ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Существуют ли такие 5 чисел, сумма которых ровно в 10 раз больше суммы квадратов этих чисел?

Ответ. Да.

Решение. Пример. Возьмём числа 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1. Их сумма равна 0,5, а сумма квадратов равна $0{,}01 \cdot 5 = 0{,}05$.

Комментарий. *Приведён верный пример – 20 баллов. Построен пример с числами 0,1 и 0 – 15 баллов. Найдено подходящее число 0,1, но ответ неверный – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 2 балла. Решение начато, без существенного продвижения – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

2. Аня записывает в тетради четырёхзначные числа, а Тоня записывает пятизначные числа. В каждом числе Тони и Ани нет нуля и нет одинаковых цифр, и цифры расположены в порядке убывания. Сколько разных чисел может написать Аня, и сколько – Тоня?

Ответ. Каждая может написать 126 чисел.

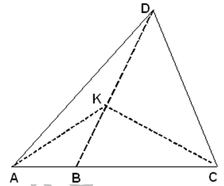
Решение. Пусть, когда Аня использует какие-то 4 цифры из $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, то Тоня использует остальные 5 цифр. Каждый набор различных цифр можно расположить в порядке убывания единственным образом. Значит, чисел у них будет поровну. Число четвёрок цифр равно $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. Каждую четвёрку цифр можно переставить числом способов равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, и только один раз цифры будут расположены в порядке убывания. Поэтому всего Аня может написать $3024/_{24} = 126$ чисел. Столько же чисел будет и у Тони.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Верно найдено одно из чисел – 15 баллов. Каждый ответ (верный) показан как сумма чисел, расчёты и обоснования не приведены – 10 баллов. Не учтено число перестановок – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решена задача с изменёнными условиями – 2 балла.*

3. Бельчата находятся на одной прямой в точках A, B, C, причём средний бельчонок B в два раза ближе к бельчонку A, чем к бельчонку C. Все они смотрят в точку D (там белый гриб). Отрезок между бельчонком A и точкой D образует угол 45°с прямой, на которой сидят бельчата, а отрезок между бельчонком B и точкой D образует угол 60° с этой прямой. Какой угол образует с прямой, на которой сидят бельчата, отрезок между бельчонком C и точкой D?

Ответ. 75° или 15°.

Решение. Пусть $\angle DBC = 60°$. Опустим перпендикуляр CK из точки C на отрезокBD (см. рисунок), и проведём отрезок AK. Треугольник BCK – прямоугольный с углом 60°, значит, $KB = \frac{BC}{2}$. Но и $AB = \frac{BC}{2}$, то есть треугольникABK – равнобедренный. Поскольку $\angle ABK = 120°$, то $\angle BAK = \angle BKA = 30°$. Тогда $\angle DAK = 45° - 30° = 15°$, но и $\angle ADB = 180° - 120° - 45° = 15°$, то есть AKD – равнобедренный треугольник, и $AK = DK$. AKC – тоже равнобедренный (углы при основании равны 30°), и $AK = KC$, поэтому $KC = KD$. ТреугольникCKD – прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle KCD = 45°$, а $\angle ACD = 45° + 30° = 75°$. В случае, когда $\angle DBA = 60°$, решение аналогично.



Комментарий. *Верное обоснованное решение хотя бы для одного значения угла – 20 баллов. При верном ответе угол найден подбором, и не показано, что других значений не может быть – 5 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 2 балла. Решение только начато – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

4. В классе учатся 28 человек: отличники, троечники и двоечники. Всем ученикам было задано по два вопроса: «Отличников больше, чем двоечников?», «Троечников больше чем двоечников?». На каждый вопрос ответ «Да» дала ровно половина учеников, остальные сказали «Нет». Отличники на все вопросы отвечают правильно, двоечники всегда ошибаются. Троечник может на первый вопрос ответить верно, тогда на второй вопрос он отвечает неверно. Если же троечник на первый вопрос отвечает неверно, тогда на второй вопрос он отвечает верно. Что ответил на первый вопрос отличник?

Ответ. «Нет».

Решение. Каждый раз ответов «Да» и «Нет» было поровну, и каждый раз один из ответов был правдой. Оба раз правду сказали по 14учеников – все отличники и некоторые троечники. Поэтому в первый раз правду сказали столько же троечников, сколько и во второй. Значит, в первый раз сказавших правду и солгавших троечников было поровну. Правду сказали отличники и сказавшие правду троечники, а солгали двоечники и остальные троечники. А поскольку правду и ложь в первый раз сказало одинаковое количество учеников, отличников и двоечников было поровну. Отличник ответил «нет».

