ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
7 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

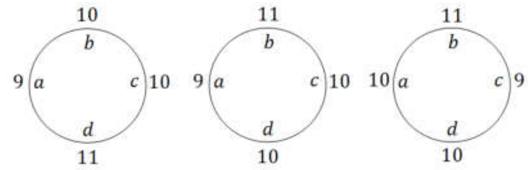
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

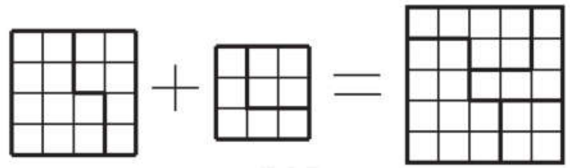
1. Вася утверждает, что существует такое четырёхзначное число $\overline{abcd}$, в записи которого используются различные ненулевые цифры, что сумма $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ делится на 101. Прав ли Вася?
Ответ. Прав.
Решение. Подойдет, например, число 1234. Действительно, $1234 + 4321 = 5555 = 101 \cdot 55$. Можно заметить, что число $\overline{abcd}$ с различными ненулевыми цифрами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда $a + d = b + c$.
Комментарий. *Полное правильное решение (верный пример) – 20 баллов.*

2. По кругу лежат 4 одинаковых с виду ореха, два из которых весят 9 г и 11 г, а два других весят по 10 г каждый. Известно, что орехи весами 9 г и 11 г соседние. Требуется гарантированно определить вес каждого ореха. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?
Ответ. Два.
Решение. Пусть по кругу подряд лежат орехи a, b, c, d. Первым взвешиванием сравним a и b. Если $a = b$, то эти орехи по 10 г, и, сравнивая c и d вторым взвешиванием, получаем ответ. Пусть a и b не равны, скажем $a < b$. Тогда это либо орехи 9 г и 10 г, либо 9 г и 11 г, либо 10 г и 11 г. Поскольку орехи массами 9 г и 11 г лежат рядом, для каждого из трёх вариантов получаем однозначное расположение орехов:



Заметим, что сумма $a + b$ в первом варианте меньше, чем $c + d$, во втором – равна, а в третьем – больше. Поэтому, сравнив вторым взвешиванием орехи a и b на одной чаше с орехами c и d на второй чаше, находим ответ. За одно взвешивание мы можем сравнить два ореха или две пары орехов: в первом случае мы не различим эти орехи, если они разного веса, а во втором – не узнаем ни один из орехов, если пары дадут один и тот же вес.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 4 балла.*

3. На клетчатой бумаге нарисованы два квадрата размерами 3×3 и 4×4 клеток. Придумайте, как разрезать по линиям сетки каждый из них на две части так, чтобы из полученных частей складывался квадрат.
Решение. См. рисунок.



Комментарий. *Верный ответ без объяснений – 20 баллов.*

4. Дима и Лена, ни на что не отвлекаясь, начали одновременно есть чипсы из одной большой пачки (каждый со своей постоянной скоростью). Если бы Дима ел со скоростью Лены, то чипсы бы они ели на 3 минуты дольше, а если бы Лена ела со скоростью Димы, то чипсы они бы съели на 2 минуты быстрее. За какое время Дима и Лена съели все чипсы?
Ответ. 12 минут.
Решение. Пусть Дима ест чипсы со скоростью d чипсов в минуту, Лена – со скоростью b чипсов в минуту, а время, за которое Дима и Лена съедят все чипсы составляет t минут. (Все переменные – положительные, не обязательно целые числа.) Тогда имеем систему:
$$\begin{cases} (d+b)\cdot t = 1, \\ (b+b)\cdot(t+3) = 1, \\ (d+d)\cdot(t-2) = 1. \end{cases}$$
Сложим второе уравнение с третьим, получим $2(b+d)t + 6b - 4d = 2$, откуда, учитывая равенство $(b+d)t = 1$, получаем $d = 1{,}5b$. Теперь первое уравнение принимает вид $2{,}5bt = 1$, а второе (после раскрытия скобок) $2bt + 6b = 1$, откуда $\frac{2}{2{,}5} + 6b = 1$ и $b = \frac{1}{30}$. Тогда $t = \frac{1}{2{,}5b} = 12$.
Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

5. В турнире первокурсников по футболу участвовало 4 команды A, B, C, D. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. Места, занятые командами, распределились в следующем порядке: A, B, C, D. При этом количества очков у команд,

занявших соседние места, отличаются ровно на 1. Сколько очков набрала каждая из команд? Приведите пример такого турнира. В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

Ответ. $5, 4, 3, 2$ очков.

