Математика. 10 класс

Шифр	ФИО	Итого балл	Статус
MA0001116525	Хоменко Максим Андреевич	100	Победитель
MA0000976425	Валентинова Мария Николаевна	95	Победитель
MA0001432825	Гаврилов Иван Александрович	95	Победитель
MA0001174625	Карпов Дмитрий Игоревич	92	Победитель
MA0001818725	Дистанов Наиль Рамилевич	90	Победитель
MA0001716525	Иванов Фёдор Дмитриевич	83	Победитель
MA0001766825	Бадретдинова Аделя Ирековна	82	Победитель
MA0001097825	Лазарев Михаил Олегович	82	Победитель
MA0001831825	Жуковский Николай Михайлович	81	Победитель
MA0001710125	Семенова Ирина Андреевна	81	Победитель
MA0001677025	Юдин Артём Юрьевич	80	Победитель
MA0001092525	Гафаров Тимур Робертович	76	Победитель
MA0001017625	Затеев Владислав Павлович	76	Победитель
MA0001289025	Баландин Максим Игоревич	75	Победитель
MA0001731225	Крючков Матвей Виллиевич	74	Победитель
MA0001164425	Шашкина Марья Владимировна	70	Призёр II степени
MA0001113225	Алексеев Григорий Андреевич	69	Призёр II степени
MA0001778725	Горбунов Артём Олегович	68	Призёр II степени
MA0001448925	Сорокина Арина Дмитриевна	68	Призёр II степени
MA0001880525	Овечкина Светлана Павловна	67	Призёр II степени
MA0001793825	Гусаков Степан Васильевич	66	Призёр II степени
MA0001813625	Федорова Ника Александровна	66	Призёр II степени
MA0001057825	Атанов Андрей Андреевич	65	Призёр II степени
MA0001539325	Блинов Тимофей Сергеевич	64	Призёр II степени
MA0000967225	Мариева Ульяна Олеговна	63	Призёр II степени
MA0001163625	Радугина Елизавета Юрьевна	62	Призёр II степени
MA0001032525	Сатрутдинов Амир Булатович	62	Призёр II степени
MA0001289925	Филимончев Александр Сергеевич	62	Призёр II степени
MA0001627825	Гладченко Макар Владимирович	61	Призёр II степени
MA0001536825	Ксалов Адам Асланович	61	Призёр II степени
MA0001792325	Привалова Ирина Сергеевна	61	Призёр II степени
MA0001591125	Султанов Кирилл Александрович	61	Призёр II степени
MA0001050825	Витевский Алексей Александрович	60	Призёр III степени
MA0001750025	Молодых Юлия Сергеевна	60	Призёр III степени
MA0001093625	Почтеннов Антон Павлович	60	Призёр III степени
MA0001046525	Султанов Андрей Антонович	60	Призёр III степени
MA0001981825	Калашникова Анастасия Алексеевна	59	Призёр III степени
MA0001431825	Мошкин Даниил Максимович	59	Призёр III степени
MA0001600225	Дуванов Лука Сергеевич	58	Призёр III степени
MA0001235525	Урезалов Михаил Александрович	58	Призёр III степени
MA0001086125	Марудин Святослав Павлович	57	Призёр III степени

MA0001282425	Белевская Дарья Владимировна	56	Призёр III степени
MA0000992725	Безруких Дмитрий Константинович	55	Призёр III степени
MA0001728725	Гузанова Влада Олеговна	55	Призёр III степени
MA0001823025	Александрова Дарина Николаевна	52	Призёр III степени
MA0001200925	Панюшкина Мария Дмитриевна	52	Призёр III степени
MA0001838425	Артамонова Полина Александровна	51	Призёр III степени
MA0001043825	Бабоев Амир Казимович	51	Призёр III степени
MA0001034925	Ефимов Матвей Сергеевич	51	Призёр III степени
MA0001236525	Семенов Тимофей Михайлович	51	Призёр III степени
MA0001474525	Соктоев Галсан Жамсаевич	51	Призёр III степени
MA0001030025	Ширкунов Евгений Дмитриевич	51	Призёр III степени
MA0001745225	Гребнева Анастасия Вячеславовна	50	Призёр III степени

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20	–	100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 1.

Маша: Н – 3, В – 2 } 5

Петя: Н – 1, В – 2, П – 3 } 6

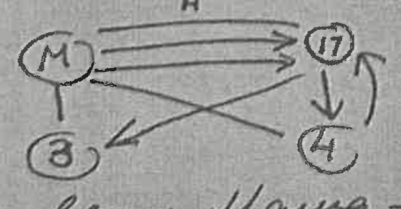
В условии не сказано, ~~что~~ сколько партий они играли друг с другом и с каждым из других участников и сколько было участников. Значит, чтобы у них число игр с другими ребятами было наименьшим, друг с другом они должны сыграть как можно больше партий. Найдем их max количество.

Число ничьих партий у них между собой должно быть одинаков max(ничьих) = 1.

Т.к. Маша выиграла 2 раза, то для увеличения общих партий надо, чтобы она выиграла оба раза у Пети. Это возможно, т.к. Петя проиграл 3 раза: из них 2 раза Маше.

Общие партии: 1 ничья, 2 раза Маша выиграла — это max.

Т.е. Маша min сыграет 2 партии с другими (это будут ничьи), а Петя min сыграет 3 партии с другими (1 проигрыш и 2 выигрыша). Это могло быть, например при 4-х участниках



"→" – выигрыш

"—" – ничья

Ответ: Маша – 2, Петя – 3, всего 5 игр min с другими ребятами.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 2.

$(a;b)\quad a\neq 0,\ b\neq 0$

$c_1=\frac{a}{b},\ c_2=ab,\ c_3=a-b,\ c_4=a+b$ – арифм. прогрессия.

$$\begin{cases} c_2=c_1+d\\ c_3=c_2+d\\ c_4=c_3+d\end{cases}\quad \begin{cases} ab=\frac{a}{b}+d & (1)\\ a-b=ab+d & (2)\\ a+b=a-b+d & (3)\end{cases}$$

из (3): $d=2b$, подставим в (1) и (2)

$$\begin{cases} ab=\frac{a}{b}+2b\\ a-b=ab+2b\end{cases}\ \Big|\cdot b\neq 0\quad \begin{cases} ab^2=a+2b^2\\ a-3b=ab\end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2(a-2)=a\\ b(a+3)=a\end{cases}\quad (4)$$

1) Рассмотрим случай $a\neq 2,\ a\neq -3$.

$$\begin{cases} b^2=\frac{a}{a-2}\\ b=\frac{a}{a+3}\end{cases}\quad \frac{a}{a-2}=\left(\frac{a}{a+3}\right)^2 : a\neq 0\quad \frac{1}{a-2}=\frac{a}{a^2+6a+9}$$

$a^2+6a+9=a^2-2a,\quad a=-\frac{9}{8},\quad b=\frac{-\frac{9}{8}}{-\frac{9}{8}+3}=-\frac{9}{15}=-\frac{3}{5}$

2) $a=2$. Тогда система (4) примет вид:

$$\begin{cases} 0=2\\ 5b=2\end{cases}$$ нет решений.

3) $a=-3$. Система (4) примет вид:

$$\begin{cases} -5b^2=-3\\ 0=-3\end{cases}$$ нет решений.

Получается одна пара: $a=-\frac{9}{8},\ b=-\frac{3}{5}$. Тогда $d=-\frac{6}{5}$

Проверим:

$c_1=\frac{a}{b}=\frac{15}{8}$

$c_2=\frac{27}{40}\qquad c_2=\frac{15}{8}-\frac{6}{5}=\frac{27}{40}$ – верно

$c_3=-\frac{21}{40}\qquad c_3=\frac{27}{40}-\frac{6}{5}=-\frac{21}{40}$ – верно

$c_4=-\frac{69}{40}\qquad c_4=-\frac{21}{40}-\frac{6}{5}=-\frac{68}{40}$ – верно

Ответ: $a=-\frac{9}{8};\ b=-\frac{3}{5}$; т.е. $\left(-\frac{9}{8};-\frac{3}{5}\right)$

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 3.

Всего раскрасок для куба $2^6 = 64$.

P_i – вероятность совпадения раскрасок, i – число зелёных квадратов.

$P_0 = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{64^2}$ $\quad P_6 = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{64^2}$

$i=1$ $\quad P_1 = \frac{6}{64}\cdot\frac{6}{64} = \frac{36}{64^2} = P_5$

$i=2$ ($i=4$) 2 зелёных без общей стороны – 3 – на противоположных.

$P_2' + P_4' = \frac{3}{64}\cdot\frac{3}{64} + \frac{3}{64}\cdot\frac{3}{64} = \frac{9+9}{64^2} = \frac{18}{64^2}$

$i=2$ ($i=4$) 2 зелёных с общей стороной – 12

$P_2'' + P_4'' = \frac{12}{64}\cdot\frac{12}{64} + \frac{12}{64}\cdot\frac{12}{64} = \frac{144+144}{64^2} = \frac{288}{64^2}$

$i=3$ 3 зелёных с общей вершиной – 8

$P_3' = \frac{8}{64}\cdot\frac{8}{64} = \frac{64}{64^2}$

$i=3$ 3 зелёных нет общей вершины – 12

$P_3'' = \frac{12}{64}\cdot\frac{12}{64} = \frac{144}{64^2}$

P(i зелёных $(6-i)$ красных) $= P$ ($(6-i)$ зел и i красн.) – это учли

Итого:

$P = \frac{1}{64^2} + \frac{1}{64^2} + \frac{36}{64^2}\cdot 2 + \frac{18}{64^2} + \frac{288}{64^2} + \frac{64}{64^2} + \frac{144}{64^2} =$

$= \frac{2+72+18+288+64+144}{64^2} = \frac{588}{64^2} = \frac{588}{4096} =$

$= \frac{294}{2048} = \frac{147}{1024}$

Ответ: $\frac{147}{1024}$

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 6 | 5 | 2 | 5 |

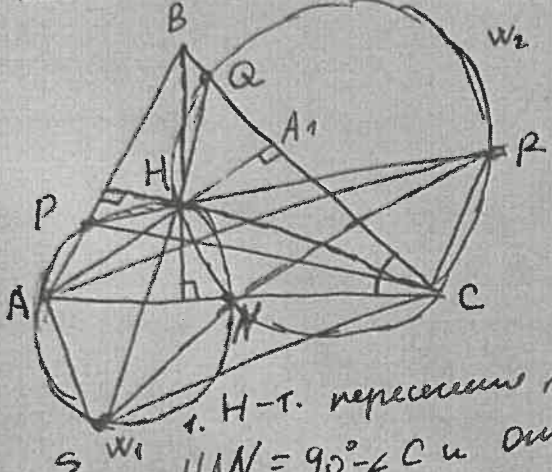
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 4.



а) доказать SRN – прямая

б) $S_{ARS} = S_{CRS}$

1. H – т. пересечения высот $\Rightarrow$ из $\triangle AA_1C$: $\angle A_1AC = 90° - \angle C$ +

а) 2. $\angle HAN = 90° - \angle C$ и опирается на $\breve{NH}$ W_1 +

3. $\angle HPN = \frac{1}{2}\breve{NH} = \angle HAN = 90° - \angle C$

4. $\angle SHN = 180° - \angle BHN = \angle C$ +

Не $\angle BHN$, а $\angle QHN$. Тем более, BCNH – не вписанный

5. $\angle HNS = 180° - \angle HSN - \angle SHN = 180° - \angle C - (90° - \angle C) = 90°$

$\Rightarrow$ HS – диаметр W_1

Аналогично доказывается, что в W_2: $\angle HNR = 90°$ и HR – диаметр W_2.

За описку баллы не снимали

6. $\angle HNS + \angle HNR = 90° + 90° = 180°$

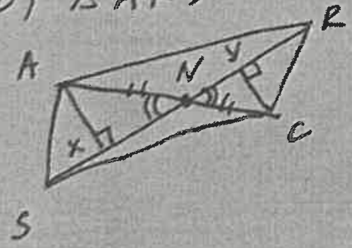
$\Rightarrow$ S, N, R – лежат на одной прямой

а) доказано.

б) $\triangle ARS$ и $\triangle CRS$ имеют общую сторону RS

$SR \cap AC = N$ $AN = NC$ (по усл.)

Проведем $AX \perp SR$ и $CY \perp SR$



$\triangle ANX = \triangle CNY$ (по гипотенузе и острому углу – вертик. углы)

$\Rightarrow AX = CY$.

$S_{\triangle ARS} = \frac{1}{2} SR \cdot AX$

$S_{\triangle CRS} = \frac{1}{2} SR \cdot CY$ $\Rightarrow S_{\triangle ARS} = S_{\triangle CRS}$

б) доказано.

Ответ: а), б) доказаны.

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 6 | 5 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 5.

$(n, m) = d$

$n + m^2 + d^2 = dnm$

1) $d = 1$

$n + m^2 + 1 = nm$

$n(m-1) = m^2 + 1$

если $m = 1$, то $n + 2 = n$ нет $n \in N$

$m \neq 1$ $n = \frac{m^2+1}{m-1} = \frac{m^2-1+2}{m-1} = m + 1 + \frac{2}{m-1}$

т.к $n \in N$, то $\frac{2}{m-1} \in N$, $m > 1$

$2 \vdots (m-1)$ $m - 1 = 1$ или $m - 1 = 2$ других вариантов нет

$m = 2$ $m = 5$

$m = 2$: $n + 4 + 1 = 2n$ $n = 5$

$m = 3$ $n + 9 + 1 = 3n$ $n = 5$

2) т.к $(n, m) = d$, то $n = a \cdot d$, $m = b \cdot d$

$ad + b^2 d^2 + d^2 = d^3 ab$ $: d \neq 0$

$d^2 \cdot ab - d(b^2 + 1) - a = 0$, $a, b \neq 0$

Квадратное уравнение отн-но d

$d_1 \cdot d_2 = \frac{-a}{ab} = -\frac{1}{b}$

$d_1 = 1$ - корень (см. пункт 1) $\Rightarrow$ $d_2 = -\frac{1}{b}$ $d_2 \notin N$, т.к $b \in N$

т.е 1) случай единственный

Ответ: $n = 5; m = 2$

$n = 5; m = 3.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 7 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	15	20	–	95

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 У Маши и Пети 1 ничья общая (1 партия) и 2 партии, где Петя проиграл, Маша выиграла. С другими ребятами у Маши 2 ничьи (2 партии), у Пети 2 выигрыша + 1 проигрыш (3 партии) ~~3~~

$3+2=5$ Ответ: 5 партий

№2 $\frac{a}{b}$; ab; $a-b$; $a+b$ – арифметическая прогрессия

$d=(a+b)-(a-b)=2b$ – разность прогрессии

$$\begin{cases}(a-b)-ab=2b\\ ab-\frac{a}{b}=2b\end{cases}\quad \begin{cases}a(1-b)=3b\\ a\left(b-\frac{1}{b}\right)=2b\end{cases}\quad \begin{cases}a=\frac{3b}{1-b}\\ a=\frac{2b:b^2-1}{b}\end{cases}\quad \begin{cases}a=\frac{3b}{1-b}\\ a=\frac{2b^2}{b^2-1}\end{cases}$$

$$\frac{2b}{1-b}=\frac{2b^2}{2b^2-1}$$

$$\frac{3}{1-b}-\frac{2b}{b^2-1}=0$$

$$\frac{3(1+b)+2b}{(1-b)(1+b)}=0$$

$$\frac{3+5b}{(1-b)(1+b)}=0 \qquad b\neq\pm1$$

$b=-0{,}6$

$$a=\frac{3\cdot(-0{,}6)}{1-(-0{,}6)}=\frac{-1{,}8}{1{,}6}=-\frac{18}{16}=-\frac{9}{8}=-1{,}125$$

Ответ: $a=-1{,}125$, $b=-0{,}6$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 После склеивания уже не важно, какая была развертка. Нам важно, сколько можно получить различных раскрасок куба. Учитывая, что раскраски, совпадающие при повороте кубов, считаются одинаковыми.

1) если у куба число зеленых граней равно 0, 1, 5, 6, то таких раскрасок по 1

2) если зеленых граней 2, а красных 4 или зеленых 4, а красных 2, т. е. 2 такие раскраски – грани того цвета, которого меньше, могут быть соседними или противоположными; раскрасок по 2.

3) если зеленых 3, то
   а) либо есть пара противоположных зеленых граней (тогда не важно, где 3я зеленая грань). Такие раскраски одинаковы $\Rightarrow$ раскраска одна.
   б) либо такой пары нет (тогда найдется вершина с 3мя зелеными гранями) Такая раскраска тоже одна.

$1+1+1+1+2+2+1+1=10$ Итого: 10 вариантов.

Всего равновероятностных раскрасок $2^6=64$. Они группируются в 10 групп раскрасок, которые считают одинаковыми. Вычислим число раскрасок в каждой группе

1) есть по 1 раскраске, где все кубы зеленые/ все красные
2) 1 грань зеленая, остальные красные – 6 способов. Аналогично, 6 способов с 1 красной гранью

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 7 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) если пару противополож. граней покрасить в зеленый, то получим 3 варианта.
Аналогично — 3 варианта с 2мя красными

4) 3 грани одного цвета
а) в каждом варианте из п.3 покрасим 1 из ост. 4х граней в зеленый цвет и получим раскраску с 3мя зелеными гранями. Этих вариантов $3\cdot 4 = 12$
б) 3 грани 1 цвета лежат у 1 вершины. Таких вариантов 8. Итого: $1+1+6+6+3+3+12+8 = 40$ (вариантов)

5) смежные 2 грани 1 цвета. Осталось $64-40=24$ (вар.)
12 на 2 зеленых грани, 12 на 2 красных

Вероятность получить одинаковые способы на 2х кубиков — это произведение 2х одинаковых вероятностей.
Сложим их для всех способов покраски.

$$P = \left(\frac{1}{64}\right)^2+\left(\frac{1}{64}\right)^2+\left(\frac{3}{64}\right)^2+\left(\frac{3}{64}\right)^2+\left(\frac{6}{64}\right)^2+\left(\frac{6}{64}\right)^2+\left(\frac{12}{64}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{12}{64}\right)^2+\left(\frac{12}{64}\right)^2+\left(\frac{8}{64}\right)^2=\frac{1+1+9+9+36+36+144+144+144+64}{64^2}=$$
$$=\frac{588}{4096}=\frac{147}{1024}$$ Ответ: $\frac{147}{1024}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МН0000976425
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N5 НОД$(n;m)=d$ $n;m$ - натуральные

$n+m^2+d^2=dnm$

Пусть $n=dN$, $m=dM$, тогда НОД$(N;M)=1$, N,M - натур.

$dN+d^2M^2+d^2=ddNdM$

$N+dM^2+d=d^2NM$

$N+d(M^2+1)=d^2NM$

$N-d^2NM=-d(M^2+1)$ ⋮ - делится без остатка

$N(1-d^2M)=-d(M^2+1)$

$N(d^2M-1)=d(M^2+1)$

(d^2M-1) и d - взаимнопростые, т.к. $d^2M ⋮ d$.

Т.к. $d(M^2+1) ⋮ (d^2M-1)$, то $(M^2+1) ⋮ (d^2M-1)$

$M+1=k(d^2M-1)$

Рассмотрим остаток от деления на M обеих частей ур-я.

Получаем остатки 1 и $(-k)$ соответственно $\Rightarrow k$ - хотябы $(M-1)$, $k \geqslant (M-1)$

$(M^2+1) \geqslant (M-1)\cdot(d^2M-1)$

1 случай $d \geqslant 2$, $(M^2+1) \geqslant (M-1)(4M-1)$

$(M^2+1) \geqslant 4M^2-5M+1$

$0 \geqslant 3M^2-5M$

$0 \geqslant M(3M-5)$ $\cancel{M \geqslant 0}$ $0 < M \leqslant \frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$

$M=1 \Rightarrow m=d$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 7 | 6 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$n+2m^2=m^2n$

$m^2(n-2)=n$, $n>2$

$m^2=\frac{n}{n-2}$, при $n>4$ нет, т.к. $\cancel{2}>\frac{n}{n-2}>1$

$n=4$ $m^2=2$ — не подходит

$n=3$ $m^2=3$ — не подходит

2 случай $d=1$

$n+m^2+1=nm$

$m^2+1=n(m-1)$

1) $(m^2+1)\vdots(m-1)$

2) $(m^2-1)\vdots(m-1)$, т.к. $(m^2-1)=(m-1)(m+1)$

из п.1 и п.2 $[(m^2+1)-(m^2-1)]\vdots(m-1)$

$2\vdots(m-1)$

$(m-1)=2$, $m=3$ $(m-1)=1$, $m=2$

$n=\frac{m^2+1}{m-1}=5$ $n=5$ 2 и 5 — взаимнопростые

5 и 3 взаимнопростые Ответ: 1) $n=5$, $m=3$ 2) $n=5$, $m=2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 7 | 6 | 4 | 2 | 5 |

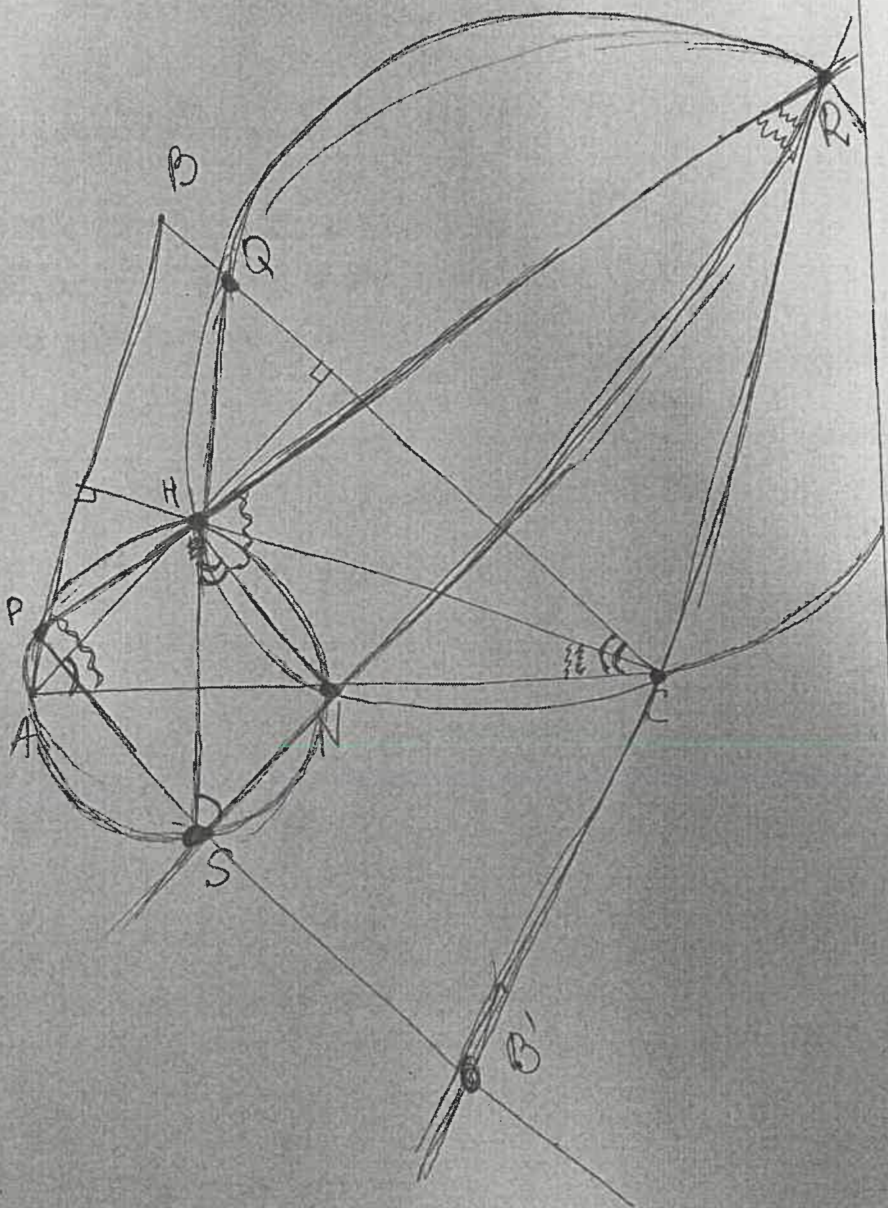
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N4



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА0000976425 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Докажем, что $\angle HNS = 90°$

Заметим, что $\angle HSN = \angle HAN$ (как опирающ. на 1 дугу)

$\angle SHN = \angle ACB$, т.к. $\angle ACB + \angle QHN = 180°$ (как противополож. во вписан. $QCNH$) и $\angle SHN + \angle QHN = 180°$ (как смежные)

$\angle ACB = \angle SHN$, но: $\angle ACB + \angle HNH = 90°$; т.к. $AH \perp BC$ (по сути, если продлить AH до $\cap$ с BC, то образуется прямоуг. Δ с гипотенузой AC и $\angle HAN$ и $\angle ACB$) $\Rightarrow \angle HAN = \angle HSN$ и $\angle SHN = \angle ACB$

$\angle SHN + \angle HAN = 90° \Rightarrow \angle HNS = 90°$ чтд.

