## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
## 10 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| 20 | Полное (верное) решение. |
| 16-20 | Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение. |
| 12-16 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 8-12 | Верно рассмотрен один из двух существенных случаев. |
| 6-8 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 2-6 | Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0-2 | Решение начато, но продвижение незначительное. |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

### Вариант 1

1. В прямоугольнике $27 \times 72$, разбитом на клетки $1 \times 1$, двое игроков ходят по очереди, закрашивая квадраты любого размера, в которых ещё нет закрашенных клеток. Можно закрашивать и квадрат $1 \times 1$, то есть 1 клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто всегда может выиграть, первый или второй?

**Ответ.** Первый.

**Решение.** Пусть в прямоугольнике 27 строк и 72 столбца. Первому достаточно первым ходом закрасить квадрат $26 \times 26$, расположенный так, что слева и справа остаётся по 23 столбца, а снизу 1 строка. Тогда, какой ход ни сделал бы второй, первый всегда может сделать ход, симметричный относительно вертикальной оси, делящей прямоугольник на равные части.

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 20 баллов. В решении есть некоторые идеи, но стратегия чётко не прописана – 5 баллов. Решение проводится для прямоугольника других пропорций – 5 баллов. Приведены некоторые рассуждения, но они содержат ошибку – 2 балла. Дан только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AM$и $CN$. Угол $ABC$равен $60^{\circ}$. На стороне $AC$ выбрана точка$K$так, что $AK = KC$. Найдите углы треугольника $MNK$.

**Ответ.** Все углы по 60°.

**Решение.** Построим на стороне $AC$, как на диаметре, окружность. Так как треугольники $ANC$ и $AMC$прямоугольные, точки $M$ и $N$ лежат на построенной окружности. Тогда$KM = KN$, какдва радиуса однойокружности. Кроме того, так как угол $NAM$ вписан и опирается на дугу $NM$, имеем $\angle NKM = 2\angle NAM$. Из прямоугольного треугольника $BAM$ видим, что $\angle NAM = 90° - 60° = 30°$. Но тогда$\angle NKM = 60°$, треугольник $NKM$ равнобедренный с углом 60°при вершине, значит, он равносторонний.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Решение только начато – 2 балла. За пробелы в верном доказательстве снимается 1-5 баллов. Неверное решение – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

3. В олимпиаде участвовали девятиклассники и десятиклассники. Каждый день для решения предлагалось 10 задач. В первый день каждый девятиклассник решил на одну задачу больше, чем каждый десятиклассник, а всего участники олимпиады в первый день решили 129 задач. Во второй день каждый десятиклассник решил на одну задачу больше, чем каждый девятиклассник, а всего участники олимпиады во второй день решили 190 задач. Сколько человек могло участвовать в олимпиаде?

**Ответ.** 29 или 319.

**Решение.** Пусть каждый девятиклассник решил в первый день$x$ задач, а во второй день$y$задач, тогда каждый десятиклассник решил в первый день $x-1$ задач, а во второй день $y+1$ задач, а за два дня каждый участник решил$x+y$задач. Число участников равно общей сумме задач $129+190=319$, делённой на $x+y$. Поскольку $319 = 11 \cdot 29 = 1 \cdot 319$, число участников может равняться только 29 или 319 (так как число решенных задач у каждого не больше 20 и участников больше одного). Оба эти значения допустимы. Например, может быть 13девятиклассников, решивших в первый день по 5 задач, а во второй день по 6 задач, и 16десятиклассников, решивших в первый день по 4 задачи, а во второй день по 7 задач. При другом ответе 129девятиклассников решили в первый день по 1 задаче, а во второй по 0задач, и 190десятиклассников решили в первый день по 0 задач, а во второй по 1 задаче.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном решении ответ «319» отброшен или не найден – 18 баллов. Решение верно начато, но число 319 не разложено на множители – 15 баллов. Верная схема решения, но неверный ответ из-за ошибки в подсчётах – 15 баллов. Решение не закончено, есть существенное продвижение – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. В рассуждениях есть ошибка – 2 балла. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. При отсутствии решения подбором найден один ответ – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. Функция $f(x) = \frac{3^x(2x-1)}{x(x+1)}$ определена при положительных$x$. Найдите сумму

