ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$2\sin\frac{9x}{8}\cos\frac{9x}{8}+\cos x=2.$$
Ответ. $x=2\pi+8\pi n, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Решение. Запишем уравнение как $\sin\frac{9x}{4}+\cos x=2$, оно эквивалентно системе $\begin{cases}\sin\frac{9x}{4}=1,\\ \cos x=1.\end{cases}$ Уравнения этой системы имеют решения: $\begin{cases}x={}^{2\pi}/_{9}+{}^{8k\pi}/_{9},\\ x=2m\pi.\end{cases}$ где k,m – целые. Приравнивая выражения для x, получаем уравнение $9m=1+4k$.Поскольку $9m=8m+m$, то $m-1=4n$, тогда $m=4n+1$, $k=\frac{9(4n+1)-1}{4}=9n+2$. Подставляя значение m в решение второго уравнения, получаем $x=2(4n+1)\pi=2\pi+8n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Комментарий. *Составлена система уравнений – 10 баллов. Система решена, но связь между параметрами не найдена – 12 баллов. Связь найдена, но ответы не объединены – 16 баллов. Ответ объединен, но не упрощен – 18 баллов. Не показано, как объединялся и упрощался ответ – 18 баллов. В верном решении допущена ошибка – снижать на 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

2. Дана возрастающая положительная геометрическая прогрессия b_n. Известно, что $b_4+b_3-b_2-b_1=9$. Докажите, что $b_5+b_6\geq 36$.

Решение. Обозначим через q знаменатель прогрессии. Тогда по условию $b_1(q^3 + q^2 - q - 1) = 9$, что равносильно соотношению $b_1(q+1) = \frac{9}{q^2-1}$. Нам же требуется доказать, что $b_6 + b_5 = b_1 q^4(q+1) = \frac{9q^4}{q^2-1} \geq 36$. По условию задачи $b_2 = b_1 q > b_1$, значит, $q > 1$. Таким образом, достаточно проверить неравенство $q^4 \geq 4(q^2 - 1)$, которое можно записать в виде тривиального неравенства $(q^2 - 2)^2 \geq 0$.

Комментарий. *Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. В верном решении допущена ошибка в преобразовании – снижать на 4 балла. Доказательство проведено только для частного случая целых чисел – 3 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. Около пятиугольника $ABCDE$ описана окружность, P – точка пересечения отрезков AC и BD, Q – точка касания отрезка CE и описанной около треугольника ABP окружности. Найдите $\angle CQP$, если известно, что $\angle ECD = 40^\circ$.

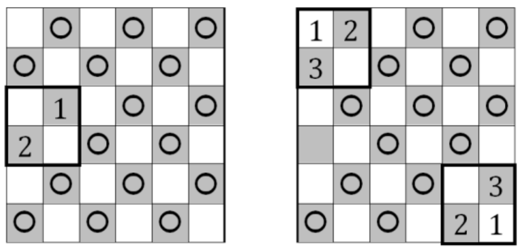
Ответ. 20°.

Решение. Пусть $\angle CQP = x$, $\angle ECA = \alpha$. Тогда $\angle QBP = x$ как вписанный угол, опирающийся на дугу QP; $\angle ABE = \alpha$ как вписанный угол, опирающийся на дугу AE. Далее, $\angle QPA = x + \alpha$ как внешний угол в треугольнике QPC и тогда $\angle QBA = x + \alpha$ как угол, опирающийся на ту же дугу. Теперь находим, что $\angle QBE = \angle QBA - \angle ABE = x$. Таким образом, $\angle DBE = \angle QBP + \angle QBE = 2x$ и при этом $\angle DBE = \angle DCE = 40^\circ$. Значит, $2x = 40^\circ$.

Комментарий. *Рассмотрен частный случай правильного пятиугольника – 4 балла. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Сколькими способами можно поставить 17 фишек на шахматную доску 6×6, если фишки нельзя ставить на клетки, имеющие общую сторону?