Решение. Всего на турнире было сыграно $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ матчей. В каждой игре разыгрывалось 2 очка (если игра закончилась вничью) или 3 очка (если игра завершилась победой одной из команд). Таким образом, сумма очков, набранных командами, находится в пределах от 12 до 18. Пусть команда D набрала n очков, тогда команды C, B, A набрали соответственно $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$ очка. Сумма очков равна $4n + 6$. Эта сумма должна быть больше 12 (все игры не могли закончиться вничью, иначе все команды набрали бы поровну очков), но меньше 18 (если все игры закончились победой одной из команд, то количество очков у каждой команды было бы кратно 3, что противоречит условию). Имеем: $12 < 4n + 6 < 18$, откуда $1{,}5n < n < 3$, откуда $n = 2$. Итак, команды A, B, C, D набрали соответственно $5, 4, 3, 2$ очков. Ниже приведен пример такого турнира:

					Очки
A	***	3	1	1	5
B	0	***	1	3	4
C	1	1	***	1	3
D	1	0	1	***	2

Комментарий. *Предложена реализация – 8 баллов, сделана оценка – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Правильный ответ без обоснования – 2 балла.*

Вариант 2

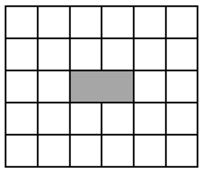
1. Расположите в ряд 11 орехов, каждый из которых либо арахис (А), либо кешью (К), либо миндаль (М). Причем из любых трех идущих подряд орехов должен быть хотя бы один арахис, из любых четырех идущих подряд орехов должен быть хотя бы один кешью, а миндаля должно быть больше половины. Какое количество арахиса получилось в ряду?

Ответ. 3 ореха арахиса.

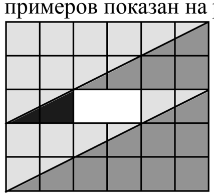
Решение. Орехи расположены только так: ММАКМАМКАММ. Можно выделить три непересекающиеся тройки орехов, в каждой из них хотя бы один арахис. Значит, арахиса не меньше трёх. Можно выделить две непересекающиеся четвёрки орехов, в каждой из них хотя бы один кешью. Значит, кешью не меньше двух. Из условия следует, что миндаля не меньше шести. Так как $3 + 2 + 6 = 11$, то все сделанные ограничения должны обращаться в равенства. В частности, в ряду 3 ореха арахиса.

Комментарий. *Полное правильное решение (верный пример) – 20 баллов.*

2. Торт имеет форму прямоугольника 6×5, изображенную на рисунке, с вырезанным прямоугольником 2×1. Можно ли разделить такой торт на 6 треугольных кусков?



Ответ. Можно, один из примеров показан на рисунке.



Комментарий. *Верный ответ без объяснений – 20 баллов.*

3. Бельчата Вася и Петя бегут друг другу навстречу: Вася из «тихого» леса в «шумный» лес, а Петя из «шумного» леса в «тихий» лес. Они встретились, когда Вася пробежал 1,2 км и еще треть оставшегося ему до «шумного» леса пути, а Петя пробежал 2,1 км и четверть оставшегося ему до «тихого» леса пути. Какое расстояние между «тихим» и «шумным» лесом?

Ответ. 5,7 км.