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В доказательстве есть недочёты – 15 баллов. Приведены рассуждения, но чёткого решения нет – 5 баллов. При верном ответе количества ответивших найдены подбором, и не показано, что других значений не может быть – 10 баллов. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 2 балла.*

5. Числа a, b, c удовлетворяют условиям: $a + b + c = 0,\ abc < 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0.$$

Решение. Так как $abc < 0$, либо одно из чисел a, b, cотрицательно, либо все три. Но $a + b + c = 0$, поэтому все три числа отрицательными быть не могут. Пусть, без ограничения общности, $a > 0$, $b > 0$и $c < 0$. Нам нужно доказать, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0,$$

или

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>-\frac{a^2+b^2}{c}=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Так как $a > 0$ и $b > 0$, получаем, что

$$\frac{b^2+c^2}{a}>\frac{b^2}{a}>\frac{b^2}{a+b}.$$

Аналогично

$$\frac{c^2+a^2}{b}>\frac{a^2}{b}>\frac{a^2}{a+b}.$$

Складывая два полученных неравенства, получим требуемое утверждение.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В преобразовании есть ошибка – 2 балла. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Вася написал число, а Петя написал число на 1 больше. Потом Вася написал ещё одно число, а Петя написал число на 3 больше. Могли ли суммы квадратов чисел Васи и Пети быть равными?

Ответ. Да.

Решение. Пример. Вася написал числа $-0{,}5$ и $-\ 1{,}5$. Петя написал числа $0{,}5$ и $1{,}5$.

Комментарий. *Приведён верный пример – 20 баллов. Установлена зависимость между числами Васи, но не найдены удовлетворяющие ей числа, пример отсутствует – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, без существенного продвижения – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

2. В финал шоу вышли 4 девушки: Саша, Аня, Женя, Даша. Каждый из 60 зрителей выбрал ровно одну девушку победительницей, и нажал кнопку с её именем. Затем всем 60 зрителям задали 4 вопроса. 1) Кто выбрал Сашу, поднимите руку! Было 20 поднятых рук. 2) Кто выбрал Аню, поднимите руку! Было 13 поднятых рук. 3) Кто выбрал Женю, поднимите руку! Была 21 поднятая рука. 4) Кто выбрал Дашу, поднимите руку! Было 10 поднятых рук. Две руки враз никто не поднимал. Однако некоторые зрители поднимали руку честно, а другие – обманывали, поднимали руку наоборот. Если, например, обманщик выбрал Аню, то он не поднимал руки, когда называли её имя, но поднимал, когда называли Сашу, Женю, Дашу. Сколько было обманщиков?

Ответ. 2.

Решение. Каждый «честный» поднимал руку только один раз из четырёх, а каждый обманщик поднимал руку три раза из четырёх, когда называли девушек, которых он не выбрал победительницей, то есть каждый обманщик два лишних раза поднял руку. Значит, лишних поднятий рук было в два раза больше числа обманщиков. Число лишних поднятий рук равно $20 + 13 + 21 + 10 - 60 = 4$. Поэтому число обманщиков равно $4 : 2 = 2$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В рассуждениях есть ошибка – 2 балла. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Сколько различных восьмизначных чисел можно составить из двух единиц, двух двоек, двух троек, трёх четвёрок? (Каждый раз одна из цифр не используется).

Ответ. 7560.

Решение. Докажем, что существует взаимно однозначное соответствие между каждым расположением всех девяти цифр и каждым расположением восьми цифр. Составим девятизначное число из всех цифр, а затем отбросим последнюю цифру. Получим нужное нам восьмизначное число. Если же мы запишем сначала любое восьмизначное число, а потом к нему припишем недостающую цифру, получим девятизначное число из всех цифр. Поэтому их количества равны. Девять цифр можно переставить числом способов 9!, но при перестановке одинаковых цифр число не меняется. Поэтому из всех 9 цифр можно составить $9!/_{2!\,2!\,2!\,3!} = 7560$ чисел.

Замечание. Можно посчитать и по отдельности. Пусть мы не используем одну единицу. Из одной единицы, двух двоек, двух троек, трёх четвёрок можно составить $8!/_{2!\,2!\,3!} = 1680$ чисел. Столько же вариантов будет, если не использовать одну двойку или одну тройку. Если не использовать одну четвёрку, то можно составить $8!/_{2!\,2!\,2!\,3!} = 2520$ чисел. Всего можно составить $1680 \cdot 3 + 2520 = 7560$ чисел.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Верный ответ показан как сумма чисел, расчёты и обоснования не приведены – 10 баллов. Не учтено число перестановок – 5 баллов. Считается, что число перестановок трёх элементов равно 3 – снимать 5 баллов. В решении есть продвижение, но есть и ошибки – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 14$, $BC = 9$ провели биссектрисы внутренних углов A, B, C, D. В пересечении они образовали четырёхугольник $KLMN$. Затем провели биссектрисы внешних углов параллелограмма $ABCD$, они образовали четырёхугольник $PQRS$. Найдите длины диагоналей четырёхугольников $KLMN$ и $PQRS$.