Ответ. 40.



Решение. Разобьём доску на 9 квадратов 2×2. В каждый квадрат можно поставить не больше двух фищек (по диагонали этого квадрата). Значит, в каком-то из квадратов стоит одна фишка, в остальных по две фишки. Если в одном квадрате 2×2 две фищки стоят на чёрных полях, то и в соседнем квадрате две фишки также стоят на чёрных полях. В выделенном квадрате, если он не является угловым, две возможных позиции, чтобы поставить одну фишку, но в двух угловых квадратах по три возможных позиции (см. рисунок).

Столько же расстановок будет, если поставить две первые фишки в квадрате 2×2 на белые поля. Таким образом, число возможных расстановок равно $2 \cdot (7 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 40$.

Комментарий. *Не учтены особенности угловых клеток – 10 баллов. Особенности угловых клеток учтены, но другие расстановки посчитаны неверно – 10 баллов. Решение начато, но продвижение незначительное – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Найдите все тройки попарно простых натуральных чисел $(a, b, c)(a \leq b \leq c)$, для которых $a^n + b^n + c^n$ делится на $a + b + c$ для всех натуральных $2 \leq n \leq 12$.

Ответ. $(1, 1, 1)$; $(1, 1, 4)$.

Решение. Обозначим $A_n = a^n + b^n + c^n$. Заметим, что $A_2 = {A_1}^2 - 2(ab + bc + ac)$, и A_2 делится на $A_1 = a + b + c$ тогда и только тогда, когда $2(ab + bc + ac)$ делится на A_1. (*)

Аналогично $A_3 = A_1 \cdot A_2 - (ab + bc + ac)A_1 + 3abc$, и делится на $A_1 = a + b + c$ тогда и только тогда, когда $3abc$ делится на A_1.(**)
Запишем соотношение для $n > 3$:

$$A_n = A_1 \cdot A_{n-1} - (ab + bc + ac)A_{n-2} + abcA_{n-3.}$$

Отсюда видно, что если A_1 – делитель A_2, то A_1 – делитель A_4, если A_1 – делитель A_2и A_3, то A_1 – делительA_5, $A_{6,}$и так далее, то есть делитель A_nдля любого натурального n.
Будем искать упорядоченные тройки (a, b, c), для которых выполняются условия (*) и (**), то есть $2(ab + bc + ac)$ и $3abc$ делятся на$a + b + c$.
Пусть $a + b + c$ имеет простой делитель $p \geq 5$. Тогда abc делится на p, и в силу взаимной простоты ровно одно из чисел a, b, c делится наp. Но тогда $ab + bc + ac$ не может делиться на p, и значит, на $a + b + c$.
Пусть $a + b + c$ делится на 3^2, тогда abc делится на 3, и в силу взаимной простоты ровно одно из чисел a, b, c делится на 3, тогда $ab + bc + ac$ не может делиться на 3, и значит, на$a + b + c$.
Пусть $a + b + c$ делится на 2^2, тогда abc делится на 4,и ровно одно из чисел a, b, cделится на 4, тогда $ab + bc + ac$– нечётное и $2(ab + bc + ac)$не может делиться на 4.
Следовательно,$a + b + c$ имеет вид $2^k \cdot 3^m$, где k и mпринимают значения 0 или 1, при этом $a + b \geq 3$, откуда $3 \leq a + b + c \leq 6$. Подходят тройки$(1, 1, 1), (1, 1, 4)$.

