ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ
6 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Из десяти одинаковых прямоугольников с периметром 42 Коля взял пять и выложил их в ряд. Получился прямоугольник с периметром 106. Из оставшихся пяти прямоугольников Коля сложил еще один прямоугольник. Чему может быть равен его периметр?

Ответ. 146 или 106.

Решение. Пусть стороны маленького прямоугольника равны aи b. В его периметр входит 2 стороны a и 2 стороны b. В периметр первого большого прямоугольника входит 10 сторон a и 2 стороны b, значит, они отличаются на 8 сторон a. Отсюда $8a = 106 - 42 = 64$, и сторона $a = 8$. Тогда сторона $b = (42 - 16) : 2 = 13$. Второй прямоугольник может быть таким же, как первый, или включать 2 стороны a и 10 сторон b. Во втором случае периметр равен $2 \cdot 8 + 10 \cdot 13 = 146$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном решении стороны маленького прямоугольника найдены подбором, и не показано, что других не может быть – 15 баллов. Найдены стороны маленького прямоугольника, но утверждается, что можно сложить только один исходный прямоугольник, или периметр второго найден неверно – 15 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Идея решения верная, но стороны маленького прямоугольника не удовлетворяют второму условию – 2 балла. Решение только начато – 2 балла. Только ответ – 0 баллов. Решение содержит арифметические ошибки – минус 5 баллов за ошибку.*

2. Три бельчонка делили шишки. Сначала первый отдал половину своих шишек, поделив их поровну между вторым и третьим. Потом второй отдал две шишки третьему, и одну шишку первому. Потом третий отдал половину своих шишек, поделив их поровну между первым и вторым. После этого у каждого оказалось по 10 шишек. Сколько шишек было у каждого бельчонка в начале?

Ответ. У первого в начале было 8 шишек, у второго 6, у третьего 16.

Решение. Будем решать задачу с конца. У третьего бельчонка осталось 10 шишек, когда он отдал половину, значит, было 20, и он отдал 10, каждому по 5 шишек. То есть у второго и у первого было по 5 шишек. Второй отдал 3 шишки, значит, у него было 8. У первого было 4 шишки, у третьего – 18. Первый отдал половину своих шишек, и осталось 4, то есть он отдал 4 шишки, по две каждому. У первого в начале было 8 шишек, у второго 6, у третьего 16.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верной схеме решения есть ошибки в расчётах – 10 баллов. Решение найдено подбором, не показано, что нет других решений – 10 баллов. В решении с помощью уравнений есть ошибки, ответ не получен – 2 балла. Только ответ без обоснования – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. В квадрате 7×7 двое игроков ходят по очереди, закрашивая белые клетки в разный цвет (Вася – в красный, Петя – в зелёный). Каждый может закрасить одну или несколько белых клеток, идущих подряд по горизонтали или вертикали. В конце все клетки будут закрашены. Столбец или строку, в которых окажется больше зелёных клеток, будем называть зелёным, в противном случае – красным. Если общее число красных строк и столбцов больше, чем зелёных, выигрывает Вася, в противном случае – Петя. Если поровну, то ничья. Начинает Вася. Может ли кто-нибудь из них выиграть при любых ходах другого?

Ответ. Да, Вася.

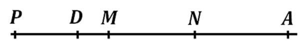
Решение. Васе достаточно первым ходом закрасить красным цветом центральную клетку, а потом повторять ходы Пети симметрично относительно центра. Тогда красных строк и столбцов, не проходящих через центр, будет столько же, сколько зелёных. В 4-й строке на каждую зелёную клетку приходится симметричная ей красная клетка, и центр тоже покрашен в красный цвет, то есть центральная строка – красная. Аналогично 4-й столбец – красный, и в сумме общее число красных строк и столбцов больше, чем зелёных.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Приведены рассуждения, но чёткой стратегии нет – 5 баллов. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Предполагается, что противник будет делать определённые ходы – 5 баллов. Решена задача с изменёнными условиями – 2 балла.*

4. В $12{:}50$ из «тихого» леса в «шумный» лес выбежал бельчонок. Через 45 минут вслед за ним выбежал второй бельчонок и догнал первого, когда до «тихого» леса было в два раза ближе, чем до «шумного». Добежав до «шумного» леса, второй бельчонок сразу же повернул назад и встретил первого, когда до «шумного» леса было в два раза ближе, чем до «тихого». Найдите время, когда второй бельчонок вернётся в «тихий» лес. *Скорости бельчат постоянны.*

Ответ. $15{:}50$.