Ответ. 5 и 23.

Решение. Пусть AN и BN– биссектрисы внутренних углов A и B параллелограмма $ABCD$. Тогда $\angle KNM = \angle ANB = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$. Но $\angle A + \angle B = 180°$, поскольку это смежные углы параллелограмма. Поэтому $\angle ANB = 90°$. Пусть AP и BP– биссектрисы внешних углов A и B. Тогда $\angle SPQ = \angle APB = 180° - \frac{1}{2}\angle XAB - \frac{1}{2}\angle YBA$, где $\angle XAB$ и $\angle YBA$ – внешние углы при вершинах A и B, их сумма также равна $180°$. Таким образом, $\angle SPQ = 90°$. Аналогично можно показать, что все углы обоих четырёхугольников прямые.

Точка K, лежащая на биссектрисах углов DAB и ADC, равноудалена от прямых AB и CD, тем же свойством обладают точки M, Q, S. Поэтому точки K, M, Q, S лежат на одной

прямой (равноудаленной от прямых AB и CD). Аналогично, точки L, N, R, P лежат на одной прямой (равноудаленной от прямых BC и AD).
$SM = AB$, так как $ABMS$– параллелограмм. $SK = MQ = BC$, так как $AKDS$ и $BQCM$ – равные прямоугольники, а SK, MQ, BC– диагонали этих прямоугольников. Отсюда $SQ = SM + MQ = AB + BC = 14 + 9 = 23$, $KM = SM - SK = AB - BC = 14 - 9 = 5$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдены диагонали одного четырехугольника – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 2 балла. Решение только начато – 2 балла. За пробелы в верном решении снимается 1-2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

5. Известно, что для положительных чисел a и b при некотором натуральном $n \geq 2$ выполняются соотношения

$$a^n = a + 1,\ b^{2n} = 3a + b.$$

Можно ли определить, какое из чисел a и bбольше другого?
Ответ. Да, $a > b$.
Решение. Заметим, что $a^n > 1$, а значит, и $a > 1$. Возведём в квадрат первое уравнение, перенося члены, получим $a^{2n} - a = a^2 + a + 1$. Поскольку $a^2 - 2a + 1 > 0$, $a^2 + a + 1 > 3a$. По условию $3a = b^{2n} - b$, значит, $a^{2n} - a = a^2 + a + 1 > b^{2n} - b$. Запишем это как $a(a^{2n-1} - 1) > b(b^{2n-1} - 1)$. Заметим, что отсюда следует $a \neq b$.

Пусть $a < b$. Поскольку $a > 1$, то и $b > 1$, и $b^{2n-1} > a^{2n-1}$. Тогда $b(b^{2n-1} - 1) > a(a^{2n-1} - 1)$, получили противоречие.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдены границы возможных значений для a, b – 7 баллов. Выяснено, что $a > 1$, $b > 1$ – 5 баллов. Рассмотрен частный случай ($n = 2$) – 5 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Известно, что $a = b + 7$, $c = d + 2$. Может ли быть так, что $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$?
Ответ. Да.
Решение. Пример. $b = -3{,}5$ $d = -1$. Тогда $a = 3{,}5$ $c = 1$, и $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
Комментарий. *Приведён верный пример – 20 баллов. Установлена зависимость между числами a, c, но не найдены удовлетворяющие ей числа, пример отсутствует – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, без существенного продвижения – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

