ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
7 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Миша за лето прочитал на 6 книг меньше, чем Ваня и Слава вместе. Ваня прочитал на 8 книг меньше, чем Миша и Слава вместе. Сколько книг прочитал Слава?

Ответ.7

Решение. Миша и Ваня прочитали на 14 книг меньше, чем Ваня, Слава, Миша и еще раз Слава. Значит, Слава прочитал половину от 14 книг, то есть 7.

Комментарий. *Уравнения составлены неправильно – 1 балл. Уравнения составлены верно, но решение не доведено до конца – 10 баллов. Ответ получен из рассмотрения частного случая, не показано, что нет других решений – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

2. Прямоугольник разделён на 9 прямоугольных частей, площади некоторых частей указаны. Найдите площадь всего прямоугольника.

6	14	
	35	20
9		

Ответ.140.

Решение. Если прямоугольник разделен на 4 части со сторонами $a, b, c, d,$ то площади частей равны $ac, ad, bc, bd,$ и произведение площадей противоположных частей равны, $ac \cdot bd = ad \cdot bc$. Найдем площадь левой части $S = {}^{6 \cdot 35}/_{14} = 15$. Площадь левой средней части равна сумме площадей других левых частей: $15 = 6 + 9$. Значит, площадь прямоугольника равна удвоенной площади прямоугольников средней строки, то есть $2(15 + 35 + 20) = 140$.

Комментарий. *Одной из сторон частей приписано значение, например, 1, вычислены другие стороны и площади, но не показано, что ответ не зависит от предположения – 18 баллов. Рассмотрен только частный случай, когда все стороны маленьких прямоугольников выражаются целыми числами – 12 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

3. Маленький бельчонок умеет прыгать только на 30 см и на 40 см, зато и вперед и назад. Докажите, что он может преодолеть любое целое число метров за число прыжков, кратное 6.

Решение. Бельчонок может преодолеть 1 метр, сделав 4 прыжка по 40 см вперёд, и 2 прыжка по 30 см назад, так как $4 \cdot 40 - 2 \cdot 30 = 100$ (см), сделав 6 прыжков. На каждый следующий метр ему так же потребуется 6 прыжков.

Комментарий. *Показана только кратность числа прыжков 3 – 5 баллов. В решении кратно 6 не число прыжков, а расстояние – 2 балла. Рассмотрен только пример – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

4. На доске написаны числа 17 и 18. Женя и Гриша начинают игру по таким правилам: за один ход можно либо поделить какое-нибудь число пополам (если есть чётное число), либо из любого числа вычесть ненулевую цифру, которая в этот момент написана на доске. Выигрывает тот, кто получит 0. Первый ход делает Женя. Кто из мальчиков выигрывает при правильной игре, и как он должен действовать?

Ответ. Женя, ему надо первым ходом вычесть 1 из 18.

Решение. Пусть Женя вычел 1, получилось два равных числа: 17 и 17. Егор может вычесть 1 или 7 из 17. Рассмотрим эти случаи. Если Егор вычел 1 и получил 16 и 17, то Женя повторяет его ход и получается опять два равных числа. Если дальше Егор поделит число 16 на 2, то получится однозначное число 8, и вычитая из него 8, Женя получит 0. Если Егор будет всё время вычитать по 1, то появится пара 9, 10, и Женя выиграет: 9-9=0. Если Егор вычел 7 из 17, то получились числа 10 и 17, Женя повторит его ход, получит числа 10 и 10, следующим ходом Егор получит однозначное число, и Женя выиграет.

Комментарий. *В правильной стратегии победителя рассмотрены не все варианты ходов противника – 15 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. У 14 чисел $1,\ 2,\ \ldots, 13,\ 14$ посчитаны суммы всех троек чисел. Сколько среди этих сумм различных составных чисел?

Ответ. 25.

Решение. Наименьшая сумма равна $1 + 2 + 3 = 6$. Наибольшая сумма равна $12 + 13 + 14 = 39$. Возможна любая сумма между этими числами, поэтому всего различных сумм $39 - 6 + 1 = 34$. В ряду $6, \ldots, 34$ содержится 9 простых чисел: $7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$. Остальные числа составные, их $34 - 9 = 25$.