$$A = f(1) + f(2) + \cdots + f(100).$$

**Ответ.**$\frac{3^{101}}{101} - 3$.

**Решение.** Заметим, что $\frac{3^x(2x-1)}{x(x+1)} = \frac{3^{x+1} \cdot x - 3^x(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3^{x+1}}{x+1} - \frac{3^x}{x}$. Поэтому соседние члены будут уничтожаться, и $A = \frac{3^{101}}{101} - 3$.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Верная схема решения, но неверный ответ из-за ошибки в подсчётах – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. Из вершин правильного $(2n+1)$-угольника случайным образом выбирают 3 вершины. При каких$n$ вероятность того, что центр $(2n+1)$-угольника лежит внутри треугольника, образованного выбранными вершинами, меньше 0,3?

**Ответ.** $n > 8$.

**Решение.** Число способов выбрать 3 точки равно $C^3_{2n+1}$. Посчитаем число способов выбора, при которых центр $(2n+1)$-угольника лежит вне треугольника. Очевидно, это именно те способы, при которых все три выбранные вершины лежат среди некоторых n + 1 последовательных вершин многоугольника. Мы будем считать их следующим образом: Будем обходить многоугольник по часовой стрелке. Первую вершину можно выбрать произвольно ($2n+1$ возможность). Как только мы её выберем, мы должны выбрать две из последовательных $n$ вершин ($C_n^2$ возможностей). Тогда вероятность того, что центр лежит вне треугольника, равна $\frac{(2n+1)n(n-1)\cdot 6}{(2n+1)2n(2n-1)\cdot 2} = \frac{3(n-1)}{2(2n-1)}$.

Вероятность того, что центр $2n+1$-угольника лежит внутри треугольника, равна $1-\frac{3(n-1)}{2(2n-1)} = \frac{n+1}{4n-2}$. Решив неравенство $\frac{n+1}{4n-2} < 0{,}3$, получим $n > 8$.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Схема решения верная, но допущены ошибки – 15 баллов. Найдено только число способов выбрать 3 точки – 2 балла; найдено только число благоприятных случаев – 10 баллов; решено неравенство – 8 баллов. Эти баллы суммируются. Небольшая ошибка при подсчёте числа благоприятных случаев – минус 2 балла. Решалась задача для противоположного события – минус 1 балл. За вычислительную ошибку снимать 2 балла. Рассмотрены только примеры – 2 балла.*

## Вариант 2

1. Пусть $a$, $b$, $c$, $d$ положительны, $a < c, d < b$. Докажите, что уравнения $x^6 + ax + b = 0$ и $x^6 + cx + d = 0$ не имеют общих корней.

**Решение.** Пусть уравнения имеют общий корень $x_0$. Подставим $x_0$и вычтем первое уравнение из второго, получим $x_0(c-a) = b-d$. Отсюда $x_0 > 0$. Но тогда ${x_0}^6 + ax_0 + b$ равно сумме положительных чисел и не может равняться 0, противоречие.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Показано, что корень уравнения должен быть положительным – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов.*

2. На экзамен каждый участник принес или телефон, или три тетради, или четыре книжки. Но пользоваться ими было нельзя, поэтому организаторы сложили всё это на два стола. Телефонов было 58, и все они лежали на первом столе. Ещё там лежала пятая часть всех тетрадей и седьмая часть всех книжек. При этом на каждом столе лежало поровну предметов. Сколько человек пришло на экзамен?