$\angle HNR$ аналог. $= 90°$ (это можно показать ~~это~~ похожими выкладками, соотв. равные углы отмечены на рисунке)

Т.к. $\angle HNS = 90°$, HS - диаметр $w_1 \Rightarrow \angle HAS = 90°$ как опир. на диаметр. $\Rightarrow HA \perp AS$, но $HA \perp BC \Rightarrow$
$\Rightarrow BC \parallel AS$ аналог. $CR \parallel AB$.

Имеем N - середина AC — B' точка пересеч. CR и AS

Не закончено

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 2 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	15	20	20	–	95

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (a, b) ненулевые

I	$\frac{a}{b}$
II	$a \cdot b$
III	$a-b$
IV	$a+b$

$a \neq 0;\ b \neq 0$

разность прогрессии $d = (a+b) - (a-b) = 2b$

1) $\begin{cases} \frac{a}{b} + 2b = ab \\ \frac{a}{b} + 4b = a - b \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2b^2 = ab^2 \\ a + 4b^2 = ab - b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2b^2 = ab^2 \ (1) \\ a + 5b^2 = ab \ (2) \end{cases}$

(1): $a + 2b^2 = ab^2$

$a - ab^2 = -2b^2$

$\cancel{a = 1}$

$a \cdot (1 - b^2) = -2b^2$, $b^2 = 1$ не явл. усл. решения ур-ия

поделим обе части на $(b^2 - 1)$

$a = \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - 1}$

(2): $\frac{2b^2}{b^2-1} + 5b^2 = \frac{2b^3}{b^2-1}$

$\cancel{2b^2 + 5b^2(b^2-1) = 2b^3}$

$\cancel{b^2(2+5}$

$2b^2 + 5b^2(b^2-1) = 2b^3$

$b^2(2 + 5b^2 - 5 - 2b) = 0$

$\left[\begin{array}{l} b^2 = 0 \\ 5b^2 - 2b - 3 = 0 \end{array}\right.$

$D = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 4 + 60 = 8^2$

$b = \frac{2 \pm 8}{10}$ $\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b = 0 \text{ – не подходит по усл} \\ b = 1 \text{ – не подходит по решению} \\ b = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$

$b = -\frac{3}{5}$, $a = \frac{2 \cdot \frac{9}{25}}{\frac{9}{25} - 1} = -\frac{9}{8}$

Ответ: $a = -\frac{9}{8}$; $b = -\frac{3}{5}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 1 4 3 2 8 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1)

Маша 5 раз: 3 ничьи; 2 победы

Петя 6 раз: 1 ничья; 2 победы; 3 поражения

Чтобы Маша и Петя сыграли с другими ребятами наим. число игр нужно чтобы они сыграли друг с другом наиб. число игр. Поскольку у Пети 1 ничья, то они могли сыграть максимум 1 раз в ничью; у Маши 2 победы, а у Пети 3 поражения, т.е. Маша могла победить Петю только 2 раза. Других исходов в партии м/д Петей и Машей невозможно, т.к. Маша не проиграла ни разу значит Они могли сыграть максимум 3 партии, тогда с другими ребятами Маша сыграла 2 партии, а Петя — 3 партии, всего 5

Ответ: Маша 2; Петя — 3; всего 5

№3

Выпишем всевозможные раскладки кубика с вероятностью их возникновения для 1 школьника

6 зел и 0 красных — 1 способ с ~~8~~ $p = \frac{1}{64}$

5 зел и ~~0~~ 1 красных — 1 способ с $p = \frac{6}{64}$

4 зел. и 2 красных — 2 способа:

1сп: красные напротив друг друга $p = \frac{3}{64}$

2сп: красные рядом друг с другом $p = \frac{\frac{6 \cdot 4}{2}}{64} = \frac{12}{64}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	3	2	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№3 продолжение

3 зелен и 3 красн. — 1 способ с $P = \dfrac{C_6^3}{64} = \dfrac{\frac{6!}{3!\,3!}}{64} = \dfrac{\frac{4\cdot5\cdot6}{6}}{64} = \dfrac{20}{64}$

Тут 2 случая, и , поэтому надо отдельно считать

2 зел и 4 красн — аналогично 2 красн и 4 зелен

1 зел и 5 красн — аналогично 1 красн и 5 зелен

0 зел и 6 красн. — аналогично 0 красн и 6 зелен.

Получим, что их кубы совпадают если ~~совпадут~~ совпадут способы раскраски. тогда искомая вероятность:

$$P = \left(\frac{1}{64}\right)^2 + \left(\frac{6}{64}\right)^2 + \left(\frac{3}{64}\right)^2 + \left(\frac{12}{64}\right)^2 + \left(\frac{20}{64}\right)^2 + \left(\frac{12}{64}\right)^2 + \left(\frac{3}{64}\right)^2 + \left(\frac{6}{64}\right)^2 + \left(\frac{1}{64}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+36+9+144+400+144+9+36+1}{64^2} = \frac{780}{4096} = \frac{195}{1024}$$

Ответ: $\frac{195}{1024}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 2 | 8 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

15

$n+m^2+d^2=dnm$, m^2, d^2 и $d\cdot n\cdot m$ кратно d^2, тогда

n тоже делжен делиться на d^2, $d^2\neq 0$

пусть $n=a\cdot d^2$, $m=b\cdot d$, тогда

$a\cdot d^2+b^2d^2+d^2=d^4ab$

Разделим обе части на d^2, $d^2\neq 0$

$a+b^2+1=d^2ab$

$a+b^2+1-d^2ab=0$

$a-d^2ab=-b^2-1$ (1) - первое равенство

$a(1-d^2b)=-b^2-1$

$a=\dfrac{-b^2-1}{1-d^2b}$, по условию a - натур. число, т.е.

$(-(b^2+1))$ кратно $(1-d^2b)$, значит $d=1$, тогда из (1)

рав-ва оно примет вид $a+b^2+1=ab$

$b^2-ab+a+1=0$

рассм. это уравнение как квадратное относительно b, тогда $D=a^2-4a-4=a^2-4a+4-8=\cancel{(a-2)^2}$

$=(a-2)^2-8$, т.к. b явл. натуральным числом, D должен быть полным квадратом, а единственные квадраты отличающиеся на 8 - это 1 и 9., т.е.

$(a-2)^2=9$

$\left[\begin{array}{l} a-2=3 \\ a-2=-3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-1 \end{array}\right.$ - невозможно, т.к. $a\in N$ (натур. числам)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 1 4 3 2 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 продолжение

$a=5$, тогда $b=\frac{a\pm\sqrt{1}}{2}$, $\frac{5\pm1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=2 \end{array}\right.$, т.е. нас удовлетворяют пары $m=3, n=5$ и $m=2, n=5$

Проверка:

$m=3$ $n=5$, тогда $d=1$

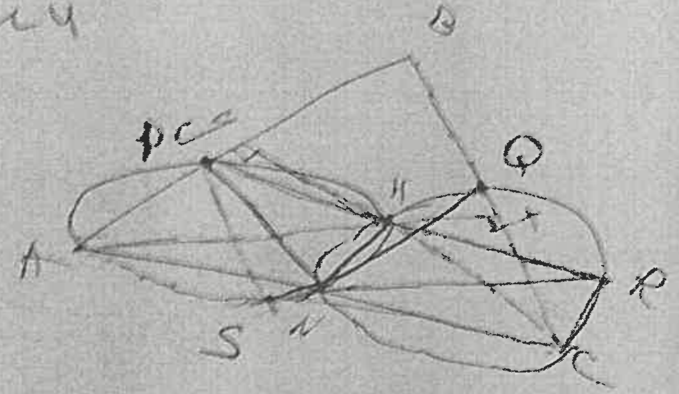
$5+9+1=5\cdot3\cdot1$ – верно

$m=2$ $n=5$ тогда $d=1$

$5+4+1=5\cdot2\cdot1$ – верно

Ответ: $m=3$ $n=5$ и $m=2$ $n=5$

№4



Дано: $\triangle ABC$

$AN=NC$

$AX\perp BC$

$CY\perp AB$

$P, H, N, S, A \subset w_1$

$H, Q, R, C, N \subset w_2$

Док-ть, что R, N и S лежат на 1 прямой, т.е. $\angle RNS$ – разв.

Решение:

1) пусть $\angle HSA=\beta$, тогда $\angle ANH=\beta$ (как опирающиеся) тогда $\angle HNC=180-\beta$ (смежн)

2) $HQCN$ – вписан. в окружн. т.е. $\angle HQC=\angle HNC=\beta$

т.е. $\angle HQY=\angle HSA$, зн. $BC \parallel AS$, зн. $\angle HAS=\angle BXH=90°$

1	2	3	4	5	6	Σ

AHNS - вписан в окр

т.к. $\angle SNH = 180 - \angle HAS = 90^\circ$

аналогично доказыв, что $RC \parallel AB$, зн.

$\angle RNH = 90^\circ$, тогда $\angle RNH + \angle SNH = 180^\circ$

т.к $\angle RNS$ = развернутый, т.е. т R, N, C - лежат на одн прямой

2) $S_{ARS} = S_{ARN} + S_{ASN}$

$S_{CRS} = S_{CRN} + S_{CNS}$

$S_{ARN} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot NR \cdot \sin\alpha$, где $\angle ARN = \alpha$

$S_{ASN} = \frac{1}{2} AN \cdot NS \cdot \sin\alpha$

$S_{CRN} = \frac{1}{2} CN \cdot NR \cdot \sin\alpha$

$S_{CNS} = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot NS \cdot \sin\alpha$

$S_{ARS} = \frac{1}{2} AN \cdot \sin\alpha (NR + NS) = \frac{1}{2} (AN \cdot SR \cdot \sin\alpha)$

$S_{CRS} = \frac{1}{2} CN \cdot \sin\alpha (NR + NS) = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot SR \cdot \sin\alpha$

А т.к. $CN = NA$, то $S_{ARS} = S_{CRS}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 7 4 6 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	20	20	1	–	77

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

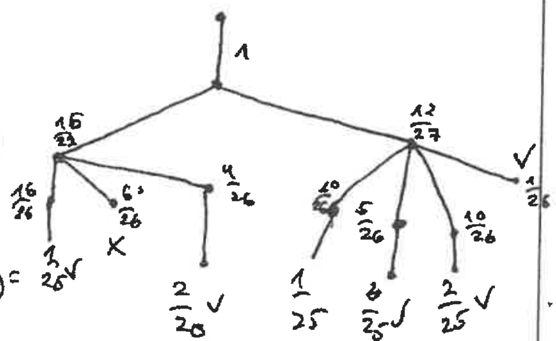
$$\frac{a}{b} \in \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right) \rightarrow \frac{a}{b} \in \left(\frac{4\cdot 19}{11\cdot 19}; \frac{7\cdot 11}{19\cdot 11}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} \in \left(\frac{76}{209}; \frac{77}{209}\right)$$

Продолжение на листе №1

№3

~~I соединим какие-то две точки~~

~~II Вероятность того, что соединим какую-то хорду с уже красной~~



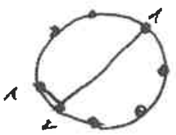
Всего отрезков (формула, как у полного графа) $= \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

I покрасим какой-то отрезок

II Вероятность того, что ~~соединим~~ покрасим отрезок, соед. уже покрашенную точку с какой-то другой $\frac{12}{27}$, что нет $\frac{15}{27}$

(12 – удовлетворяют, 27 – всего вариантов осталось)

III Рассмотрим правую ветку (~~соединим~~ покрасим)



Отрезков не закрашенных осталось 26

Вероятность того, что ~~соединят~~ покрасят отрезок, соед. две точки и получится Δ – $\frac{1}{26}$

Вероятность того, что ~~соединят~~ покрасят отрезок, соед. точки, у которых степень 1, с какими-то другими точками – $\frac{10}{26}$, тогда чтобы получился Δ подходят 2 отрезка из 25 $\Rightarrow \frac{2}{25}$

Вероятность того, что ~~соединят~~ покрасят отр, соед. точку со степенью 1 с какой-то др. точкой – $\frac{5}{26}$, тогда, чтобы получился Δ подходят 3 отрезка из 20 $\Rightarrow \frac{3}{25}$

P, что ~~соединят~~ закрасят отр, соед. не закрашенные точки $\frac{10}{26}$, тогда чтобы получился Δ подходит только один отрезок $\Rightarrow \frac{1}{25}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 4 | 6 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

IV Рассмотрим левую ветку

Вероятность того, что ~~соединят~~ покрасят отрезок, соединяющий две уже закрашенные точки $\frac{4}{26}$, тогда чтобы получился Δ подходят 2 из 25 отрезков — $\frac{2}{25}$

Вероятность того, что ~~соединят~~ покрасят отрезок, соединяющий закрашенную точку с незакрашенной $\frac{16}{26}$. Тогда, чтобы получился Δ подходит лишь один отрезок из 25 $\Rightarrow \frac{1}{25}$

Вероятность того, что покрасят отрезок, соед. непокрашенные точки — $\frac{6}{26}$, тогда Δ никак не получить

Тогда вероятность выполнения условия:

$$\frac{12}{27}\cdot\frac{1}{26}+\frac{12}{27}\cdot\frac{10}{26}\cdot\frac{2}{25}+\frac{12}{27}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{3}{25}+\frac{12}{27}\cdot\frac{10}{26}\cdot\frac{1}{25}+\frac{15}{27}\cdot\frac{16}{26}\cdot\frac{1}{25}+\frac{15}{27}\cdot\frac{4}{26}\cdot\frac{2}{25}=$$

$$=\frac{12}{27\cdot 26}\cdot\left(1+\frac{10\cdot 2}{25}+\frac{5\cdot 3}{25}+\frac{10}{25}\right)+\frac{15}{27\cdot 26}\cdot\left(\frac{16}{25}+\frac{4\cdot 2}{25}\right)=$$

$$=\frac{12}{27\cdot 26}\cdot\left(\frac{25+20+15+10}{25}\right)+\frac{15}{27\cdot 26}\cdot\left(\frac{16+8}{25}\right)=$$

$$=\frac{\cancel{12}^{\cancel{4}\,2}\cdot\cancel{70}^{14}}{\cancel{27}_{9}\cdot\cancel{26}_{13}\cdot\cancel{25}_{5}}+\frac{\cancel{15}^{8}\cdot\cancel{24}^{12}}{\cancel{27}_{9}\cdot\cancel{26}_{13}\cdot\cancel{25}_{5}}=\frac{28+12}{9\cdot 13\cdot 5}=\frac{\cancel{40}^{8}}{9\cdot 13\cdot\cancel{5}}=\frac{8}{117}$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

Лист 2 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 4 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) Всего игр было сыграно $\frac{3+5+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$ игр

2) Т.к. бельчонки либо остаются либо уходят после игры, то каждый бельчонок участвует как минимум через игру (еще раз после сыгранной им игры), то сыграл всего 3 раза, тогда, т.е. Дима потому что тогда он бы играл как минимум 4 раза, то он не мог участвовать в первой игре,

3) Поэтому из п.2 следует, что первый матч играли Петя и Захар. Во втором матче участвовали тогда выигравший первый матч и Дима, тогда второй матч проиграл именно Дима, ведь если бы он выиграл, то он бы участвовал в следующем матче, тогда он бы сыграл больше трех раз, что противоречит условию

Ответ: во второй партии проиграл Дима

№2

Продолжение

$$\begin{cases} \frac{a}{b} > \frac{76}{209} \\ \frac{a}{b} < \frac{77}{209} \end{cases} \quad \begin{cases} 209a > 76b \\ 209a < 77b \end{cases} \Rightarrow 76b < 209a < 77b$$

I $a=1 \Rightarrow 76b < 209 < 77b$ $b=2$ – не уд ($77b=154$); $b=3$ – не уд ($77b=231$, $76b=228$) — н.р.

II $a=2 \Rightarrow 76b < 418 < 77b \Rightarrow b=6 \Rightarrow 77b=462$ X

(*) Во время перебора буду подставлять b, чтобы 77b было больше

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 7 4 6 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$209a$ на min число, т.к. если $77b < 209a$, то не выполняется условие, а именно min, потому что если найдется $77b'$, которое больше $77b_{min}$, и при этом будет выполняться условие, то и для $77b_{min}$ это условие выполняться будет, при этом b_{min} будет меньше b'

$b=8$

$76b=635$

III $a=3 \Rightarrow 76b < 627 < 77b \Rightarrow 77b = 693$ – не уд.

$b=11$

IV $a=4 \Rightarrow 76b < 836 < 77b \Rightarrow 77b = 847$

$76b = 836$

V $a=5 \Rightarrow 76b < 1045 < 77b \Rightarrow b=14 \Rightarrow 77b = 1078$, $76b = 1064$ – не уд

VI $a=6 \Rightarrow 76b < 1254 < 77b \Rightarrow b=17 \Rightarrow 77b = 1309$, $76b = 1292$ ×

VII $a=7 \Rightarrow 76b < 1463 < 77b \Rightarrow b=19 \Rightarrow \begin{cases} 77b = 1463 \\ 76b = 1445 \end{cases}$ ×

$b=19 \Rightarrow \begin{cases} 77b = 1463+77 \\ 76b = 1463+77-19 \end{cases}$ ×

VIII $a=8 \Rightarrow 76b < 1672 < 77b \Rightarrow b=22 \Rightarrow \begin{cases} 77b = 1694 \\ 76b = 1672 \end{cases}$ ×

IX $a=9 \Rightarrow 76b < 1881 < 77b \Rightarrow b=25 \Rightarrow \begin{cases} 77b = 1925 \\ 76b = 1520 \end{cases}$ ×

X $a=10 \Rightarrow 76b < 2090 < 77b \Rightarrow b=28 \Rightarrow \begin{cases} 77b = 2156 \\ 76b = 2128 \end{cases}$ ×

XI $a=11 \Rightarrow 76b < 2299 < 77b \Rightarrow b=30$ $\begin{cases} 77b = 2310 \\ 76b = 2280 \end{cases}$ ✓

$2280 < 2299 < 2310$ – удовлетв.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 1 7 4 6 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Проверка:

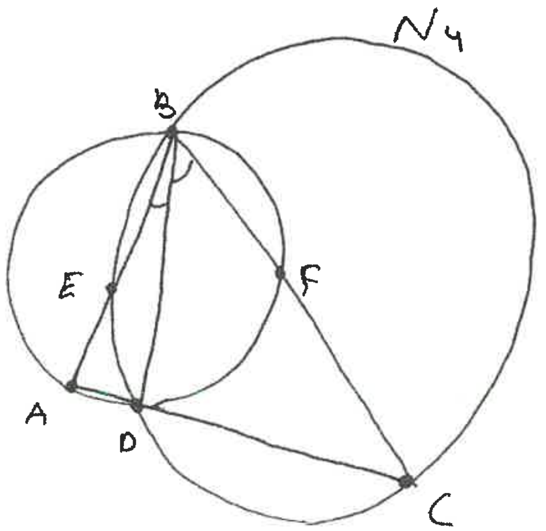
$$\frac{4}{11} < \frac{11}{30} < \frac{7}{19} \quad \Big| \cdot 19 \cdot 30 \cdot 11$$

$$\frac{4 \cdot 19 \cdot 30}{11 \cdot 30 \cdot 19} < \frac{11 \cdot 11 \cdot 19}{11 \cdot 30 \cdot 19} < \frac{7 \cdot 30 \cdot 11}{11 \cdot 30 \cdot 19}$$

$$2280 < 2299 < 2310 \ \checkmark$$

Ответ: $b = 30$

№4



Дано:

$\angle ABD = \angle DBC$

W_1 описана около $\triangle BDC$

W_2 описана около $\triangle ABD$

$W_1 \cap AB = E$

$W_2 \cap BC = F$

$AE = CF$

1) Т.к. $\angle ABD = \angle DBC \Rightarrow BD$ – бис $\Rightarrow$ по теореме о биссект. (о том, как бис-са делит сторону, на соотв. она провед.) $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = BC \cdot AD$

2) Т.к. AC и AB – секущие W_1, то по теореме о сек. и касат. ~~AE · AB = AD~~ $AE \cdot AB = AD \cdot AC$

3) Т.к. CA и CB – секущие W_2, то по теореме о сек. и касат. $CF \cdot BC = CD \cdot AC$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 7 | 4 | 6 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

из п.2 и п.3

$$\begin{cases} AE \cdot AB = AD \cdot AC \\ \vdots \\ CF \cdot BC = CD \cdot AC \end{cases}$$

$$\frac{AE \cdot AB}{CF \cdot BC} = \frac{AD \cdot \cancel{AC}}{CD \cdot \cancel{AC}}$$

из п.1 $\Rightarrow AB \cdot DC = BC \cdot AD$

$$\frac{AE}{CF} = \frac{BC \cdot AD}{AB \cdot CD} = 1 \Rightarrow AE = CF$$

N5

$$x^4 - xy + y^3 = 0$$

Решения $(0;0)$; $($

Ответ: $(0;0)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА00018187 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	10	-	90

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

Пусть Миша - М, Лена - Л, Света - С.

М + Л + С

6+4+8=18

$\frac{18}{2}=9$ Всего было сыграно 9 партий.

М - 6 игр

Л - 4 игры

С - 8 игр ⇒ Света проиграла одну партию из 9-ти.

Есть три способа начать серию партий: МЛ, МС, СЛ. Переберем все варианты, учитывая все, что написано ранее.

МС < ЛС - МС - ЛС - МС - МЛ - МС - ЛС - МС ✓

МС < МЛ - МС - ЛС - МС - ЛС - МС - ЛС - МС ⊗

ЛС < ЛМ - МС - ЛС - МС - ЛС - МС - ЛС - МС ⊗

ЛС < МС - ЛС - МЛ - МС - ЛС - МС - ЛС - МС ⊗

МЛ < МС - ЛС - МС - ЛС - МС - ЛС - МС - ЛС ⊗

МЛ < ЛС - МС - ЛС - МС - ЛС - МС - ЛС - МС ⊗

Единственная подходящая серия партий: 1. МС - 2. ЛС - 3. МС - 4. ЛС - 5. МС - 6. МЛ - 7. МС - 8. ЛС - МС.

В 6 партии проиграла Лена

Ответ: Лена

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 1 8 7 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2

$\frac{7}{17} < \frac{a}{b} < \frac{5}{12}$

Медианта двух дробей это дробь, числитель которой равен сумме числителей, а знаменатель равен сумме знаменателей этих дробей.

Пример: $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, их медианта - $\frac{a+c}{b+d}$

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) > 0$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

По св-ву медианты, если записать две дроби и между ними их медианту, то получится ряд Фарея.

$\boxed{\text{def}}$ ряд Фарея - возрастающий ряд положительных несократимых правильных дробей.

$7+5=12$, $17+12=29$

$\frac{7}{17} < \frac{12}{29} < \frac{5}{12}$

$\frac{12}{29}$ - несократимая дробь, а значит наименьшее значение знаменателе $b=29$.

Ответ: 29

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 1 8 7 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

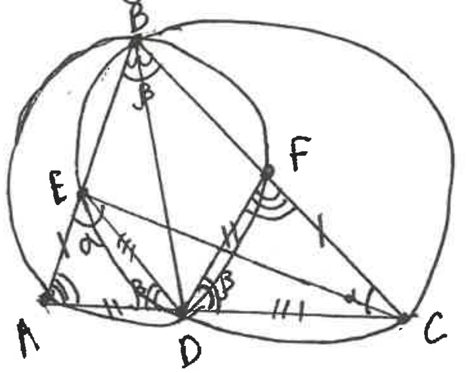
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N4

Доказать: $\angle ABD = \angle DBC$



Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \alpha$ и $\angle BAC = 180^\circ - \alpha - \beta$.

BEDC вписан в w1 (окружность)

⇓ свойство

$\angle BED + \angle BCD = 180^\circ$ (1)

$\angle CBE + \angle CDE = 180^\circ$ (2)

~~ABD~~ ABFD вписан в окружность w2

⇓ свойство

$\angle BAD + \angle BFD = 180^\circ$ (3)

$\angle ABC + \angle ADF = 180^\circ$ (4)

Из (4) $\angle ADF = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle FDC = \beta$

Из (2) $\angle CDE = 180^\circ - \angle CBE = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle ADE = \beta$

Из (1) $\angle BED = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle AED = \alpha$

Тогда $\angle BAC = \angle DFC = 180^\circ - \alpha - \beta$

⇓

$\triangle AED = \triangle FDC$ по двум углам и стороне между ними

$AD \overset{\text{и}}{=} FD$ и $ED = DC$

Рассмотрим $\triangle EDC$. Т.к. $ED = DC$, то $\angle DEC = \angle DCE$

$\angle EDC = 180^\circ - \beta$, тогда $\angle DEC = \angle DCE = (180^\circ - (180^\circ - \beta)) \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{\beta}{2}$

$\angle DEC = \angle DCE = \frac{\beta}{2}$

$\angle DCE = \angle DBE$ как углы, опирающиеся на одну дугу окружности.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	8	1	8	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Downarrow$

$\angle DCE = \angle DBE = \frac{\beta}{2}$

Т.к. $\angle ABC = \beta$, то $\angle DBC = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

$\angle DBE = \angle DBC = \frac{\beta}{2}$

$\angle DBE = \angle DBC$

ЧТД

№5

$x^4 + xy + y^3 = 0$

Пусть $x \neq 0$, $y \neq 0$. Поделим обе части уравнения на y^3.