Комментарий. *Найдена тройка $(1, 1, 1)$ – 2 балла, найдена тройка $(1, 1, 4)$ – 4 балла, доказано, что нет других троек – 14 баллов, баллы суммируются. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6 баллов. Доказательство начато, но продвижение незначительное – 1-2 балла. В решении найдены тройки равных простых (а не попарно простых) чисел – 0 баллов. Решение отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1, \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1. \end{cases}$$

Ответ.$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решение. Возведём первое уравнение в квадрат и вычтем из второго, система распадётся на две: $\begin{cases} \sin 7x = 0, \\ \sin 4x = 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin 7x = 1, \\ \sin 4x = 0. \end{cases}$ Решения уравнений первой системы: $\begin{cases} x = {m\pi}/{7}, \\ x = {\pi}/{8} + {k\pi}/{2}, \end{cases}$ где m и k – целые. Приравнивая выражения для x, получаем уравнение $8m = 7 + 28k$,у которого нет решений в целых числах, так как слева чётное число, а справа нечётное.
Решения уравнений второй системы: $\begin{cases} x = {\pi}/{14} + {2k\pi}/{7}, \\ x = {m\pi}/{4}, \end{cases}$ гдеm и k – целые. Приравнивая выражения дляx, получаем уравнение $7m = 2 + 8k$. Поскольку $2 + 8k = 7k + k + 2$, то $k + 2 = 7n$, тогда $k = 7n - 2$, $m = \frac{2+8(7n-2)}{7} = 8n - 2$. Подставляя значение n в решение второго уравнения, получаем $x = {(8n - 2)\pi}/{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Проверка показывает, что найденные значения x удовлетворяют уравнениям системы.

Комментарий. *Получены две системы уравнений – 10 баллов. Системы решены, но связь между параметрами не найдена – 12 баллов. Связь найдена, но ответы не объединены – 16 баллов. Ответ объединен, но не упрощен – 18 баллов. Не показано, как объединялся и упрощался ответ – 18 баллов. Посторонний ответ не отброшен – минус 4* *балла. Решены только уравнения с одной переменной – 6 баллов. Ответ найден подбором – 4 балла. В верном решении допущена арифметическая ошибка – снижать на 2 балла за ошибку. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

2. Натуральное число N имеет 30 делителей, а число $5N$ имеет 40 делителей. Приведите пример такого числа.

Ответ. Например, $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Решение. Пусть N имеет вид $5^k \cdot m$, где m не делится на 5. Обозначим $d(a)$ число делителей a. Тогда число делителей $d(N) = (k+1)d(m), d(5N) = (k+2)d(m)$. Отсюда $\frac{k+2}{k+1} = \frac{40}{30}$, и $k = 2$. Остается подобрать число m, имеющее 10 делителей. Подойдет, например, число $m = 3 \cdot 2^4$.

Комментарий. *Приведен правильный пример чисел N и $5N$, числа делителей обоснованы формулой, рассуждениями, или выписыванием делителей – 20 баллов. При верном в целом решении есть ошибка или пробел в обосновании числового примера – 15 баллов. Обоснования нет, только ответ с примером – 5 баллов. В перечне делителей числа N есть ошибки – 5 баллов Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

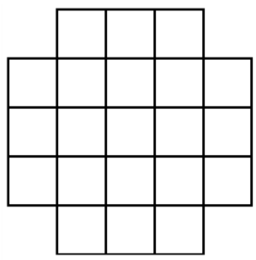
3. Окружность, проходящая через вершины A и B остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AC и BCв точках P и Q соответственно, а также проходит через центр описанной около треугольника PQC окружности. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке K, а $\angle ACB = 2\angle AKP$. Найдите $\angle ACB$.

Ответ. 72°.

Решение. Обозначим через O – центр описанной окружности треугольника PCQ. Пусть $\angle AKP = \alpha$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $\angle POQ = 4\alpha$. Этот угол опирается на дугу $PABQ$. Дуги AP и BQ в сумме дают 2α, значит, на большую дугу AB приходится 6α. Так как $\angle APB$ – внешний в треугольнике CPB, $\angle PBC = \angle APB - \angle ACB = \alpha$. Тогда сумма противоположных углов O и B во вписанном четырёхугольнике $POQB$ равна $5\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 36^\circ$, откуда $\angle ACB = 72^\circ$.