**Ответ.** 82.

**Решение.** Пусть $x$участников принесли тетради, $y$ книжки. Тогда всего было принесено $3x + 4y + 58$ предметов, и половина из них (а это $1{,}5x + 2y + 29$) лежала на первом столе. С другой стороны, на втором столе лежали ${}^{12x}/_{5}$тетрадей и ${}^{24y}/_{7}$ книжек. Имеем уравнение$1{,}5x + 2y + 29 = {}^{12x}/_{5} + {}^{24y}/_{7}$. После умножения на 70 и приведения подобных уравнение приводится к равносильному $63x + 100y = 29\cdot 70$. Его требуется решить в целых числах. Заметим, что число $63x = 29\cdot 70 - 100y$ делится на 10без остатка, а так как числа 63 и 10 взаимно просты, то на 10 делится число $x$. Аналогично $y$ делится на 7. Пусть $x = 10x_1 y = 7y_1$; $x_1$, $y_1$ – натуральные числа. Подставив эти выражения в решаемое уравнение, получим после сокращения на 7: $9x_1 + 10y_1 = 29$. Теперь ясно, что при $x_1 > 3$ левая часть больше правой, и равенство невозможно. Случаи $x_1 = 2$ и $x_1 = 3$ приводят к нецелому значению $y_1$. Единственный возможный вариант $x_1 = 1$. Тогда $y_1 = 2$, $x = 10$, $y = 14$, а общее число участников $10 + 14 + 58 = 82$.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Уравнение решено подбором, проведен перебор, но не полный – 15 баллов. Решение не закончено, есть существенное продвижение – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Уравнение не составлено, ответ найден подбором, не доказано, что нет других ответов – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 30. Докажите, что радиус вписанной окружности $r$ больше 12.

**Решение.** Обозначим один из острых углов α. Тогда катеты равны $\frac{30}{\sin\alpha}$, $\frac{30}{\cos\alpha}$, а гипотенуза равна $\frac{30}{\sin\alpha\cos\alpha}$. По формулам площади треугольника, $S = \frac{30\cdot 30}{2\sin\alpha\cos\alpha} = pr$, где $p$ – полупериметр. Таким образом,$\frac{30\cdot 30}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{r}{2}\left(\frac{30}{\sin\alpha} + \frac{30}{\cos\alpha} + \frac{30}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$, откуда $r = \frac{30}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$. Запишем знаменатель как $\sqrt{2}\sin(\alpha + {}^{\pi}/_{4}) + 1$. Очевидно, это выражение не больше $\sqrt{2}+1$. Тогда $r \geq \frac{30}{\sqrt{2}+1} = 30\cdot(\sqrt{2}-1) > 30\cdot 0{,}4 = 12$.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 2 балла. Решение только начато – 2 балла. За пробелы в верном доказательстве снимается 1-5 баллов. Неверное решение – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.*

4. Какова вероятность, что произведение 15 случайно выбранных однозначных натуральных чисел кратно 14?

**Ответ.**$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{15} + \left(\frac{4}{9}\right)^{15} - \left(\frac{5}{9}\right)^{15}$.

**Решение.** Число произведений, не содержащих ни множителя 2, ни множителя 7, равно $4^{15}$. Число произведений, не содержащих множитель 2, равно $5^{15}$, число произведений, не содержащих множитель 7, равно $8^{15}$. В каждое из этих чисел входит число произведений, не содержащих ни множителя 2, ни множителя 7, равное $4^{15}$. Поскольку эти произведения посчитаны дважды, надо вычесть их число. Тогда число произведений, не кратных 14, равно $8^{15} - 4^{15} + 5^{15}$.