Комментарий. *Найдено только общее число различных сумм – 10 баллов. Ход решения верный, но общее число различных сумм найдено неверно – 10 баллов. В подсчётах присутствуют арифметические ошибки – минус 2 балла за каждую ошибку. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Бельчонок нашел 30 орехов и спрятал их в двух местах: в старом дупле и в новом. Он переложил несколько орехов из старого дупла в новое, в старом дупле орехов стало в два раза меньше, а в новом в два раза больше. Сколько орехов он переложил?

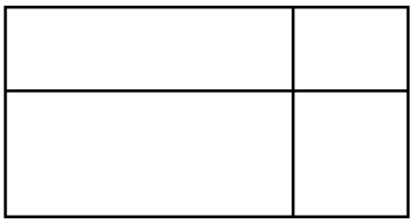
Ответ. 10.

Решение. В новом дупле орехов стало в два раза больше, но если вернуть орехи в старое дупло, там тоже станет в два раза больше, значит, без переложенных орехов в старом и новом дуплах одинаковое количество. Пусть это количество составляет одну часть. Переложенные орехи увеличивают число орехов в два раза, значит, переложенные орехи тоже составляют одну часть. Общее количество 30, оно делится на три части, поэтому число переложенных орехов равно 10.

Решение с помощью системы уравнений: пусть в новом дупле было x орехов, в старом – y орехов, переложено z орехов, тогда $\begin{cases} x + y = 30, \\ x/2 + 2y = 30, \end{cases}$ откуда $x = 20, y = 10$, и переложено $2y - y = 20 - 10 =$10 орехов.

Комментарий. *При верно составленном уравнении его решение ищется подбором – 18 баллов. Уравнения (или рассуждения) верны, но решение не доведено до конца – 10 баллов. Ответ получен из рассмотрения частных случаев, не показано, что нет других решений – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

2. На рисунке 9 прямоугольников, сумма их площадей равна 740.Найдите площадь самого большого прямоугольника.



Ответ.185.

Решение. Каждая из четырех частей, на которые разделен большой прямоугольник, входит в горизонтальный, вертикальный, большой прямоугольники, и сама является отдельной частью. Поэтому сумма площадей всех 9 прямоугольников равна сумме площадей частей, умноженной на 4 . Отсюда сумма площадей частей равна $740: 4 = 185$. Но это и есть площадь самого большого прямоугольника.

Комментарий. *Верная идея решения, но допущена арифметическая ошибка – 18 баллов. При верном решении самым большим считается не тот прямоугольник – 18 баллов. Правильное решение не доведено до ответа – 15 баллов. Считается, что каждая из четырех частей входит не 4, а 3 или 5 раз – 10 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

3. Пончики упакованы по $5, 9, 16$ штук. Какое наибольшее число пончиков до 75 нельзя купить, не вскрывая упаковок? Упаковок каждого вида достаточно.

Ответ. 22.

Решение. Можно купить 23 пончика $(23 = 5 + 9 \cdot 2)$, 24 пончика $(24 = 5 \cdot 3 + 9)$, 25 пончиков $(25 = 5 \cdot 5)$, 26 пончиков $(26 = 5 \cdot 2 + 16)$,27 пончиков $(27 = 9 \cdot 3)$. Любое число пончиков больше 27 можно купить, добавляя упаковки с 5 пончиками: $28 = 23 + 5 = 5 \cdot 2 + 9 \cdot 2$, $29 = 24 + 5 = 5 \cdot 4 + 9$, и т.д. Но 22 пончика нельзя купить, так как если взять упаковку по 16, нужны еще 6 пончиков, если взять упаковку по 9, нужны еще 13 пончиков, если взять упаковку по 5, нужны еще 17 пончиков, а числа $6, 13, 17$ нельзя получить, суммируя числа $5, 9, 16$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В верном решении не доказано, что нельзя купить 22 коржика – минус 1 балл. В решении есть пробелы, но получен ответ – 10 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. Перед Колей и Мишей лежат 4 карточки:

15	37	42	53

Коля выбирает любую карточку, Миша любую из оставшихся. Через число секунд, равное выбранному им числу, каждый из мальчиков выбирает следующее число из оставшихся на этот момент. Выигрывает тот, у кого больше сумма взятых им чисел. Кто из мальчиков выигрывает при правильной игре, и как он должен действовать?

Ответ. Коля, ему надо взять первым ходом число 37.

