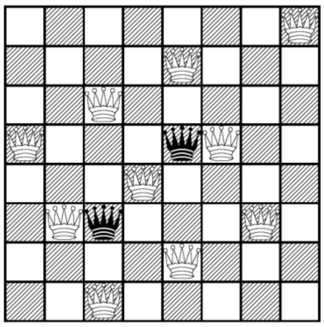
Решение. Из условия задачи следует, что $BE = AF$ и $BE \parallel AF$, следовательно, $BEFA$ – параллелограмм и $AB \parallel FE$. Таким образом, $HBEF$ – трапеция. Докажем, что она равнобедренная. В прямоугольном треугольнике AHD отрезок HF является медианой, проведенной к гипотенузе, следовательно, $HF = \frac{AD}{2} = AF$. Таким образом, $HF = BE$, то есть трапеция $HBEF$ – равнобедренная. В равнобокой трапеции диагонали равны, поэтому $BF = HE$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. На шахматной доске 8×8 расставляют два чёрных и n белых ферзей так, что одноцветные ферзи не бьют друг друга. При каком наибольшем n это возможно? (Ферзь ходит на любое число полей по вертикали, горизонтали или диагонали и не бьет насквозь через другую фигуру.)

Ответ. 10.

Решение. На горизонтали, где стоит k черных ферзей, может быть не более $k + 1$ белых. Поэтому общее число белых ферзей на доске не превосходит $8 + 2 = 10$. Пример для $n = 10$ показан на рисунке.



Комментарий. *Предложена реализация – 10 баллов, сделана оценка – 10 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

5. Выражение $n!$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Решите в натуральных числах уравнение $n! - 4n^2 + 18 = m^2 + 4nm - 20m$.

Ответ. $(3; 2), (3; 6)$.

Решение. Запишем уравнение в виде $n! + 20m + 18 = (2n + m)^2$. Заметим, что при $n \geq 5$ число $n!$ заканчивается на 0. Тогда если $n \geq 5$, то левая часть исходного уравнения заканчивается на 8. Однако легко убедиться, что квадрат натурального числа не может оканчиваться на 8. Поэтому достаточно рассмотреть все натуральные n от 1 до 4.
При $n = 1$ имеем: $1! + 20m + 18 = (2 + m)^2$. Данное уравнение не имеет натуральных корней.
При $n = 2$ имеем: $2! + 20m + 18 = (4 + m)^2$. Данное уравнение не имеет натуральных корней.
При $n = 3$ имеем: $3! + 20m + 18 = (6 + m)^2$. Данное уравнение имеет корни 2 и 6.

При $n = 4$ имеем: $4! + 20m + 18 = (8 + m)^2$. Данное уравнение не имеет действительных корней.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Вариант 2

1. Для различных положительных действительных чисел a, b справедливо равенство $\frac{a}{a^3+a+1} = \frac{b}{b^3+b+1}$. Найдите значение выражения $\frac{13-a^2b-b^2a}{2+a^2b+b^2a}$.

Ответ. 4.

Решение. Из условия имеем: $\frac{a}{a^3+a+1} = \frac{b}{b^3+b+1} \Leftrightarrow ab^3 + ab + a = a^3b + ab + b \Leftrightarrow ab^3 - a^3b + a - b = 0 \Leftrightarrow ab(b^2 - a^2) - (b - a) = 0 \Leftrightarrow (b - a)(ab(a + b) - 1) = 0$. Так как по условию $a \neq b$, то $ab(a + b) = 1 \Leftrightarrow a^2b + b^2a = 1$. В результате имеем: $\frac{13-a^2b-b^2a}{2+a^2b+b^2a} = \frac{13-1}{2+1} = \frac{12}{3} = 4$.

2. В прошлом году первокурсник Сибирского федерального университета Миша прогуливался по лесу и заметил, что в субботу на одном из деревьев в лесу количество зелёных и красных листьев совпадало, а жёлтых листьев было в 7 раз больше, чем красных. В воскресенье на этом же дереве количество зелёных и жёлтых листьев совпадало, а красных листьев было в 7 раз больше, чем жёлтых. Докажите, что за ночь количество листьев на этом дереве уменьшилось хотя бы в 4 раза. (Зелёный лист может пожелтеть и покраснеть. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают.)