Всего произведений $9^{15}$, и вероятность равна

$$\frac{9^{15} - 8^{15} + 4^{15} - 5^{15}}{9^{15}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{15} + \left(\frac{4}{9}\right)^{15} - \left(\frac{5}{9}\right)^{15}.$$

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Схема решения верная, но допущены ошибки – 15 баллов. Дважды посчитано число произведений, содержащих множители 2 и 7, – 15 баллов. Найдено только число всех исходов – 2 балла. Небольшая ошибка при подсчёте числа благоприятных исходов – минус 2 балла. Решалась задача для противоположного события – минус 1 балл. За вычислительную ошибку снимать 2 балла. Рассмотрены только примеры – 2 балла.*

5. Дана функция $f(x) = \frac{1}{4^x+2}$. Найдите сумму

$$A = f(0) + f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \cdots + f\left(\frac{99}{100}\right) + f(1).$$

**Ответ.** 25,25.

**Решение.** Заметим, что $f(x) + f(1-x) = {}^{1}/_{2}$. Действительно, $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{4^x+2} + \frac{1}{4^{1-x}+2} = \frac{4^{1-x}+4^x+4}{2(4^{1-x}+4^x+4)} = \frac{1}{2}$. Аргументы $(0,1)$, $({}^{1}/_{100}, {}^{99}/_{100}), \ldots, ({}^{49}/_{100}, {}^{51}/_{100})$ образуют 50 пар, сумма значений функции в этих точках равна 25.

Поскольку $f\left({}^{50}/_{100}\right) = 0{,}25$, $A = 25{,}25$.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Верная схема решения, но неверный ответ из-за ошибки в подсчётах – 15 баллов. Соотношение $f(x) + f(1-x) = {}^{1}/_{2}$ доказано не в общем виде, а на нескольких примерах – 15 баллов. В верном решении*


Красноярский математический центр СФУ

*существенный пропуск в обосновании – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

## Вариант 3

1. Пусть $a, b, c, d$ положительны, $a < c, d < b$. Докажите, что уравнения $x^4 + ax + b = 0$ и $x^4 + cx + d = 0$ не имеют общих корней.

**Решение.** Пусть уравнения имеют общий корень $x_0$. Подставим $x_0$и вычтем первое уравнение из второго, получим $x_0(c - a) = b - d$. Отсюда $x_0 > 0$. Но тогда ${x_0}^4 + ax_0 + b$ равно сумме положительных чисел и не может равняться 0, противоречие.

2. На олимпиаду каждый участник принес или калькулятор, или две тетради, или три книжки. Но пользоваться ими было нельзя, поэтому организаторы сложили всё это на двастола. Калькуляторов было 64, и все они лежали на первом столе. Ещё там лежала седьмая часть всех тетрадей и пятая часть всех книжек. При этом на каждом столе лежало поровну предметов. Сколько было участников олимпиады?

**Ответ.**101 участник.

**Решение.** Пусть $x$ участников принесли тетради, $y$ книжки. Тогда всего было принесено $2x + 3y + 64$ предмета, и половина из них (а это $x + 1{,}5y + 32$) лежала на первомстоле. С другой стороны, на втором столе лежали ${}^{12x}/_{7}$ тетрадей и ${}^{12y}/_{5}$ книжек. Имеем уравнение $x + 1{,}5y + 32 = {}^{12x}/_{7} + {}^{12y}/_{5}$, которое (после умножения на 70 и приведения подобных) приводится к равносильному $50x + 63y = 32 \cdot 70$. Его требуется решить в целых числах. Заметим, что число $63y = 32 \cdot 70 - 50y$ делится на10 без остатка, а так как числа 63 и 10 взаимно просты, то на 10 делится и число $y$. Аналогично $x$ делится на 7. Пусть $x = 7x_1, y = 10y_1, x_1; y_1$ натуральные числа. Подставив эти выражения в решаемое уравнение, получим после сокращения на 7: $5x_1 + 9y_1 = 32$. Теперь ясно, что при $y_1 > 3$ левая часть больше правой, и равенство невозможно. Случаи $y_1 = 1$ и $y_1 = 2$ приводят к нецелому значению $x_1$. Единственный возможный вариант $y_1 = 3$. Тогда $y_1 = 3$, $x_1 = 1$, $x = 7, y = 30$, а общее число участников $30 + 7 + 64 = 101$.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Уравнение решено подбором, проведен перебор, но не полный – 15 баллов. Решение не закончено, есть существенное продвижение – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Уравнение не составлено, ответ найден подбором, не доказано, что нет других ответов – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 18. Докажите, что радиус вписанной окружности $r$ больше 7.