2. Каждый из 100 школьников записался ровно в один летний отряд: или «Робинзоны», или «Мушкетёры», или «Алые паруса», или «Улыбка». Потом всем школьникам задали 4 вопроса. 1) Ты записался в отряд «Робинзоны»? Было 24 ответа «Да». 2) Ты записался в отряд «Мушкетёры»? Было 29 ответов «Да». 3) Ты записался в отряд «Алые паруса»? Было 27 ответов «Да». 4) Ты записался в отряд «Улыбка»? Было 30 ответов «Да». Среди школьников были шутники, которые на все четыре вопроса отвечали неверно («Да» вместо «Нет», «Нет» вместо «Да»). Сколько было шутников?
Ответ. 5.
Решение. Каждый школьник должен был ответить «Да» один раз. Но каждый шутник три раза отвечал «Да», когда называли три отряда, в которые он не записался. У шутника два ответа «Да» лишних. Всего лишних ответов «Да» получается в два раза больше числа шутников. Число лишних ответов «Да» равно $24 + 29 + 27 + 30 - 100 = 10$. Поэтому число шутников равно $10 : 2 = 5$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В рассуждениях есть ошибка – 2 балла. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Из десяти букв $a, b, b, c, c, c, d, d, d, d$ выбирают 9 и записывают в ряд. Сколько различных последовательностей можно получить?
Ответ. 12600.
Решение. Докажем, что существует взаимно однозначное соответствие между каждым расположением всех десяти букв и каждым расположением девяти букв. Составим последовательность из всех десяти букв, а затем отбросим последнюю букву. Получим нужную нам последовательность из девяти букв. Если же мы запишем сначала любую последовательность из девяти букв, а потом к нему припишем недостающую букву, получим последовательность из всех десяти букв. Поэтому их количества равны. Десять букв можно переставить числом способов 10!, но при перестановке одинаковых букв число не меняется. Поэтому из всех 9 букв можно составить ${}^{10!}/_{1!\,2!\,3!\,4!} = 12600$ последовательностей.
Замечание. Можно посчитать и по отдельности. Пусть мы не используем букву a. Из оставшихся букв можно составить ${}^{9!}/_{2!\,3!\,4!} = 1260$ последовательностей. Пусть мы не используем одну букву b, тогда можно составить ${}^{9!}/_{1!\,1!\,3!\,4!} = 2520$ последовательностей. Если не использовать одну букву c, то можно составить ${}^{9!}/_{1!\,2!\,2!\,4!} = 3780$ последовательностей. Если не использовать одну букву d, то можно составить ${}^{9!}/_{1!\,2!\,3!\,3!} = 5040$ последовательностей. Всего можно составить $1260 + 2520 + 3780 + 5040 = 12600$ последовательностей.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Верный ответ показан как сумма чисел, расчёты и обоснования не приведены – 10 баллов. Не учтено число перестановок – 5 баллов. Считается, что число перестановок трёх элементов равно 3 – снимать 5 баллов. В решении есть продвижение, но есть и ошибки – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 8, BC = 5$ провели биссектрисы внутренних углов A, B, C, D. В пересечении они образовали четырёхугольник $KLMN$. Затем провели биссектрисы внешних углов параллелограмма $ABCD$, они образовали четырёхугольник $PQRS$. Найдите длины диагоналей четырёхугольников $KLMN$ и $PQRS$.
Ответ. 3 и 13.
Решение. Пусть AN и BN– биссектрисы внутренних углов A и B параллелограмма $ABCD$. Тогда $\angle KNM = \angle ANB = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$. Но $\angle A + \angle B = 180°$, поскольку это смежные углы параллелограмма. Поэтому $\angle ANB = 90°$. Пусть AP и BP– биссектрисы внешних углов A и B. Тогда $\angle SPQ = \angle APB = 180° - \frac{1}{2}\angle XAB - \frac{1}{2}\angle YBA$, где $\angle XAB$ и $\angle YBA$ – внешние углы при вершинах A и B, их сумма также равна 180°. Таким образом, $\angle SPQ = 90°$. Аналогично можно показать, что все углы обоих четырёхугольников прямые.
Точка K, лежащая на биссектрисах углов DAB и ADC, равноудалена от прямых AB и CD, тем же свойством обладают точки M, Q, S. Поэтому точки K, M, Q, S лежат на одной прямой (равноудаленной от прямых AB и CD). Аналогично, точки L, N, R, P лежат на одной прямой (равноудаленной от прямыхBC и AD).

$SM = AB$, так как $ABMS$ – параллелограмм. $SK = MQ = BC$, так как $AKDS$ и $BQCM$ – равные прямоугольники, а SK, MQ, BC– диагонали этих прямоугольников. Отсюда $SQ = SM + MQ = AB + BC = 8 + 5 = 13$, $KM = SM - SK = AB - BC = 8 - 5 = 3$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдены диагонали одного четырехугольника – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В решении есть продвижение, но допущена ошибка – 2 балла. Решение только начато – 2 балла. За пробелы в верном решении снимается 1-2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

5. Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

Докажите, что $0 \le ab + bc + ac - abc \le 2$.

Решение. Заметим, что a, b, c не могут все одновременно быть больше 1, это противоречило бы условию. Пусть, например, $a \le 1$. Запишем $ab + bc + ac - abc = a(b + c) + bc(1 - a)$. Очевидно, это выражение неотрицательно, и оценка снизу доказана.

Для доказательства оценки сверху рассмотрим три данных числа. Два из них не меньше 1 или два из них не больше 1, пусть такие числа – это b и c. В любом случае $(1 - b)(1 - c) \ge 0$.

В условии $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ заменим $b^2 + c^2$на меньшее выражение $2bc$, получим неравенство $a^2 + 2bc + abc \le 4$, или $bc(2 + a) \le 4 - a^2$. После сокращения получаем $bc \le 2 - a$. Тогда $ab + bc + ac - abc \le ab + 2 - a + ac(1 - b) = 2 - a(1 - c)(1 - b) \le 2$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдены границы возможных значений для a, b – 7 баллов. Выяснено, что $a > 1$, $b > 1$– 5 баллов. Рассмотрен частный случай $(n = 2)$ – 5 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*