Комментарий. *Решение не закончено или содержит ошибки – 10 баллов. Решение начато, доказаны некоторые утверждения, но продвижение небольшое, или рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, и две из них покрасили в синий цвет, а остальные клетки остались белыми. Сколько существует таких раскрасок, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются за одну?



Ответ. 55.

Решение. Всего способов выбрать две чёрные клетки $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$. Если синие клетки центрально-симметричны, то для каждой такой раскраски можно поворотом (на 90°) получить ещё ровно одну раскраску. Всего центрально-симметричных раскрасок $\frac{20}{2} = 10$ (в качестве первой клетки можно выбрать любую, кроме центральной, вторая клетка определяется из симметрии относительно центра единственным образом). Остальных раскрасок $210 - 10 = 200$, и из каждой такой раскраски можно поворотом получить ещё три раскраски. Таким образом, число раскрасок, различных при поворотах, равно $\frac{10}{2} + \frac{200}{4} = 55$.

Комментарий. *При правильном решении допущена небольшая ошибка – 18 баллов. Допущена ошибка при подсчетах для одного из вариантов расположений – 15 баллов. При верной идее решения допущены ошибки – 10 баллов. Решение начато, проведены некоторые подсчёты – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Даны 50 неотрицательных чисел $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_{49} \le a_{50}$. Сумма первых 48 чисел не превышает 50, и сумма двух последних также не превышает 50. Найдите максимальное возможное значение суммы квадратов этих чисел $A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{49}^2 + a_{50}^2$, и укажите все последовательности чисел, для которых этот максимум достигается.

Ответ. 50^2. Последовательности $(0,0,\dots,50)$ и $(0,0,\dots 0,25,25,25,25)$.

Решение. Из условия следует, что $a_{50} \le 50 - a_{49}$ и $a_1 + a_2 + \dots + a_{49} + a_{50} \le 100$. Тогда $A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{49}^2 + a_{50}^2 \le a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{49}^2 + (50 - a_{49})^2 = 50^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + 2a_{49}^2 - 100a_{49} \le 50^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + 2a_{49}^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{49} + a_{50})a_{49} = 50^2 + a_1(a_1 - a_{49}) + a_2(a_2 - a_{49}) + \dots + a_{48}(a_{48} - a_{49}) + a_{49}(a_{49} - a_{50})$.
Поскольку все выражения в скобках неположительны, максимальное значение A не превышает 50^2, и максимум достигается, когда все слагаемые, начиная со второго, обращаются в 0, а ограничение $a_{49} + a_{50} \le 50$ выполняется как равенство. Заметим, что если все выражения в скобках одновременно равны 0, то максимум не достигается. Пусть $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0, a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_{50} = a$. Если $k = 49$, получаем последовательность $(0,0,\dots,50)$, для которойдостигается максимум 50^2. Если $k = 48$ или 47, получаем соответственно последовательности $(0,0,\dots,0,25,25)$и $(0,0,\dots,0,25,25,25)$, для которых максимум не достигается. Если $k = 46$, получаем последовательность $(0,0,\dots 0,25,25,25,25)$, для которойдостигается максимум 50^2. При $k < 46$ нарушаются ограничения ($a_{49} + a_{50} = 50$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_{50} = 25$, но сумма первых 48 чисел не превышает 50, значит, среди них может быть не больше двух элементов, равных 25).

