ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
9 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Перед двумя бельчатами, которых зовут Рыжик и Дымок, две кучи орехов, в одной 47 орехов, в другой 74 ореха. Рыжик может взять себе любую кучу орехов, а другую кучу поделить на две части. Потом то же самое сделает Дымок с кучами, которые образовались. И дальше они по очереди берут себе одну кучу, а вторую делят на две части. Выигрывает тот, кто сделает это последним. Кто из них может выиграть при любых ходах другого, и как ему надо действовать?

Ответ. Рыжик.

Решение. Если Рыжик первым ходом возьмёт кучу из 47 орехов, и поделит вторую кучу так, чтобы в каждой куче было нечётное число орехов, то после хода Дымка обязательно останется одна куча с нечётным числом, и одна с чётным числом орехов.Рыжик возьмёт кучу с нечётным числом, и поделит вторую кучу так, чтобы в каждой куче было нечётное число орехов. После хода Дымка всегда в одной куче будет чётное число орехов, то есть не меньше 2, и Рыжик всегда может сделать ход. Проигрышная позиция (1,1) может возникнуть только после хода Рыжика, тогда Дымок не сможет разделить кучу и проиграет.

Комментарий. *Предложенная стратегия может стать правильной после небольших исправлений – 12 баллов. Ответ получен из рассмотрения частных случаев – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

2. Окружность радиуса 2 с центром в точке O проходит через точку K. В окружности радиуса 5 с центром в точке O проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K. На продолжении отрезка AB за точку A отложен отрезок

$AF = BK$, а на продолжении отрезка CD за точку D отложен отрезок $DE = CK$. Найдите длину отрезка FE.

Ответ. $2\sqrt{46}$.

Решение. Опустим из точки O перпендикуляры на AB и CD до пересечения с ними, длины перпендикуляров обозначим соответственно a и b. Заметим, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам. Поэтому $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + a^2 = 25$, $\left(\frac{CD}{2}\right)^2 + b^2 = 25$. Отсюда $AB^2 + CD^2 = 200 - 4(a^2 + b^2)$. Но $a^2 + b^2 = 2^2$, и $AB^2 + CD^2 = 200 - 4 \cdot 4 = 184$. $FE^2 = FK^2 + KE^2$, при этом $FK = FA + AK = AK + KB = AB, KE = KD + DE = KD + CK = CD$, и $FE^2 = AB^2 + CD^2 = 184, FE = 2\sqrt{46}$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. Допущена непринципиальная ошибка – минус 1 балл. Доказаны полезные вспомогательные утверждения – 8 баллов. Рассмотрен частный случай – 6 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла.*

3. Юра взял три положительных числа, попарно перемножил их, сложил полученные произведения и получил число $N \geq 75$. Докажите, что сумма исходных чисел больше 14,5.

Решение. Обозначим исходные числа a, b, c. Возведём их сумму в квадрат: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Воспользуемся соотношениями $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, a^2 + c^2 \geq 2ac$. Складывая неравенства, получаем $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$. Отсюда $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \geq 3 \cdot 75$ и $a + b + c \geq 15 > 14{,}5$.

Комментарий. *Доказаны вспомогательные утверждения – 6 баллов. Доказательство проведено только для частного случая целых чисел – 5 баллов. Рассмотрен только пример – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла.*

4. Число, меньшее 100000, больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, на 6363. Найдите все такие числа.

Ответ. $8071,\ 8181,\ 8291,\ 9072,\ 9182, 9292$.

Решение. Пусть исходное число четырёхзначное, обозначим его $\overline{abcd}$. По условию $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 6363$, или $999(a - d) + 90(b - c) = 6363$, после сокращения получаем $111(a - d) + 10(b - c) = 707$. Запишем соотношение в виде $110(a - d) + 10(b - c) + (a - d) = 700 + 7$, отсюда $a - d = 7$. Тогда $10(b - c) = 707 - 777 = -70$, $c - b = 7$. Для (a, d) подходят пары значений (9,2) и (8,1), для (b, c) пары (2,9), (0,7) и (1,8). Получаем числа $9292, 9182,\ 8181, 8291,\ 9072,\ 8071$. Пусть исходное число пятизначное, обозначим его $\overline{abcde}$. По условию $\overline{abcde} - \overline{edcba} = 6363$, или $9999(a - e) + 990(b - d) = 6363$, после сокращения получаем $1111(a - e) + 110(b - d) = 707$. Запишем соотношение в виде $1110(a - e) + 110(b - d) + (a - e) = 700 + 7$, отсюда $a - e = 7$. Но при $a - e = 7$ соотношение не может выполняться, так как получим $110(b - d) \leq 990$, а $1111(a - e) = 7777$. Очевидно также, что исходное число не может иметь меньше 4 цифр.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – снижать на 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. $2n$ точек, являющихся вершинами правильного $2n$-угольника, соединены попарно непересекающимися отрезками. Оказалось, что это можно сделать 14-ю способами. Сколькими способами можно соединить попарно непересекающимися отрезками вершины правильного $(2n + 2)$–угольника?