Решение. Обозначим количество зелёных листьев, висевших вчера на дереве, через x. Тогда красных листьев вчера также было x, а ещё было $7x$ жёлтых листьев. А всего листьев было $x + x + 7x = 9x$. Кроме того, обозначим число зелёных листьев сегодня через y. Тогда жёлтых листьев стало тоже y, красных – $7y$, а всего $y + y + 7y = 9y$ листьев. Заметим, что суммарное количество зелёных и красных листьев за ночь не могло увеличиться: зелёные листья сами по себе не появляются, а красные могут появиться только из покрасневших зелёных. Вначале зелёных и красных было $x + x = 2x$, а в конце стало $y + 7y = 8y$. Следовательно, $8y \leq 2x$, т. е. $4y \leq x$. Поэтому $4 \cdot 9y \leq 9x$, а это и значит, что общее количество листьев на дереве за ночь уменьшилось хотя бы в 4 раза.

3. В трапеции $ABCD$ отмечены середины оснований AB и CD – точки K и L, соответственно. Известно, что $AB = 2CD$, а CK – биссектриса $\angle BCD$. Докажите, что $AC = 2KL$.

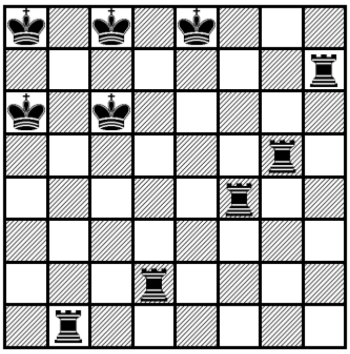
Решение. Поскольку точка K лежит на биссектрисе угла C и $BK \parallel CD$, имеем $\angle BCK = \angle DCK = \angle BKC$, значит, треугольник BCK равнобедренный ($BC = BK$). Значит, $BC = BK = AK = CD$, откуда $BCDK$ – ромб и $ADCK$ – параллелограмм. Пусть O – точка пересечения DK и AC, тогда O делит DK и AC пополам. Заметим, что $CO = KL$ как медианы равнобедренного треугольника, проведенные к равным сторонам. Значит, $AC = 2CO = 2KL$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. На шахматной доске 8×8 расставляют n королей и n ладей так, что никакие две фигуры не бьют друг друга. При каком наибольшем n это возможно? (Ладья ходит на любое число полей по вертикали или горизонтали. Король ходит на одно поле по вертикали, горизонтали или диагонали.)

Ответ. 5.

Решение. Короли могут стоять только в клетках на пересечении горизонтали и вертикали, свободных от ладей. Таких клеток всего $(8-n)^2$. Поскольку на доске должно быть n королей, мы получаем неравенство $(8-n)^2 \geq n$, из которого $n \leq 5$. Пример расстановки 5 королей и 5 ладей показан на рисунке.



Комментарий. *Предложена реализация – 10 баллов, сделана оценка – 10 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

5. Одно из двух натуральных чисел больше другого числа на 10. Оказалось, что десятичная запись произведения этих чисел не содержит никаких других цифр, кроме 9. Найдите все такие числа.

Ответ. 27 и 37.

Решение. Обозначим через x меньшее из чисел. Тогда $x(x+10) = 9 \dots 9$. Раскроем скобки в левой части и прибавим в обеим частям 25. Мы получим уравнение $(x+5)^2 = 10 \dots 024$. Точнее говоря, такая запись получается, если число, состоящее из девяток, из условия задачи содержало не менее четырех девяток. Написанное уравнение не имеет целых корней, поскольку при наличии двух и более нулей правая часть делится на 8, но не делится на 16 и потому не может быть точным квадратом. Если же девяток в исходном числе было меньше (одна, две или три), мы получим соответственно уравнения $(x+5)^2 = 34$, $(x+5)^2 = 124$, $(x+5)^2 = 1024$. Лишь в последнем из уравнений правая часть является квадратом натурального числа, корень этого уравнения $x = 27$ и дает ответ.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Вариант 3

1. Для различных положительных действительных чисел a, b справедливо равенство $\frac{a}{a^3+a+1} = \frac{b}{b^3+b+1}$. Найдите значение выражения $\frac{10-a^2b-b^2a}{2+a^2b+b^2a}$.

Ответ. 3.

Решение. Из условия имеем: $\frac{a}{a^3+a+1} = \frac{b}{b^3+b+1} \Leftrightarrow ab^3 + ab + a = a^3b + ab + b \Leftrightarrow ab^3 - a^3b + a - b = 0 \Leftrightarrow ab(b^2-a^2) - (b-a) = 0 \Leftrightarrow (b-a)(ab(a+b)-1) = 0$. Так как по условию $a \neq b$, то $ab(a+b) = 1 \Leftrightarrow a^2b + b^2a = 1$. В результате имеем: $\frac{10-a^2b-b^2a}{2+a^2b+b^2a} = \frac{10-1}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$.