Решение. Пусть Коля выберет число 37. Миша может выбрать 15 или 42 или 53. Рассмотрим все эти случаи.

1) Миша выберет 15. Через 15 секунд (в момент $t = 15$) Миша может выбрать 42 или 53. Его сумма равна $15 + 42 = 57$ или $15 + 53 = 68$. В момент $t = 37$ Коля выберет оставшееся число, его минимальная сумма будет равна $37 + 42 = 79$ – Коля выиграл.

2) Миша выберет 42. Его следующий ход в момент $t = 42$, а ход Коли в момент$t = 37$. Коля выбирает число 53. Сумма чисел Коли будет равна $37 + 53 = 90$, и это больше суммы Миши – Коля выиграл.

2) Миша выберет 53. Его следующий ход в момент $t = 53$, а ход Коли в момент$t = 37$. Коля выбирает число 42. Сумма чисел Коли будет равна $37 + 42 = 79$, и это больше суммы Миши – Коля выиграл.

Комментарий. В качестве оптимальных стратегий предлагаются две: правильная и неправильная – 15 баллов. Верное решение не закончено – 15 баллов. При правильном ходе Коли рассмотрены не все варианты ходов Миши – 15 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Из 20 чисел 1, 2, …, 19, 20 Петя выбирает 15 чисел и находит их сумму. Выбирая разные числа, сколько он может получить различных сумм, делящихся на 7?

Ответ. 10.

Решение. Наименьшая сумма равна $1 + 2 + \cdots + 15 = 120$. Наибольшая сумма равна $6 + 7 + \cdots + 20 = 195$. У Пети может получиться любая сумма между этими числами, поэтому всего различных сумм $195 - 120 + 1 = 76$. Поскольку $76 = 7 \cdot 10 + 6$, и среди семи чисел, идущих подряд, ровно одно делится на 7, то всего 10 сумм делится на 7.

Комментарий. В верном решении есть одна арифметическая ошибка – 18 баллов. Решение в целом верное, но содержит ошибки – 15 баллов. Найдено только общее число различных сумм – 10 баллов. Ход решения верный, но общее число различных сумм найдено неверно – 10 баллов. Указана только наименьшая возможная сумма – 3 балла. Указана только наибольшая возможная сумма – 4 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 3

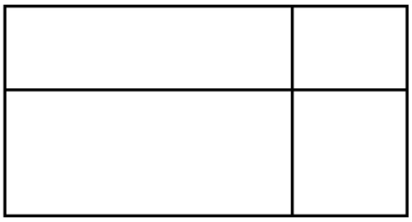
1. Алексей нёс в двух сумках 12 килограммов фруктов. Если бы он переложил яблоки из левой сумки в правую, левая сумка стала бы в три раза легче, а правая стала бы в три раза тяжелее. Сколько весили яблоки?

Ответ. 6 кг.

Решение. Если добавить яблоки в правую сумку, она станет в 3 раза тяжелее. Но если вернуть яблоки в левую сумку, она тоже станет в 3 раза тяжелее, значит, без яблок левая и правая сумка весят одинаково. Пусть вес каждой сумки – одна часть. Яблоки увеличивают вес в три раза, значит, яблоки составляют две части. Общий вес 12 кг, он делится на четыре части, поэтому вес яблок равен 6 кг.

Комментарий. При верно составленном уравнении его решение ищется подбором – 18 баллов. Уравнения (или рассуждения) верны, но решение не доведено до конца – 10 баллов. Ответ получен из рассмотрения частных случаев, не показано, что нет других решений – 5 баллов. Верная идея решения, но существенные ошибки – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.

2. На рисунке 9 прямоугольников, сумма их площадей равна 700. Найдите площадь самого большого прямоугольника.



Ответ. 175.

Решение. Каждая из четырех частей, на которые разделен большой прямоугольник, входит в горизонтальный, вертикальный, большой прямоугольники, и сама является отдельной частью. Поэтому сумма площадей всех 9 прямоугольников равна сумме площадей частей, умноженной на 4 . Отсюда сумма площадей частей равна $700 : 4 = 175$. Но это и есть площадь самого большого прямоугольника.

