Математика. 10 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1) На поляне в лесу за круглым столом собрались 450 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый за столом сказал: «Из сидящего справа от меня и сидящего сразу за ним ровно один лжец». Сколько лжецов могло быть на поляне?

2) В командной олимпиаде по математике для получения призового места необходимо набрать n баллов. В составе команды «Бельчата» 3 участника: Вася, Коля и Петя. Оказалось, что сумма набранных баллов команды «Бельчата» меньше n. Если бы Вася получил вдвое больше баллов, то у команды было бы $2n - 34$ баллов. С другой стороны, если бы Пете добавили бы вдвое больше баллов, чем у него было, то у команды было бы $2n + 6$ баллов. Найдите n, если известно, что у Коли было на 9 баллов больше, чем у Васи.

3) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BE, пересекающиеся в точке H. Около треугольника ABH описана окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках F и G, отличных от концов. Докажите, что $FG = 2DE$.

4) Катя записала на доске 2020 ненулевых действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$, а Лена дописала к ним на доску произведение всех пар соседних чисел x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, … , $x_{2019}x_{2020}$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться на доске?

5) Пусть a, b, c – целые числа, такие что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня и многочлен $ax^2 + bx + c$ имеет натуральный корень. Докажите, что число $|a|$ – составное.

Математика. 10 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1) На поляне в лесу собрались бельчата. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится на поляне?». От всех бельчат были получены все возможные ответы от 1 до 100 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько лжецов могло быть на поляне?

2) В командной олимпиаде по математике были лёгкие, средние и трудные задачи. За правильный ответ на лёгкую задачу можно было получить 4 балла, среднюю – 5 баллов, трудную – 6 баллов. За неверный ответ на лёгкую задачу вычиталось 2 балла, за неверный ответ на среднюю задачу – 1 балл, а за неверный ответ на трудную задачу баллы не вычитались. Участники команды «Бельчата» ответили правильно на 10 задач и получили на 30 баллов меньше максимально возможного числа баллов. Сколько всего задач было предложено на олимпиаде?

3) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Описанная окружность треугольника ABD проходит через центр вписанной окружности треугольника BCD. Найдите $\angle ACB$, если известно, что $\angle ABC = 40°$.

4) Катя выписывает на доску нечётные числа из отрезка $[16; 2020]$ так, что ни одно из выписанных чисел не делится ни на одно другое. Какое наибольшее количество чисел могло оказаться на доске?

5) Многочлен $x^3 + ax^2 + 17x + 3b$, где a и b – целые, имеет три целых корня. Докажите, что они различны.

Математика. 10 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1) На поляне в лесу собрались бельчата. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится на поляне?». От всех бельчат были получены все возможные ответы от 1 до 200 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько лжецов могло быть на поляне?

2) В командной олимпиаде по математике были лёгкие, средние и трудные задачи. За правильный ответ на лёгкую задачу можно было получить 4 балла, среднюю – 5 баллов, трудную – 6 баллов. За неверный ответ на лёгкую задачу вычиталось 2 балла, за неверный ответ на среднюю задачу – 1 балл, а за неверный ответ на трудную задачу баллы не вычитались. Участники команды «Бельчата» ответили правильно на 15 задач и получили на 30 баллов меньше максимально возможного числа баллов. Сколько всего задач было предложено на олимпиаде?

3) На стороне KL треугольника KLM отмечена точка P. Описанная окружность треугольника KPM проходит через центр вписанной окружности треугольника PLM. Найдите $\angle KLM$, если известно, что $\angle KML = 50°$.

4) Катя выписывает на доску нечётные числа из отрезка $[16; 2024]$ так, что ни одно из выписанных чисел не делится ни на одно другое. Какое наибольшее количество чисел могло оказаться на доске?

5) Многочлен $x^3 + bx^2 + 23x + 3a$, где a и b – целые, имеет три целых корня. Докажите, что они различны.