**Математика. 8 класс**

1 вариант

*Работа рассчитана на 240 минут.*
*Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.*
*Все решения должны быть полными и обоснованными.*

1) Для положительных действительных чисел $x$, $y$ сравните значения выражений $\frac{x}{x^3+xy+1}$ и $\frac{1}{x+y+1}$.

2) Бельчата Билли, Вилли и Дилли были кандидатами в президенты леса. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты в сумме набрали $146\%$ голосов. Оказалось, что по ошибке процент голосов за Билли был посчитан не от общего числа проголосовавших, а от числа голосовавших за Билли или Вилли. Остальные проценты были подсчитаны верно. Известно, что за Вилли проголосовало больше $2000$ жителей леса. Докажите, что за Билли проголосовало больше $1700$ жителей леса.

3) В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины оснований $BC$ и $AD$ – точки $E$ и $F$, соответственно. Из точки $D$ на сторону $AB$ опущена высота $DH$. Докажите, что $BF = EH$.

4) На шахматной доске $8 \times 8$ расставляют два чёрных и $n$ белых ферзей так, что одноцветные ферзи не бьют друг друга. При каком наибольшем $n$ это возможно? (Ферзь ходит на любое число полей по вертикали, горизонтали или диагонали и не бьет насквозь через другую фигуру.)

5) Выражение $n!$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$ включительно, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Решите в натуральных числах уравнение $n! - 4n^2 + 18 = m^2 + 4nm - 20m$.

**Математика. 8 класс**

2 вариант

*Работа рассчитана на 240 минут.*
*Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.*
*Все решения должны быть полными и обоснованными.*

1) Для различных положительных действительных чисел $a, b$ справедливо равенство $\frac{a}{a^3+a+1} = \frac{b}{b^3+b+1}$. Найдите значение выражения $\frac{13-a^2b-b^2a}{2+a^2b+b^2a}$.

2) В прошлом году первокурсник Сибирского федерального университета Миша прогуливался по лесу и заметил, что в субботу на одном из деревьев в лесу количество зелёных и красных листьев совпадало, а жёлтых листьев было в 7 раз больше, чем красных. В воскресенье на этом же дереве количество зелёных и жёлтых листьев совпадало, а красных листьев было в 7 раз больше, чем жёлтых. Докажите, что за ночь количество листьев на этом дереве уменьшилось хотя бы в 4 раза. (Зелёный лист может пожелтеть и покраснеть. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают.)

3) В трапеции $ABCD$ отмечены середины оснований $AB$ и $CD$ – точки $K$ и $L$, соответственно. Известно, что $AB = 2CD$, а $CK$ – биссектриса $\angle BCD$. Докажите, что $AC = 2KL$.

4) На шахматной доске $8 \times 8$ расставляют $n$ королей и $n$ ладей так, что никакие две фигуры не бьют друг друга. При каком наибольшем $n$ это возможно? (Ладья ходит на любое число полей по вертикали или горизонтали. Король ходит на одно поле по вертикали, горизонтали или диагонали.)

5) Одно из двух натуральных чисел больше другого числа на 10. Оказалось, что десятичная запись произведения этих чисел не содержит никаких других цифр, кроме 9. Найдите все такие числа.

**Математика. 8 класс**

3 вариант

*Работа рассчитана на 240 минут.*
*Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.*
*Все решения должны быть полными и обоснованными.*

1) Для различных положительных действительных чисел $a, b$ справедливо равенство $\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}$. Найдите значение выражения $\frac{10-a^2b-b^2a}{2+a^2b+b^2a}$.

2) В прошлом году первокурсник Сибирского федерального университета Миша прогуливался по лесу и заметил, что в субботу на одном из деревьев в лесу количество зелёных и жёлтых листьев совпадало, а красных листьев было в 9 раз больше, чем жёлтых. В воскресенье на этом же дереве количество зелёных и красных листьев совпадало, а жёлтых листьев было в 9 раз больше, чем красных. Докажите, что за ночь количество листьев на этом дереве уменьшилось хотя бы в 5 раз. (Зелёный лист может пожелтеть и покраснеть. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают.)

3) В трапеции $ABCD$ отмечены середины оснований $AD$ и $BC$ – точки $P$ и $Q$, соответственно. Известно, что $AB = BC$, а $BP$ – биссектриса $\angle ABC$. Докажите, что $BD = 2PQ$.

4) На шахматной доске $9 \times 9$ расставляют $n$ королей и 6 ладей так, что никакие две фигуры не бьют друг друга. При каком наибольшем $n$ это возможно? (Ладья ходит на любое число полей по вертикали или горизонтали. Король ходит на одно поле по вертикали, горизонтали или диагонали.)

5) Одно из двух натуральных чисел больше другого числа на 24. Оказалось, что произведение этих чисел на 1 больше числа, десятичная запись которого не содержит никаких других цифр, кроме 1. Найдите все такие числа.