Решение. Сначала найдем во сколько раз скорость быстрого бельчонка больше скорости медленного. Примем расстояние от «тихого» леса до «шумного» леса



за три части (см. рисунок, $PM = MN = NA$), от первой встречи (точка M) до второй (точка N) медленный бельчонок пробегает одну часть (отрезок MN), а быстрый – три ($MP + PN$). Значит, скорость быстрого бельчонка в три раза больше скорости медленного. Теперь примем за три части расстояние от «тихого» леса до точки их первой встречи (на рисунке PD – две части, DM – одна часть, а всё расстояние PA составляет 9 таких частей). До момента их первой встречи медленный бельчонок прошел в три раза меньше быстрого, значит, в момент выхода второго бельчонка он был в двух частях от «тихого» леса (то есть в точке D). Таким образом, медленный бельчонок проходит двечасти (отрезок PD) за 45 минут, а быстрый – за 15 минут. Весь путь быстрого бельчонка составляет 18 частей, которые он преодолеет за $9 \cdot 15 = 135$ минут. Таким образом, в «тихий» лес он вернется через три часа после выхода первого бельчонка, в $15{:}\,50$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном решении не учтено, что второй бельчонок выбежал на 45 минут позже – 19 баллов. При верном методе допущены ошибки в схеме решения – 10 баллов. Установлено, что скорость быстрого бельчонка в 3 раза больше скорости медленного – 10 баллов. Допущены ошибки при составлении уравнений – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

5. Два пирата делили между собой кучу в n^2 монет. Каждый по очереди брал из общей кучи 10 монет. После того, как в очередной раз первый пират взял 10 монет, остаток в куче оказался меньше 10 монет. Чтобы обеспечить равный делёж, первый пират отдал второму свой кинжал. Сколько монет стоит кинжал? (Пираты не знают дробей, и кинжал стоит целое число монет).

Ответ. 2.

Представим число n^2 в виде $20y + a$, где a– остаток отделения числа n^2 на 20. По условию задачи $10 \le a < 20$. Пусть кинжал оценен в x монет, тогда из равенства их прибыли получается: $10 - x = (a - 10) + x$, откуда $x = 10 – a/2$. Значит, a –чётное число, поэтому $a \in \{10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18\}$. Заметим, что последняя цифра числа a совпадает с последней цифрой числа n^2, то есть, с последней цифрой точного квадрата. Следовательно, $a \ne 12$ и $a \ne 18$. Если $a = 14$ или $a = 10$, то число $20y + a$ делитсяна 2, но не делится на 4, поэтому не может быть квадратом числа n. Остаётся единственный вариант $a = 16$. Тогда $x = 2$. Вариант $a = 16$ возможен, например, при $n = 6$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном решении не учтено, что доход первого пирата стал меньше на стоимость кинжала – 15 баллов. Верно найдена стоимость кинжала при различных значениях остатка – 10 баллов. Обосновано, что остаток равен 6 – 10 баллов. В составленном уравнении есть ошибка – 10 баллов. Ответ найден подбором – 10 баллов. Рассмотрены только примеры – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Петя взял из восьми одинаковых прямоугольников четыре, и выложил их в ряд. Вася выложил в ряд четыре оставшихся прямоугольника. Периметр прямоугольника Пети равен 38, а периметр прямоугольника Васи равен 62. Чему равен периметр каждого из восьми одинаковых прямоугольников?

Ответ. 20.

Решение. Пусть стороны маленького прямоугольника равны a и b. В периметр прямоугольника Пети входит 8 сторон a и 2 стороны b, а в периметр прямоугольника Васи входит 2 стороны a и 8 сторон b. В сумму периметров входит 10 сторон a и 10 сторон b, поэтому $10(a + b) = 38 + 62 = 100$. Отсюда $a + b = 10$, периметр равен 20.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном решении стороны маленького прямоугольника найдены подбором, и не показано, что других не может быть – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Решение только начато – 2 балла. Только ответ или совсем неверное решение – 0 баллов. Решение содержит арифметические ошибки – минус 5 баллов за ошибку.*

2. Три бельчонка за неделю набрали вместе 100 шишек. За следующую неделю первые два бельчонка утроили свои запасы, а третий, наоборот, съел из своего запаса 20 шишек. Теперь у них вместе стало 160 шишек. Сколько шишек набрал в первую неделю третий бельчонок?

Ответ. 60.

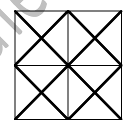
Решение. Если бы у всех бельчат запасы утроились, то стало бы 300 шишек. За счёт третьего бельчонка недостаёт 140 шишек. Пусть третий бельчонок набрал в первую неделю x шишек, тогда $3x - (x - 20) = 140$, откуда $x = 60$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верной схеме решения есть ошибки в расчётах – 10 баллов. Решение найдено подбором, и не показано, что других значений не может быть – 10 баллов. В решении с помощью уравнений есть ошибки, ответ не получен – 2 балла. Только ответ без обоснования – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Картонный квадрат 10×10 расчерчен красным фломастером на клетки со стороной 1. В каждой его клетке зелёным фломастером провели обе диагонали, и разрезали большой квадрат по зелёным линиям. В результате картонный квадрат 10×10 распался на части. Сколько частей получилось?

