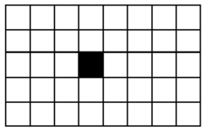
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. На рисунке изображен клетчатый прямоугольник 5×8 (сторона каждой клетки равна 1) с одной закрашенной клеткой. Из центра чёрной клетки проведены векторы в центры всех других клеток, кроме двух. Какое наименьшее значение может принимать длина суммы всех полученных векторов?

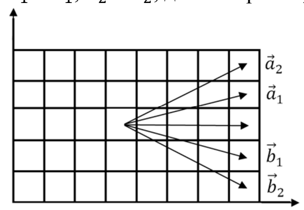


Ответ. 12.

Решение. Вначале проведём векторы в центры всех клеток таблицы. Тогда все векторы, кроме пяти, изображенных на рисунке, разбиваются на пары с нулевой суммой. Значит, сумма S всех векторов равна $\overrightarrow{(20{,}0)}$, а искомая сумма $\vec{S}_1$ равна $\overrightarrow{(20 - x_1 - x_2, -y_1 - y_2)}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{(x_1, y_1)}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{(x_2, y_2)}$ –векторы, не вошедшие в сумму. Тогда

$$|\vec{S}_1| = \sqrt{(20 - x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

Минимален, если число $x_1 + x_2$ максимально, а число $|y_1 + y_2|$ минимально. Это выполняется для двух пар векторов: $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{b}_2$, для которых $x_1 + x_2 = 8$, $y_1 + y_2 = 0$.



Красноярский математический центр СФУ

2. Решите уравнение:

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $2\pi l, l \in \mathbb{Z}$; $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Запишем левую часть уравнения как стандартный тригонометрический многочлен:

$$(4\sin 2x - 3\cos 2x) - 6(2\sin x + \cos x) + 9 = 0.$$

Обозначим линейную часть (без коэффициента -6) через y:

$$y = 2\sin x + \cos x$$

и посчитаем величину y^2 (при этом запишем её как стандартный тригонометрический многочлен):

$$y^2 = 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 4\frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(4\sin 2x - 3\cos 2x) + \frac{5}{2}.$$

Видно, что квадратный блок исходного уравнения может быть выражен через квадрат линейного блока:

$$4\sin 2x - 3\cos 2x = 2y^2 - 5.$$

Поэтому наше уравнение можно решать с помощью новой неизвестной $y = 2\sin x + \cos x$:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \iff y = 1 \text{ или } y = 2.$$

Возвращаясь к основной неизвестной x, мы получим совокупность из двух уравнений: $2\sin x + \cos x = 1$ и $2\sin x + \cos x = 2$, которые легко решаются стандартной процедурой для уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$.

3. Найдите все трехзначные числа $\overline{abc}$, такие, что остаток от деления, как числа $\overline{abc}$, так и числа $\overline{cba}$, на сумму своих цифр, увеличенную на 1, равен 1.

Ответ. 121, 141, 171, 313, 666.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ – число, удовлетворяющее условию. Тогда

$$100a + 10b + c = (a + b + c + 1)k + 1, \qquad (*)$$
$$100c + 10b + a = (a + b + c + 1)m + 1.$$

Вычитаем: $99(a - c) = (a + b + c + 1)(k - m)$.

Пусть $a \neq c$. Так как $a + b + c + 1 > a - c$, то из последнего равенства следует, что $a + b + c + 1$ делится на 3 или 11. В первом случае $a + b + c$ даёт остаток 2 при делении на 3, и значит, в равенстве (*) левая часть (то есть, $\overline{abc}$) дает остаток 2 при делении на 3, а правая часть – остаток 1. Во втором случае $a + b + c = 10$ или 21 и мы можем записать левую часть равенства (*) в виде $99a + 11b + (a + b + c) - 2b$. Таким образом, во втором случае левая часть дает остаток $10 - 2b$ или $21 - 2b$ при делении на 11, а правая часть – остаток 1. Заметим теперь, что при $b = 0, 1, \dots, 9$ это невозможно. Итак, при $a \neq c$ решений нет.

Пусть теперь $a = c$. В этом случае равенство (*) выглядит так:

$$101a + 10b = (2a + b + 1)k + 1.$$

Преобразуем его к виду: $80a - 11 = (2a + b + 1)(k - 10)$. То есть, $80a - 11$ делится на $2a + b + 1$. Последовательно, подставляя $a = 1, \dots, 9$, найдем все b, при которых это может быть выполнено. Например: при $a = 1$ получаем, что 70 должно делиться на $b + 3$, откуда b может быть равно 2, 4 или 7 и т.д.

4. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. Точки X и Y – центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и CBH соответственно. Прямая XY пересекает катеты AB и BC в точках P и Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH = a$.

Ответ. $\frac{a^2}{2}$.

Решение. Прямые HX и HY – биссектрисы прямых углов AHB и BHC, откуда

$$\angle AHX = \angle BHX = \angle BHY = \angle CHY = 45^\circ \text{ и } \angle XHY = 90^\circ.$$

Отрезки HX и HY относятся как радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники AHB и BHC, поэтому $\frac{HX}{HY} = \frac{AB}{BC}$. Значит, треугольники XHY и ABC подобны. Тогда

$$\angle BAC = \angle HXY = 180^\circ - \angle PXH,$$

и четырехугольник $AHXP$ будет вписанным. Следовательно, $\angle QPB = \angle AHX = 45^\circ$, то есть треугольник BPQ равнобедренный. Заметим, что треугольники PBX и HBX равны. Действительно, сторона BX у них общая, $\angle BPX = \angle BHX = 45^\circ$, а углы PBX и HBX равны, поскольку BX – биссектриса угла PBH. Тогда $BP = BH = h$ и $S_{BPQ} = \frac{BP^2}{2} = \frac{a^2}{2}$.

5. Дана квадратная таблица $n \times n$, где $n \geq 2$. В каждую из некоторых k клеток таблицы ставится по одной фишке так, чтобы в любом квадрате 2×2 было ровно 2 фишки. Найдите все значения k, при которых это можно сделать.

Ответ. $\frac{n^2}{2}$ при четном n; любое число из отрезка $[2m^2 + m, 2m^2 + 3m + 1]$ при нечетном $n = 2m + 1$.

Решение. Если $n = 2m$ – четное число, то вся таблица разбивается на $m^2 = \frac{n^2}{4}$ квадратов 2×2, в каждом из которых находится ровно 2 фишки. Поэтому общее число фишек равно $2m^2 = \frac{n^2}{2}$.

Пусть теперь $n = 2m + 1$. Разобьем таблицу на квадраты 2×2 и фигуры вида, указанного на рис. 1, так, как показано на рис. 2. В любой такой фигуре должна стоять хотя бы одна фишка, иначе в квадрате 2×2, примыкающем к данной, должно быть не менее 3 фишек (см. рис. 3) – противоречие. Таким образом, общее число фишек в таблице не менее $2m^2 + m$.

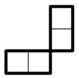


Рис. 1

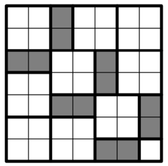


Рис. 2

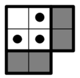


Рис. 3

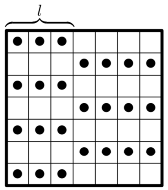


Рис. 4

С другой стороны, поскольку в любом квадрате 2×2 должно быть ровно 2 пустых клетки (незанятых фишками), то аналогично получаем, что пустых клеток в таблице также не менее $2m^2 + m$. И значит, фишек в таблице не более $(2m + 1)^2 - (2m^2 + m) = 2m^2 + 3m + 1$. Пример, приведенный на рис. 4, показывает, что любое значение числа фишек из указанного промежутка достигается. (В этом примере число фишек равно $2m^2 + m + l$, где $0 \leq l \leq 2m + 1$.)

Красноярский математический центр СФУ

Вариант 2

1) В лесу живут бельчата-рыцари и бельчата-лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды несколько бельчат, среди которых был, по крайней мере, один рыцарь, собрались на поляне и сказали по фразе:

1-й бельчонок: «Среди нас ровно один рыцарь».

2-й бельчонок: «Среди нас ровно два лжеца».

3-й бельчонок: «Среди нас ровно три рыцаря».

………………………………………………………

$2k$-й бельчонок: «Среди нас ровно $2k$ лжецов».

$(2k + 1)$-й бельчонок: «Среди нас ровно $2k + 1$ рыцарей».

Определите количество собравшихся на поляне бельчат.

Ответ. Либо 1, либо любое чётное количество бельчат.

Решение. Заметим, что высказывания бельчат с нечётными номерами противоречат друг другу, значит, среди последних не более одного рыцаря. Также противоречат друг другу высказывания бельчат с чётными номерами; среди этих бельчат также не больше одного рыцаря. Значит, рыцарей не более двух. Если их ровно 2, то все высказывания бельчат с чётными номерами ложны, и рыцаря среди этих людей нет – противоречие. Итак, рыцарь только один и это именно тот, кто сказал первую фразу. Значит все фразы типа «среди нас ровно $2k$ лжецов» принадлежат лжецам, потому неверны. Так как все возможные чётные числа, начиная от 2 и заканчивая количеством бельчата поляне, в этих фразах упомянуты, число лжецов на поляне не может быть чётным, отличным от 0. Итого, на поляне один рыцарь, а лжецов либо нечётное количество, либо нет совсем. Любая такая компания подходит, как нетрудно убедиться.