Ответ. 42.

Решение. В 4-угольнике соединить вершины указанным образом можно двумя способами. Рассмотрим 6-угольник, занумеруем его вершины и выберем вершину A_1. Она должна соединяться ровно с одной вершиной. Если A_1 соединяется с соседней вершиной A_2, то остаются изолированные 4 вершины, которые можно соединить 2 способами. Соседних вершин две (A_2 и A_6), поэтому таких способов 4. Вершину A_1 нельзя соединить с A_3 или A_5, так как нечётное число вершин нельзя разбить не пары. При соединении A_1 и A_4вершины разбиваются на две группы по 2 вершины, в каждой группе соединить их можно одним способом. Итого имеем $2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$ способов для 6-угольника. Для 8-угольника вершину A_1 можно соединить с A_2 или A_8, в каждом случае оставшиеся 6 вершин разбиваются 5 способами, как найдено выше. Можно соединить с A_4, тогда справа 2 вершины, слева 4, число способов $1 \cdot 2$. Можно соединить с A_6, тогда справа 4 вершины, слева 2, число способов $1 \cdot 2$. Всего способов $2 \cdot 5 + 2 + 2 = 14$. Таким образом, $(2n + 2)$-угольник – это 10-угольник. Для 10-угольника число способов находится аналогично, с использованием полученных результатов: $2 \cdot 14 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 42$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – снижать на 2 балла. Решение верно начато, присутствует идея решения – 3 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 2

1. В тетради написаны буквы русского и английского алфавитов, всего вместе 59 букв. Артём и Надя по очереди вычеркивают буквы, причём за раз можно вычеркнуть или 1, или 2, или 8, или 9 букв. Тот, кто не сможет сделать ход, проигрывает. Начинает Артём. Кто из них может выиграть при любых ходах другого, и как ему надо вычеркивать буквы?

Ответ. Артём.

Решение. Если Артём первым ходом вычеркнет 9 букв, то их останется 50. После хода Нади Артём всегда может вычеркнуть столько букв, чтобы осталось число, кратное 10. Например, если Надя вычеркнет 1 букву, то Артём – 9 букв, если Надя вычеркнет 2 буквы, то Артём – 8 букв. А если Надя вычеркнет 8 или 9 букв, то Артём вычеркнет 2 или 1 букву. После очередного хода Артёма будет оставаться 40, 30, 20, 10, 0 букв. Когда останется 0, Надя не сможет сделать ход.

Комментарий. *Предложенная стратегия может стать правильной после небольших исправлений – 12 баллов. Ответ получен из рассмотрения частных случаев – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

2. В окружности проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K. Известно, что $AK = 7$, $KB = 1$, $CK = 5$. Найдите радиус окружности.

Ответ. $\sqrt{481}/5$.

Решение. Введём систему координат с центром в точке A, продлив отрезок AB до оси абсцисс. В этой системе точки будут иметь координаты $A(0;0), B(8;0), C(7;\pm 5)$. Выберем для определённости знак «+» у ординаты С. Три точки полностью определяют проходящую через них окружность. Обозначим центр окружности $O(a;b)$ и запишем уравнение окружности: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Очевидно, что $a = 4$ (так как диаметр, перпендикулярный хорде AB, делит её пополам).