Ответ. 220 частей.

Решение. Квадрат распадётся на маленькие треугольники, и квадраты, состоящие из двух таких треугольников (ниже на рисунке показаны маленькие треугольники и 4 квадрата). Отдельные треугольники расположены по сторонам квадрата, и их будет столько, каков периметр квадрата, т.е. 40. Из четырёх маленьких треугольников можно составить квадрат со стороной 1. Площадь такого квадрата равна 1, значит, площадь треугольника равна $1/_4$, и все треугольники вместе составят по площади $1/_4 \cdot 40 = 10$ единиц. Остальная площадь $10 \cdot 10 - 10 = 90$ будет разбита на квадраты площади $1/_2$, следовательно, таких квадратов будет $90 \cdot 2 = 180$. Тогда общее число частей равно $180 + 40 = 220$.



Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Ошибка в подсчёте при верном разбиении на части – 10 баллов. Неверное разбиение на части с ответом «400» – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

4. От деревни «Ёлкино» к деревне «Палкино» ходит автобус. Однажды, проехав ровно треть пути, он сломался, и простоял 12 минут. Чтобы наверстать время, на остатке пути автобус увеличил скорость в полтора раза, и прибыл в «Палкино» вовремя. Сколько времени идёт автобус из «Ёлкино» в «Палкино»?

Ответ. 54 минуты.

Решение. Рассмотрим последние две трети пути. Автобус проехал эту часть пути на 12 минут быстрее, чем обычно, при этом он ехал в полтора раза быстрее. Значит, это заняло в полтора раза меньше времени. Разница между обычным и новым временами равна половине нового времени и составляет 12 минут. Поэтому новое время равно 24 минутам, а обычное время, за которое автобус проезжает две трети пути, – 36 минутам. На первую треть пути тогда требуется 18 минут, а весь путь автобус проезжает за 54 минуты.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение найдено подбором – 10 баллов. Допущены ошибки при составлении уравнений – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

5. В стране Лаген используют монеты в $1, 2, 3, 4$ лага. Перевоз на пароме стоит 1 лаг, монеты кладут в миску, которая вначале пуста. На паром зашли 12 человек. У них были только монеты в $2, 3, 4$ лага. Сдачи паромщик не давал. Тем не менее, каждый оплатил свой проезд и получил сдачу от своих спутников. Какое наименьшее число монет могло у них быть?

Ответ. 15.

Решение. 1. Оценка. Каждому человеку полагается сдача, то есть вместе они должны получить на сдачу хотя бы 12 монет. Оплата за всех составляет 12 лагов, то есть в миску должны положить не меньше 3 монет. Таким образом, монет не меньше $12 + 3 = 15$. 2. Пример. Рассмотрим четырёх человек.

1-й	2-й	3-й	4-й
4	3	3	2, 2

Пусть первый положит в миску 4 лага, тем самым рассчитавшись за всех четверых. Второй вернёт первому 3 лага. Четвёртый вернёт второму 2 лага. Третий отдаст четвёртому 3 лага, а получит от него 2 лага. Тогда у каждого окажется на 1 лаг меньше, чем было. Для этих четверых человек потребовалось 5 монет. Остальных разобьем на четвёрки, и распределим монеты аналогично, всего у 12 человек $5 \cdot 3 = 15$ монет.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Построен верный пример, но не проведена оценка – 18 баллов. В предложенной схеме есть ошибка, после исправления которой схема станет верной – 15 баллов. Предложена схема с не наименьшим числом монет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла.*

Вариант 3

1) Стас взял из шести одинаковых прямоугольников три, и выложил их в ряд. Миша выложил в ряд три оставшихся прямоугольника. Периметр прямоугольника Стаса равен 42, а периметр прямоугольника Миши равен 62. Чему равен периметр каждого из шести одинаковых прямоугольников?

Ответ. 26.

Решение.Пусть стороны маленького прямоугольника равны a и b. В периметр прямоугольника Стаса входит 6 сторон a и 2 стороны b, а в периметр прямоугольника Миши входит 2 стороны a и 6 сторон b. В сумму периметров входит 8 сторон a и 8 сторон b, поэтому $8(a + b) = 42 + 62 = 104$. Отсюда $a + b = 13$, периметр равен 26.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В верном решении стороны маленького прямоугольника найдены подбором, и не показано, что других не может быть – 10 баллов. Решение не закончено, есть продвижение – 5 баллов. Решение только начато – 2 балла. Только ответ или совсем неверное решение – 0 баллов. Решение содержит арифметические ошибки – минус 5 баллов за ошибку.*

2) В трёх бочках вместе было 90 литров воды. Потом в первой и второй бочке количество воды увеличилось в 2 раза, а в третьей уменьшилось на 7 литров, тогда в трёх бочках вместе стало 145 литров воды. Сколько литров воды изначально было в третьей бочке?