2. Найдите все решения уравнения

$$2\cos\frac{x}{3} + \sqrt{5} = 2 - 2\left(\sqrt{5} - 1\right)\sin\frac{x}{6},$$

удовлетворяющие условию $\cos\frac{3x}{4} < 0$.

Ответ. $-\pi + 24\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $7\pi + 24\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

Решение. Исходное уравнение можно привести к виду

$$4\sin^2\frac{x}{6} - 2\left(\sqrt{5} - 1\right)\sin\frac{x}{6} - \sqrt{5} = 0.$$

Для новой неизвестной $y = \sin\frac{x}{6}$ мы имеем квадратное уравнение:

$$4y^2 - 2\left(\sqrt{5} - 1\right)y - \sqrt{5} = 0.$$

Поскольку $\frac{D}{4} = \left(\sqrt{5} - 1\right)^2 + 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} + 1\right)^2$, его корни есть:

$$y_1 = -\frac{1}{2};\ \ y_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно, исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2};\ \ \sin\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Множество решений первого из них можно описать двумя формулами:

$x = -\pi + 12\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};\ \ \ x = 7\pi + 12\pi m,\ \ m \in \mathbb{Z}$,

а множество решений второго – пусто.

Теперь определим, какие из найденных корней удовлетворяют условию $\cos\frac{3x}{4} < 0$.

1. Для $x = -\pi + 12\pi n, n \in \mathbb{Z}$, мы имеем:

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 9\pi n\right) = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Красноярский математический центр СФУ

Эта величина отрицательна тогда и только тогда, когда $(-1)^n > 0$, то есть $n = 2k$ – число четное. Соответственно, из проверяемой серии в ответ включается только подсерия $x = -\pi + 24\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

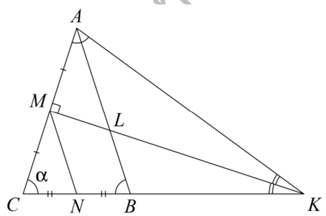
2. Для $x = 7\pi + 12\pi m, m \in \mathbb{Z}$, мы имеем:

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(\frac{21\pi}{4} + 9\pi m\right) = (-1)^m \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Эта величина отрицательна тогда и только тогда, когда $(-1)^m > 0$, то есть $m = 2l$ – число четное. Соответственно, из проверяемой серии в ответ включается только подсерия $x = 7\pi + 24\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

3. Серединный перпендикуляр к боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке L, а продолжение основания – в точке K. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что треугольники ALC и KBL равновелики.

Ответ. $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.



Решение. Пусть M и N – середины отрезков AC и BC соответственно, $\alpha = \angle ABC$. Тогда MN – средняя линия треугольника ABC, $MN \parallel AB$. Поскольку точка K лежит на серединном перпендикуляре в AC, отрезки KA и KC равны, откуда $\angle KAC = \angle KCA = \alpha$. В силу условия

$$2 = \frac{S_{KBL}}{S_{AML}} = \frac{KL \cdot LB}{LM \cdot AL} \iff \frac{LB}{AL} = 2 \cdot \frac{LM}{KL}.$$

Так как KL – биссектриса треугольника AKB, мы получим $\frac{LB}{AL} = \frac{KB}{AK}$. Кроме того, $2 \cdot \frac{LM}{KL} = 2 \cdot \frac{BN}{KB} = \frac{BC}{KB}$.

Тогда из этих двух соотношений

$$\frac{KB}{CK} = \frac{KB}{AK} = \frac{LB}{AL} = 2 \cdot \frac{LM}{KL} = \frac{BC}{KB} \implies KB^2 = BC \cdot CK.$$

Треугольники ABC и KAC подобны по двум углам, откуда

$$\frac{CK}{AB} = \frac{AB}{BC} \implies AB^2 = BC \cdot CK.$$

Поэтому $KB = AB$, то есть треугольник ABK равнобедренный. Заметим, что

$$\angle BAK = \angle CAK - \angle CAB = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ, \quad \angle AKB = 180^\circ - 2\alpha.$$

Мы получаем $3\alpha - 180^\circ = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\alpha = 72^\circ$. Таким образом, углы ABC и ACB равны 72°, а угол BAC равен 36°.