$\frac{x^4}{y^3} + \frac{x}{y^2} + 1 = 0$

Замена $\frac{x}{y^2} = t$, $\frac{x^4}{y^8} = t^4 \Rightarrow \frac{x^4}{y^3} = t^4 \cdot y^5$

$t^4 \cdot y^5 + t + 1 = 0$

$t^4 \cdot y^4 \cdot y + t + 1 = 0$

Замена $t^4 y^4 = k \Rightarrow t = \frac{\sqrt[4]{k}}{y}$

$ky + \frac{\sqrt[4]{k}}{y} + 1 = 0 \quad | \cdot y$

$ky^2 + y + \sqrt[4]{k} = 0 \quad (*)$

Решим как квадратное ур-е относ. y

$D = 1 - 4k \cdot \sqrt[4]{k}$

Чтобы ур-е имело целые корни, нужно, чтобы дискриминант был квадратом ~~какого~~ ~~числа~~ какого-нибудь ~~числа~~ целого числа.

Пусть $D = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $1 - 4k\sqrt[4]{k} = m^2$

$(1-m)(1+m) = 4k\sqrt[4]{k}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 1 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Возможны случаи

$\begin{cases}1-m=4\\1+m=k^{\frac{5}{4}}\end{cases}$ (1) $\quad \begin{cases}1-m=-4\\1+m=-k^{\frac{5}{4}}\end{cases}$ (7)

$\begin{cases}1-m=k^{\frac{5}{4}}\\1+m=4\end{cases}$ (2) $\quad \begin{cases}1-m=-k^{\frac{5}{4}}\\1+m=-4\end{cases}$ (8)

$\begin{cases}1-m=1\\1+m=4k^{\frac{5}{4}}\end{cases}$ (3) $\quad \begin{cases}1-m=-1\\1+m=-4k^{\frac{5}{4}}\end{cases}$ (9)

$\begin{cases}1-m=2\\1+m=2k^{\frac{5}{4}}\end{cases}$ (4) $\quad \begin{cases}1-m=-2\\1+m=-2k^{\frac{5}{4}}\end{cases}$ (10)

$\begin{cases}1-m=2k^{\frac{5}{4}}\\1+m=2\end{cases}$ (5) $\quad \begin{cases}1-m=-2k^{\frac{5}{4}}\\1+m=-2\end{cases}$ (11)

$\begin{cases}1-m=4k^{\frac{5}{4}}\\1+m=1\end{cases}$ (6) $\quad \begin{cases}1-m=-4k^{\frac{5}{4}}\\1+m=-1\end{cases}$ (12)

А если $k^{5/4}=a\cdot b$, и $1-m \vdots a$, ?
$1+m \vdots b$

(1) $m=3$
$1-3=k^{\frac{5}{4}}$
$\sqrt[4]{k^5}=-2$
$\varnothing$

(2) $m=3$
$1-3=k^{\frac{5}{4}}$
$\sqrt[4]{k^5}=-2$
$\varnothing$

(3) $m=0$
$1=4k^{\frac{5}{4}}$
$k=\frac{\sqrt[5]{4}}{4}\notin \mathbb{Z}$

(4) $m=-1$
$0=2k^{\frac{5}{4}}$
$k=0$
$(k,m)=(0,-1)$
~~k=0, то ур-ие (*)~~
$k=0 \Rightarrow$ (*) имеет решение $y=0$

(5) $m=1$
$0=2k^{\frac{5}{4}}$
$(k,m)=(0,1)$
$k=0 \Rightarrow$ ур-е (*) имеет реш-е $y=0$

(6) $m=0$
$1=4k^{\frac{5}{4}}$
$k=\frac{\sqrt[5]{4}}{4}\notin \mathbb{Z}$

(7) $m=5$
$1+5=-k^{\frac{5}{4}}$
$\varnothing$

(8) $m=-5$
$6=-k^{\frac{5}{4}}$
$\varnothing$

(9) $m=2$
$3=-4k^{\frac{5}{4}}$
$\varnothing$

(10) $m=3$
$4=-2k^{\frac{5}{4}}$
$2=-k^{\frac{5}{4}}$
$\varnothing$

(11) $m=-3$
$4=-2k^{\frac{5}{4}}$
$2=-k^{\frac{5}{4}}$
$\varnothing$

(12) $m=-2$
$3=-4k^{\frac{5}{4}}$
$\varnothing$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

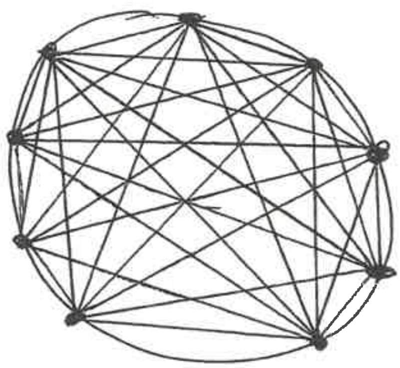
Ни одна из этих 12-ти систем не имеет решений в целых числах, кроме (4) и (5) систем, но у них решения такие, что ур-е (*) имеет решение $y=0$.

$\Downarrow$

Ур-е $x^4+xy+y^3=0$ не имеет решений в целых числах, кроме $(x,y)=(0,0)$

ЧТД

N3



${}_9C_2=36$ – всего отрезков

Найдем количество способов выбрать 4 отрезка из 36:

$${}_{36}C_4=\frac{36!}{4!\,(36-4)!}=\frac{36\cdot35\cdot34\cdot33}{4!}=$$

$$=\frac{36\cdot35\cdot34\cdot33}{24}=\frac{1260\cdot1122}{24}=\frac{1413720}{24}=58905$$

$$\begin{array}{l|l} 1413720 & 24 \\ -120 & 58905 \\ \;\;213 & \\ \;-192 & \\ \;\;\;217 & \\ \;\;\;216 & \\ \;\;\;\;\;120 & \\ \;\;\;\;-120 & \\ \;\;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 1 8 1 8 7 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Любые три точки, не лежащие на одной прямой, образуют треугольник. Найдем кол-во способов выбрать 3 точки из 9:

$$_9C_3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9\cdot8\cdot7}{6} = 84$$

$36-3=33$

У нас осталось 33 отрезка. После выбора треугольника мы должны выбрать еще один доп отрезок. Он будет как раз из этих 33-ех.

Таким образом, кол-во способов выбрать четыре отрезка так, чтобы они образовывали красный треугольник: $84\cdot33=2772$

$\Downarrow$

$$\frac{P(\text{Благоприятные случаи})}{P(\text{все случаи})} = \frac{2772}{58905} = 0{,}047 = 4{,}7\%$$

Ответ: 4,7%

Вер-ть считается в долях 1, а не в %.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000171 6525
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	3	-	83

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Если Дима играл в I партии, то все партий не больше 6.
Т.к. Среди партий 1-2 Дима был и среди партии 3-4 Дима был т.к. если не было, то в них обоих играли Петя и Захар, а это противоречит тому, что кто-то поменялся. Аналогично среди 5-6 Дима играл, т.е. он все 3 партии сыграл, а именно I, III, V.
Если была бы 7 партия, то Дима вышел бы играть в 4 раз, а он был только 3.
Но тогда П и З сыграли не более чем 3 между собой и еще 3 раза с Димой это $3\cdot 3+3=9$ игр, а они сыграли $6+5=11$ раз.
Значит в I партии играли Петя Захар.
Потом Дима, но если Дима выиграл бы вторую партию, то он бы снова с кем-то сыграл, т.е. и 3-ей партии он играл бы 2 раза, и потом снова либо он либо через 1, но тогда партий было бы меньше, чем нужно т.к. их явно не больше 6. Значит он проиграл и пример

П З
Д З
П З
Д П
П З
Д П
П З

Заметим, если бы Дима играл бы раньше партии 2,3,5 (т.е. если он играл в партиях (a, b, c) и верно, что ($a<2$, $b<3$, $c<5$) одно из хотя бы, то партий меньше чем 7,
=> выходов у Пети и Захара меньше чем 11, т.к. 7 партий max более возможных или было, когда Дима сыграл 3.
А если партий меньше то выходов не более чем $\leq 6\cdot 2-3=9$
6 партий П З, -3 т.к. в 3 был Дима.
Поэтому партии с Димой чередуются и Дима точно был во II и точно проиграл, иначе партий не хватило бы.
Ответ: Дима.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 7 1 6 5 2 5

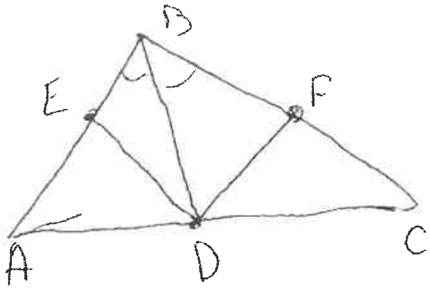
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



$\angle ABD = \angle DBC \Rightarrow BD$ - бисс по опр

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ по св-ву бисс. $\left(\frac{CB}{AB} = \frac{DC}{AD}\right)^*$

$BCDE$ - вписанный по усл т.к. $E \in \omega_1$, которая содержит точки B, D, C т.е. она опис окр ΔBDC.

$\Rightarrow AE \cdot AB = AD \cdot AC$ по св-ву степени точки A отн окр ω_1 (св-во соотр сек)

$ABFD$ - вписанный по усл т.к. $F \in \omega_2$, которая содержит точки A, B, D т.е. она опис окр ΔABD.

$\Rightarrow CF \cdot CB = CD \cdot CA$ по св-ву степени точки C отн. окр ω_2 (св-во отрезк)

$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB}$ $\quad CF = \frac{CD \cdot CA}{CB}$

$\frac{AE}{CF} = \frac{AD \cdot \cancel{AC}}{AB} \cdot \frac{CB}{CD \cdot \cancel{CA}} = \frac{AD \cdot CB}{AB \cdot CD}$ по $*$ $\frac{AD \cdot CB}{AB \cdot CD} = \frac{\cancel{AB} \cdot \cancel{DC}}{\cancel{AB} \cdot \cancel{CD}} = 1$

$\frac{AE}{CF} = 1$

$AE = CF$

ЧТД.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Если у нас имеется правильный треугольник, то либо у нас  либо 

Треугольник и отдельное ребро, либо треугольник и от одной вершины отходит ребро.

I случай  как выбрать 3 вершины под треугольник это C_8^3 и две из оставшихся под ребро это C_5^2 и перемножаем, т.к. для каждого треугольника новый вариант с ребром.

$C_8^3 \cdot C_5^2$

II случай

выбрать треугольник C_8^3 выбрать вершину для ребра из оставшихся это C_5^1 и оно идет к любой из вершин т.е. все случаи утраиваются. т.е. $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot 3$

Всего случаев выбрать 4 ребра это всего ребер $\frac{8\cdot7}{2}=28$

Выбрать их это C_{28}^4

т.е. ищем вероятность по формуле простой вероятности. Исходы удовлетворяющие данным, на все исходы

$$\frac{C_8^3 C_5^2 + C_8^3 C_5^1\, 3}{C_{28}^4} = \frac{\frac{8!}{3!\,5!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}+\frac{8!}{3!\,5!}\cdot\frac{5!}{4!\,1!}\cdot3}{\frac{28!}{24!\cdot4!}} = \frac{\frac{8!}{3!\,3!\,2!}+\frac{8!}{4!\,3!}\cdot3}{\frac{28!}{24!\,4!}} =$$

$$= \frac{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot2}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot3}{3\cdot2}}{\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{4\cdot3\cdot2}} = \frac{56\cdot10+28\cdot30}{7\cdot9\cdot13\cdot25} = \frac{560+840}{7\cdot9\cdot13\cdot25} = \frac{1400}{7\cdot9\cdot13\cdot25} = \frac{14\cdot4}{7\cdot9\cdot13} =$$

$$= \frac{8}{117}$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	1	6	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$x^4 - xy + y^3 = 0$

$x^4 + y^3 = xy$

$\frac{x^4+y^3}{x} = y$, Пусть $y \neq 0$ рассмотрим этот случай потом

y - целое по условию т.к. решаем в целых.

Значит $\frac{x^4+y^3}{x}$ - целое x^4+y^3 - целое, x - тоже целое, $x \neq 0$ (этот случай рассмотрим позже)

$\Rightarrow x^4+y^3 \vdots x$

$x^4 \vdots x \Rightarrow y^3 \vdots x \Rightarrow y \vdots x$ (т.к. если бы $y \not\vdots x$, то $y^3 = y \cdot y \cdot y \not\vdots x$)

Аналогично $\frac{x^4+y^3}{y} = x$ x - целое, x^4+y^3 - тоже целое y - целое

$2^4 \vdots 4$, но $2 \not\vdots 4$

Значит $x^4+y^3 \vdots y \Rightarrow x^4 \vdots y \Rightarrow x \vdots y$ (аналогично если $x \not\vdots y$, то $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x \not\vdots y$)

$\Rightarrow x \vdots y$ и $y \vdots x$, такое бывает только если $\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right.$

Т.к. $|x| \geq |y|$ и $|y| \geq |x| \Rightarrow |x| = |y|$

Если $x=y$, то $x^4 - xy + y^3 = x^4 - x^2 + x^3 = 0$ $x^2(x^2+x-1) = 0$. $\left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2+x-1=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ Т.к. в целых только $x=0$. $y^3=0$ $y=0$ $(0;0)$

Если $x=-y$, то $x^4 - xy + y^3 = y^4 + y^2 + y^3 = 0$ $y^2(y^2+y+1) = 0$ $\left[\begin{array}{l} y^2=0 \\ y^2+y+1=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y^2+y+1=0 \quad D = 1 - 4(1)(1) < 0. \Rightarrow \text{нет корней.} \end{array}\right.$

$y=0$. $\Rightarrow x^4=0$ $x=0$ $(0;0)$.

?. Видим, что ответ только пара чисел $(0;0)$

Засчитаем её и рассмотрели эти верхние случаи, где предположили, что

$x \neq 0$ и $y \neq 0$ Ответ: $(0;0)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	1	6	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$\frac{4}{11} = \frac{76}{209}$

$\frac{7}{19} = \frac{77}{209}$

$\frac{76}{209} < \frac{a}{b} < \frac{77}{209}$

Отсюда понимаем, что b хотя бы 210, т.е. $\frac{76}{209} < \frac{a}{210}$ $\frac{210 \cdot 76}{209} < a$, т.е. $a \geq 77$

$\frac{77}{210} < \frac{77}{209}$ $209 < 210$ ✓.

$\frac{77}{210} = \frac{7 \cdot 11}{10 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{30}$ гипотеза на 30.

Проверка, да и в принципе само решение на перебор.

$a > \frac{76b}{209}$; $a < \frac{77b}{209}$, a и b целые. Иначе понятно, что если целые и эта дробь рассмотрим все позже.

b=1 $a > \frac{76}{209}$ $a < \frac{77}{209}$

b=1 ⇒ $a \geq 1$ и $a < 0$ (W)

b=2 ⇒ $a \geq 1$ и $a < 0$ (W)

b=3 ⇒ $a \geq 2$ и $a < 1$ (W)

b=4 ⇒ $a \geq 2$ и $a < 1$ (W)

b=5 ⇒ $\frac{4}{11} < \frac{a}{5}$ $a > \frac{20}{11}$ $a \geq 2$ $\frac{a}{5} < \frac{7}{19}$ $a < \frac{35}{19}$ (W)

b=6 ⇒ $\frac{4}{11} < \frac{a}{6}$ $24 < 11a$ $a \geq 3$ $\frac{a}{6} < \frac{7}{19}$ $19a < 42$ $a < 3$ (W)

b=7 ⇒ $\frac{4}{11} < \frac{a}{7}$ $28 < 11a$ $a \geq 3$ $\frac{a}{7} < \frac{7}{19}$ $19a < 49$ $a < 3$ (W)

b=8 ⇒ $\frac{4}{11} < \frac{a}{8}$ $32 < 11a$ $a \geq 3$ $\frac{a}{8} < \frac{7}{19}$ $19a < 56$ $a < 3$ (W)

b=9 ⇒ $\frac{4}{11} < \frac{a}{9}$ $36 < 11a$ $a \geq 4$ $\frac{a}{9} < \frac{7}{19}$ $19a < 63$ $a < 4$ (W)

b=10 $\frac{4}{11} < \frac{a}{10}$ $40 < 11a$ $a \geq 4$ $\frac{a}{10} < \frac{7}{19}$ $a < \frac{70}{19}$ $a < 4$ (W)

b=11 $\frac{4}{11} < \frac{a}{11}$ $a \geq 5$ $\frac{a}{11} < \frac{7}{19}$ $a < 5$ (W)

b=12 $\frac{4}{11} < \frac{a}{12}$ $48 < 11a$ $a \geq 5$ $\frac{a}{12} < \frac{7}{19}$ $a < 5$ (W)

b=13 $\frac{4}{11} < \frac{a}{13}$ $52 < 11a$ $a \geq 5$ $\frac{a}{13} < \frac{7}{19}$ $a < 5$ (W)

b=14 $\frac{4}{11} < \frac{a}{14}$ $56 < 11a$ $a \geq 6$ $\frac{a}{14} < \frac{7}{19}$ $a < 6$ (W)

⇒ b=30 a=11 подходит.

b=15 $\frac{4}{11} < \frac{a}{15}$ $60 < 11a$ $a \geq 6$ $\frac{a}{15} < \frac{7}{19}$ $a < 6$ (W)

b=16 $\frac{4}{11} < \frac{a}{16}$ $64 < 11a$ $a \geq 6$ $\frac{a}{16} < \frac{7}{19}$ $a < 6$ (W)

b=17 $\frac{4}{11} < \frac{a}{17}$ $68 < 11a$ $a \geq 7$ $\frac{a}{17} < \frac{7}{19}$ $a < 7$ (W)

b=18 $\frac{4}{11} < \frac{a}{18}$ $72 < 11a$ $a \geq 7$ $\frac{a}{18} < \frac{7}{19}$ $a < 7$ (W)

b=19 $\frac{4}{11} < \frac{a}{19}$ $76 < 11a$ $a \geq 7$ $\frac{a}{19} < \frac{7}{19}$ $a < 7$ (W)

b=20 $\frac{4}{11} < \frac{a}{20}$ $80 < 11a$ $a \geq 8$ $\frac{a}{20} < \frac{7}{19}$ $a < 8$ (W)

b=21 $\frac{4}{11} < \frac{a}{21}$ $84 < 11a$ $a \geq 8$ $\frac{a}{21} < \frac{7}{19}$ $a < 8$ (W)

b=22 $\frac{4}{11} < \frac{a}{22}$ $88 < 11a$ $a \geq 8$ $\frac{a}{22} < \frac{7}{19}$ $a < 8$ (W)

b=23 $\frac{4}{11} < \frac{a}{23}$ $92 < 11a$ $a \geq 9$ $\frac{a}{23} < \frac{7}{19}$ $a < 9$ (W)

b=24 $\frac{4}{11} < \frac{a}{24}$ $96 < 11a$ $a \geq 9$ $\frac{a}{24} < \frac{7}{19}$ $a < 9$ (W)

b=25 $\frac{4}{11} < \frac{a}{25}$ $100 < 11a$ $a \geq 10$ $\frac{a}{25} < \frac{7}{19}$ $a < 10$ (W)

b=26 $\frac{4}{11} < \frac{a}{26}$ $104 < 11a$ $a \geq 10$ $\frac{a}{26} < \frac{7}{19}$ $a < 10$ (W)

b=27 $\frac{4}{11} < \frac{a}{27}$ $108 < 11a$ $a \geq 10$ $\frac{a}{27} < \frac{7}{19}$ $a < 10$ (W)

b=28 $\frac{4}{11} < \frac{a}{28}$ $112 < 11a$ $a \geq 11$ $\frac{a}{28} < \frac{7}{19}$ $a < 11$ (W)

b=29 $\frac{4}{11} < \frac{a}{29}$ $116 < 11a$ $a \geq 11$ $\frac{a}{29} < \frac{7}{19}$ $a < 11$ (W)

b=30 $\frac{4}{11} < \frac{a}{30}$ $120 < 11a$ $a \geq 11$ $\frac{a}{30} < \frac{7}{19}$ $a \leq 11$

Ответ: 30.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	1	7	6	6	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	2	–	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Ответ: Лена.

Док-во:

Всего сыграно 9 партий ($(6+4+8)\cdot\frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$) и т.к. Света сыграла 8 раз, то она не играла ровно в одной партии. Док-ем, что это была не 7-ая партия (т.е. в 6-ой она не могла проиграть):

Пусть такое произошло:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
С	С	С	С	С	С	I	С	С
II	I	II	I	II	I	II	I/II	II/I

где I и II Миша или Лена (док-ем, что это не так).

Если Светы нет в 7-ой партии, то во всех ост-ных она точно есть, значит I-ый и II-ой игроки проигрывали каждый раз чередуясь. Пусть игрок I играл со Светой в VI партии, тогда II играл в I, III, V, VII, а значит это точно не Лена, т.к. она играла 4 раз, а в этом случае ровно 5 раз. (VIII сыграл с I, IX с II или наоборот – нам без разницы, т.к. важно кол-во сыгранных партий). Т.е. I сыграет 5 раз и II – 5 раз, а Миша и Лена играли 6 и 4 соотв-но. Т.е такой случай невозможен.

см. далее на листе 2.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 6 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1 (прод-ие)

Итак, теперь док-ем, что в VI партии не мог проиграть Миша.

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX.

М I

I II

~~Пусть I - Света, тогда~~ Так как Миша играет 6 раз, где ~~М~~ ~~С~~ ровно 5 партией СМ и ровно одна ~~ЛС~~ МЛ, то т.к. n-ая партия МЛ, то до и после CI и CII чередуются, т.е: (I и II - м/б менять местами)

n n±1 n±2 n±3 . . . .

МЛ CI CII CI . . . .

~~Тогда максимально будет~~

Тогда если I - Лена, то М будет через одну партию играть, т.е не более 5 раз, значит I - Миша, а значит партии выглядят, как:

. . . СЛ СМ МЛ СМ СЛ СМ . . . .

n-2 n-1 n n+1 n+2 n+3 . . .

Если n - нечётн, тогда все партии вида СМ будут попадать на чётные, а их всего 4, т.е Миша сыграет ~~не~~ 5 партией - не удв. усл. задачи. Значит n - чётн и ~~Миша~~ ~~играл~~ Миша не играл в других четных партиях (см. 3)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 1 7 6 6 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

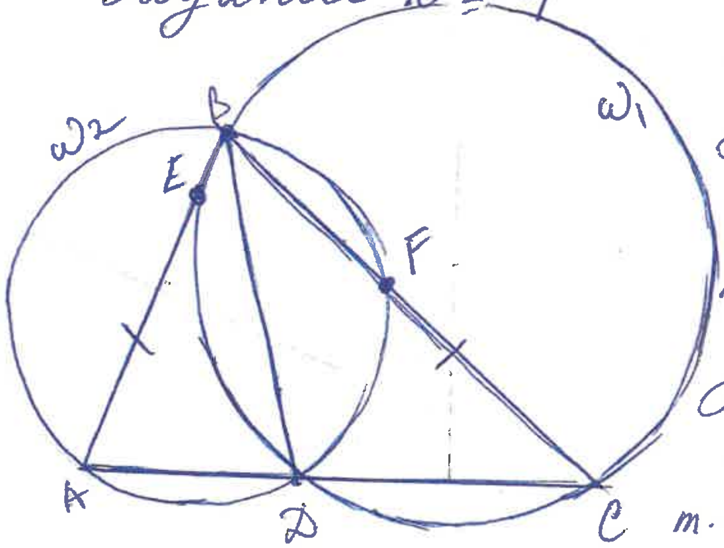
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 1 (прод-ие 2)

Миша не играл в четных партиях, значит тогда в VI могла быть сыграна только партия СЛ, а т.к. в VI партии не могла проиграть Света (см. ранее док-во), значит проиграла Лена. ЧТД.

