ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
9 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Множество чисел от 1 до 20 разбили на 10 подмножеств, состоящих из двух чисел. После этого в каждом подмножестве нашли суммы чисел $S_1, S_2, \dots, S_{10}$. Какое наибольшее количество чисел из $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ может быть кратно 11?

Ответ. 9.

Решение. Если бы все 10 пар чисел давали суммы, делящиеся на 11, то и сумма всех этих сумм, т.е. сумма всех 20 чисел, делилась бы на 11. Однако число $1+2+3+\dots+20=210$ не делится на 11. Значит, таких пар не больше 9. С другой стороны, пример $2+20=3+19=4+18=\dots=10+12=22$ показывает, как получить 9 искомых пар (последняя сумма $1+11$ равна 12 – числу не делящемуся на 11). Существуют и другие разбиения, в которых суммы в девяти парах делятся на 11.

Комментарий. *Предложена реализация – 8 баллов, сделана оценка – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 баллов.*

2. Бельчата из трёх разных лесов собрались на встречу. После встречи бельчонок из хвойного леса сказал: «Теперь я знаю в два раза больше бельчат, чем вчера». Бельчонок из лиственного леса сказал: «Теперь я знаю в три раза больше бельчат, чем вчера». Бельчонок из елового леса сказал: «Теперь я знаю в четыре раза больше бельчат, чем вчера». Докажите, что кто-то из бельчат обсчитался. Предполагается, что до встречи каждый бельчонок знал бельчат только из своего леса, а после – из всех трёх лесов.

Решение. Пусть в трёх лесах суммарно N бельчат. Если первый бельчонок до встречи знал x бельчат, то после встречи он стал знать $2x$ бельчат, т.е. $2x+1=N$. Значит, в первом лесу $x+1=\frac{N-1}{2}+1$ бельчат. Аналогично, во втором лесу $\frac{N-1}{3}+1$ бельчат, в третьем – $\frac{N-1}{4}+1$ бельчат. Но тогда во всех трёх лесах:

$$\frac{N-1}{2}+1+\frac{N-1}{3}+1+\frac{N-1}{4}+1=\frac{13N}{12}+\frac{23}{12}>N$$

бельчат. Значит, кто-то из бельчат обсчитался.

3. На стороне KN параллелограмма $KLMN$ выбрана точка P, а на продолжении этой стороны за точку N выбрана точка Q, причем $KP=PQ$. Прямые LP и MN пересекаются в точке T, а прямые LQ и MN – в точке R. Докажите, что $MR=RT$.

Решение. Проведем через точку R прямую, параллельную KN. Пусть она пересекает KL и PL в точках X и Y соответственно. Так как $KP=PQ$, то по теореме Фалеса $RY=YX$. Заметим, что $LMRX$ – параллелограмм, значит, $LM=RX=2RY$. В треугольнике TLM отрезок RY параллелен основанию LM и равен его половине, следовательно, он является средней линией. Стало быть, $TR=RM$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. В последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ известно, что $x_1=17,\ x_2=83$, и все члены при $n\geq 3$ удовлетворяют соотношению $x_{n+1}=x_{n-1}-\frac{1}{x_n}$. Какое максимальное количество членов может быть в этой последовательности?

Ответ. 1413.

Решение. Если $x_n=0$, то x_{n+1} и последующие члены не определены, и в последовательности будет максимум n членов; если же x_n не обращается в 0 ни при каком n, последовательность будет бесконечна. Пусть $x_n=0$. Тогда $x_n=x_{n-2}-\frac{1}{x_{n-1}}=0$, и $x_{n-1}\cdot x_{n-2}=1$. Но $x_{n-1}\cdot x_{n-2}=x_{n-2}\cdot x_{n-3}-1$, значит, $x_{n-2}\cdot x_{n-3}=2$. Продолжая цепочку равенств, получим: $x_3\cdot x_2=n-3$, $x_2\cdot x_1=n-2$. По условию $x_2\cdot x_1=83\cdot 17=1411$, откуда $n=1411+2=1413$.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

5. Найдите сумму всех натуральных делителей числа $N=3^3\cdot 4^4\cdot 25^3$.

Ответ. $(2^9-1)\cdot\frac{(3^4-1)}{2}\cdot\frac{(5^7-1)}{4}$.