Комментарий. Верная идея решения, но допущена арифметическая ошибка – 18 баллов. При верном решении самым большим считается не тот прямоугольник – 18 баллов. Правильное решение не доведено до ответа – 15 баллов. Считается, что каждая из четырех частей входит не 4, а другое число раз – 10 баллов. Верная идея решения, но существенные ошибки – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.

3. В магазин привезли коржики, упакованные по 5, 8, 14 штук (по 30 упаковок каждого вида). Какое наибольшее число коржиков до 100 нельзя купить, не вскрывая упаковок?

Ответ. 17.

Решение. Можно купить 18 коржиков $(18 = 5 \cdot 2 + 8)$, 19 коржиков $(19 = 5 + 14)$, 20 коржиков $(20 = 5 \cdot 4)$, 21 коржик $(21 = 5 + 8 \cdot 2)$, 22 коржика $(22 = 8 + 14)$. Любое число коржиков больше 22 можно купить, добавляя упаковки с 5 коржиками: $23 = 18 + 5 = 5 \cdot 3 + 8, 24 = 19 + 5 = 5 \cdot 2 + 14,$ и т.д. Но 17 коржиков нельзя купить, так как 17 – нечётное число и надо использовать нечётное число упаковок по 5. Если взять ровно одну упаковку по 5, нужны еще 12 коржиков (и если взять упаковку по 8, нужны еще 4 коржика), если взять три упаковки по 5, нужны еще 2 коржика. Но числа $2, 4$ нельзя получить, суммируя числа $5, 8, 14$.

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В верном решении не доказано, что нельзя купить 17 коржиков – минус 1 балл. В решении есть пробелы, но получен* *ответ – 10 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

4. Перед Владом и Сеней лежат 4 карточки:

10	32	37	48

Влад выбирает любую карточку, Сеня любую из оставшихся. Через число секунд, равное выбранному им числу, каждый из мальчиков выбирает следующее число из оставшихся на этот момент. Выигрывает тот, у кого больше сумма взятых им чисел. Кто из мальчиков выигрывает при правильной игре, и как он должен действовать?

Ответ. Влад, ему надо взять первым ходом число 32.

Решение. Пусть Влад выберет число 32. Сеня может выбрать 10 или 37 или 48. Рассмотрим все эти случаи.

1) Сеня выберет 10. Через 10 секунд (в момент $t = 10$) Сеня может выбрать 37 или 48. Его сумма равна $10 + 37 = 47$ или $10 + 48 = 58$. В момент $t = 32$ Влад выберет оставшееся число, его минимальная сумма будет равна $32 + 37 = 69$ – Влад выиграл.

2) Сеня выберет 37. Его следующий ход в момент $t = 37$, а ход Влада в момент $t = 32$. Влад выбирает число 48. Сумма чисел Влада будет равна $32 + 48 = 80$, и это больше суммы Сени – Влад выиграл.

2) Сеня выберет 48. Его следующий ход в момент $t = 48$, а у Влада в момент $t = 32$. Влад выбирает число 37. Сумма чисел Влада будет равна $32 + 37 = 69$, и это больше суммы Сени – Влад выиграл.

Комментарий. *В качестве оптимальных стратегий предлагаются две: правильная и неправильная – 15 баллов. Верное решение не закончено – 15 баллов. При правильном ходе Влада рассмотрены не все варианты ходов Сени – 15 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Из 18 чисел $1, 2, \dots, 17, 18$ Лена выбирает 13 чисел и находит их сумму. Выбирая разные числа, сколько она может получить различных сумм, делящихся на 6?

Ответ. 11.

Решение. Наименьшая сумма равна $1 + 2 + \cdots + 13 = 91$. Наибольшая сумма равна $6 + 7 + \cdots + 18 = 156$. У Лены может получиться любая сумма между этими числами, поэтому всего различных сумм $156 - 91 + 1 = 66$. Поскольку $66 = 6 \cdot 11$, и среди шести чисел, идущих подряд, ровно одно делится на 6, то всего 11 сумм делится на 6.

Комментарий. *В верном решении есть одна арифметическая ошибка – 18 баллов. Решение в целом верное, но содержит ошибки – 15 баллов. Найдено только общее число различных сумм – 10 баллов. Ход решения верный, но общее число различных сумм найдено неверно – 10 баллов. Указана только наименьшая возможная сумма – 3 балла. Указана только наибольшая возможная сумма – 4 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*