Задание №: 4



По т.о секущ:

для ω_1:

$AE \cdot AB = AD \cdot AC$,

т.е $AC = \frac{AE \cdot AB}{AD}$

для ω_2:

$CB \cdot CF = CD \cdot CA$,

т.е $AC = \frac{CB \cdot CF}{CD}$

приравняем:

$\frac{AE \cdot AB}{AD} = \frac{CB \cdot CF}{CD}$, т.к $AE = CF$, то:

$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$, т.е. $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$, т.е

BD - это бис-са, а значит $\angle ABD = \angle DBC$ (по осн. теор. о бис-се) ЧТД.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 6 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Задание №5~~

~~$x^4+xy+y^3=0$, т.к x и $y \in \mathbb{Z}$, то скажем, что раз $(x^4+xy) \vdots |x|$, то и y^3 будет $\vdots |x|$ и $(xy+y^3) \vdots |y|$, значит и x^4 будет $\vdots |y|$, т.е. $y^3 \geq x$ и $x^4 \geq y$, значит~~

Задача №3

Всего $C_9^2 = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ отрезков. Способов покрасить какие-то 4 из них: C_{36}^4. Т.е всевозможных C_{36}^4, а благоприятных:

Выберем любые 3 вершины и отрезки, обр-ие стороны красим в красный, а ост-ся 4-ую красим любую из $36-3=33$ оставшихся.

Итого благоприятных: $C_9^3 \cdot C_{33}^1$.

$$P(\text{найдётся кр. } \Delta) = \frac{C_9^3\cdot C_{33}^1}{C_{36}^4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 33\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} = \frac{4}{85}$$

Ответ: $4/85$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 6 | 6 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №2.

Ответ: $b=29$.

Заметим, что целая часть $\left(\frac{7}{17}b\right)$ и $\left(\frac{5}{12}b\right)$ должны отличаться хотя бы на 1, причём, если они отлич-ся более, чем на 1, то b – не наим. точно. Тогда запишем ур-ие: (a и $b \in N$).

$$\left[\frac{7b}{17}\right] = \left[\frac{5b}{12}\right] - 1;$$

$$\frac{7b}{17} - \left\{\frac{7b}{17}\right\} = \frac{5b}{12} - \left\{\frac{5b}{12}\right\} - 1; \quad \Big| \cdot 17 \cdot 12$$

$$84b - 204\left\{\frac{7b}{17}\right\} = 85b - 204\left\{\frac{5b}{12}\right\} - 204;$$

$$b = 204 + \underbrace{204\left\{\frac{5b}{12}\right\}}_{(1)} - \underbrace{204\left\{\frac{7b}{17}\right\}}_{(2)}. \text{ где } x \text{ и } y \in Z.$$

(1) вида $\frac{x}{12}$, где $0 \le x < 12$, а (2) $= \frac{y}{17}$, где $0 \le y < 17$.

Док-ем, что b не менее 29 от противного.

$$29 > 204 + 204 \cdot \frac{x}{12} - 204\frac{y}{17} = 204 + 17x - 12y$$

$$175 < 12y - 17x < 17 \cdot 12 - 17x = 204 - 17x$$

$$17x < 204 - 175 = 17 \rightarrow x < 1, \text{ т.е } x = 0, \text{ т.е.}$$

$b = 12t$, где $t \in Z$, т.е $4\frac{16}{17}t < a < 5t$, но t тогда > 3, значит и $b > 29$ - ~~противоречие~~ А на 29 - есть пример при $a=12$, $b=29$. $7/17 < 12/29$, т.к. $203 < 204$ и $12/29 < 5/12$, т.к. $144 < 145$. ЧТД.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9 | 7 | 8 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
19	15	10	20	18	–	82

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Будем обозначать игру двумя буквами: первыми буквами имён игроков. Например, ПЗ означает, что играют Петя и Захар.

Всего было сыграно $\frac{5+6+3}{2} = 7$ партий. В 6 партиях принимал участие Петя, значит была сыграна одна партия между Димой и Захаром.

Пусть вторая партия была ПЗ.

ДЗ → ПЗ ← ПД

Если началась с ДЗ, то 7 игр не получится, т.к. ~~в конце~~ к концу 6 игры Дима играть не сможет. не показано

(ДЗ → ПЗ → ПД → ПЗ → ПД → ПЗ → ПЗ ?!)

Аналогично, когда начинается с ПД

Пусть вторая партия была ПД

ЗД → ПД ← ПЗ

Аналогично, если игра началась с ЗД, то ~~до~~ до 7 игры дело не дойдёт. — не показано

Если с ПЗ: ПЗ → ПД → ПЗ → ПД → ПЗ → ДЗ → ПЗ ✓

Вторую партию проиграл Дима

Пусть вторая партия была ДЗ.

Если начали с ПЗ, то получился обратный предыдущий случай. (✓)

Если начали с ДП, то до 7 игры не дойдём

Следовательно, во всех случаях либо такого не бывает, либо вторую партию проиграл Дима.

Ответ: Дима

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 0 9 7 8 2 5

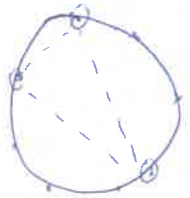
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3



Всего $\frac{7\cdot 8}{2}=28$ отрезков. Есть C_{28}^{4} способов их покрасить в красный цвет

Выберем 3 точки на окружности. (C_8^3 спос.)

Есть всего один способ сделать треугольник из этих точек. Остаётся один красный отрезок, который не важно где будет располагаться. ($28-3=25$ спос.)

$$p=\frac{C_8^3\cdot 1\cdot 25}{C_{28}^4}=\frac{\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot 25}{\frac{28!}{24!\cdot 4!}}=\frac{\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 25}{3}}{\frac{25\cdot 26\cdot 27\cdot 28}{24}}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 25\cdot 24}{3\cdot 25\cdot 26\cdot 27\cdot 28}=\frac{48}{351}$$

Ответ: $\frac{48}{351}$

№5

$x^4-xy+y^3=0 \quad x,y\in\mathbb{Z}$ Рассмотрим остатки при делении на 3 у x^4 и y^3.

x	x^4	$x^4 \bmod 3$	y	y^3	$y^3 \bmod 3$
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	16	1	2	8	2
3	81	0	3	27	0
4	256	1	4	64	1

$x^4\equiv 0,1 \pmod 3$, а $y^3\equiv 0,1,2 \pmod 3$

Теперь рассмотрим $\cancel{(x^4_{\bmod 3}+y^3_{\bmod 3}) \bmod} \ 3$ и $xy \bmod 3$

$(x^4 \bmod 3+y^3 \bmod 3) \bmod 3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 0 9 7 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (утверждение)

$x^4 \bmod 3$	$y^3 \bmod 3$	$x+y \bmod 3$	~~$xy \bmod 3$~~ $(x \bmod 3)(y \bmod 3)$
	0	0	0
0	1	1	0
	2	2	0
	0	1	0
1	1	2	1
	2	0	2

Заметим, что подходит только ~~$x+y$~~ $x \vdots 3$ и $y \vdots 3$

$\exists x = 3n,\ y = 3m \quad n, m \in \mathbb{Z}$.

Тогда $x^4 + y^3 = xy$: $81n^4 + 27m^3 = 9nm \Leftrightarrow 9n^4 + 3m^3 = nm$.

Заметим, что левая часть ур-я делится на 3, значит и правая часть делится на 3. Значит, $\left[\begin{array}{l} n \underset{3}{\equiv} 0 \\ m \underset{3}{\equiv} 0 \end{array}\right.$

$\exists m = 3k$.

$9n^4 + 81k^3 = 3kn \Leftrightarrow 3n^4 + 27k^3 = kn \Rightarrow kn \vdots 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \underset{3}{\equiv} 0 \\ n \underset{3}{\equiv} 0 \end{array}\right.$

Если $n = 3p$, то ур-е сведётся к аналогичному (и так до бесконечности) $\Rightarrow$ нет реш. у ур-я

или ~~то~~ $k = 3q$

Случай с $n = 3k$ разбирается аналогично.

Процесс останавливается, если одно из чисел равно нулю.

Тогда можно пройти в обратном направлении и получить, что $n = 0$ и $m = 0$.

Ответ: $(n; m) \in \{(0; 0)\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 0 9 7 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19} \Leftrightarrow \frac{76}{209} < \frac{a}{b} < \frac{77}{209}$

Пусть $\frac{a}{b} = \frac{76}{208} = \frac{19}{52}$ $b=52$ $\frac{76}{209} < \frac{76}{208} \Leftrightarrow \frac{1}{209} < \frac{1}{208}$

$\frac{76}{208} < \frac{77}{209} \Leftrightarrow 76 \cdot 209 < 77 \cdot 208$; $15884 < 16016$

Пусть $\frac{a}{b} = \frac{77}{210} = \frac{11}{30}$ $b=30$ $\frac{76}{209} < \frac{77}{210} \Leftrightarrow 15960 < 16093$

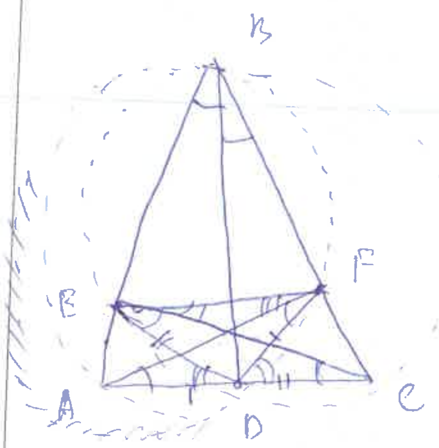
Минимальность не доказана

$\frac{77}{210} < \frac{77}{209} \Leftrightarrow \frac{1}{210} < \frac{1}{209}$

Можно попробовать и другие $\frac{a}{b}$ с b близким к 209 (в несокращённом виде), но $b=30$ - минимальное

Ответ: 30

№4



BD - биссектриса $\triangle ABC$

$\angle DEC = \angle DBC$ (опираются на $\breve{DC}$)

$\angle AFD = \angle ABD$ (опирается на $\breve{AD}$)

$\angle ECD = \angle EBD$ (опираются на $\breve{ED}$)

$\angle FAD = \angle DBF$ (опираются на $\breve{DF}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ADF$ р/б ($\Rightarrow AD=DF$) и $\triangle EDC$ р/б ($\Rightarrow ED=DC$)

$\angle CEF = \angle FDC$ (опираются на $\breve{FC}$)

$\angle EDA = \angle EFA$ (опираются на $\breve{EA}$)

$\triangle AED = \triangle DFC$ (по 2 сторонам и углу) $\Rightarrow AE=FC$. чтд.

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	20	20	3	–	81

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. Петя сыграл 6 раз, Захар 5 раз, Дима 3 раза.

Суммарно всего сыграли $6+5+3=14$ раз. Каждые 2 раза — отдельная игра $\Rightarrow$ Игр всего было $\frac{14}{2}=7$ штук.

Т.к. Петя сыграл всего 6 раз, то была какая-то игра, где Дима и Захар играли между собой. $\Rightarrow$ Дима сыграл 2 раза с Петей, а Захар 4 раза с Петей.

При этом Захар и Дима чередовались друг с другом. ?

~~Пусть игра ДЗ (Дима-Захар) не была четвёртой~~ (ни у кого не может быть с Петей 2 игры подряд - уступает другому)

Тогда рассмотрим все ~~7~~ вариантов ~~её~~ возможного номера игры ДЗ (Дима-Захар)

	I	II	III	IV	V	VI	VII
1	$\boxed{ДЗ}$	ПЗ		ПЗ		ПЗ	
2		$\boxed{ДЗ}$		ПД		ПД	
3		ПЗ	$\boxed{ДЗ}$	ПЗ		ПЗ	
4		П-Д		$\boxed{ДЗ}$		ПД	
5		ПЗ		ПЗ	$\boxed{ДЗ}$	ПЗ	
6		ПД		ПД		$\boxed{ДЗ}$	
7		ПЗ		ПЗ		ПЗ	$\boxed{ДЗ}$

такой случай невозможен, т.к. тогда игр П-Д должно быть ≥ 3 (из-за чередования игр П-Д и П-З)

Случаи II, IV, VI однозначно задают очерёдность партий. И при этом во второй партии проигрывает Дима (т.к. в 3 партии на его место заступает Захар)

Случаи III и V невозможны. В случае 3 до 3ей партии Дима играл ≥ 1 раз и после 3 партии ≥ 2 раза $\Rightarrow$ Суммарно играл ≥ 3 раза (но макс. 2)

В случае 5 он также играл ≥ 3 раза (аналогично) (но макс. 2 раза)

$\Rightarrow$ Ответ: проиграл Дима.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. По условию:

$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$ Найти: минимальное b.

$\Rightarrow \begin{cases} 4b < 11a & |\cdot 7 \\ 19a < 7b & |\cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28b < 77a \\ 76a < 28b \end{cases}$

$\Rightarrow 76a < 28b < 77a$

	максимальное $28b \leq 76a$		$76a$	$77a$		минимальное $28b \geq 77a$
$a=1$	$28\cdot 2 = 56$	<	76	77	<	~~84~~ $28\cdot 3 = 84$
$a=2$	$28\cdot 5 = 140$	<	152	154	<	$28\cdot 6 = 168$
$a=3$	$28\cdot 8 = 224$	<	228	231	<	$28\cdot 9 = 252$
$a=4$	$28\cdot 10 = 280$	<	304	308	≤	$28\cdot 11 = 308$
$a=5$	$28\cdot 13 = 364$	<	380	385	<	$28\cdot 14 = 392$
$a=6$	$28\cdot 15 = 448$	<	456	462	<	$28\cdot 16 = 476$
$a=7$	$28\cdot 18 = 532$	≤	532	539	<	$28\cdot 19 = 560$
$a=8$	$28\cdot 21 = 588$	<	608	616	<	$28\cdot 22 = 636$
$a=9$	$28\cdot 24 = 672$	<	684	693	<	$28\cdot 25 = 700$
$a=10$	$28\cdot 27 = 756$	<	760	770	<	$28\cdot 28 = 784$
$a=11$	$28\cdot 29 = 812$	<	836 0	847	<	$28\cdot 31 = 868$

$28\cdot 30 = 840$!

Как выбирались значения b – не описано

Мы честно проверили допустимые значения b при $a = 1, 2, 3\ldots$

При $a = 11$ нашлось $b = 30$ с увеличением a будет увеличиваться и b

$\Rightarrow b = 30$ минимальное. Дробь $\frac{11}{30}$ искомая. Проверим:

$\begin{cases} \frac{4}{11} < \frac{11}{30} \Leftrightarrow \\ \frac{11}{30} < \frac{7}{19} \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} 120 < 121 \\ 209 < 210 \end{cases}$

Ответ: $b = 30$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00018 31825

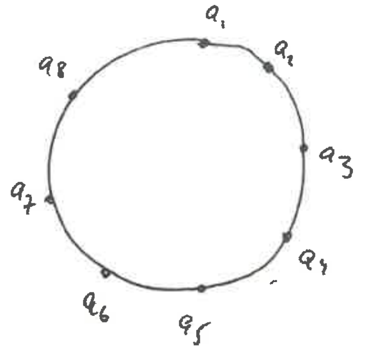
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.



На окружности всего 8 точек (для удобства a_i)

Всего отрезков в концах в этих точках: $C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

Всего способов выбрать 4 отрезка из всех:

C_{28}^4.

Посмотрим сколько из этих способов выбрать 4 отрезка которые нам подходят. Для этого среди них должны быть 3, являющиеся ~~вершинами~~ сторонами △. Всего различных △:

C_8^3 (это число выбрать 3 вершины a_i, которые однозначно задают △). И при этом мы можем выбрать ещё одно любое ребро из оставшихся 25 (3 уже использовано).

⇒ Всего способов подходящих нам: $C_8^3 \cdot 25$.

Осталось посчитать вероятность, равную отношению подходящих способов ко всем:

$$p = \frac{C_8^3 \cdot 25}{C_{28}^4} = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3\cdot 2}} \cdot \cancel{25}}{\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot \cancel{25}}{4\cdot 3\cdot 2}} = \frac{8\cdot \cancel{7}\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{28}\cdot \cancel{27}_{9}\cdot \cancel{26}_{13}} =$$

$$= \frac{8}{9\cdot 13} = \frac{8}{117}.$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 8 3 1 8 2 5

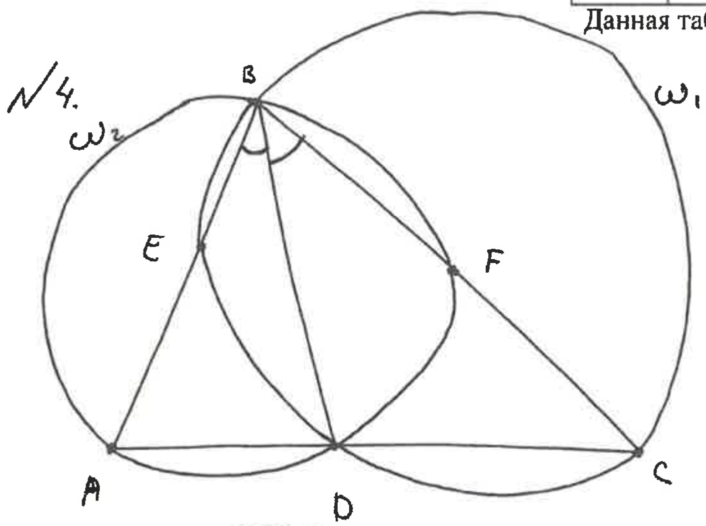
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.



Док-ть: $AE = CF$

Док-во:

1) По теореме о секущих для точки A и окр. ω_1 (она же степень точки A отн. ω_1):

$$AE \cdot AB = AD \cdot AC$$

По теореме о секущих для точки C и окр. ω_2 (она же степень точки C отн. ω_2):

$$CF \cdot CB = CD \cdot AC$$

2) Поделим одно равенство на другое:

$$\frac{AE \cdot AB}{CF \cdot CB} = \frac{AD \cdot \cancel{AC}}{CD \cdot \cancel{AC}} \Leftrightarrow \frac{AE}{CF} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

3) Т.к. $\angle ABD = \angle DBC$, то BD – биссектриса.

По свойству бисс. BD: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

4) Исходя из пунктов 2 и 3 следует, что:

$$\frac{AE}{CF} \cdot \cancel{\frac{AB}{BC}} = \cancel{\frac{AB}{BC}} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = 1 \Rightarrow AE = CF$$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5. По условию:

$x^4 - xy + y^3 = 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^4 + y^3 = xy$

Заметим, что пара $(0;0)$ является решением:

$0 + 0 = 0$

Теперь будем считать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ (если $x = 0$, то $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$ или если $y = 0$, то $x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$)

$x^4 + y^3 = xy$ — уравнение в целых числах

Тогда очевидно, что если правая часть делится на некоторое число, то и левая тоже делится.

Контрпример: $y = 2$, $x = 4$. $2^3 \vdots 4$, но $2 \not\vdots 4$.

Отсюда: $xy \vdots x \Rightarrow x^4 + y^3 \vdots x \Rightarrow y^3 \vdots x$ $\Rightarrow$ $y \vdots x$

$xy \vdots y \Rightarrow x^4 + y^3 \vdots y \Rightarrow x^4 \vdots y$ $\Rightarrow$ $x \vdots y$

Т.к. $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $x \geq y$ и $y \geq x \Rightarrow x \geq y \geq x$

Если $y \vdots x$, не обяз. $y \geq x$. ($-12 \vdots 4$, но $-12 < 4$).

$\Rightarrow x = y$ $\Leftarrow$ $x^4 - x^2 + x^3 = 0$

$x^2(x^2 + x - 1) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x = 0 \quad y = 0$

$D = 5$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 0 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	1	–	81

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Сначала посчитаем общее кол-во партий между бельчатами:

$\frac{6+5+3}{2} = 7$ (делим на 2, т.к. в 1 партии участие принимают сразу 2 бельчонка) => Петя не сыграл только в 1 партии.

Почему именно в 1-й?

Переберем все варианты партий в которых не сыграл Петя:

I не сыграл в 1 партии => он принимал участие во всех оставшихся партиях => во 2 партии проиграл либо Захар, либо Дима. Рассмотрим оба варианта. Сразу заметим, что два раза подряд одинаковые игроки не могут соревноваться (то есть в n туре и в n+1 туре не должно быть одинаковых пар), т.к. хотя бы кто-то проигрывает, а следовательно на его место приходит новый игрок. 1 вариант во 2ое партии проиграл Дима, тогда будут такие пары в партиях: 1) ЗД 2) ПД 3) ПЗ 4) ПД 5) ПЗ 6) ПД 7) ПЗ

Нам этот вариант не подходит, т.к. Дима сыграл 4 раза.

2 вариант: Захар проиграл во 2ое партии => пары в партиях будут такие: 1) ЗД 2) ПЗ 3) ПД 4) ПЗ 5) ПД 6) ПЗ 7) ПД. Такой вариант не подходит, т.к. Дима сыграл 4 раза.

II Петя не сыграл во второй партии => В первой партии он проиграл

Во второй партии проиграл либо Захар, либо Дима. Рассмотрим оба варианта: 1) Проиграл Захар, тогда пары в партиях могут быть такими: 1) ПЗ 2) ЗД 3) ПД 4) ПЗ 5) ПД 6) ПЗ 7) ПД или

Нам этот вариант 1) ПД 2) ЗД 3) ПД 4) ПЗ 5) ПД 6) ПЗ 7) ПД

не подходит, т.к. во всех вариантах партий Дима играл > 3 раз

Лист 1 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 0 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) Проиграл Дима, тогда пары в партиях могут быть такими:

1) ПЗ 2) ~~ПД~~ ДЗ 3) ПЗ 4) ПД 5) ПЗ 6) ПД 7) ПЗ ~~(подходит)~~ (подходит) или

1) ПД 2) ЗД 3) ПЗ 4) ПД 5) ПЗ 6) ПД 7) ПЗ (не подходит) => Или подходит этот вариант

III Петя не участвовал в третьей партии => он проиграл во второй, тогда пары в партиях могут быть такими: 1) ПД 2) ПЗ 3) ЗД 4) ПД 5) ПЗ 6) ПД 7) ПЗ или 1) ПД 2) ПЗ 3) ЗД 4) ПЗ 5) ПД 6) ПЗ 7) ПД

1) ПЗ 2) ПД 3) ДЗ 4) ПД 5) ПЗ 6) ПД 7) ПЗ или Или не подходит

1) ПЗ 2) ПД 3) ДЗ 4) ПЗ 5) ПД 6) ПЗ 7) ПД или Никакой из этих вариантов, т.к. везде Дима сыграл 4 раза.

IV Петя не участвовал в 4 партии => он проиграл в 3. => Во 2 партии проиграл либо Захар, либо Дима. Рассмотрим оба варианта: 1) Проиграл ~~Захар~~ Дима, тогда могли быть такие пары в партиях:

1) ПЗ 2) ПД 3) ПЗ 4) ЗД 5) ПЗ 6) ПД 7) ПЗ (подходит) или Такой вариант Или подходит

1) ПЗ 2) ПД 3) ПЗ 4) ЗД 5) ПД 6) ПЗ 7) ПД (не подходит) =>

2) Проиграл Захар, тогда могли быть такие пары в партиях:

1) ПД 2) ПЗ 3) ПД 4) ЗД 5) ПЗ 6) ПД 7) ПЗ

1) ПД 2) ПЗ 3) ПД 4) ЗД 5) ПД 6) ПЗ 7) ПД ~~оба варианта~~ этот вариант не подходит, т.к. везде Дима играет > 3 раз.

V Петя не участвовал в 5 партии => он проиграл в 4 => Во второй партии проиграл либо Дима, либо Захар. Рассмотрим оба варианта. 1) Проиграл Дима, тогда пары в партиях могут быть такие: 1) ПЗ 2) ПД 3) ПЗ 4) ПД 5) ДЗ 6) ПЗ 7) ПД

1) ПЗ 2) ПД 3) ПЗ 4) ПД 5) ДЗ 6) ПД 7) ПЗ ~~оба~~ этот варианта не подходит, т.к. Дима сыграл > 3 раз

2) Проиграл Захар, тогда пары в партиях могут быть такие:

1) ПД 2) ПЗ 3) ПД 4) ПЗ 5) ДЗ 6) ПЗ 7) ПД

1) ПД 2) ПЗ 3) ПД 4) ПЗ 5) ДЗ 6) ПД 7) ПЗ не подходит, т.к. Дима играл > 3 раз

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	1	0	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

VI Петя не участвовал в 6 партии
⇓
Петя проиграл в 5 партии ⇒ во 2 партии проиграл либо Захар, либо Дима.
Рассмотрим оба варианта: 1) Проиграл Дима, тогда вар: пары в партиях могут быть такими: 1) ПЗ 2) ПД 3) ПЗ 4) ПД 5) ПЗ 6) ЗД 7) ПЗ (подходит) или
1) ПЗ 2) ПД 3) ПЗ 4) ПД 5) ПЗ 6) ЗД 7) ПД (не подходит) ⇒ этот вариант подходит
2) Проиграл Захар, тогда пары в партиях могут быть такие:
1) ПД 2) ПЗ 3) ПД 4) ПЗ 5) ПД 6) ЗД 7) ПЗ ~~не подходят, т.~~ или
1) ПД 2) ПЗ 3) ПД 4) ПЗ 5) ПД 6) ЗД 7) ПД ⇒ этот вариант не подходит, т.к. Дима сыграл бы > 3 раз.