Решение. Представим N в виде $2^8\cdot 3^3\cdot 5^6$. Сумма делителей вида $2^0\cdot 3^0\cdot 5^p$, $p=1,2,\dots,6$ равна $1+5+5^2+\dots+5^6=\frac{5^7-1}{4}=S_1$. Сумма делителей вида $2^0\cdot 3^1\cdot 5^p$, $p=1,2,\dots,6$ равна $3\cdot\frac{5^7-1}{4}=3s_1$, сумма делителей вида $2^0\cdot 3^2\cdot 5^p$, $p=1,2,\dots,6$ равна $3^2\cdot\frac{5^7-1}{4}=3^2 s_1$ и т.д., сумма делителей вида $2^0\cdot 3^q\cdot 5^p$, $p=1,2,\dots,6$; $q=1,2,3$ равна

$$(3^1+3^2+3^3)\frac{5^7-1}{4}=(1+3^1+3^2+3^3)\frac{5^7-1}{4}-S_1=S_2 \implies S_1+S_2=\frac{3^4-1}{2}\cdot\frac{5^7-1}{4}.$$

Наконец, сумма делителей вида $2^1\cdot 3^q\cdot 5^p$, $p=1,2,\dots,6$; $q=1,2,3$ равна $2(S_1+S_2)$, сумма делителей вида $2^2\cdot 3^q\cdot 5^p$, $p=1,2,\dots,6$; $q=1,2,3$ равна $2^2(S_1+S_2)$ и т.д., сумма делителей вида $2^r\cdot 3^q\cdot 5^p$, $p=1,2,\dots,6$; $q=1,2,3$; $r=1,2,\dots,8$ равна

$$(2+2^2+\dots+2^8)(S_1+S_2)=(1+2+2^2+\dots+2^8)(S_1+S_2)-(S_1+S_2)=S_3.$$

Откуда сумма всех делителей $\mathrm{S}_1+S_2+S_3=(2^9-1)\cdot\frac{3^4-1}{2}\cdot\frac{5^7-1}{4}$.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Использование готовой формулы суммы делителей – не более 8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Вариант 2

1. Числа a, b, c удовлетворяют равенствам $a(a+1)=b(b+1)=c(c+1)$. Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a)=0$.

Решение. Из первого равенства получаем, что $a^2+a-b^2-b=0$, т.е. $(a-b)(a+b+1)=0$. Аналогично, $(a-c)(a+c+1)=0$. Если хотя бы одно из выражений $a-b$ или $c-a$ обращается в ноль, то произведение $(a-b)(b-c)(c-a)$ равно нулю. В противном случае получаем $a+b+1=0$ и $a+c+1=0$, а значит, $b=c$, и тогда произведение $(a-b)(b-c)(c-a)$ вновь обращается в ноль.

Комментарий. *При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 баллов.*

2. На доске нарисована прямоугольная таблица 5×8, в клетки которой Вася хочет расставить числа 3 и 1 так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке сумма чисел делилась на 7. Удастся ли ему это сделать?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Заметим, что сумма чисел в любой строке не меньше 8 и не больше $3\cdot 8=24$. Кроме того, она четна (ибо складывается четное количество нечетных чисел) и по условию делится на 7. Следовательно, сумма чисел в каждой строке равна 14. Тогда сумма чисел во всей таблице равна $14\cdot 5 = 70$. Аналогично устанавливаем, что сумма чисел в любом столбце не меньше 5 и не больше $3\cdot 5=15$, нечетна и делится на 7. Значит, в каждом столбце сумма чисел равна 7. Таким образом, сумма чисел в таблице равна $7\cdot 8=56<70$. Противоречие.

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B пересекает отрезок AD в точке M. Известно, что $AB=4$, $BC=9$ и $CD=3$. В каком отношении точка M делит отрезок AD?

Ответ. $DM{:}MA=3{:}2$.

Решение. Продолжим BM до пересечения с CD в точке E. Тогда $\angle CBE=\angle EBA$, так как BM – биссектриса; $\angle EBA=\angle BEC$ как внутренние накрест лежащие углы; значит, $\angle CBE=\angle BEC$ и треугольник BCE – равнобедренный. Тогда $CE=CB=9$, значит, $DE=6$. Треугольники ABM и DME подобны (по трем углам). Значит, $DM{:}MA=DE{:}AB=6{:}4=3{:}2$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2y^3=3^{15}\cdot 20^{20}\cdot 5^{15}$?

Ответ. 126.

Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа x и y можно записать как $x=3^\alpha\cdot 5^\beta\cdot 2^\gamma$, $y=3^\lambda\cdot 5^\mu\cdot 2^\nu$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид $3^{2\alpha+3\lambda}\cdot 5^{2\beta+3\mu}\cdot 2^{2\gamma+3\nu}=3^{15}\cdot 5^{35}\cdot 2^{40}$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}2\alpha+3\lambda=15,\\ 2\beta+3\mu=35,\\ 2\gamma+3\nu=40.\end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\lambda\in\{1;3;5\}$, $\mu\in\{3;5;7;9;11\}$, $\nu\in\{0;2;4;6;8;10;12\}$. Получаем три вариант для первого уравнения, шесть вариантов для второго и семь для третьего. В итоге $3\cdot 6\cdot 7=126$ решений.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

5. В последовательности $\{x_n\}$ $x_1=1,\ x_2=\frac{3}{5}$, и все члены при $n\geq 3$ удовлетворяют соотношению $\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{x_{n-2}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$. Найдите x_{100}.

Ответ. $^1/_{67}$.