Решение. Пусть расстояние от «тихого» до «шумного» леса равно S км. После того, как Вася пробежал 1,2 км, ему осталось пробежать $S - 1{,}2$ км, следовательно, к моменту встречи с Петей он пробежал $1{,}2 + \frac{1}{3}(S - 1{,}2)$ км. Аналогично, Петя к моменту их встречи пробежал $2{,}1 + \frac{1}{4}(S - 2{,}1)$ км. Получаем уравнение:

$$1{,}2 + \frac{1}{3}(S - 1{,}2) + 2{,}1 + \frac{1}{4}(S - 2{,}1) = S.$$

Решаем его, находим:

$$\frac{1}{3}S + \frac{1}{4}S + 3{,}3 - 0{,}4 - \frac{2{,}1}{4} = S,$$

или

$$S - \frac{7}{12}S = \frac{9{,}5}{4}, \quad \frac{5}{12}S = \frac{9{,}5}{4}, \quad S = \frac{9{,}5 \cdot 12}{4 \cdot 5} = 5{,}7.$$

Следовательно, искомое расстояние есть $S = 5{,}7$ км.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 4 балла.*

4. В наборе имеются 200 гирек весами 1 г, 2 г, $\dots$, 100 г и 1700 г, 1701 г, $\dots$, 1799 г. Можно ли разложить эти гирьки в 18 коробок так, что вес коробок после раскладывания будет одинаковым?

Ответ. Нельзя.

Решение. Суммарный вес гирек равен

$$(1 + 1799) + (2 + 1798) + \dots + (100 + 1700) = 100 \cdot 1800 = 18 \cdot 10000.$$

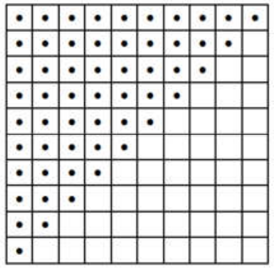
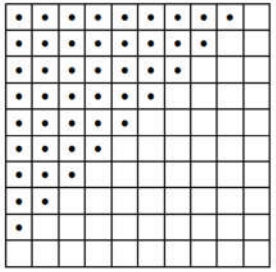
Таким образом, каждая коробка должна весить 10000 г. Назовем гирьки, которые весят не меньше килограмма, тяжелыми. Очевидно, любые 6 тяжелых гирек весят больше $6 \cdot 1700 > 10000$ г. Значит, в каждую коробку входит не более 5 тяжелых гирек. Поэтому при формировании 18 коробок мы не сможем использовать больше $18 \cdot 5 = 90$ тяжелых гирек, то есть разложить все гирьки по коробкам не удастся.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

5. В некоторые клетки квадратной доски 10×10 положили по одной фишке, причем на всех вертикалях лежит разное (возможно, нулевое) число фишек, и на всех горизонталях лежит разное (возможно, нулевое) число фишек. Сколько всего фишек может быть на доске? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ. 45 или 55 фишек.

Решение. Если на какой-то горизонтали лежит 10 фишек, то это значит, что на каждой вертикали есть хотя бы одна фишка. Тогда количества фишек на вертикалях равны 1, 2, …, 10, и всего фишек 55. Если же ни на какой горизонтали 10 фишек нет, то количества фишек на горизонталях равны 0, 1, …, 9, и всего фишек 45. Примеры расстановки приведены на рисунках ниже.

Комментарий. За каждый пример по 4 балла, доказано, что других вариантов нет – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Правильный ответ без обоснования – 2 балла.

Вариант 3

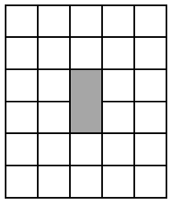
1. Расположите в ряд 13 орехов, каждый из которых либо арахис (А), либо кешью (К), либо миндаль (М). Причем из любых трех идущих подряд орехов должен быть хотя бы один арахис, из любых пяти идущих подряд орехов должен быть хотя бы один кешью, а миндаля должно быть больше половины. Какое количество арахиса получилось в ряду?

Ответ. 4 ореха арахиса.

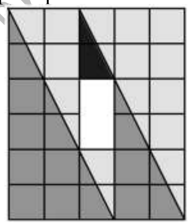
Решение. Орехи расположены только так: ММАМКАММАКМАМ. Можно выделить четыре непересекающиеся тройки орехов, в каждой из них хотя бы один арахис. Значит, арахиса не меньше четырёх. Можно выделить две непересекающиеся пятерки орехов, в каждой из них хотя бы один кешью. Значит, кешью не меньше двух. Из условия следует, что миндаля не меньше семи. Так как $4+2+7=13$, то все сделанные ограничения должны обращаться в равенства. В частности, в ряду 4 ореха арахиса.