2. В прошлом году первокурсник Сибирского федерального университета Миша прогуливался по лесу и заметил, что в субботу на одном из деревьев в лесу количество зелёных и жёлтых листьев совпадало, а красных листьев было в 9 раз больше, чем жёлтых. В воскресенье на этом же дереве количество зелёных и красных листьев совпадало, а жёлтых листьев было в 9 раз больше, чем красных. Докажите, что за ночь количество листьев на этом дереве уменьшилось хотя бы в 5 раз. (Зелёный лист может пожелтеть и покраснеть. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают.)

Решение. Обозначим количество зелёных листьев, висевших вчера на дереве, через x. Тогда жёлтых листьев вчера также было x, а ещё было $9x$ красных листьев. А всего листьев было $x + x + 9x = 11x$. Кроме того, обозначим число зелёных листьев сегодня через y. Тогда красных листьев стало тоже y, жёлтых – $9y$, а всего $y + y + 9y = 11y$ листьев. Заметим, что суммарное количество зелёных и жёлтых листьев за ночь не могло увеличиться: зелёные листья сами по себе не появляются, а жёлтые могут появиться только из пожелтевших зелёных. Вначале зелёных и жёлтых было $x + x = 2x$, а в конце стало $y + 9y = 10y$. Следовательно, $10y \leq 2x$, т. е. $5y \leq x$. Поэтому $5 \cdot 11y \leq 11x$, а это и значит, что общее количество листьев на дереве за ночь уменьшилось хотя бы в 5 раз.

3. В трапеции $ABCD$ отмечены середины оснований AD и BC – точки P и Q, соответственно. Известно, что $AB = BC$, а BP – биссектриса $\angle ABC$. Докажите, что $BD = 2PQ$.

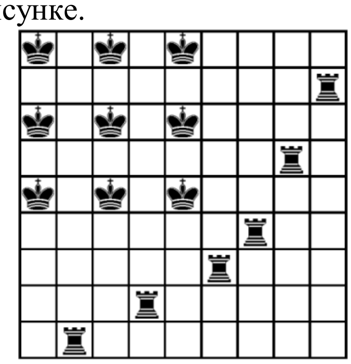
Решение. Поскольку точка P лежит на биссектрисе угла B и $AP \parallel BC$, имеем $\angle ABP = \angle CBP = \angle APB$, значит, треугольник ABP равнобедренный ($AB = AP$). Значит, $BC = AB = AP = PD$, откуда $ABCP$ – ромб и $BCDP$ – параллелограмм. Пусть O – точка пересечения BD и PC, тогда O делит BD и PC пополам. Заметим, что $BO = PQ$ как медианы равнобедренного треугольника, проведенные к равным сторонам. Значит, $BD = 2BO = 2PQ$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. На шахматной доске 9×9 расставляют n королей и 6 ладей так, что никакие две фигуры не бьют друг друга. При каком наибольшем n это возможно? (Ладья ходит на любое число полей по вертикали или горизонтали. Король ходит на одно поле по вертикали, горизонтали или диагонали.)

Ответ. 9.

Решение. Короли могут стоять только в клетках на пересечении горизонтали и вертикали, свободных от ладей. Таких клеток всего $(9-6)^2 = 9$. Пример расстановки 9 королей и 6 ладей показан на рисунке.



Комментарий. *Предложена реализация – 10 баллов, сделана оценка – 10 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

5. Одно из двух натуральных чисел больше другого числа на 24. Оказалось, что произведение этих чисел на 1 больше числа, десятичная запись которого не содержит никаких других цифр, кроме 1. Найдите все такие числа.

Ответ. 4 и 28.

Решение. Обозначим через x меньшее из чисел. Тогда $x(x+24)-1=1\ldots1$. Раскроем скобки в левой части и прибавим к обеим частям 145. Мы получим уравнение $(x+12)^2=1\ldots1256$. Точнее говоря, такая запись получается, если число, состоящее из единиц, из условия задачи содержало не менее четырех единиц. Написанное уравнение не имеет целых корней, поскольку при наличии двух и более нулей правая часть делится на 8, но не делится на 16 и потому не может быть точным квадратом. Если же единиц в исходном числе было меньше (одна, две или три), мы получим соответственно уравнения $(x+12)^2=146$, $(x+12)^2=156$, $(x+12)^2=256$. Лишь в последнем из уравнений правая часть является квадратом натурального числа, корень этого уравнения $x=4$ и дает ответ.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*