VII Петя не играл в 7 партии ⇒ в 6 партии он проиграл ⇒ во 2 партии мог проиграть либо Дима, либо Захар. Рассмотрим оба варианта:
1) Проиграл Дима, тогда пары в партиях были такие: 1) ПЗ 2) ПД 3) ПЗ 4) ПД 5) ПЗ 6) ПД 7) ЗД ⇒ Не подходит, т.к. тогда Дима сыграл бы 4 раза
2) Проиграл Захар, тогда пары в партиях были такие: 1) ПД 2) ПЗ 3) ПД 4) ПЗ 5) ПД 6) ПЗ 7) ЗД
Не подходит, т.к. Дима сыграл бы 4 раза.
⇓
Нам подходит только вариант, где во 2 партии проигрывал Дима.
⇓
Ответ: во 2 партии проиграл Дима.

Задача № 2

Сначала приведем дроби $\frac{4}{11}$, $\frac{7}{19}$ и $\frac{a}{b}$ к одному знаменателю: $\frac{4}{11}=\frac{76b}{209b}$; $\frac{7}{19}=\frac{77b}{209b}$; $\frac{a}{b}=\frac{209a}{209b} \Rightarrow \frac{76b}{209b}<\frac{209a}{209b}<\frac{77b}{209b}$

Значит: $76b < 209a < 77b$. a, b - целые неположительные
По условию ($\frac{a}{b}$ a, b - целые > 0)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000171 0125

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Начнем перебирать a, начиная с $a=1$,

1) $a=1 \Rightarrow 209a=209$ при $b=2$ $76b=152<209$ и $77b=154<209$
Такое a не подходит $\Leftarrow$ при $b=3$ $76b=228>209$ и $77b=231>209$
2) $a=2 \Rightarrow 209a=418$ при $b=5$ $76b=380<418$ и $77b=385<418$
Такое a не подходит $\Leftarrow$ при $b=6$ $76b=456>418$ и $77b=462>418$
3) $a=3 \Rightarrow 209a=627$ при $b=8$ $76b=608<627$ и $77b=616<627$
Такое a не подходит при $b=9$ $76b=684>627$ и $77b=693>627$
4) $a=4 \Rightarrow 209a=836$ при $b=10$ $76b=760<836$ и $77b=770<836$
Такое a не подходит при $b=11$ $76b=836=836$ и $77b=847>836$
5) $a=5 \Rightarrow 209a=1045$ при $b=13$ $76b=988<1045$ и $77b=1001<1045$
Такое a не подходит при $b=14$ $76b=1064>1045$ и $77b=1078>1045$
6) $a=6 \Rightarrow 209a=1254$ при $b=16$ $76b=1216<1254$ и $77b=1232<1254$
Такое a не подходит при $b=17$ $76b=1292>1254$ и $77b=1309>1254$
7) $a=7 \Rightarrow 209a=1463$ при $b=19$ $76b=1444<1463$ и $77b=1463=1463$
Такое a не подходит при $b=20$ $76b=1520>1463$ и $77b=1540>1463$
8) $a=8 \Rightarrow 209a=1672$ при $b=22$ $76b=1672=1672$ и $77b=1694>1672$
Такое a не подходит при $b=23$ $76b=1748>1672$ и $77b=1771>1672$
9) $a=9 \Rightarrow 209a=1881$ при $b=24$ $76b=1824<1881$ и $77b=1848<1881$
Такое a не подходит при $b=25$ $76b=1900>1881$ и $77b=1925>1881$
10) $a=10 \Rightarrow 209a=2090$ при $b=27$ $76b=2052<2090$ и $77b=2079<2090$
Такое a не подходит при $b=28$ $76b=2128>2090$ и $77b=2156>2090$
11) $a=11 \Rightarrow 209a=2299$ ~~на~~ при $b=30$ $76b=2280<2299$
$b=30$ минимально возможное подходящее b. $\Leftarrow$ $77b=2310>2299$

Ответ: наименьшее возможное значение $b=30$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA000171 0125

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №3

Сначала вычислим общее кол-во отрезков которые провели:

$\frac{8\cdot7}{2}=28$ (делим на 2, т.к. отрезок AB = отрезок BA)

Вычислим столько вариантов покраски 4 отрезков:

$\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=7\cdot9\cdot13\cdot25$ (на первом месте могут быть 28 отрезков, на 2-ом – 27, на 3-ем 26, на 4-ом 25, делим на $4\cdot3\cdot2\cdot1$, т.к. нам не важен порядок покраски отрезков)

Всего треугольников $\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}=56$ (делим на $3\cdot2$, т.к. нам не важен порядок вершин в △ (△ABC = △BCA))

Нам подходят, все варианты, когда 3 отрезка составляют треугольник, а последний отрезок может быть любым, заметим, что 2 треугольника мы составить не сможем, т.к. понадобится минимум 5 отрезков ( ) => тогда мы можем сначала покрасить 1 из 56 треугольников, потом выбрать любой из 3 оставшихся $28-3=25$ отрезков и тоже его покрасить. => всего вариантов когда у нас будет покрашенный △ = $56\cdot25$ (для каждого из 56 треугольников можно покрасить еще 25 ребер и ~~треугол~~ покрашенные ребра не будут повторяться) =>

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 0 | 1 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~количество~~ вероятность, что найдется красный треугольник, вершины которого лежат на окружности равна: $\frac{\overset{8}{\cancel{56}}\cdot\cancel{25}}{\cancel{7}\cdot 9\cdot 13\cdot\cancel{25}} = \frac{8}{9\cdot 13} = \frac{8}{117}$

⇓

Ответ: вероятность, ~~нах~~ что найдется красный треугольник, вершины которого лежат на окружности равна $\frac{8}{117}$

Задача №4

Дано:
$\angle ABD = \angle DBC$
$D \in AC$
$E \in AB, E \in w_1$
$F \in BC, F \in w_2$

Доказать:
$AE = CF$

Решение:

1) Рассмотрим окружность w_1. По условию $\angle EBD = \angle DBC$
⇓
$\smile ED = \smile DC \Rightarrow$ хорды $ED = DC$ (хорды равных дуг равны)

2) Рассмотрим окружность w_2. По условию $\angle ABD = \angle DBF$.
⇓
$\smile AD = \smile DF \Rightarrow$ хорды $AD = DF$ (хорды равных дуг равны)

3) $DEBC$ вписан в $w_1 \Rightarrow \angle DCB + \angle DEB = 180° \Rightarrow$
$\angle DEB = 180° - \angle DCB$ (сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна $180°$)

4) $\angle AED$ и $\angle DEB$ - смежные $\Rightarrow \angle AED + \angle DEB = 180° \Rightarrow \angle AED + 180° - \angle DCB = 180°$
$\angle AED = \angle DCB$ (сумма смежных углов равна $180°$)

5) ABFD - вписан в $w_2 \Rightarrow \angle BAD + \angle BFD = 180° \Rightarrow \angle BFD = 180° - \angle BAD$ (сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна $180°$)

6) $\angle BFD$ и $\angle DFC$ - смежные $\Rightarrow \angle BFD + \angle DFC = 180° \Rightarrow$ ~~&~~ $180° - \angle BAD + \angle DFC = 180°$
⇓
$\angle DFC = \angle BAD$ (сумма смежных углов равна $180°$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 1 | 0 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

7) в $\triangle AED$ $\angle EAD + \angle AED + \angle EDA = 180^\circ$

$\angle EDA = 180^\circ - \angle EAD - \angle AED$ $\angle EDA = 180^\circ - \angle DFC - \angle DCB$

(сумма углов в Δ равна 180°)

8) в $\triangle DFC$ $\angle DFC + \angle FCD + \angle CDF = 180^\circ \Rightarrow \angle FDC = 180^\circ - \angle DFC - \angle DCF =$

$= 180^\circ - \angle DFC - \angle DCB$

⇓

9) $\angle EDA = 180^\circ - \angle DFC - \angle DCB = \angle FDC \Rightarrow \angle EDA = \angle FDC$

10) $\triangle AED = \triangle DFC$ по двум сторонам и углу между ними

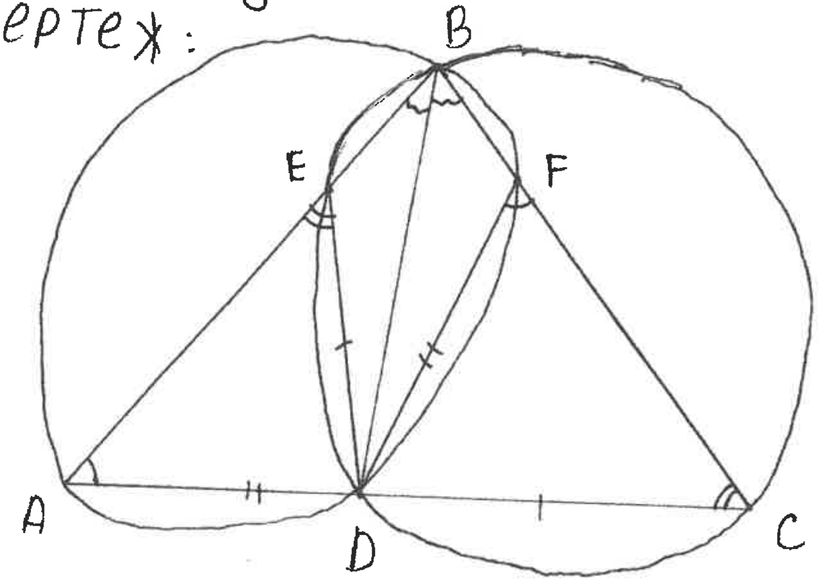
($AD = DF$; $ED = DC$; $\angle EDA = \angle FDC$)

11) в равных треугольниках соответствующие элементы равны

⇓

$AE = CF$ ч.т.д.

Чертеж:



Задача №5

$x=0$ $y=0$ подходит $0^4 - 0\cdot 0 + 0^3 = 0$ Ответ: $x=0$

$y=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 6 7 7 0 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

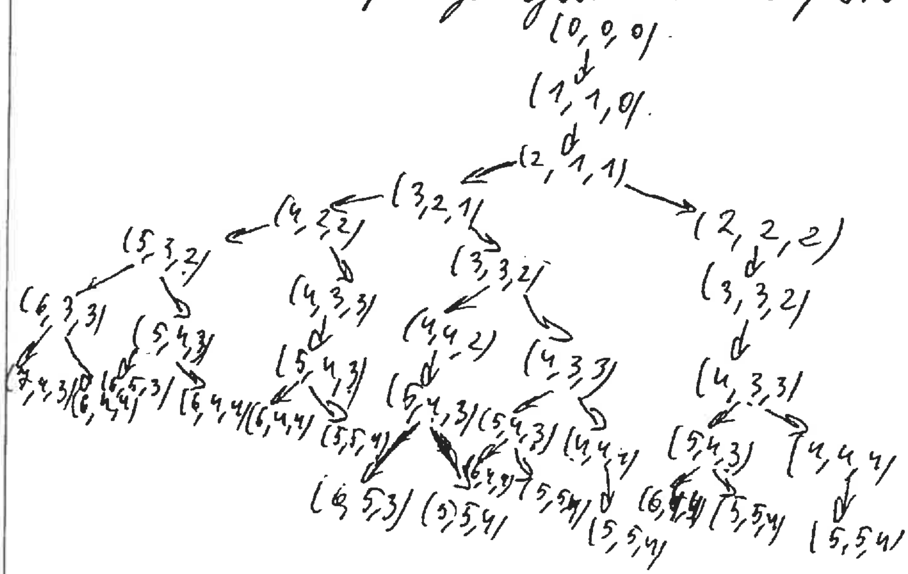
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	25	20	20	–	–	80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

Представим турнир в виде ориентированного графа, где вершинами будут тройки чисел означающие сколько партий сыграл каждый из игроков, а рёбрами - переход между партиями. Т.е., например, была вершина (a, b, c) и ~~не играл игр~~ в последней партии игрок, сыгравший a партий, не играл. Тогда из этой вершины будут рёбра в вершины (a+1, b, c+1) и (a+1, b+1, c). ~~Наложим~~ Заметим что всего кол-во партий в вершине (a, b, c) - $\frac{a+b+c}{2}$. Следовательно, ~~сыграно~~ всего сыграли $\frac{5+3+6}{2}=\frac{14}{2}=7$ партий. Построим данный граф для 7 партий.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 6 7 7 0 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. продолжение

Заметим, что у нас есть 2 варианта как могла идти игра. В ~~первом~~ обоих случаях сначала идут кол-во партий у Тимура затем у Арины и потом у Коли. В первом случае игра шла так: в 1-ой партии играли Тимур и Арина, во 2-ой - Тимур и Коля, в 3-ей - Тимур и Арина, в 4-ой - Тимур и Коля, в 5-ой - Тимур и Арина, в 6-ой - Арина и Коля, в 7-ой - Тимур и Арина. Т.к. в 5-ой партии Коля не участвовал, он проиграл в 4-ой. Во втором случае игра шла так: в 1-ой партии играли Тимур и Арина, во 2-ой - Тимур и Коля, в 3-ей - Тимур и Арина, в 4-ой - Арина и Коля, в 5-ой - Тимур и Арина, в 6-ой - Тимур и Коля, в 7-ой - Тимур и Арина. Получается, что в этом случае также проигрывает Коля.

Ответ: Коля.

№2.

Если $\frac{a}{b} \in \left(\frac{9}{16}; \frac{4}{7}\right)$, то $\frac{9}{16} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$,

$\frac{9b}{16} < a < \frac{4b}{7}$. Начнём перебирать b до тех пор, пока в интервале $\left(\frac{9b}{16}; \frac{4b}{7}\right)$ нет целых чисел.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 7 | 7 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 - продолжение

1. $b=1$

$\frac{9}{16}<a<\frac{4}{7}$ – целых чисел нет

~~$0<\frac{9}{16},\ \frac{4}{7}<1 \Rightarrow 0<a<1$~~

2. $b=2$

$\frac{9}{8}<a<\frac{8}{7}$ – целых чисел нет

3. $b=3$

$\frac{27}{16}<a<\frac{12}{7}$

$1<\frac{27}{16},\ \frac{12}{7}<2 \Rightarrow 1<a<2$ – целых чисел нет

4. $b=4$

$\frac{9}{4}<a<\frac{16}{7}$

$2<\frac{9}{4},\ \frac{16}{7}<3 \Rightarrow 2<a<3$ – целых чисел нет

5. $b=5$

$\frac{45}{16}<a<\frac{20}{7}$

$2<\frac{45}{16},\ \frac{20}{7}<3 \Rightarrow 2<a<3$ – целых чисел нет

6. $b=6$

$\frac{27}{8}<a<\frac{24}{7}$

$3<\frac{27}{8},\ \frac{24}{7}<4 \Rightarrow 3<a<4$ – целых чисел нет

7. $b=7$

$\frac{63}{16}<a<4$

$3<\frac{63}{16} \Rightarrow 3<a<4$ – целых чисел нет

8. $b=8$

$\frac{9}{2}<a<\frac{32}{7}$

$4<\frac{9}{2},\ \frac{32}{7}<5 \Rightarrow 4<a<5$ – целых чисел нет

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 7 | 7 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 - продолжение

9. $b=9$

$\frac{81}{16} < a < \frac{36}{7}$

$5 < \frac{81}{16}$, $\frac{36}{7} < 6 \Rightarrow 5 < a < 6$ - целых чисел нет

10. $b=10$

$\frac{45}{8} < a < \frac{40}{7}$

$5 < \frac{45}{8}$, $\frac{40}{7} < 6 \Rightarrow 5 < a < 6$ - целых чисел нет

11. $b=11$

$\frac{99}{16} < a < \frac{44}{7}$

$6 < \frac{99}{16}$, $\frac{44}{7} < 7 \Rightarrow 6 < a < 7$ - целых чисел нет

12. $b=12$

$\frac{27}{4} < a < \frac{48}{7}$

$6 < \frac{27}{4}$, $\frac{48}{7} < 7 \Rightarrow 6 < a < 7$ - целых чисел нет

13. $b=13$

$\frac{117}{16} < a < \frac{52}{7}$

$7 < \frac{117}{16}$, $\frac{52}{7} < 8 \Rightarrow 7 < a < 8$ - целых чисел нет

14. $b=14$

$\frac{63}{8} < a < 8$

$7 < \frac{63}{8} \Rightarrow 7 < a < 8$ - целых чисел нет

15. $b=15$

$\frac{135}{16} < a < \frac{60}{7}$

$8 < \frac{135}{16}$, $\frac{60}{7} < 9 \Rightarrow 8 < a < 9$ - целых чисел нет

16. $b=16$

$9 < a < \frac{64}{7}$; $\frac{64}{7} < 10 \Rightarrow 9 < a < 10$ - целых чисел нет

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	6	7	7	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2-продолжение.

17. $b=17$

$\frac{153}{16} < a < \frac{68}{7}$

$9 < \frac{153}{16}$, $\frac{68}{7} < 10 \Rightarrow 9<a<10$ – целых чисел нет

18. $b=18$

$\frac{81}{8} < a < \frac{72}{7}$

$10 < \frac{81}{8}$, $\frac{72}{7} < 11 \Rightarrow 10<a<11$ – целых чисел нет

19. $b=19$

$\frac{171}{16} < a < \frac{76}{7}$

$10 < \frac{171}{16}$, $\frac{76}{7} < 11 \Rightarrow 10<a<11$ – целых чисел нет

20. $b=20$

$\frac{45}{4} < a < \frac{80}{7}$

$11 < \frac{45}{4}$, $\frac{80}{7} < 12 \Rightarrow 11<a<12$ – целых чисел нет

21. $b=21$

$\frac{189}{16} < a < 12$

$11 < \frac{189}{16} \Rightarrow 11<a<12$ – целых чисел нет

22. $b=22$

$\frac{99}{8} < a < \frac{88}{7}$

$12 < \frac{99}{8}$, $\frac{88}{7} < 13 \Rightarrow 12<a<13$ – целых чисел нет

23. $b=23$

$\frac{207}{16} < a < \frac{92}{7}$

$12 < \frac{207}{16} < 13 < \frac{92}{7} \Rightarrow$ есть целое число 13.

След. наименьшее $b=23$. Ответ: 23.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 6 7 7 0 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

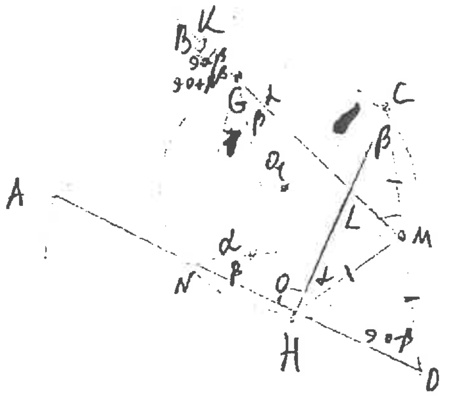
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.

Всего отрезков $C_{10}^2 = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 5\cdot 9 = 45$. Значит, всего кол-во способов выбрать 4 отрезка - $C_{45}^4 = \frac{45!}{41!\,4!} = \frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$. Заметим, что кол-во способов выбрать треугольник - $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}$. Выбрав треугольник, мы выбрали 3 отрезка. Значит, нам нужно из 42 оставшихся отрезка выбрать 1. Это можно сделать 42 способами. Значит, кол-во способов выбрать 4 отрезка так, чтобы среди них был треугольник, равно $42\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}$. А значит, вероятность того, что из 4 отрезков будет треугольник, равна $\frac{42\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}}{\frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}\cdot 2}{15\cdot 11\cdot 43} = \frac{2\cdot 8}{11\cdot 43} = \frac{16}{473}$.

Ответ: $\frac{16}{473}$.

№4.



Лист 6 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА 0 0 0 1 6 1 7 0 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Предположим, что задача решена. Тогда $\angle KAH + \angle KLH = 180°$. По условию, ABCD вписан, значит $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. $\angle KAH$ и $\angle BAD$ — один и тот же угол. Вычтем из 1-ого равенства 2-ое. Тогда $\angle KLH - \angle BCD = 0$, $\angle KLH = \angle BCD$. Значит, для решения задачи необходимо и достаточно доказать, что $\angle KLH = \angle BCD$. Пусть центр окружности описанной~~ т.к.

Пусть центр окружности, описанной около $\triangle CNM$ — точка O_1. Тогда O_1 лежит на CN, т.к. $\triangle CNM$ — прямоугольный, а CN — гипотенуза. Назовём окружность, описанную около $ABCD$ — ω_1, а описанную около $\triangle CNM$ — ω_2. Тогда т.к. $H \in \omega_2$ и $\angle CHN$ опирается на диаметр, $\angle CHN = 90°$. Пусть $\angle NGC = \alpha$, $\angle HGM = \beta$. Тогда $\angle CNM = \alpha$, т.к. углы MGC и CNM опираются на одну дугу, $\angle MNH = \beta$, т.к. $\angle MNH$ и $\angle HGM$ опираются на одну дугу, $\angle HCM = \beta$, т.к. $\angle MNH$ и $\angle HCM$ опираются на одну дугу, $\angle CHM = \alpha$, т.к. $\angle CHM$ и $\angle CNM$ опираются на одну дугу. $\angle CHN = 90°$, след. $\angle CHD = 180° - \angle CHN = 180° - 90° = 90°$ след. $\triangle CHD$ — прямоугольный. HM — медиана, проведённая к гипотенузе, след. $MH = \frac{1}{2} CD = CM = MD$, след. $\triangle CMH$ — равнобедренный. $\angle MCH = \angle CHM$, $\alpha = \beta$. Из $\triangle CHD$ $\angle HCD + \angle CDH = 90° \Rightarrow \angle CDH = 90° - \angle HCD = 90° - \beta$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000167 7025

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. Продолжение.

След. т.к. по условию $ABCD$ - вписанный, $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = 180^\circ - 90^\circ + \beta = 90^\circ + \beta$.

Значит $\angle KBG = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta$. $\angle KGB = \alpha = \beta$, т.к. $\angle KGB$ и $\angle MGC$ - вертикальные, а $\angle MGC = \alpha$. След. из $\triangle KBG$ $\angle BKG = 180^\circ - \angle KBG - \angle KGB = 180^\circ - 90^\circ + \beta - \beta = 90^\circ$. В четырёхугольнике $KLHA$ $\angle AKL + \angle LHA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, след. $KLHA$ - вписанный. Что и требовалось доказать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9 | 2 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	20	20	-	-	76

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Т.к. после проигрыша одного из двух игроков на его место приходит третий, то в каждых двух раундах ~~есть~~ играют все 3 игрока. Всего раундов $\frac{4+8+6}{2} = 9$ шт.

Лена сыграла 4 раза. Пронумеруем раунды 1–9. ~~он была~~ Из доказанного она играла хотя бы в одном из 1 и 2, из 3 и 4, из 5 и 6, из 7 и 8. ~~то~~ Эти пары не пересекаются, а значит Лена играла ~~хоть~~ хотя бы раз в каждой, а т.к. играла она 4 раза, то она играла ровно по раунду в каждой паре. Помимо этого Лена играла хоть раз в паре 8–9. Лена не могла ~~сы~~ сыграть в 9-том раунде т.к. уже ~~и~~ сыграла 4 раза в 1–8 р.

=> ~~о~~ Лена играла в 8-ом раунде => не ~~уу~~ играла в 7

Лена сыграла в одном из 6 и 7, ~~в 7 по~~

=> играла в 6 => не играла в 5-ом

и т.д.

В итоге Лена играла в 2, 4, 6 и 8 раундах.

Раз после 6-го раунда Лена ушла, значит она проиграла.

Ответ: в 6-ой партии проиграла Лена.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9 | 2 | 5 | 2 | 5 |

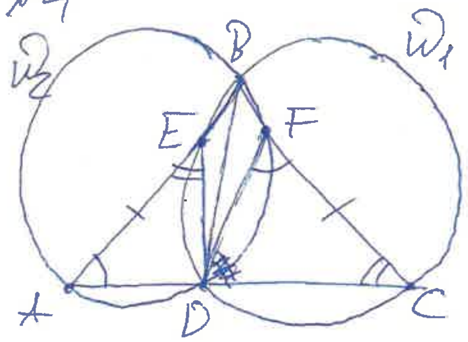
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



$AE = FC$

$\angle EAD = 180° - \angle BFD = \angle DFC$ т.к. $ABFD$-вписан.

$\angle FCD = 180° - \angle BED = \angle AED$ т.к. $BCDE$-вписан.