**Решение.** Обозначим один из острых углов α. Тогда катеты равны $\frac{18}{\sin\alpha}, \frac{18}{\cos\alpha}$, а гипотенуза равна $\frac{18}{\sin\alpha\cos\alpha}$. По формулам площади треугольника, $S = \frac{18\cdot 18}{2\sin\alpha\cos\alpha} = pr$, где $p$ – полупериметр. Таким образом,$\frac{18\cdot 18}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{r}{2}\left(\frac{18}{\sin\alpha} + \frac{18}{\cos\alpha} + \frac{18}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$, откуда $r = \frac{18}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$. Запишем знаменатель как $\sqrt{2}\sin(\alpha + {}^{\pi}/_{4}) + 1$. Очевидно, это выражение не больше $\sqrt{2} + 1$. Тогда $r \geq \frac{18}{\sqrt{2}+1} = 18 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) > 18 \cdot 0{,}4 > 7$.

***Комментарий.*** Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 2 балла. Решение только начато – 2 балла. За пробелы в верном решении снимается 1-5 баллов. Неверное решение – 0 баллов. Только ответ – 0 баллов.

4. Какова вероятность, что произведение 11 случайно выбранных чисел из ряда $1, 2, \ldots, 7, 8$ кратно 10?

**Ответ.**$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{11} - \left(\frac{4}{8}\right)^{11} + \left(\frac{3}{8}\right)^{11}$.

**Решение.** Число произведений, не содержащих множитель 2, равно $4^{11}$, число произведений, не содержащих множитель 5, равно $7^{11}$. В каждое из этих чисел входит число произведений, не содержащих ни множителя 2, ни множителя 5, равное $3^{11}$. Поскольку эти произведения посчитаны дважды, надо вычесть их число. Тогда число произведений, не кратных 10, равно $7^{11} + 4^{11} - 3^{11}$. Всего произведений $8^{11}$, и вероятность равна

$$\frac{8^{11} - 7^{11} - 4^{11} + 3^{11}}{8^{11}} = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{11} - \left(\frac{4}{8}\right)^{11} + \left(\frac{3}{8}\right)^{11}.$$

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Схема решения верная, но допущены ошибки – 15 баллов. Дважды посчитано число произведений, содержащих множители 2 и 7, – 15 баллов. Найдено только число всех исходов – 2 балла. Небольшая ошибка при подсчёте числа благоприятных исходов – минус 2 балла. Решалась задача для противоположного события – минус 1 балл. За вычислительную ошибку снимать 2 балла. Рассмотрены только примеры – 2 балла.*

5. Дана функция $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Найдите сумму

$$A = f(0) + f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \cdots + f\left(\frac{2020}{2021}\right) + f(1).$$

**Ответ.**1011.

**Решение.** Заметим, что $f(x) + f(1 - x) = 1$. Действительно,

$$f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \frac{3\cdot 9^{1-x} + 3\cdot 9^x + 18}{3\cdot 9^{1-x} + 3\cdot 9^x + 18} = 1.$$

Аргументы $(0,1), ({}^{1}/_{2021}, {}^{2020}/_{2021}), \ldots, ({}^{1010}/_{2021}, {}^{1011}/_{2021})$ образуют 1011 пар, сумма значений функции в этих точках равна $1011 \cdot 1 = 1011$.

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Верная схема решения, но неверный ответ из-за ошибки в подсчётах – 15 баллов. Соотношение $f(x) + f(1 - x) = {}^{1}/_{2}$ доказано не в общем виде, а на нескольких примерах – 15 баллов. В верном решении существенный пропуск в обосновании – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*


Красноярский математический центр СФУ