Решение. Найдем $x_3={}^3/_7, x_4={}^3/_9$. Заметим, что разности между обратными величинами найденных членов постоянны: $\frac{1}{x_4}-\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}={}^2/_3$. Докажем, что последовательность $\{^1/_{x_n}\}$ является арифметической прогрессией. Действительно,
$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{2x_{n-2}-x_{n-1}}{x_{n-1}x_{n-2}}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{2}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}}$.
Таким образом, $\{^1/_{x_n}\}$ – арифметическая прогрессия с разностью $^2/_3$, и $^1/_{x_{100}}=1+{}^2/_3\cdot 99=67$. Тогда $x_{100}={}^1/_{67}$.

Замечание. Можно методом математической индукции доказать формулу $x_n=\frac{3}{2n+1}$.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Если формула используется без доказательства – не более 6 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Вариант 3

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенствам $z(z+1)=x(x+1)=y(y+1)$. Докажите, что $(x-y)(y-z)(z-x)=0$.

Решение. Из первого равенства получаем, что $x^2+x-y^2-y=0$, т.е. $(x-y)(x+y+1)=0$. Аналогично, $(x-z)(x+z+1)=0$. Если хотя бы одно из выражений $x-y$ или $z-x$ обращается в ноль, то произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ равно нулю. В противном случае получаем $x+y+1=0$ и $x+z+1=0$, а значит, $y=z$, и тогда произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ вновь обращается в ноль.

Комментарий. *При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 баллов*

2. На доске нарисована прямоугольная таблица 7×10, в клетки которой Вася хочет расставить числа 3 и 1 так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке сумма чисел делилась на 9. Удастся ли ему это сделать?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Заметим, что сумма чисел в любой строке не меньше 10 и не больше $3\cdot 10=30$. Кроме того, она четна (ибо складывается четное количество нечетных чисел) и по условию делится на 9. Следовательно, сумма чисел в каждой строке

Красноярский математический центр

равна 18. Тогда сумма чисел во всей таблице равна $18 \cdot 7 = 126$. Аналогично устанавливаем, что сумма чисел в любом столбце не меньше 7 и не больше $3 \cdot 7 = 21$, нечетна и делится на 9. Значит, в каждом столбце сумма чисел равна 9. Таким образом, сумма чисел в таблице равна $9 \cdot 10 = 90 < 126$. Противоречие.

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла D пересекает отрезок AB в точке M. Известно, что $BC = 5$, $CD = 7$ и $DA = 6$. В каком отношении точка M делит отрезок AB?
Ответ. $BM:MA = 3:1$.
Решение. Продолжим DM до пересечения с CB в точке E. Тогда $\angle CDE = \angle ADE$, так как DM – биссектриса; $\angle CED = \angle EDA$ как внутренние накрест лежащие углы; значит, $\angle CDE = \angle CED$ и треугольник ECD – равнобедренный. Тогда $CE = CD = 7$, значит, $BE = 2$. Треугольники ADM и EBM подобны (по трем углам). Значит, $AM:BM = AD:EB = 6:2 = 3:1$.
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности –16-18 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 6-8 баллов.*

4. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение
$$x^3y^5 = 3^{50} \cdot 6^{50} \cdot 10^{33}?$$
Ответ. 126.
Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа x и y можно записать как $x = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 2^\gamma$, $y = 3^\lambda \cdot 5^\mu \cdot 2^\nu$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид $3^{3\alpha+5\lambda} \cdot 5^{3\beta+5\mu} \cdot 2^{3\gamma+5\nu} = 3^{100} \cdot 5^{33} \cdot 2^{83}$, что равносильно системе уравнений
$$\begin{cases} 3\alpha + 5\lambda = 100, \\ 3\beta + 5\mu = 33, \\ 3\gamma + 5\nu = 83. \end{cases}$$
Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\lambda \in \{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20\}$, $\mu \in \{0;\ 3;\ 6\}$, $\nu \in \{1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13; 16\}$. Получаем семь вариантов для первого уравнения, три варианта для второго и шесть для третьего. В итоге $7 \cdot 3 \cdot 6 = 126$ решений.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

5. В последовательности $\{x_n\}$ $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{5}{8}$, и все члены при $n \geq 3$ удовлетворяют соотношению $x_{n-1}(x_n + x_{n-2}) = 2x_n x_{n-2}$. Найдите x_{101}.
Ответ. $1/_{61}$.
Решение. Найдем $x_3 = 5/_{11}$, $x_4 = 5/_{14}$. Заметим, что разности между обратными величинами найденных членов постоянны: $\frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = 3/_5$. Докажем, что последовательность $\{1/_{x_n}\}$ является арифметической прогрессией. Действительно,
$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{2x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-1}x_{n-2}} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}$.

Таким образом, $\{1/_{x_n}\}$ – арифметическая прогрессия с разностью $3/_5$, и $1/_{x_{101}} = 1 + 3/_5 \cdot 100 = 61$. Тогда $x_{101} = 1/_{61}$.
Замечание. Можно методом математической индукции доказать формулу $x_n = \frac{5}{3n+2}$.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-16 баллов. Если формула используется без доказательства – не более 6 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

Красноярский математический центр