$\angle EAD = \angle DFC$, $\angle AED = \angle FCD$, $AE = FC$

$\Rightarrow \triangle AED = \triangle FCD$ по стороне и двум углам

$\Rightarrow ED = DC$

тогда $\angle EBD = \angle DBC$ как опирающиеся на равные хорды ED и DC в ω_1

$\Rightarrow \angle ABD = \angle DBC$ ЧТД.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000109 2525

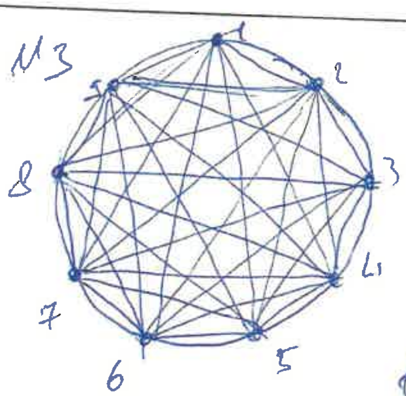
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3



Всего отрезков $C_9^2 = 36$ шт. тогда всего способов выбрать 4 отрезка – C_{36}^4

Посчитаем количество благоприятных событий: мы выбираем три отрезка образующих треугольник и ещё один любой отрезок.

~~тре~~ Всевозможных треуг. у нас C_9^3. а третий отрезок мы выбираем из $36-3=33$ отрезков

=> вероятность будет равна:

$$\frac{C_9^3 \cdot 33}{C_{36}^4} = \frac{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}\cdot 33}{\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{4\cdot 3\cdot 2}} =$$

$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 33\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 6} = \frac{8\cdot 7}{35\cdot 34} = \frac{4}{5\cdot 17} = \frac{4}{85}$$

Ответ: $\frac{4}{85}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9 | 2 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 $$\frac{0}{2}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow b\neq 2$$

$$\frac{1}{3}=\frac{6}{18}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\Rightarrow b\neq 3$$

$$\frac{1}{4}=\frac{5}{20}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{6}{12}=\frac{2}{4}\Rightarrow b\neq 4$$

$$\frac{2}{5}=\frac{6,8}{17}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}\Rightarrow b\neq 5$$

$$\frac{2}{6}<\frac{2}{5}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}=\frac{3}{6}\Rightarrow b\neq 6$$

$$\frac{2}{7}<\frac{2}{6}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{35}{84}<\frac{36}{84}=\frac{3}{7}\Rightarrow b\neq 7$$

$$\frac{3}{8}=\frac{51}{136}<\frac{56}{136}=\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}=\frac{4}{8}\Rightarrow b\neq 8$$

$$\frac{3}{9}<\frac{3}{8}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{15}{36}<\frac{16}{36}=\frac{4}{9}\Rightarrow b\neq 9$$

$$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}=\frac{5}{10}\Rightarrow b\neq 10$$

$$\frac{4}{11}<\frac{4}{10}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{5}{11}\Rightarrow b\neq 11$$

$$\frac{4}{12}<\frac{4}{11}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}\Rightarrow b\neq 12$$

$$\frac{5}{13}=\frac{85}{13\cdot17}<\frac{91}{13\cdot17}=\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{65}{12\cdot13}<\frac{72}{12\cdot13}=\frac{6}{13}\Rightarrow b\neq 13$$

$$\frac{5}{14}<\frac{5}{13}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{70}{12\cdot14}<\frac{72}{12\cdot14}=\frac{6}{14}\Rightarrow b\neq 14$$

$$\frac{6}{15}=\frac{102}{15\cdot17}<\frac{105}{15\cdot17}=\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{75}{12\cdot15}<\frac{84}{12\cdot15}=\frac{7}{15}\Rightarrow b\neq 15$$

$$\frac{6}{16}<\frac{6}{15}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{80}{12\cdot16}<\frac{84}{12\cdot16}=\frac{7}{16}\quad b\neq 16$$

$$\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{85}{17\cdot12}<\frac{96}{12\cdot17}=\frac{8}{17}\quad b\neq 17$$

$$\frac{7}{18}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{90}{12\cdot18}<\frac{96}{12\cdot18}=\frac{8}{18}\quad b\neq 18$$

$$\frac{7}{19}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{95}{12\cdot19}<\frac{96}{12\cdot19}=\frac{8}{19}\quad b\neq 19$$

$$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{100}{20\cdot12}<\frac{108}{20\cdot12}=\frac{9}{20}\quad b\neq 20$$

$$\frac{8}{21}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{105}{21\cdot12}<\frac{108}{21\cdot12}=\frac{9}{21}\quad b\neq 21$$

$$\frac{9}{22}=\frac{153}{22\cdot17}<\frac{154}{22\cdot17}=\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{5}{11}=\frac{10}{22}\quad b\neq 22$$

$$\frac{9}{23}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{115}{12\cdot23}<\frac{120}{12\cdot23}=\frac{10}{23}\quad b\neq 23$$

$$\frac{9}{24}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{10}{24}\quad b\neq 24$$

$$\frac{10}{25}=\frac{2}{5}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{125}{12\cdot25}<\frac{132}{12\cdot25}=\frac{11}{25}\quad b\neq 25$$

$$\frac{10}{26}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}=\frac{130}{12\cdot26}<\frac{132}{12\cdot26}=\frac{11}{26}\quad b\neq 26$$

$$\frac{11}{27}=\frac{187}{27\cdot17}<\frac{189}{27\cdot17}=\frac{7}{17}<$$

$$<\frac{5}{12}<\frac{4}{9}=\frac{12}{27}\quad b\neq 27$$

$$\frac{11}{28}<\frac{7}{17}<\frac{5}{12}<\frac{3}{7}=\frac{12}{28}\quad b\neq 28$$

$$\frac{7}{17}=\frac{203}{17\cdot29}<\frac{204}{17\cdot29}=\frac{12}{29}$$

$$=\frac{144}{29\cdot12}<\frac{145}{29\cdot12}=\frac{5}{12}\quad b=29$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	1	0	9	2	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\frac{0}{1} < \frac{7}{17} < \frac{5}{12} < \frac{1}{1}$ в ± 1) №2 (2)

$\Rightarrow$ минимальное в~~#~~ – 29

Ответ: 29

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	0	1	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

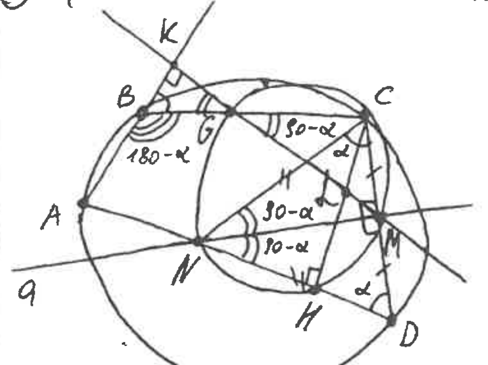
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	16	18	20	2	–	78

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4 (Линейкой пользоваться нельзя).

⇘ извиняюсь за рисунок



Дано: $ABCD$ – впис. в окр$(O;r)$, M – сер DC, $CM=MD$, $a \perp DC$, $a \cap DC = M$, $a \cap AD = N$, окр$(O_1;r_1)$ – опис. около $\triangle CMN$; окр$(O_1;r_1) \cap AD = H$, окр$(O_1;r_1) \cap CB = G$, $G \neq B$, $MG \cap$ прямая $AB = K$, $MG \cap CH = L$

Д-ть: $KLHA$ – впис. четырёхугольник.

Док-во:

Рассм. $\triangle NCD$: проведён NM

NM – медиана, т.к $MC=MD$ (по усл.)

NM – высота ($a \perp DC$, $NM \in a \Rightarrow NM \perp DC$ по усл) $\Big| \Rightarrow \triangle NCD$ – р/б $\Rightarrow$ (по св-ву).

$NC=ND$, $\angle NCD = \angle NDC = \alpha$

Рассм $\triangle NC~~D~~M$:

$\angle NMC = 90^\circ$ ($NM \perp DC$, $MC \in DC \Rightarrow NM \perp MC$) заметим, что это внутренний угол, который опирается на хорду CN, по св-ву мы знаем, что если внутренний угол $= 90^\circ \Rightarrow$ он опирается на диаметр окружности:

В нашем случае $\angle NMC = 90^\circ$ и опирается на хорду (дугу) $NC \Rightarrow$ NC – диаметр окр$(O_1;r_1)$.

Рассм. $\triangle NCH$:

точки N, C, H лежат на окр $(O_1;r_1) \Rightarrow \triangle NCH$ тоже вписан в окр $(O_1;r_1)$

Заметим, что $\angle NHC$ опирается на ту же хорду (дугу), что и $\angle NMC$ на диаметр $(O_1;r_1)$ $\Rightarrow \angle NHC = \angle NMC = 90^\circ$

⇓

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 1 7 6 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

РАССМ. $\triangle NCM$:

$\angle NMC = 90^\circ$ (по усл)
$\angle NCM = \alpha^\circ$ $\Rightarrow \angle CNM = 90-\alpha^\circ$

Заметим, что $\angle MGC$ и $\angle CNM$ опираются на одну ~~дугу~~ хорду CM и оба угла вписанные $\Rightarrow \angle MGC = \angle CNM = 90-\alpha$

$\angle MGC$ и $\angle BGK$ – вертикальные $\Rightarrow \angle BGK = \angle MGC = 90-\alpha^\circ$

Чет-к $ABCD$ – впис в окр$(O; r)$ $\Rightarrow$ по св-ву пары противолежащих углов в сумме $=180^\circ$ $\Rightarrow$ нам нужны $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$,

$\angle ADC \equiv \angle NDC = \alpha^\circ \Rightarrow \angle ABC = 180-\alpha^\circ$

$\angle ABC$ и $\angle CBK$ – смежные $\Rightarrow \underset{180-\alpha}{\angle ABC} + \angle CBK = 180^\circ \Rightarrow \angle CBK = \alpha \equiv \angle GBK$

РАССМ. $\triangle BKG$:

$\angle GBK = \alpha$ (выш. док)
$\angle BGK = 90-\alpha$ (выш. док) $\Rightarrow \angle BKG = 180-\alpha-90+\alpha = 90^\circ$
$\Downarrow$
$\triangle BKG$ – п/у.

РАССМ. чет-к $KLHA$:

$\angle BKG \equiv \angle AKL = 90^\circ$
$\angle NHC \equiv \angle AHL = 90^\circ$ $\Rightarrow \underline{\angle AKL + \angle AHL = 180^\circ}$

По св-ву, чтобы д-ть, что четыр-к впис, нужно д-ть, что сумма хотя бы одной пары противолежащих углов $=180^\circ$, что мы и доказали:

$\angle AKL + \angle AHL = 180^\circ \Rightarrow \angle KLH + \angle KAH = 180^\circ \Rightarrow KLHA$ – впис. чет-к

Ч.Т.Д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3.

М	А	0	0	0	1	0	1	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Бельчата → Арина, Коля, Тимур

Партия = играют 2 игрока, проигравший уступает место

Арина ⟶ 5 раз
Коля ⟶ 3 раза
Тимур ⟶ 6 раз.

Заметим, что 1 игра = играют 2 игрока по разу
⇓
Общее кол-во игр $= \frac{5+3+6}{2} = 7$ игр

кол-во раз

кол-во раз на игру

Коля играл 3 раза, т.к. всего игр 7 ⇒ Коля не играл 4 игры

Заметим, что один бельчонок не может не играть 2 игры подряд ⇒ не могут быть 2 одинаковые игры подряд (одинаковые = одинаковые участники)

Т.е. было 4 игры Арина vs Тимур, и эти игры не могли идти подряд (т.е. подряд не более 1 игры) ⇒ из 7 игр было 4 игры, которые идут не более 1 штуки подряд
⇓
эти игры на нечётных местах (1, 3, 5, 7).
⇓
В оставшихся играх 2, 4, 6 играл Коля

Игры выглядели так:
1) Тимур vs Арина
2) Коля vs
3) Тимур vs Арина
4) Коля vs
5) Тимур vs Арина
6) Коля vs
7) Тимур vs Арина

т.е. 1 бельчонок min сыграл 3 раза и если он выигрывал ⇒ (+1 игра), значит, что Коля не выигрывал, т.к. он ни разу не играл подряд 2 игры.
⇓
Коля проиграл во 2, 4, 6 играх

Возможная таблица игр:
⇓

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	0	1	7	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверятся только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

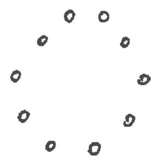
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) ТИМУР > АРИНА
2) КОЛЯ < ТИМУР
3) ТИМУР < АРИНА
4) КОЛЯ < АРИНА
5) ТИМУР > АРИНА
6) КОЛЯ < ТИМУР
7) ТИМУР ≷ АРИНА

Тимур → 6 раз
Коля → 3 раза
Арина → 5 раз

Ответ: В 4-ой игре проиграл Коля.

③



10 точек, каждая пара соединена отрезком.
Выбирают 4 → красят в красн.

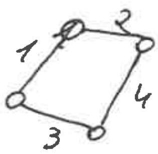
с красными сторонами.

P(A), что найдётся Δ с вершинами на окр-ти — ?

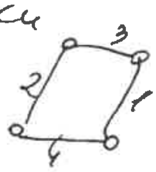
Каждая пара соед-на отрезком ⇒ у первой верш — 9 отр
у второй верш — 8 отр
⋮
— 1 отр

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{9\cdot 10}{2} = \underbrace{45\text{ отр}}_{\text{всего}}$$

Найдём кол-во вариантов, чтобы выбрать любые 4 отр, т.к. отрезки



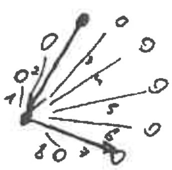
и отрезки



одно и то же

Значит кол-во вариантов $= C_{45}^{4} = \frac{45!}{41!\cdot 4!} = \frac{42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{2\cdot 3\cdot 4}$

Теперь найдём $\underbrace{P(A)}_{\text{кол-во вар-тов}}$, что появится Δ:



Изначально берём любой отр, т.е. 45 вар-тов
затем из любой из 2 точек этого отрезка у нас есть 8 вар-тов, чтобы прийти в новую вершину

У отрезка 2 конца!

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 7 | 6 | 2 | 5

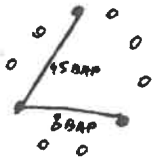
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

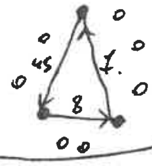
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

45·8, затем



нужно соединить 2 несоединённые вершины отрезком, есть 1 способ это сделать



$\Rightarrow$ кол-во вар $= 45\cdot8\cdot1/6$

но также есть повторения построй.

*1 есть ~~2+2+2~~ повт = 6 повт

3! — повторения

также остался 1 любой отрезок, который ни на что не влияет $\Rightarrow$ есть 42 способа ~~его~~ их покрасить $\Rightarrow$ кол-во вар $=$ (т.к. из 45 мы провели уже 3) $= \underbrace{45\cdot8\cdot1\cdot42}$ $\downarrow$ 6 благоприятные

$\underbrace{42\cdot360}_{6}$

(также можно посчитать это, если найти кол-во вар, чтобы выбрать 3 вершины, $C_{10}^{3} = \frac{10!}{7!\cdot3!} = \frac{8\cdot9\cdot10}{6} = 120$ способов выбрать 3 вершины ~~выб~~

В каждом способе 3 отрезка $\Rightarrow$ 360 способов выбрать 3 ~~1~~ ~~отрезок~~ отрезка

$\Rightarrow 120\cdot3\cdot\underbrace{42}_{\text{посл. отр.}}$)

X

~~$P(A) = \frac{\text{благопр}}{\text{всего}} = \frac{45\cdot8\cdot1\cdot42}{\frac{42\cdot43\cdot44\cdot45}{2\cdot3\cdot4}} = \frac{45\cdot8\cdot42\cdot2\cdot3\cdot4}{42\cdot43\cdot44\cdot45} = \frac{48}{11\cdot43} =$~~

~~$\frac{48}{473}$~~

$43\cdot11$: $43 + 43\,0 = 473$

~~Ответ: $P(A) = \frac{48}{473}$.~~

~~*1. $P(A) = \frac{\text{благопр}}{\text{всего}} = \frac{\frac{45\cdot8\cdot1\cdot42}{8}}{\frac{42\cdot43\cdot44\cdot45}{2\cdot3\cdot4}} = \frac{45\cdot42\cdot2\cdot3\cdot4}{42\cdot43\cdot44\cdot45} = \frac{6}{473}$~~

~~Ответ: $P(A) = \frac{6}{473}$~~

*1 $P(A) = \frac{\frac{45\cdot8\cdot1\cdot42}{3!}}{\frac{42\cdot43\cdot44\cdot45}{2\cdot3\cdot4}} = \frac{45\cdot8\cdot42\cdot2\cdot3\cdot4}{42\cdot43\cdot44\cdot45\cdot2\cdot3} = \frac{8}{473}$ Ответ: $P(A) = \frac{8}{473}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 1 7 6 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

⑤ $x^4 - xy - y^3 = 0$ $\quad x, y \in \mathbb{Z}$

очевидно реш-е $(x;y) = (0;0)$.

$x^4 - xy - y^3 = 0$

$\underset{\geq 0}{x^4} = y(x + y^2)$

возр ↑ $\quad$ ~~возр~~ ↑ убыв ↓ (4)

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 0 \\ x + y^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 0 \\ x + y^2 \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

1 реш. методом подбора.

$x(x^3 - y) - y^3 + x^3y^2 - x^3y^2 = 0$

$x(x^3 - y) + y^2(x^3 - y) - x^3y^2 = 0$

$(x^3 - y)(x + y^2) - x^3y^2 = 0$

$(x^3 - y)(x + y^2) = x^3y^2$

Ответ: единственное реш-е $(x;y) = (0;0)$.

② $\frac{3}{16} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7} \Big| \cdot 112 \quad$ НОК$(16;7) = 112$.

$63 < \frac{112a}{b} < 64$.

$\frac{112a}{b} \approx 63, \ldots \Big| : 112 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0{,}5625$

$0{,}5625 < \frac{a}{b} < 0{,}5714$

$\frac{a}{b} \approx 0{,}5626\ldots$

$b \approx \frac{112a}{63,\ldots}$

Минимальность не доказана.

$$\begin{array}{r|l} 63 & 112 \\ -0 & 0{,}5625 \\ 630 & \\ -560 & \\ 700 & \\ -672 & \\ 280 & \\ -224 & \\ 560 & \\ -560 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 64 & 112 \\ -0 & 0{,}5714 \\ 640 & \\ -560 & \\ 800 & \\ -784 & \\ 160 & \\ -112 & \\ 480 & \\ -448 & \\ 320\ldots & \end{array}$$

Ближайшее значение и min b, что я нашёл, это $b = 23$, $a = 13$

$\left(\frac{3}{16}; \frac{13}{23}; \frac{4}{7}\right)$ Удивительно совпадает $\frac{3}{16}$ $\frac{4}{7}$ $\quad \left.\begin{array}{l} 3+4=13 \\ 16+7=23 \end{array}\right\} \frac{13}{23}$

Ответ: min $b = 23$.

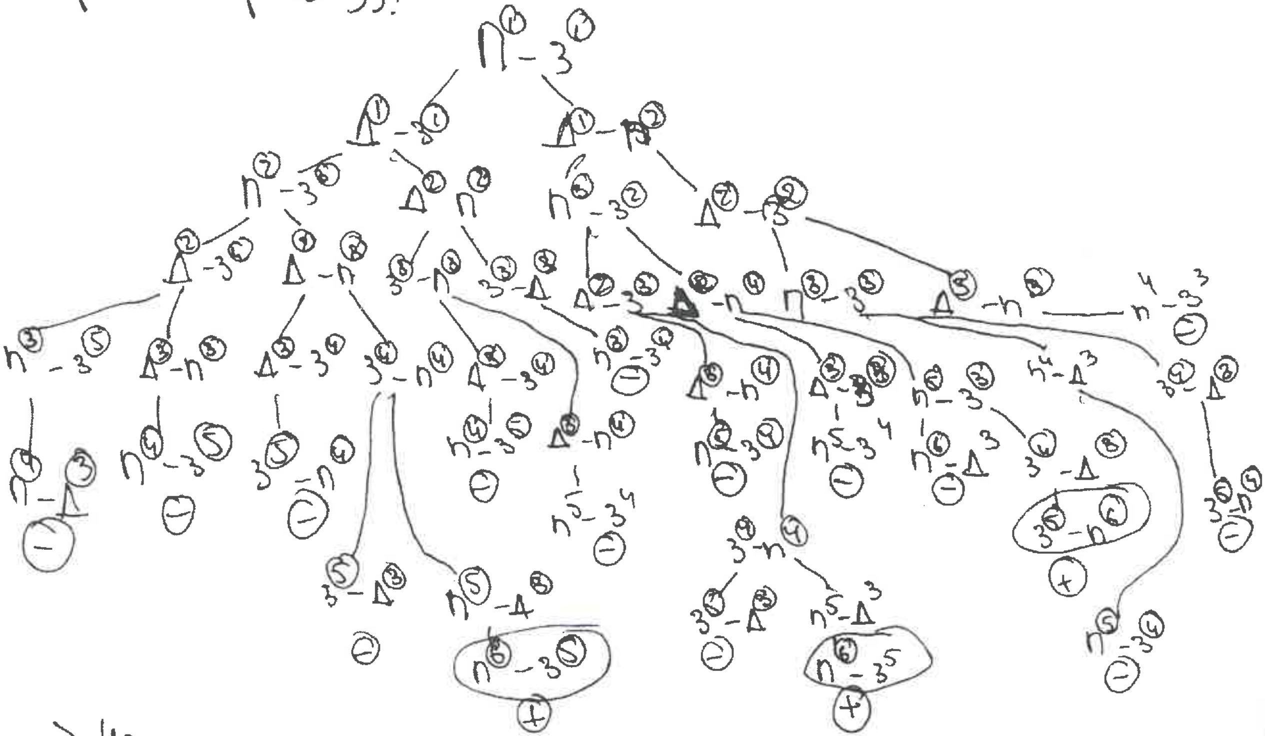
Это не случайное совпадение. :)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	20	20	—	—	75

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

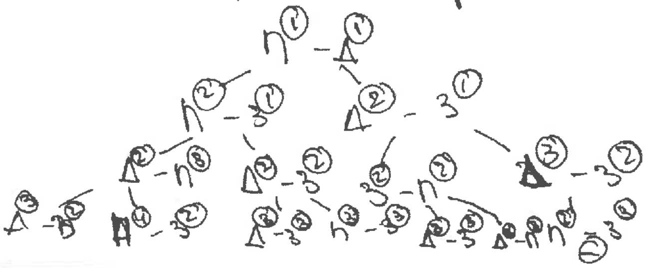
① П – 6 партий
З – 5 партий
Д – 3 партии

1) Допустим в первой партии играл Петя с Захаром: (проанализируем все возможные исходы партий, получив дерево вариантов (у каждого игрока сверху подписано кол-во сыгранных партий)):



=> Не трудно заметить, что у всех положительных исходов во второй партии проиграл Дима

2) Допустим в первой партии играл П и Д:



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 9 | 0 | 2 | 5

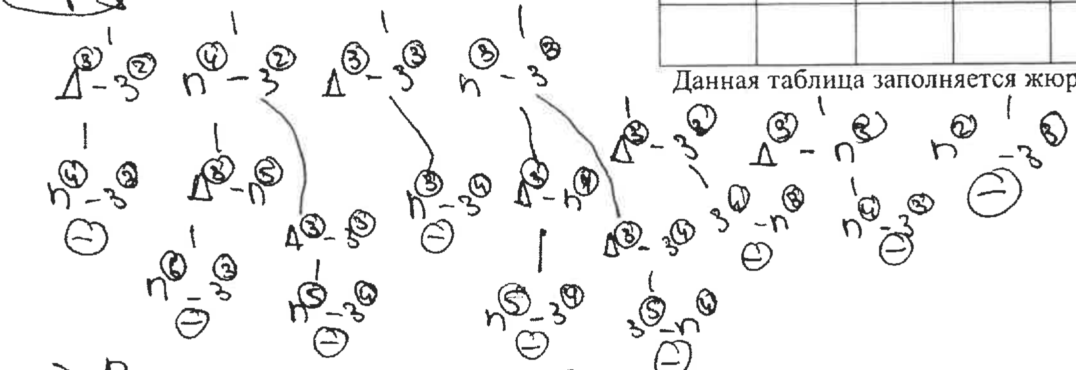
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

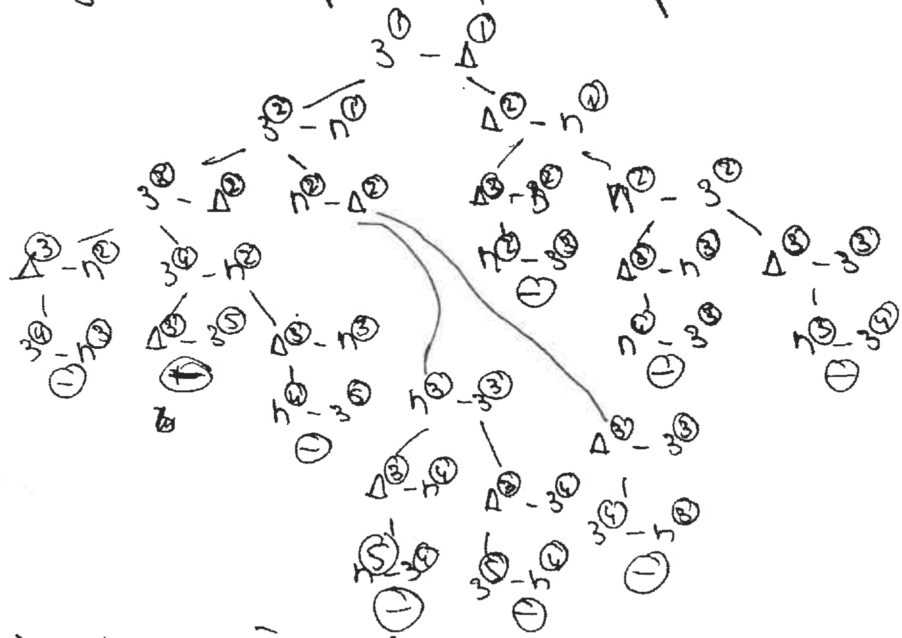
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. прод



=> Видно, что при такой первой партии нет искомых рез-ов при любом исходе второй партии.