Комментарий. *Полное правильное решение (верный пример) – 20 баллов.*

2. Торт имеет форму прямоугольника 5×6, изображенную на рисунке, с вырезанным прямоугольником 2×1. Можно ли разделить такой торт на 6 треугольных кусков?



Ответ. Можно, один из примеров показан на рисунке.



Комментарий. *Верный ответ без объяснений – 20 баллов.*

3. Бельчата Вася и Петя бегут друг другу навстречу: Вася из «тихого» леса в «шумный» лес, а Петя из «шумного» леса в «тихий» лес. Они встретились, когда Вася пробежал 1,8 км и еще треть оставшегося ему до «шумного» леса пути, а Петя пробежал 2,4 км и четверть оставшегося ему до «тихого» леса пути. Какое расстояние между «тихим» и «шумным» лесом?

Ответ. 7,2 км.

Решение. Пусть расстояние от «тихого» до «шумного» леса равно S км. После того, как Вася пробежал 1,8 км, ему осталось пробежать $S-1{,}8$ км, следовательно, к моменту встречи с Петей он пробежал $1{,}8+\frac{1}{3}(S-1{,}8)$ км. Аналогично, Петя к моменту их встречи пробежал $2{,}4+\frac{1}{4}(S-2{,}4)$ км. Получаем уравнение:

$$1{,}8+\frac{1}{3}(S-1{,}8)+2{,}4+\frac{1}{4}(S-2{,}4)=S.$$

Решаем его, находим:

$$\frac{1}{3}S+\frac{1}{4}S+1{,}2+2{,}4-0{,}6=S,$$

или

$$S-\frac{7}{12}S=3,\quad \frac{5}{12}S=3,\quad S=\frac{3\cdot12}{5}=7{,}2.$$

Следовательно, искомое расстояние есть $S=7{,}2$ км.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 4 балла.*

4. В наборе имеются 200 гирек весами 1 г, 2 г, …, 100 г и 1300 г, 1301 г, …, 1399 г. Можно ли разложить эти гирьки в 14 коробок так, что вес коробок после раскладывания будет одинаковым?

Ответ. Нельзя.

Решение. Суммарный вес гирек равен

$$(1+1399)+(2+1398)+\dots+(100+1300)=100\cdot1400=14\cdot10000.$$

Таким образом, каждая коробка должна весить 10000 г. Назовем гирьки, которые весят не меньше килограмма, тяжелыми. Очевидно, любые 8 тяжелых гирек весят больше $8\cdot1300>10000$ г.

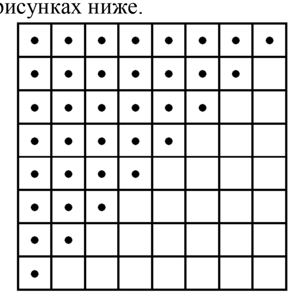
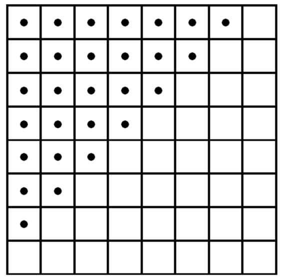
Значит, в каждую коробку входит не более 7 тяжелых гирек. Поэтому при формировании 14 коробок мы не сможем использовать больше $14\cdot7=98$ тяжелых гирек, то есть разложить все гирьки по коробкам не удастся.

Комментарий. *Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

5. В некоторые клетки квадратной доски 8×8 положили по одной фишке, причем на всех вертикалях лежит разное (возможно, нулевое) число фишек, и на всех горизонталях лежит разное (возможно, нулевое) число фишек. Сколько всего фишек может быть на доске? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ. 28 или 36 фишек.

Решение. Если на какой-то горизонтали лежит 8 фишек, то это значит, что на каждой вертикали есть хотя бы одна фишка. Тогда количества фишек на вертикалях равны 1, 2, …, 8, и всего фишек 36. Если же ни на какой горизонтали 8 фишек нет, то количества фишек на горизонталях равны 0, 1, …, 7, и всего фишек 28. Примеры расстановки приведены на рисунках ниже.

Комментарий. *За каждый пример по 4 балла, доказано, что других вариантов нет – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Правильный ответ без обоснования – 2 балла.*