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В верном доказательстве есть пробел – минус 3 балла. В доказательстве есть недочёты – минус 1 балл за каждый. Вместо нахождения максимума общей суммы найдены (с доказательством) максимумы двух отдельных сумм и решение завершается подбором – 14 баллов. Эти баллы раскладываются так: доказательство максимума для суммы двух квадратов – 4 балла, для суммы 48 квадратов – 4 балла, указано только максимальное значение – 2 балла, найдены только последовательности – по 2 балла за каждую.*

Вариант 3

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1, \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1. \end{cases}$$
Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решение. Возведём первое уравнение в квадрат и вычтем из второго, система распадётся на две: $\begin{cases} \sin 9x = 0, \\ \sin 4x = 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin 9x = 1, \\ \sin 4x = 0. \end{cases}$ Решения уравнений первой системы: $\begin{cases} x = {}^{m\pi}/_{9}, \\ x = {}^{\pi}/_{8} + {}^{k\pi}/_{2}, \end{cases}$ где m и k – целые. Приравнивая выражения для x, получаем уравнение $8m = 9 + 36k$,у которого нет решений в целых числах, так как слева чётное число, а справа нечётное.

Решения уравнений второй системы: $\begin{cases} x = {}^{\pi}/_{18} + {}^{2k\pi}/_{9}, \\ x = {}^{m\pi}/_{4}, \end{cases}$ гдеm и k – целые. Приравнивая выражения дляx, получаем уравнение $9m = 2 + 8k$. Поскольку $2 + 8k = 9k - (k - 2)$, то $k - 2 = 9n$, тогда $k = 2 + 9n$, $m = \frac{2+8(2+9n)}{9} = 8n + 2$. Подставляя значение n в решение второго уравнения, получаем $x = {(8n+2)\pi}/_{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Проверка показывает, что найденные значения x удовлетворяют уравнениям системы.

Комментарий. *Получены две системы уравнений – 10 баллов. Системы решены, но связь между параметрами не найдена – 12 баллов. Связь найдена, но ответы не объединены – 16 баллов. Ответ объединен, но не упрощен – 18 баллов. Не показано, как объединялся и упрощался ответ – 18 баллов. Посторонний ответ не отброшен – минус 4 балла. Решены только уравнения с одной переменной – 6 баллов. Ответ найден подбором – 4 балла. В верном решении допущена арифметическая ошибка – снижать на 2 балла за ошибку. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

2. Существует ли натуральное число N, имеющее 24 делителя, такое, что число $3N$ имеет 32 делителя?

Ответ. Например, $360 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^2$.

Решение. Пусть N имеет вид $3^k \cdot m$, где m не делится на 3. Обозначим $d(a)$ число делителейa.Тогда число делителей $d(N) = (k+1)d(m), d(3N) = (k+2)d(m)$. Отсюда $\frac{k+2}{k+1} = \frac{32}{24}$, и $k = 2$. Остается подобрать число m, имеющее 8 делителей. Подойдет, например, число $m = 2^3 \cdot 5$.

Комментарий. *Приведен правильный пример чисел N и $3N$, числа делителей обоснованы формулой, рассуждениями, или выписыванием делителей – 20 баллов. При верном в целом решении есть ошибка или пробел в обосновании числового примера – 15 баллов. Обоснования нет, только ответ с примером – 5 баллов. В перечне делителей числа N есть ошибки – 5 баллов Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. Окружность, проходящая через вершины B и C остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно, а также проходит через центр описанной около треугольника APQ окружности. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K, а $\angle BAC = 3\angle BKP$. Найдите $\angle BAC$.

Решение. Обозначим через O – центр описанной окружности треугольника APQ. Пусть $\angle BKP = \alpha$, $\angle BAC = 3\alpha$. Тогда $\angle POQ = 6\alpha$. Этот угол опирается на дугу $PBCQ$. Дуги BP и CQ в сумме дают 2α, значит, на большую дугу BC приходится 10α. Так как $\angle BPC$ – внешний в треугольнике APC, $\angle PCA = \angle BPC - \angle BAC = 2\alpha$. Тогда сумма противоположных углов O и C во вписанном четырёхугольнике $POQC$ равна $8\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 22{,}5^\circ$, откуда $\angle BAC = 67{,}5^\circ$.

Ответ. $67{,}5^\circ$.