3) Допустим в первой партии играл З и Д:



=> при такой первой партии тоже нет искомых рез-ов.

=> ~~во второй~~ Поскольку иных вариантов первой партии нет, мы можем сделать вывод что во второй партии проиграл Дима

Ответ: $\boxed{\text{Дима}}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 9 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② $\frac{a}{b} \in \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right)$

~~[illegible]~~

1) $\frac{7}{19} - \frac{4}{11} = \frac{77-76}{209} = \frac{1}{209}$

$\Rightarrow \boxed{b \geq 209}$

2) Допустим $b = 209$:

$\begin{cases} \frac{a}{209} > \frac{4}{11} \Rightarrow a > 76 \\ \frac{a}{209} < \frac{7}{19} \Rightarrow a < 77 \end{cases}$ $\Rightarrow$ a содержит хотя бы одну цифру после запятой.

$\Rightarrow$ после приведения дроби $\frac{a}{b}$ в ~~[illegible]~~ нормальный вид min знаменатель – 2090 (если одна цифра запятой)

$\Rightarrow$ нам надо подбирать такой диапазон для a, чтобы в нем было хотябы одно целое значение

3) Допусти $b = 210$:

$\begin{cases} \frac{a}{210} > \frac{4}{11} \Rightarrow a > \frac{4 \cdot 210}{11} \approx 76,36 \\ \frac{a}{210} < \frac{7}{19} \Rightarrow a < \frac{7 \cdot 210}{19} \approx 77,36 \end{cases}$ $\Rightarrow$ этому диапазону удовлетворяет $a = 77$

$\Rightarrow$ Возможное искомое зн-е: ~~[illegible]~~ $c\ min(b) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{77}{210}$

4) Проверим лежит ли найденое $\frac{a}{b}$ в заданном диапазоне:

$\frac{77}{210} - \frac{4}{11} = \frac{77 \cdot 11 - 4 \cdot 210}{210 \cdot 11} = \frac{847 - 840}{210 \cdot 11} > 0\ (+)$ $\Rightarrow$ все верно

$\frac{7}{19} - \frac{77}{210} = \frac{7 \cdot 210 - 77 \cdot 19}{19 \cdot 210} = \frac{1470 - 1463}{19 \cdot 210} > 0\ (+)$ $\Rightarrow min(b) = 210$

Ответ: 210

$\frac{77}{210} = \frac{11}{30}$. Но минимальность зн 30 не доказана

Лист 3 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 9 | 0 | 2 | 5 |

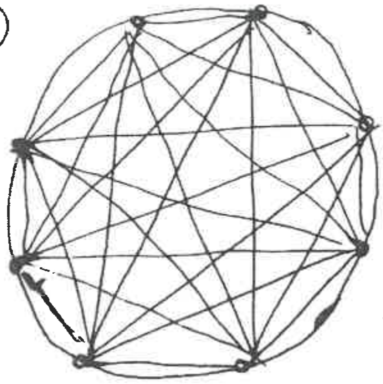
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3



Нам не удобно выбирать отрезки из общего числа, нам удобно выбирать точки, задающие эти отрезки.

⇒ Поскольку 3 выбранных отрезка должны образовывать треугольник, вариантов выбрать эти три отрезка: C_8^3

⇒ Относительно этих трех отрезков сущ-ет 2 вида четвертого отрезка:

1) имеющие с образованным треугольником общую точку

2) не имеющие с образованным треугольником общую точку

⇒ отрезков 1-го типа: $3\cdot5$, т.к. для каждой вершины есть 5 способов провести отрезок к свободной точке

⇒ отрезков 2-го типа: C_5^2, т.к. нам надо выбрать 2 не использованные точки и соединить их.

⇒ Общее число способов выбрать искомые четыре отрезка

$$C_8^3\left(15+C_5^2\right)=\frac{8!\cdot15}{3!\cdot5!}+\frac{8!}{3!\cdot5!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot15}{2\cdot3}+\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot2\cdot3}=$$

$$=3\cdot5\cdot7\cdot8+2\cdot5\cdot7\cdot8=5\cdot5\cdot7\cdot8=1400$$

(см. прод-е на листе 5)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 8 9 0 2 5

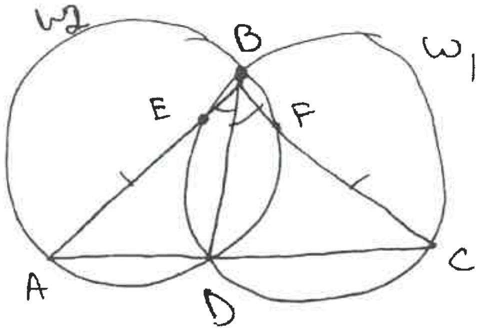
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(4)



Поскольку BD – биссектриса, верно следующее равенство:

$$\boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}} \Rightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC} \quad (*)$$

Поскольку AB и AC – секущие к ω_1, проведенные из одной точки:

$$\boxed{AE\cdot AB = AD\cdot AC} \quad (1)$$

Поскольку AC и CB – секущие к ω_2, проведенные из одной точки:

$$\boxed{CF\cdot CB = CD\cdot AC} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ поделим (1) на (2):

$$\frac{AE\cdot AB}{CF\cdot CB}=\frac{AD}{CD} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ подставляя (*) в (3):

$$\frac{AE\cdot \cancel{AB}}{CF\cdot \cancel{CB}}=\frac{\cancel{AB}}{\cancel{CB}} \Rightarrow AE=CF, \text{ ч.т.д.}$$

Ответ: $\boxed{AE=CF}$

3. прод

$\Rightarrow$ Изначально было проведено $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ отрезков в данной окр-ти

$\Rightarrow$ Всего вариантов выбрать 4 отрезка из 28: $C_{28}^4=\frac{28!}{4!\cdot 24!}=$

$$=\frac{25\cdot \cancel{26}^{13}\cdot \cancel{27}^{9}\cdot \cancel{28}^{7}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}=25\cdot 13\cdot 9\cdot 7 \text{ способов}$$

+

$\Rightarrow$ Вероятность составления тр-ка: $p=\frac{\cancel{5}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{7}\cdot 8}{\cancel{25}\cdot 13\cdot 9\cdot \cancel{7}}=\frac{8}{117}$

Ответ: $\frac{8}{117}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0001731225
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	15	20	3	–	74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

Заметим, что никакой бельчонок не мог не играть 2 раза подряд, так как после игры один из игроков меняется с ним. Таким образом единственным вариантом сыграть 3 раза является лишь вариант: сыграть в 2, 4, 6 раундах.

Тогда Дима играл во второй партии, но не играл в 3 ⇒ он проиграл во 2 партии

Ответ: Дима

~~№ 3.~~

~~Всего способов выбрать 4 отрезка $C^4_{C^2_8} = C^4_{28} = \frac{28\cdot27\cdot26\cdot24}{4!}$~~

~~Заметим то, что не могут появиться сразу 2 красных треугольника, поэтому нам подходят для каждого из $C^3_{C^2_8} = C^3_{28} = \frac{28\cdot27\cdot26}{3!}$ треугольников нам будет $C^1_{25} = 25$ исходов, где этот треугольник является красным (красим одну из оставшихся недель)~~

~~тогда ... нам подойдет $C^3_{28}\cdot C^1_{25} = \frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{3!}$ исходов из C^4_{28}~~

№ 3. Всего отрезков $C^2_8 = 28$

Всего исходов выбрать 4 отрезка $C^4_{C^2_8} = C^4_{28} = \frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{4!}$.

Всего треугольников $C^3_8 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3!} = 56$, и для каждого треугольника существует $C^1_{28-3} = 25$ (выбираем 1 красное ребро из оставшихся) исходов, где этот треугольник красный. Заметим, что красными не могут быть одновременно 2 треугольника ⇒ все исходы мы посчитали 1 раз ⇒ вероятность равна

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 3 | 1 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

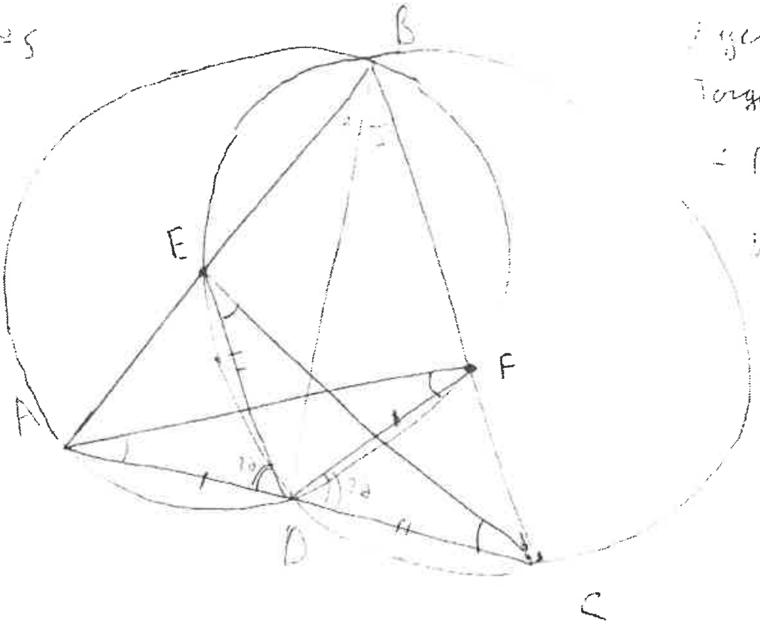
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{56\cdot 2\cdot 5\cdot 3!}{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25} = \frac{2\cdot 6}{27\cdot 26} = \frac{2}{13\cdot 9} = \frac{2}{117}$$

№5



Пусть $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$.
Тогда из вписанности $DEBC$
$\angle DEC = \alpha$; $\angle DCE = \alpha$
Из вписанности $ADFB$.
$\angle DAF = \alpha$; $\angle AFD = \alpha$

Из ~~обобщенной~~ теоремы синусов отношение радиусов ω_1 и ω_2 равно

$$\frac{\frac{DC}{\sin\alpha}}{\frac{AD}{\sin\alpha}} = \frac{DC}{AD} \quad \text{Но по т. sin} \quad \frac{\frac{DB}{\sin\angle DCB}}{\frac{DB}{\sin\angle DAB}} = \frac{\sin DAB}{\sin\angle DCB} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle DCB} = \frac{DC}{AD}. \quad \text{Т.к. } \triangle ADF \text{ и } \triangle FDC - \text{р/б} \Rightarrow ED = DC;\ AD = DF$$

Посчитаем отношение радиусов (AED) и (DFC) по обобщ. т. синусов:

$$\frac{\frac{ED}{\sin\angle DAE}}{\frac{DF}{\sin\angle DCF}} = \frac{ED}{DF}\cdot\frac{\sin\angle DCF}{\sin\angle DAE} = \frac{DC}{AD}\cdot\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle DAB} = 1, \text{ т.е. сами радиусы равны}$$

Заметим, что $\angle EDA = 2\alpha$ как внешний к $\triangle EDC$, аналогично $\angle FDC = 2\alpha$;

Но тогда по обобщ. т. синусов: $\frac{\frac{FC}{\sin 2\alpha}}{\frac{AE}{\sin 2\alpha}} = \frac{FC}{AE} = 1$ т.к. радиусы равны $\Rightarrow FC = AE$ ч.т.д.

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 3 1 2 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5

~~Заметим~~

Сразу заметим, что (0, 0) - решение.

Тогда если $x=0$ а $y\neq 0$ $\Rightarrow$ $y^3=0$ $\Rightarrow$ решений нет

если $x\neq 0$ $y=0$ $\Rightarrow$ $x^4=0$ - решений нет.

Тогда ~~это~~

Остался случай $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Очевидно что если x и y нечетные, то все 3 слагаемые нечетные, а сумма ~~3х~~ нечетных нечетна $\Rightarrow$ $\neq 0$

Тогда ~~одно из~~ ~~или~~ x или y - четный. Когда ~~одно~~ x или y ~~не~~ четно. то 2 слагаемых из 3 $(x^4, -xy, y^3)$ четны и тогда второе нечетное должно быть нечетной и нет решений нет.

$p(x)$ - максимальная степень двойки на которую делится X; то $x \leq 76$

~~$p(x)=5$~~ $p(x)=a$, если $x \vdots 2^a$ $X \not\vdots 2^{a+1}$

$$x^4-xy+y^3=0$$

$$xy=x^4+y^3$$

$$p(xy)=p(x^4+y^3)$$

$$p(x)+p(y)=4p(x)+3p(y)$$

№ 7.

$$\frac{1}{11}\leq\frac{a}{b}<\frac{4}{19}$$

$$\frac{76b}{2036}<\frac{209a}{2036}<\frac{77b}{2036}$$

условие на b равносильно тому, что между 77b и 76b есть число кратное 209

$$p(b)=\left[\frac{77b}{209}\right]-\left[\frac{76b}{209}\right]\geq 1$$

с помощью этого сделаем перебор значений b

1 ~~x~~ $p(1)=0$ 0	$p(6)$ 2 2	$p(10)$ 3 3	$p(14)=5$ 5
2 $p(2)=0$ 0	$p(7)=2$ 2	$p(11)=4$ 4	$p(15)=5$ 5
$p(3)=1$ 1	$p(8)=2$ 2	$p(12)=4$ 4	$p(16)=5$ 5
$p(4)=1$ 1	$p(9)=3$ 3	$p(13)=4$ 4	$p(17)=6$ 6
$p(5)=1$ 1			

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00017312 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

$p(18) = 6\cdot 6$

$p(19) = 6\cdot 6$

$p(20) = 7\cdot 7$

$p(21) = 7\cdot 7$

$p(22) = 8\cdot 8$

$p(23) = 8\cdot 8$

$p(24) = 8\cdot 8$

$p(25) = 9\cdot 9$

$p(26) = 9\cdot 9$

$p(27) = 9\cdot 9$

$p(28) = 10\cdot 10$

$p(29) = 10\cdot 10$

$p(30) = 11\cdot 10 : 1$ победа

[illegible] убедимся что в 30 подходит:

$\frac{4}{11} < \frac{11}{30}$ $120 < 121$

$\frac{11}{30} < \frac{7}{19}$ ~~120 < 210 <~~ $209 < 210$

Ответ: 30.

№5.

$x^4 - xy + y^3 = 0$

$xy = x^4 + y^3$

$x = \frac{x^4+y^3}{y} = \frac{x^4}{y} + y^2 \in \mathbb{Z}$

$y = \frac{x^4+y^3}{x} = x^3 + \frac{y^3}{x} \in \mathbb{Z}$

Контрпример! $x = 2$, $y = 4$. $x^4 = 16 \vdots 4 = y$, но $x \not\vdots y$.

тогда $x^4 \vdots y$, $y^3 \vdots x$ [illegible] из простых множителей x содержатся в y и наоборот. ~~тогда мы можем~~ $x \vdots y$ и $y \vdots x \Rightarrow x = \pm y$

Подставим $y = x$

$x^4 + x^3 - x^2 = 0$ $x^2(x^2 + x - 1) = 0$ корни не целые

$x = 0$

Подставим $y = -x$

$x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1)$ корни нецелые

Ответ: $x = y = 0$

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	4	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	10	20	15	-	70

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Петя – 6 раз (П)
Захар – 5 раз (З)
Дима – 3 раза (Д)

Решение:

Заметим, что Д. должен был проиграть все 3 раза, т.к. если бы он не проигрывал, то сыграл бы не меньше 4 раз, а он сыграл 3 раза. Кроме того, он должен играть с кем-то через игру (то есть одну пропустил, одну сыграл.) Всего партий: $\frac{6+5+3}{2} = 7$. То есть Д. играл во второй, 4-ой и 6-ой партиях (иначе бы он играл 4 раза) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ т.к. он играл во 2-ой партии и всегда проигрывал, то это он проиграл во второй партии. Приведу пример таких игр:

1) (З(+); П(−)); 2) (З(+); Д(−)); 3) (З(−); П(+)); 4) (Д(−); П(+)); 5) (З(−); П(+)); 6) (Д(−); П(+)); 7) (З(−); П(+));

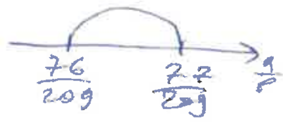
((+) означает выигрыш, (−) – проигрыш; буквы – сокращение от имён; в одних скобках – одна партия). (партии пронумерованы)

Ответ: Дима.

№2

$\frac{4}{11}$; $\frac{7}{19}$; $\frac{a}{b} \in \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right)$; $b_{min} = ?$

Решение: $\frac{4}{11} = \frac{76}{209}$; $\frac{7}{19} = \frac{77}{209}$ $\Rightarrow$



если $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{Z}$, то $b > 209$, т.к. между 76 и 77 нет целых значений для $a \Rightarrow b$ как минимум в 2 раза больше 209 чтобы a могло принять целое значение (и дробь с таким b была в интервале $\left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right)$) единственное $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{153}{418} = \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{19}\right) : 2$; далее все возможные a будут нечётными, а b чётными $\Rightarrow b = 418$ наименьшее возможное b; $153 = 17 \cdot 9$; $418 = 2 \cdot 11 \cdot 19 \Rightarrow \frac{153}{418}$ – несократимая дробь;

Ответ: 418

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	1	6	4	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

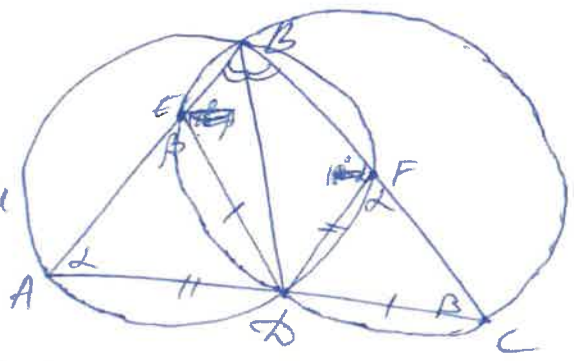
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Дано: $\triangle ABC$; $D \in AC$;
ω_1 опис. $\triangle BDC$; ω_2 опис. $\triangle ABD$.
$\omega_1 \cap AB = E$; $\omega_2 \cap BC = F$;
$\angle ABD = \angle DBC$; Доказать: $AE = CF$

Чертёж:



Доказательство:

$\angle ABD = \angle DBC$ (по усл.), а по св-ву, равные углы опираются на равные хорды $\rightarrow$
$\Rightarrow AD = DF = ED = DC$

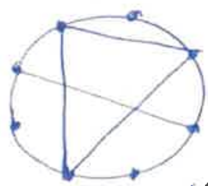
Пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle BCA = \beta$;

Тогда по св-ву $\angle BFD = 180° - \alpha$; $\angle BED = 180° - \beta$ (т.к. четырёхуг. EBCD и ABFD - вписанные); $\angle BFD + \angle DFC = 180° = \angle BED + \angle AED$
$\Rightarrow \angle AED = \beta$; $\angle DFC = \alpha$; $\angle EDA = \angle FDC = 180° - \alpha - \beta$;
т.к. $ED = DC$; $FD = DA$; ~~двумя углами и стороне между ними~~; $\angle EDA = \angle FDC$, то $\triangle ADE = \triangle FDC$ (по 2 ст. и углу между ними; или по 3 углам и стороне, если учесть, что $\angle BAC = \angle DFC$; $\angle AED = \angle FCD$) $\Rightarrow AE = CF$ как соответствующие стороны в равных треугольниках.

Ответ: утверждение доказано. Ч.т.д.

№3

8 точек; 4 хорды; $P_{\text{красн. треуг.}} = ?$



Решение: отрезки являются хордами окружности. Всего таких хорд: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1 = 7!$; ~~отрезкам~~, скольким способами можно выбрать хорды для треугольника: первую можно взять любую: её можно выбрать $7!$ способами. Чтобы выбрать вторую нам подойдут 12 способов (по 6 из каждой из вершин треугольника, лежавших на уже выбранной хорде); для третьей стороны нам подойдёт только 1 вариант. Четвёртую хорду можно взять любую из оставшихся, то есть $(7!-3)$ способами. Порядок выбора хорд не важен $\Rightarrow$ кол-во подходящих нам выборов равно: $7! \cdot 12 \cdot 1 \cdot (7!-3)$. Всего же кол-во способов выбрать четыре хорды из $7!$ равно: $7!(7!-1)(7!-2) \times$
$\times (7!-3) \Rightarrow$ искомая вероятность: $P_{\text{красн. треуг.}} = \dfrac{7! \cdot 12 \cdot 1 \cdot (7!-3)}{7!(7!-1)(7!-2)(7!-3)}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 6 4 4 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение решения)

$7! = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 36\cdot20\cdot7 = 5040$

$\Rightarrow P_{\text{красн. треуг.}} = \frac{12}{(7!-1)(7!-2)} = \frac{12}{5039\cdot5038} = \frac{6}{5039\cdot2519} = \frac{6}{12693241}$

Ответ: $P_{\text{красный треугольник найдётся}} = \frac{12}{(7!-1)(7!-2)} = \frac{6}{12693241}$

№5

$x^4 - xy + y^3 = 0$; $x\in\mathbb{Z}$; $y\in\mathbb{Z}$;

заметим, что пара $(0;0)$ подходит и далее будем считать, что $x\neq0$ и $y\neq0$;

~~$x^4 = y(x-y^2) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y>0\\ y^2<x\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ y^2>x\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow y<0$ и $y^2>x$~~ ~~при $y>0$ и $y^2<x$ ур-е не имеет реш. в цел. числах~~

~~$y^3 = x(y-x^3) < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x^3<y\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ x^3>y\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow x>0$ и $x^3>y$~~ ~~при $x<0$ и $x^3<y$ ур-е не имеет реш. в цел. числах~~

$x(y-x^3) = y^3$

$x = \frac{y^3}{y-x^3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^3 \Rightarrow x=0;\ y=0\\ y^3 \vdots (y-x^3) \Rightarrow y^3 \vdots x^3 \Rightarrow y \vdots x \Rightarrow y = ax\end{array}\right.$

$a\in\mathbb{Z}$

Не закончено рассуждение

$y(x-y^2) = x^4$

$y = \frac{x^4}{x-y^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y^2 \Rightarrow x=0;\ y=0;\\ x^4 \vdots (x-y^2) \Rightarrow x^4 \vdots y^2 \Rightarrow x^2 \vdots y;\ x^2 \vdots ax;\ x \vdots a\end{array}\right.$ $(-)$

$xy - y^3 = x^4 > 0 \Rightarrow y(x-y^2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y>0\\ y^2<x\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ y^2>x\end{cases}\end{array}\right.$

при $y>0$ и $y^2<x$ $x^4 - xy + y^3$ никак не может быть равно 0 при $x\in\mathbb{Z}$ и $y\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow y<0$ и $y^2>x$; пусть $b = -y > 0$ $\mid x^4 = b^3 - xb \vdots b^2$ $b\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow b(b^2-x) \vdots b^2 \Rightarrow (b^2-x) \vdots b \Rightarrow x \vdots b \Rightarrow x \vdots y \Rightarrow x = ny$; но $y = ax$; такое возможно только если $x = y$; $a = n = 1$;

но при $x = y$: $x^4 - x^2 + x^3 = 0$; $x^2(x^2+x-1) = 0$; $D = 1+4 = 5$,

но $\sqrt5 \notin\mathbb{Z} \Rightarrow$ такое не возможно $\Rightarrow$ нам подходит только пара $(0;0)$

Непонятно, почему x^4 делится на b^2

Ответ: $x=0$; $y=0$

так-же $ax \neq y$ если $x\neq y\neq 0$; где $a\in\mathbb{Z}$, т.к. тогда $\sqrt{D} = \sqrt{a^6+4a} \notin\mathbb{Z}$ и аналогично $ay \neq x$, $a\in\mathbb{Z}$