Ответ.28.

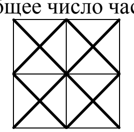
Решение. Если бы во всех бочках количество воды увеличилось в 2 раза, то стало бы 180 литров. За счёт третьей бочки недостаёт 35 литров. Пусть в третьей бочке было x литров, тогда $2x - (x - 7) = 35$, откуда $x = 28$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верной схеме решения есть ошибки в расчётах – 10 баллов. Решение найдено подбором, и не показано, что других значений не может быть – 10 баллов. В решении с помощью уравнений есть ошибки, ответ не получен – 2 балла. Только ответ без обоснования – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3) Картонный квадрат 9×9 расчерчен красным фломастером на клетки со стороной 1. В каждой его клетке зелёным фломастером провели обе диагонали, и разрезали большой квадрат по зелёным линиям. В результате картонный квадрат 9×9 распался на части. Сколько частей получилось?

Ответ.180 частей.

Решение. Квадрат распадётся на маленькие треугольники, и квадраты, состоящие из двух таких треугольников (ниже на рисунке показаны маленькие треугольники и 4 квадрата). Отдельные треугольники расположены по сторонам квадрата, и их будет столько, каков периметр квадрата, т.е. 36. Из четырёх маленьких треугольников можно составить квадрат со стороной 1. Площадь такого квадрата равна 1, значит, площадь треугольника равна $1/_4$, и все треугольники вместе составят по площади $1/_4 \cdot 36 = 9$ единиц. Остальная площадь $9 \cdot 9 - 9 = 72$ будет разбита на квадраты площади $1/_2$, следовательно, таких квадратов будет $72 \cdot 2 = 144$. Тогда общее число частей равно $144 + 36 = 180$.



Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Ошибка в подсчёте при верном разбиении на части – 10 баллов. Неверное разбиение на части с ответом «400» – 2 балла. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

4) Красная Шапочка несла пирожки бабушке. Она вышла в 10 часов утра. Пройдя три четверти пути, она встретила Серого Волка, поговорила с ним и угостила пирожками, это заняло 10 минут. Зато Серый Волк подвёз её до дома бабушки, а скорость у Волка была в три раза больше, чем у Красной Шапочки. Если бы Красная Шапочка не встретила волка, и шла бы, не останавливаясь, и с постоянной скоростью, она затратила бы на дорогу такое же время. В какое время Красная Шапочка пришла к бабушке?

Ответ. 11 часов.

Решение. Рассмотрим последнюю четверть пути. Красная Шапочка преодолела её на 10 минут быстрее, чем обычно, при этом она двигалась в три раза быстрее. Значит, это заняло в три раза меньше времени. Разница между обычным и новым временами равна удвоенному новому времени и составляет 10 минут. Поэтому новое время равно 5 минутам, а обычное время, за которое Красная Шапочка проходит четверть пути, – 15 минутам. На первые три четверти пути тогда требуется 45 минут, а весь путь Красная Шапочка проделала за 60 минут.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Решение найдено подбором – 10 баллов. Допущены ошибки при составлении уравнений – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.*

5) В стране Зенаб используют монеты в $5, 10, 15, 20$ зенов. Вход через городские ворота стоит 5 зенов. К воротам подошли 8 путников. У них были только монеты в 10, 15, 20 зенов. Сдачи стражи ворот не давали. Тем не менее, каждый оплатил свой вход и получил сдачу от других путников. Какое наименьшее число монет могло у них быть?

Ответ.10.

Решение. 1) Оценка. Каждому человеку полагается сдача, то есть вместе они должны получить на сдачу хотя бы 8 монет. Оплата за всех составляет 40 лагов, то есть не меньше 2 монет. Таким образом, монет не меньше $8 + 2 = 10$. 2) Пример. Рассмотрим четырёх человек.

1-й	2-й	3-й	4-й
20	15	15	10, 10

Пусть первый положит в миску 20 зенов, тем самым рассчитавшись за всех четверых. Второй вернёт первому 15 зенов. Четвёртый вернёт второму 10 зенов. Третий отдаст четвёртому 15 зенов, а получит от него 10 зенов. Тогда у каждого окажется на 5зенов меньше, чем было. Для этих четверых человек потребовалось 5 монет. Среди оставшихся четверых распределим монеты аналогично, всего у 8 человек $5 \cdot 2 = 10$ монет.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Построен верный пример, но не проведена оценка – 18 баллов. В предложенной схеме есть ошибка, после исправления которой схема станет верной – 15 баллов. Предложена схема с не наименьшим числом монет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 2 балла.*