Подставляя координаты точек A и C, получаем $\begin{cases} 16 + b^2 = R^2, \\ (7-4)^2 + (5-b)^2 = R^2. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое, находим $b = {}^{9}/_{5}$, откуда $R^2 = {}^{481}/_{25}$, $R = \sqrt{481}/_{5}$. Если в качестве знака ординаты C выбирается «$-$», то изменяется знак b, но на величину радиуса R это не влияет.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. Допущена арифметическая ошибка – минус 1 балл. Решение в целом верное, однако содержит существенную ошибку – 12 баллов. Доказаны полезные вспомогательные утверждения – 8 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла.*

3. Числа a, b, c положительны и $abc(a + 2b + 3c) = \frac{1}{6}$. Докажите, что $(a + 2b)(a + 3c) \geq 2$.

Решение. $(a + 2b)(a + 3c) = a(a + 2b + 3c) + 6bc$. Из условия следует, что $a(a + 2b + 3c) = {}^{1}/_{6bc}$.

Таким образом, $(a + 2b)(a + 3c) = {}^{1}/_{6bc} + 6bc$. Введём обозначение $6bc = t$, получим $(a + 2b)(a + 3c) = {}^{1}/_{t} + t$. Последнее выражение при положительныхt принимает значения не меньше 2, так как

$$ {}^{1}/_{t} + t = \frac{1 + t^2}{t} = \frac{1 - 2t + t^2 + 2t}{t} = \frac{(1 - t)^2}{t} + 2. $$

Комментарий. *Решение в целом верное, но неверно оформлено доказательство неравенства – 15 баллов. Верная идея решения, однако доказательство содержит существенную ошибку или не закончено – 10 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения – 6 баллов. Доказательство проведено только для частного случая целых чисел – 5 баллов. Рассмотрен только пример – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла.*

4. Найдите все нечётные четырёхзначные числа, которые кратны, но не равны числам, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

Ответ. 9801.

Решение. Пусть $\overline{abcd} = k \cdot \overline{dcba}$. Очевидно, $1 < k \leq 9$ и нечётно.

Если $k = 3$, d может принимать значения $1, 2, 3$. При значениях d больше 3 число справа станет пятизначным. Если $d = 1$, то $\overline{abcd}$ оканчивается на 1, и значит, $\overline{dcba}$ оканчивается на 7: $\overline{7bc1} = 3 \cdot \overline{1cb7}$. Тогда число слева больше 7000, а справа – меньше 6000. Если $d = 2$, то $\overline{abcd}$ чётно. Если $d = 3$, то $\overline{abc3} = 3 \cdot \overline{3cba}$, откуда $a = 1$, слева число меньше 2000, справа больше 9000.

Если $k = 5$, то $\overline{abcd} = 5 \cdot \overline{dcba}$, и d должно равняться 1, но числа, оканчивающиеся на 1, не делятся на 5.

Если $k = 7$, то $\overline{abcd} = 7 \cdot \overline{dcba}$, и d должно равняться 1, получаем $\overline{abc1} = 7 \cdot \overline{1cba}$, откуда $a = 3$. Слева число меньше 4000, справа больше 7000.

Если $k = 9$, то $\overline{abcd} = 9 \cdot \overline{dcba}$, и d должно равняться 1. Получаем $\overline{abc1} = 9 \cdot \overline{1cba}$, легко видеть, что $a = 9$. Итак, $\overline{9bc1} = 9 \cdot \overline{1cb9}$, составим уравнение: $9000 + 100b + 10c + 1 = 9000 + 900c + 90b + 81$. После упрощения получаем $b = 89c + 8$. Единственным решением является пара $b = 8, c = 0$.

Таким образом, $\overline{abcd} = 9801 = 9 \cdot 1089$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но в доказательстве, что других чисел нет, рассмотрены не все случаи – 15 баллов. Если верный ответ не получен, но продвижение значительное – 15 баллов; верно рассмотрены многие случаи – 10 баллов; верно рассмотрены только некоторые случаи – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Коля поставил внутри выпуклого 24-угольника несколько точек, и соединил их непересекающимися отрезками между собой и с вершинами многоугольника. В

результате многоугольник разбился на треугольники. Какое наименьшее число точек надо поставить, чтобы число треугольников превысило 50?

Ответ. 15.