4. Найдите количество пар натуральных чисел $(a; b)$, каждое из которых меньше миллиона, удовлетворяющих равенству

$$\text{НОК}(a, b+1) = \text{НОК}(b, a+3).$$

Ответ. 111111 решений.

Решение. Заметим, что $b(a+3)$ делится на $\text{НОК}(b, a+3)$, который равен $\text{НОК}(a, b+1)$ и в свою очередь делится на a. Также $a(b+1)$ делится на НОК(a, b+1)=НОК(b,a+3), а последнее выражение делится на b, поэтому a делится на b. Значит, либо $a = b$, либо $a = 3b$. В первом случае получаем

$$a(a+1) = \text{НОК}(a, a+3),$$

следовательно, $a(a+1) = (a+3)(a-2) + 6$ делится на $a+3$. Таким образом, $a+3$ есть делитель 6, откуда $a = 3$, $b = 3$ – увы, эта пара чисел не удовлетворяет уравнению. Во втором случае, получаем

$$\text{НОК}(3b, b+1) = \text{НОК}(b, 3(b+1)).$$

Если b кратно 3, то левая часть делится на большую степень тройки, чем правая. Если $b+1$ кратно 3, то правая часть делится на большую степень тройки, чес левая. Если же b дает при делении на 3 остаток 1, то обе части равны $3a(a+1)$. Итак, требуется найти количество натуральных чисел $b = 3x + 1$, таких что $3b < 1000000$. Их ровно 111111.

5. Найдите все возможные размеры таблицы $n \times m$ $(m \geq n \geq 3)$, в клетки которой можно вписать какие-то числа (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма чисел в каждом квадрате 3×3 была положительной.

Ответ. $(3; m)$, где m – любое натуральное число, не меньшее 3.

Решение. Пусть $n \geq 4$, тогда, если в таблицу $n \times m$ $(m \geq n \geq 4)$ можно вписать числа так, как требуется в условии задачи, то тогда, в частности, и любой квадрат 4×4 этой таблицы также удовлетворяет всем условиям задачи. Но в таблицу $4 \times$ так, как требуется числа вписать нельзя. Докажем это.

Предположим, что вписать числа в клетки таблицы так, как требуется в условии задачи можно. Рассмотрим все квадраты 2×2 в этой таблице. Их количество равно 9. Для каждого такого квадрата подсчитаем сумму чисел в нем (по условию она отрицательная) и сложим все эти суммы. Полученный результат (обозначим его через S_1) является отрицательным числом и в действительности равен сумме всех чисел таблицы, но некоторые из них присутствуют в этой сумме несколько раз. А именно, столько раз, каково количество различных квадратов 2×2, содержащих клетку, с записанным в ней числом. Эти количества, т. е. кратности вхождения чисел таблицы в сумму S_1 указаны на рисунке.

1	2	2	1
2	4	4	2
2	4	4	2
1	2	2	1

Теперь рассмотрим все квадраты 3×3 в данной таблице. Их количество равно 4. Для каждого такого квадрата также подсчитаем сумму чисел в нем (по условию она положительная) и сложим все эти суммы. Полученный результат (обозначим его через S_2) является положительным числом и в действительности равен сумме всех чисел таблицы, но некоторые из них присутствуют в этой сумме несколько раз. А именно, такое количество раз, каково количество различных квадратов 3×3, которые содержат клетку, в которой записано данное число. Оказывается, эти количества, т. е. кратности вхождения чисел таблицы в сумму S_2 такие же, как и в сумму S_1 (указаны на том же рисунке). Следовательно, суммы S_1 и S_2 равны, как суммы, состоящие из одинаковых слагаемых с одинаковыми кратностями. Но этого не может быть, так как $S_1 < 0$, а $S_2 > 0$. Полученное противоречие означает, что вписать числа в клетки таблицы так, как требуется в условии задачи, нельзя.

Пусть теперь $n = 3$. В таблицу $3 \times m$ при любом $m \geq 3$ можно вписать числа с соблюдением условий задачи. Например, так, как это изображено на рисунке ниже.

3	3	3	3	3	3	…
3	-10	-10	-10	3	-10	…
3	3	3	3	3	3	…

В этой таблице во всех квадратах 2×2 сумма чисел равна -1, т.е. отрицательна. И в таблице присутствуют квадраты 3×3 только двух видов:

3	3	3
3	-10	3
3	3	3

3	3	3
-10	3	-10
3	3	3

В каждом из этих квадратов сумма чисел положительна: или 14, или 1.

Красноярский математический центр СФУ