Комментарий. *Решение не закончено или содержит ошибки – 10 баллов. Решение начато, доказаны некоторые утверждения, но продвижение небольшое, или рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Квадрат 5×5 расчертили на 25 одинаковых клеток, и две из них покрасили в синий цвет, а остальные клетки остались белыми. Сколько существует таких раскрасок, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются за одну?

Ответ. 78.

Решение. Всего способов выбрать две синие клетки $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$. Если синие клетки центрально-симметричны, то для каждой такой раскраски можно поворотом (на 90°) получить ещё ровно одну раскраску. Всего центрально-симметричных раскрасок $\frac{24}{2} = 12$ (в качестве первой клетки можно выбрать любую, кроме центральной, вторая клетка определяется из симметрии относительно центра единственным образом). Остальных раскрасок $300 - 12 = 288$, и из каждой такой раскраски можно поворотом получить ещё три раскраски. Таким образом, число раскрасок, различных при поворотах, равно $\frac{12}{2}+\frac{288}{4}=78$.

Комментарий. *При правильном решении допущена небольшая ошибка – 18 баллов. Допущена ошибка при подсчетах для одного из вариантов расположений – 15 баллов. При верной идее решения допущены ошибки – 10 баллов. Решение начато, проведены некоторые подсчёты – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Даны 30 действительных чисел a_i $(1 \le i \le 30)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} 0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{29} \le a_{30}, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{28} \le 30, \\ a_{29} + a_{30} \le 30. \end{cases}$$

Найдите максимальное возможное значение суммы квадратов этих чисел$A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{29}^2 + a_{30}^2$, и укажите все последовательности чисел, для которых этот максимум достигается.

Ответ. 30^2. Последовательности $(0,0,\ldots,30)$ и $(0,0,\ldots 0,15,15,15,15)$.

Решение. Из условия следует, что $a_{30} \le 30 - a_{29}$ и $a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} + a_{30} \le 60$. Тогда$A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{29}^2 + a_{30}^2 \le a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{29}^2 + (30 - a_{29})^2 = 30^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + 2a_{29}^2 - 60a_{49} \le 60^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + 2a_{29}^2 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} + a_{30})a_{29} = 30^2 + a_1(a_1 - a_{29}) + a_2(a_2 - a_{29}) + \cdots + a_{28}(a_{28} - a_{29}) + a_{29}(a_{29} - a_{30})$.
Поскольку все выражения в скобках неположительны, максимальное значение A не превышает 30^2, и максимум достигается, когда все слагаемые, начиная со второго, обращаются в 0, а ограничение $a_{29} + a_{30} \le 30$ выполняется как равенство. Заметим, что если все выражения в скобках одновременно равны 0, то максимум не достигается. Пусть $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0, a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{30} = a$. Если $k = 29$, получаем последовательность $(0,0,\ldots,30)$, для которойдостигается максимум 30^2. Если $k = 28$ или 27, получаем соответственно последовательности $(0,0,\ldots,0,15,15)$ и$(0,0,\ldots,0,15,15,15)$, для которыхмаксимум не достигается. Если $k = 26$, получаем последовательность $(0,0,\ldots 0,15,15,15,15)$, для которойдостигается максимум 30^2. При $k < 26$ нарушаются ограничения ($a_{29} + a_{30} = 30$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{30} = 15$, но сумма первых 28 чисел не превышает 30, значит, среди них может быть не больше двух элементов, равных 15).

Комментарий. *Полное верное решение – 20 баллов. В верном доказательстве есть пробел – минус 3 балла. В доказательстве есть недочёты – минус 1 балл за каждый. Вместо нахождения максимума общей суммы найдены (с доказательством) максимумы двух отдельных сумм и решение завершается подбором – 14 баллов. Эти баллы раскладываются так: доказательство максимума для суммы двух квадратов – 4 балла, для суммы 28 квадратов – 4 балла, указано только максимальное значение – 2 балла, найдены только последовательности – по 2 балла за каждую.*