Решение. Оценка. Пусть было поставлено n точек и получено k треугольников. Сумма углов всех треугольников равна $k \cdot 180°$. Эта сумма состоит из суммы углов при вершинах многоугольника, которая равна $22 \cdot 180°$, и суммы углов, сходящихся во внутренних точках. Последняя сумма равна $360° \cdot n$. Из уравнения $k \cdot 180° = 22 \cdot 180° + 360° \cdot n$ находим $k = 22 + 2n$ или $n = \frac{k-22}{2}$.Поскольку $k \geq 51, n \geq 14{,}5$. Наименьшее целое n равно 15. Пример. Поставим одну точку внутри 24-угольника и соединим её с вершинами, получим 24 треугольника. Внутри 14 из них поставим по точке и соединим эту точку с вершинами данного треугольника. Всего треугольников стало $14 \cdot 3 + 10 = 52$, точек $1 + 14 = 15$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В доказательстве того, что число треугольников не зависит от расположения и последовательности соединения точек, есть недочёты – 17 баллов. Доказательство проводится для конкретного случая – 15 баллов. Только пример – 10 баллов. Ответ получен для 50 треугольников, а не числа, превышающего 50 – минус 1 балл. Считается не число треугольников, составляющих разбиение, а общее число треугольников – минус 2 балла. Верное начало, присутствует идея решения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Чук и Гек по очереди берут орехи из кучи, в которой 84 ореха. За один раз можно взять 4 или 5 или 6 орехов. Тот, кто не сможет сделать ход, проигрывает. Первым берёт орехи Чук. Кто из них может выиграть при любых ходах другого, и как ему надо действовать?

Ответ. Чук.

Решение. Если Чук первым ходом возьмёт 4 ореха, то их останется 80. После хода Гека Чук всегда может взять столько орехов, чтобы осталось число, кратное 10. Например, если Гек возьмёт 4 ореха, то Чук – 6 орехов, если Гек возьмёт 5 орехов то и Чук – 5 орехов, если Гек возьмёт 6 орехов, то Чук – 4 ореха. После очередного хода Чука будет оставаться $80, 70, \ldots, 10, 0$ орехов. Когда останется 0, Гек не сможет сделать ход.

Комментарий. *В верном решении перепутаны условии победы – 19 баллов. Предложенная стратегия может стать правильной после небольших исправлений – 12 баллов. Ответ получен из рассмотрения частных случаев – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

2. В окружности проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке K. Известно, что $AK = 3, KB = 1, CK = 5$. Найдите радиус окружности.

Ответ.$\sqrt{221}/_5$.

Решение. Введём систему координат с центром в точке A, продлив отрезок AB до оси абсцисс. В этой системе точки будут иметь координаты $A(0;0), B(4;0), C(3;\pm 5)$. Выберем для определённости знак «$+$» у ординаты С. Три точки полностью определяют проходящую через них окружность. Обозначим центр окружности $O(a;b)$ и запишем уравнение окружности: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Очевидно, что $a = 2$ (так как диаметр, перпендикулярный хорде AB, делит её пополам).

Подставляя координаты точек A и C, получаем $\begin{cases} 4 + b^2 = R^2, \\ (3-2)^2 + (5-b)^2 = R^2. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое, находим $b = {}^{11}/_{5}$, откуда $R^2 = {}^{221}/_{25}$, $R = \sqrt{221}/_{5}$. Если в качестве знака ординаты C выбирается «$-$», то изменяется знак b, но на величину радиуса R это не влияет.

Комментарий. *Решение в целом верное, но содержит существенную ошибку – 12 баллов. Доказаны полезные вспомогательные утверждения – 8 баллов. Допущена арифметическая ошибка – минус 1 балл. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла.*

3. Числа $a,\ b,\ c$ положительны и $abc(a + 5b + c) = \frac{1}{5}$. Докажите, что $(a + 5b)(a + c) \geq 2$.

Решение. $(a + 5b)(a + c) = a(a + 5b + c) + 5bc$. Из условия следует, что $a(a + 5b + c) = {}^{1}/_{5bc}$. Таким образом, $(a + 5b)(a + c) = {}^{1}/_{5bc} + 5bc$. Введём обозначение $5bc = t$, получим $(a + 2b)(a + 3c) = {}^{1}/_{t} + t$. Последнее выражение при положительных t принимает значения не меньше 2, так как

$$ {}^{1}/_{t} + t = \frac{1 + t^2}{t} = \frac{1 - 2t + t^2 + 2t}{t} = \frac{(1 - t)^2}{t} + 2. $$

Комментарий. *Решение в целом верное, но неверно оформлено доказательство неравенства – 15 баллов. Верная идея решения, но доказательство содержит существенную ошибку или не закончено – 10 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения – 6 баллов. Доказательство проведено только для частного случая целых чисел – 5 баллов. Рассмотрен только пример – 2 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла.*

4. Найдите все чётные четырёхзначные числа, которые кратны, но не равны числам, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

Ответ. 8712.

Решение. Пусть $\overline{abcd} = k \cdot \overline{dcba}$. Очевидно, $1 < k \leq 9$, а d может принимать только чётные значения. Если d равно 6 или 8, то при умножении на k число справа станет пятизначным, поэтому надо рассмотреть только случаи $d = 2, d = 4$.

Если $d = 2, k$ может принимать значения $2, 3, 4$.

Пусть $k = 2$. Имеем соотношение $\overline{abc2} = 2 \cdot \overline{2cba}$. Тогда $a = 1$ или $a = 6$, но легко видеть, что равенства $\overline{1bc2} = 2 \cdot \overline{2cb1}$ и $\overline{6bc2} = 2 \cdot \overline{2cb6}$ не могут быть верными.

Пусть $k = 3$, то есть $\overline{abc2} = 3 \cdot \overline{2cba}$. Тогда $a = 4$, но $\overline{4bc2} \neq 3 \cdot \overline{2cb4}$.

Пусть $k = 4$, то есть $\overline{abc2} = 4 \cdot \overline{2cba}$. Тогда $a = 3$ или $a = 8$. При $a = 3$ число слева меньше 4000, справа больше 8000. При $a = 8$ имеем $\overline{8bc2} = 4 \cdot \overline{2cb8}$. Составим уравнение: $8000 + 100b + 10c + 2 = 8000 + 400c + 40b + 32$.

После упрощения получаем $2b = 13c + 1$. Единственным решением этого уравнения является пара $b = 7, c = 1$. Если $d = 4, k$ может принимать только значение 2: $\overline{abc4} = 2 \cdot \overline{4cba}$. Чтобы получить последнюю цифру 4, надо 2 умножить на 2 или 7. Легко видеть, что $\overline{2bc4} \neq 2 \cdot \overline{4cb2}$ и $\overline{7bc4} \neq 2 \cdot \overline{4cb7}$. Таким образом, $\overline{abcd} = 8712 = 4 \cdot 2178$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но в доказательстве, что других чисел нет, рассмотрены не все случаи – 15 баллов. Если верный ответ не получен, но продвижение значительное – 15 баллов; верно рассмотрены многие случаи – 10 баллов; верно рассмотрены только некоторые случаи – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Миша поставил внутри выпуклого 30-угольника несколько точек и соединил их непересекающимися отрезками между собой и с вершинами многоугольника. В

результате многоугольник разбился на треугольники. Какое наименьшее число точек надо поставить, чтобы число треугольников превысило 60?

Ответ. 17.

Решение. Оценка. Пусть было поставлено n точек и получено k треугольников, $k \geq 61$. Сумма углов всех треугольников равна $k \cdot 180°$. Эта сумма состоит из суммы углов при вершинах многоугольника, которая равна $28 \cdot 180°$, и суммы углов, сходящихся во внутренних точках. Последняя сумма равна $360° \cdot n$. Из уравнения $k \cdot 180° = 28 \cdot 180° + 360° \cdot n$ находим $k = 28 + 2n$ или $n = \frac{k-28}{2}$. Поскольку $k \geq 61, n \geq 16{,}5$. Наименьшее целое n равно 17.

Пример. Поставим одну точку внутри 30-угольника и соединим её с вершинами, получим 30 треугольников. Внутри 16 из них поставим по точке и соединим эту точку с вершинами данного треугольника. Всего треугольников стало $16 \cdot 3 + 14 = 62$, точек $1 + 16 = 17$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В доказательстве того, что число треугольников не зависит от расположения и последовательности соединения точек, есть недочёты – 17 баллов. Доказательство проводится для конкретного случая – 15 баллов. Только пример – 10 баллов. Ответ получен для 60 треугольников, а не числа, превышающего 60 – минус 1 балл. Считается не число треугольников, составляющих разбиение, а общее число треугольников – минус 2 балла. Верное начало, присутствует идея решения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*