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	19	–	15	–	69

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Чтобы минимизировать количество партий Маши и Пети между другими участниками, надо максимизировать количество их партий между друг-другом. Поясним, что если они играют между собой и Маша выигрывает, то Петя обязательно проигрывает и наоборот. Если они сыграли вничью, то у обоих результат – ничья.
У Маши было 3 ничьи, у Пети одна, значит кол-во ничейных партий между ними ровно одна. Петя проиграл 2 раза, а Маша выиграла 2 раза, значит матчей где Маша победила, а Петя проиграл = 2
Т.к. Маша не проигрывала, Петя не мог ее обыграть, и все победные игры играл с другими

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 1 1 1 3 2 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

ребятами. Мы нашли максимальное кол-во игр, которые Маша с Петей играли между собой значит все остальные матчи они могли сыграть только между другими ребятами и это и будет нам ответ, посчитаем его

$(6-1-2)+(5-1-2)=5$

Ответ: 5

№2

составим уравнение и выразим все члены нашей прогрессии

1) $a:b$ 2) $a-b$ 3) $\underline{b-a}$ $a-b$ 4) $a+b$

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+d=ab \\ ab+d=b-a \\ b-a+d=a+b \end{cases}$$

$b-a+d=a+b \Leftrightarrow d=2a$

d - шаг прогрессии

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+2a=ab \\ ab+2a=b-a \end{cases}$$

~~$2a=a$~~

Неверное условие.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + 2a = ab \\ ab + 2a = b - a \end{cases} \qquad \oplus\ \frac{a}{b} + 2a + 2a = b - a$$

$$\frac{a}{b} = b - 5a$$

$b - 5a + 2a = ab \quad b - 3a = ab$

$b - 3a = \frac{a}{b} + 2a \quad b - 5a = \frac{a}{b} \ |\cdot b$

$b^2 - 5ab = a \quad b^2 - 5ab - a = 0$

решим квадр. урав относительно b

$\cancel{D = 25 + 4a} \quad b_{1,2} = \quad D = 25a^2 + 4a$

$$b_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2 + 4a}}{2}$$

$\frac{a}{b} + 2a = ab \ |\cdot b \quad ab^2 - 2ab - a = 0$

$D = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$

$$b_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{8}\,a}{2a} = 1 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

оба значения b нашли, найдем a

$\cancel{\frac{a}{1+\sqrt{2}} + 2a = (1+\sqrt{2})a \ |\cdot 1+\sqrt{2}}$

$\cancel{a + (2+\sqrt{2})a = (1+\sqrt{2})^2 a}$

$\cancel{a + 2a + \sqrt{2}\,2a = a + 2\sqrt{2}a + 2a}$

Шифр

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение, 2)

$b_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$

$\cancel{a(1+\sqrt{2})^2-(2+2\sqrt{2})b-a=0}$

$\frac{a}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}-5a \,\Big|\cdot(1+\sqrt{2})$ (из $\frac{a}{b}=b-5a$)

$a=(1+\sqrt{2})^2-5a(1+\sqrt{2})$; $\cancel{a=1+2\sqrt{2}-5a}$

$a=1+2\sqrt{2}+2-5a-5a\sqrt{2}$

$a=3+2\sqrt{2}-5a-5a\sqrt{2}$

$6a+5a\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$

$a(6+5\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$

$a=\frac{3+2\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}$

теперь при $b=1-\sqrt{2}$

$\frac{a}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}-5a \,\Big|\cdot 1-\sqrt{2}$

$a=1-\sqrt{2}-5a-\sqrt{2}+2+5a\sqrt{2}$

$a=3-2\sqrt{2}-5a+5a\sqrt{2}$

$6a-5a\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}$

$a(6-5\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}$ $a=\frac{3-2\sqrt{2}}{6-5\sqrt{2}}$

решив квадратное уравнение мы нашли все корни

Ответ $\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}};\ 1+\sqrt{2}\right);\ \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6-5\sqrt{2}};\ 1-\sqrt{2}\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 1 1 1 3 2 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

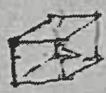
№3

т.к раскрашивание в 2 цвета равновероятно, то вероятности $= \frac{1}{2}$

посчитаем вероятности того, что раскраска совпадет в зависимости от количества синего цвета (без разницы какой цвет мы берем потому что другого цвета будет $6-x$ где x - кол-во нашего цвета)

0 синего цвета: вероятность равна

$\frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$.



1 синего: т.к. есть возможность поворота нам достаточно, чтоб в обоих кубах была равно одна синяя грань: $6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4096}$

2: чуть сложнее т.к нужно учесть выпадение противоположных граней и непротивоположных. кол-во способов выбрать непротивополом: $4+2+2+4=12$

противополом: 3.

$12^2 \cdot \frac{1}{4096} + \frac{3^2}{4096}$ - сумма вероятностей противополож и непротивополож

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00011113225

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке сетки

№3 (продолжение)	1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3 синего цвета мы можем взять 2 способами: чтобы они шли как бы „подряд" и чтобы каждая синяя грань была смежна с другой синей гранью, посчитаем их отдельно:

так чтобы шли „подряд": 

их 12

смежных: 8, то есть вероятность 3 цветов: $8^2 \cdot \frac{1}{4096} + 8^2 \cdot \frac{1}{4096}$

для 4 и 5 заметим, что вероятность будет такая же, как для 2, 1 и 0 соответственно т.к выбрать 2 синих цвета равносильно тому что выбрать 4 зеленых, аналогично для 5 и 6, посчитаем ответ

$$2\cdot\frac{1}{4^{12}} + \left(\frac{12^2}{4096} + \frac{3^2}{4096}\right)\cdot 2 + \left(6\cdot 6\cdot\frac{1}{4096}\right)\cdot 2 +$$

$$+ 8^2\cdot\frac{1}{4096} + 8^2\cdot\frac{1}{4096} = \frac{2+\cancel{288}+18+72+64+64}{4096}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA000111 3225

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение. 2)

$\cancel{\frac{288+20+200}{4096} = \frac{508}{4096} = \frac{127}{1024}}$

~~Ответ $\frac{127}{4096}$~~

$2 \cdot \frac{1}{2^{12}} + \left(\frac{12^2}{4096} + \frac{3^2}{4096}\right) \cdot 2 + \left(\frac{36}{4096}\right) \cdot 2 + 8^2 \cdot \frac{1}{4096} + \frac{12^2}{4096} = \frac{2 + 228 + 18 + 72 + 144 + 64}{4096}$

288

$= \frac{300+230}{4096} = \frac{530}{4096} = \frac{265}{2048}$

Ответ: $\frac{265}{2048}$

№5

$n + m^2 + 2^2 = 2nm$ сразу убедимся что ни n, ни m не равны 1

т.к. при $n = 1$ $m^2 + 2 = m$

при $m = 1$ $n + 2 = n$

Лист 4 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение)

попробуем разобраться с кратными значениями

~~$n=m \Rightarrow d=n;\ n+n^2+n=n^3$~~

~~есть один корень $n=2$~~

• при $m \vdots n$ $\quad n+(kn)^2+n^2 = n^2 \cdot kn$

$n+k^2n^2+n^2 = kn^3 \Leftrightarrow kn^2(n-k)-n^2-n=0$

$kn^2(n-k)-n(n+1) = n(kn(n-k)-n-1)=0$

$m, k, n \in N,\ n \neq 0 \Rightarrow kn(n-k)-n-1=0$

$kn(n-k)-n=1$ понимаем, что левая часть $\vdots\, n$, правая нет $\Rightarrow$

$m \not\vdots\, n$

• при $n \vdots m$ $\quad mk+m^2 = km^3 \mid : m$

$k+m = km$ ~~у нас получилось диофантово уравнение следовательно либо $m \vdots k$ либо $k \vdots m$, если это не так левая часть не будет делиться на одну из переменных а правая будет~~

~~$m \neq 1;\ k \neq 1 \mid m \cdot k$ $k=1$ проверили в предыдущем пункте и $m=1$ в позапрошлом~~ понимаем что единственный корень нашего уравнения будет $m=2;\ k=2$

$m(k-m)=d \quad mk+m^2+n=km^3 \quad m(k+1)+m^2=m^3k$

$(k+1)+m = m^2k \quad m(mk-1)-k=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ МА0001113225

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~т.к при возрастании m и k правая часть будет возрастать намного быстрее, и больших пересечений графиков не будет. Тем временем, мы нашли 2 корень~~

№5 (продолжение 2)

$k+m=m^2k \Leftrightarrow m(mk-1)-k=0$

т.к числа $\in N$ и $m>1$ и $k>1$ (случай $k=1$ я рассматривал в позапрошлом случае, а $m=1$ в первом) $m\cdot(mk-1) \overset{!}{>} k$ т.к даже скобка $mk-1>k$, а мы ее еще и на m домножаем $\Rightarrow$ корней нет.

Осталось рассмотреть случай $m ⋮ n$ и $n ⋮ kn$, таким образом мы решили задачу т.к рассмотрели все случаи

С этого стоило начать

т.к d — общий делитель мы можем представить $m=kd$ $n=ld$

$ld+k^2d^2+d^2=d^3lk \quad |:d$

$l+k^2d+d=d^2lk$

~~подбираем, что l и k взаимнопросты~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ MA000111 3225

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке страниц

№5

продолжение

$l+dk^2+d=d^2lk$

l, k взаимно просты

~~из того, что~~ $l \not\vdots k$ и $k \not\vdots d$

~~(т.к я рассматриваю варианты $n \not\vdots m$ и $m \not\vdots n$) понимаем, что d должно быть кратно и l и k т.к правая часть делится и на l и на k, а левая $l+dk^2$~~

~~$d(k^2+1)+l=d^2lk$~~

~~$d^2lk-d(k^2+1)-l=d(dlk-k^2-1)-l=0$~~

поймём, что $l \vdots d$ т.к правая часть $\vdots d$, а в левой $dk^2+d \vdots d \Rightarrow l \vdots d$

из теоремы о НОД понимаем, что НОД$(l,k)=1$ т.к ($l \not\vdots k$ и $k \not\vdots l$)

т.к я рассматриваю случаи $m \not\vdots n$ и $n \not\vdots m$

т.к ~~левая часть~~ правая часть $\vdots l$ и $\vdots k$ $\Rightarrow$ левая тоже должна быть им кратна, как мы уже выяснили $l \vdots d$ и т.к левая часть должна делиться на $k \Rightarrow l+d \vdots k$

а т.к $l \vdots d \Rightarrow$ НОД$(k,l)>1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$d=1$?

т.к $l \vdots d$ и $k \vdots d$

противоречие, следовательно не может быть такого, что $m \not\vdots n$ и $n \not\vdots m$. Я рассмотрел все возможные случаи ($m=n$, $n \vdots m$, $m \vdots n$, $n \not\vdots m$ и $m \not\vdots n$) ~~и доказал что~~ остался только случай $m=n$

• $m=n \Rightarrow d=n \quad n+n^2+n^2=n^3$

$n^3-2n^2-n=0 \quad n(n^2-2n-1)$

$D=\sqrt{4+4}=\sqrt{8} \quad n_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2} \quad n \notin N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корней при $m=n$ нет.

Я точно рассмотрел все случаи и доказал что корней нет.

Ответ: $n, m \in \varnothing$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 7 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	–	20	8	–	68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. Т.к. Петя 2 раза выиграл, а Маша ни разу не проигрывала, то Петя 2 раза выиграл у других людей. Т.к. у Маши было 3 ничьи, а у Пети всего 1, то Маша сыграла ≥ 2 игры с другими людьми.

Т.к. Петя 3 раза проиграл, ~~то~~ а Маша выиграла 2 раза, то Петя хотя бы ~~один~~ 1 раз проиграл другому человеку.

Итого получаем, что Маша и Петя сыграли хотя бы $2+2+1=5$ игр с другими ребятами.

Пример:

Пусть Петя и Маша играли между собой 3 раза: в одной игре будет ничья, а в 2х других Маша выиграет Петю. Петя сыграет 3 игры с другими ребятами: в одной он проиграет, а в двух других выиграет.

Маша сыграет 2 игры с другими ребятами: в обеих будет ничья.

Ответ: 5.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 7 | 8 | 7 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. По условию числа $\frac{a}{b}$, $a\cdot b$, $a-b$, $a+b$ образуют арифметическую прогрессию.

Тогда:

$$\begin{cases} 2a\cdot b = \frac{a}{b} + a - b \\ 2(a-b) = a+b+a\cdot b \end{cases}$$

Выразим a из 2го уравнения:

$$2a-2b = a+b+a\cdot b$$

$$a(1-b) = 3b$$

$$a = \frac{3b}{1-b}$$

Подставим в 1е ур-ие:

$$\frac{2\cdot 3b\cdot b^2}{1-b} = \frac{3b}{1-b} + \frac{3b^2}{1-b} - b^2$$

огр: $b \neq 1$

$$\frac{6b^3}{1-b} = \frac{3b+3b^2-b^2+b^3}{1-b}$$

$$6b^3 = 3b+3b^2-b^2+b^3$$

$$5b^3-2b^2-3b=0 \quad |:b\neq 0$$

$$5b^2-2b-3=0$$

$b=1$ или $b=-\frac{3}{5}$

не подходит под ограничения

найдём a:

$$a = \frac{3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\frac{3}{5}} = \frac{-9}{8}$$

Ответ: $\left(-\frac{9}{8}; -\frac{3}{5}\right)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | MA00017787 25

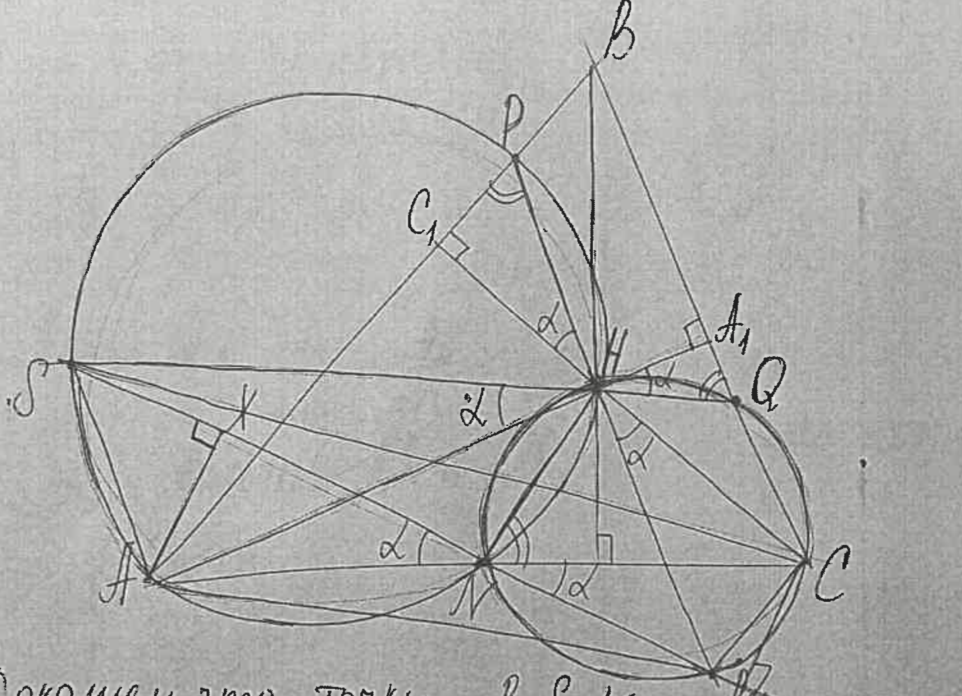
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



1) Докажем, что точки R, S, N лежат на одной прямой.

Проведем NH. Пусть ~~$\angle HQB$~~ $\angle QHA_1 = \alpha$, тогда

$\angle AHS = \angle QHA_1$ – вертикальные

$\angle AHS = \angle AN\cancel{C}S$ – вписанные

из прямоугольного ΔA_1HQ: $\angle HQB = 90^\circ - \alpha$.

Т.к. четырехугольник $NHQC$ – вписанный, то $\angle HQB = \angle HNC = 90^\circ - \alpha$

Т.к. четырехугольник $ANHP$ – вписанный, то $\angle HNC = \angle APH = 90^\circ - \alpha$

ΔHPC_1 – прямоугольный $\Rightarrow \angle PHC_1 = \alpha$

$\angle PHC_1 = \angle CHR$ – вертикальные

$\angle CNR = \angle CHR$ – вписанные

Получили, что $\angle ANS = \angle CNR$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 7 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Т.к. точки A, N, C лежат на одной прямой, то точки R, S, N тоже лежат на одной прямой. из-за равенства углов $\angle ANS$ и $\angle CNR$. ч.т.д.

2) Докажем, что $S_{ARS} = S_{CRS}$

Проведём SC и AR, AS и CR.

Докажем, что $\frac{S_{ARS}}{S_{CRS}} = \frac{AN}{NC}$

Опустим высоты AX и CY на прямую SR

$S_{ARS} = \frac{1}{2} \cdot AX \cdot SR$

$S_{CRS} = \frac{1}{2} \cdot CY \cdot SR$ $\Rightarrow \frac{S_{ARS}}{S_{CRS}} = \frac{AX}{CY}$

Т.к. $\angle ANS = \angle CNR$, то прямоугольные треугольники AXN и CYN подобны по двум углам.

$\Downarrow$

$\frac{AX}{CY} = \frac{AN}{NC}$

$\Downarrow$

$\frac{S_{ARS}}{S_{CRS}} = \frac{AX}{CY} = \frac{AN}{NC}$

Поскольку N - середина AC, то $\frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow S_{ARS} = S_{CRS}$ ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00017787 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 $n = dmn - d^2 - m^2$

Заметим, что $dm \vdots d^2$ и $m^2 \vdots d$, тогда $dmn - d^2 - m^2 \vdots d^2$

$\Downarrow$

$n \vdots d^2$

Пусть $n = ad^2$, $m = b \cdot d$, причём НОД$(a;b) = 1$, $a, b > 0$.

$ad^2 + b^2d^2 + d^2 = d^4 a \cdot b \quad | : d^2 \neq 0$

$a + b^2 + 1 = d^2 \cdot a \cdot b$

$d^2 = \dfrac{a + b^2 + 1}{a \cdot b} \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$a + b^2 + 1 \vdots a \cdot b$

Рассмотрим случай $a + b^2 + 1 = a \cdot b$

Это подбор при $d = 1$

$(b-1)(b+1-a) = -2$

1) $b - 1 = 2$ $\quad b + 1 - a = -1$
$b = 3$ $\quad a = 5$ $\Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (n;m) = (5;3)$

2) $b - 1 = -2$
$b < 0$ противоречие

3) $b - 1 = 1$ $\quad b + 1 - a = -2$
$b = 2$ $\quad a = 5$ $\Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (n;m) = (5;2)$

4) $b - 1 = -1$
$b < 0$ противоречие

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА000177387 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Также можно отметить, что т.к. $a+b^2+1 \vdots ab$, то $a+1 \vdots b$, но $(a;b)=1$, значит $a \underset{b}{\equiv} -1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1   МА000144892 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
18	5	20	20	5	-	68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Обозначим: Петя – П, Захар – З, Дима – Д. По условию, после сыгранной партии, тот кто проиграл меняется с тем, кто не играл в этой партии (для игры в следующей). Т.е. в следующей партии будут играть победитель из предыдущей и тот, кто не играл в прошлой партии.

П сыграл 6 раз, З – 5 раз, Д – 3 раза. 1) $(6+5+3):2=7$ партий было сыграно.

2) Участники (состав) этих партий:

П З, П З, П З, П З, П Д, П Д, З Д   Почему так?

3) Нужно расположить эти варианты в таком порядке, чтобы каждый раз менялся один из участников партии (по сравнению с предыдущей):

1. П З		1. П З		1. П З
2. З Д		2. Д П		2. Д П
3. П З		3. П З		3 П З
4. Д П	или	4. Д П	или	4. З Д.
5. П З		5 П З		5. П З
6. Д П		6. З Д		6. Д П
7. П З		7. П З		7. П З

Во всех 3 случаях во 2 партии проиграл Дима.

Ответ: Дима.

Почему нет других вариантов?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00014489 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

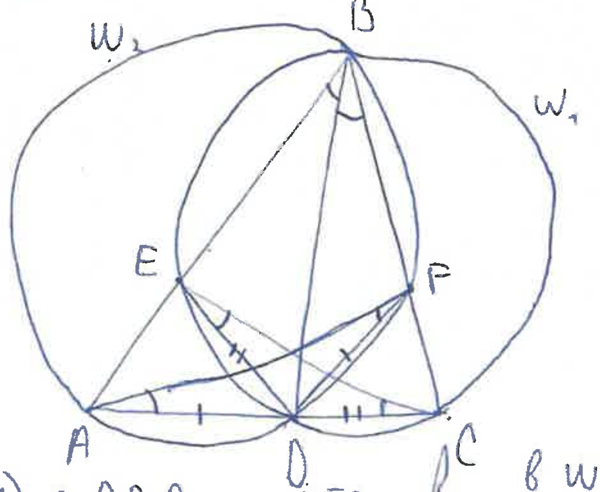
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Дано:
$\triangle ABC$
$D \in AC$
w_1, w_2
$w_1 \cap AB = E$
$w_2 \cap BC = F$
$\angle ABD = \angle DBC$

Д-ть:
$AE = CF$

Д-во:



1) $\angle DBC$ и $\angle DEC$ – вписанные в w_1, опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC$

2) $\angle ABD$ и $\angle AFD$ – вписанные в w_2, опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle ABD = \angle AFD$

3) $\angle ABD = \angle DBF$, вписаны в w_2 $\Rightarrow AD = DF$.

4) $\angle EBD = \angle DBC$, вписаны в w_1 $\Rightarrow ED = DC$

5) $\triangle ADF$ и $\triangle EDC$ – равнобедренные $\Rightarrow \angle DCE = \angle DEC$, $\angle DAF = \angle DFA$. т.к. $\angle DCE = \angle DEC = \angle DAF = \angle DFA$, $\angle ADF = \angle EDC$.

$\angle ADE = \angle FDC$ $(\angle ADF - \angle EDF = \angle EDC - \angle EDF)$

6) $\triangle ADE = \triangle CDF$ по 2 сторонам и углу между ними. ($AD = DF$, $ED = DC$ (из п. 3 и 4), $\angle ADE = \angle FDC$ (из п. 5) $\Rightarrow$ из равенства треугольников: $AE = CF$

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00144892 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Допустим, числа a и b - целые (что не сказано в усл. задачи, но подразумевается), ведь иначе было бы ~~невозможно найти~~ правильным ответом 11, т.е. например $\frac{4{,}01}{11} \in \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right)$)

Тогда т.к. 11 и 19 - простые числа, их НОК: 209.

Получаем $\frac{76}{209}$ и $\frac{77}{209}$. Целых чисел между 76 и 77 нет.

$\frac{76\cdot 2}{209\cdot 2} = \frac{152}{418}$ $\qquad \frac{153}{418} \in \left(\frac{152}{418}; \frac{154}{418}\right)$

$\frac{77\cdot 2}{209\cdot 2} = \frac{154}{418}$

=> наименьшее значение b это 418.

Ответ: 418

№3

$7+6+5+4+3+2+1 = 28$ отрезков всего можно провести в окружности через эти 8 точек.

$C_{28}^{4} = \frac{28!}{24!\cdot 4!} = \frac{25\cdot 26^{13}\cdot 27\cdot 28^{7}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 25\cdot 13\cdot 63 = 20475$ способов выбрать 4 отрезка из 28.

$C_{8}^{3} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$ различных Δ можно получить соединив точки отрезками. (56 способов выбрать 3 отрезка так, чтобы получить треугольник)

$28 - 3 = 25$ способов выбрать 4 отрезок.

$56\cdot 25 = 1400$ способов покрасить 4 отрезка в красный цвет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0001448925

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

$P = \frac{1400}{20475} = \frac{280}{4095} = \frac{56}{819} = \frac{7\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot\cancel{7}\cdot13} = \frac{8}{117}$ – вероятность того, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности.

Ответ: $\frac{8}{117}$.

№5

$x^4 - xy + y^3 = 0$ при $x=0$ и $y=0$ $0-0+0=0$
$0=0$.

1. Если $x>0$ и $y>0$:
$x^4 + y^3 \geq xy$ т.к. $x^4 \geq x$, $y^3 \geq y$.

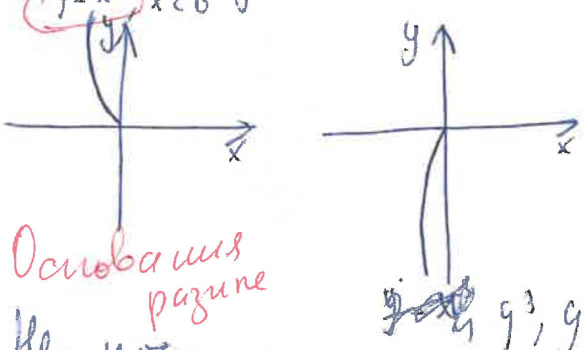
2. Если $x<0$ и $y<0$:
$x^4 + y^3 \neq xy$
$\oplus + \ominus = \oplus$

3. Если $x>0$, $y<0$:
$x^4 + y^3 \neq xy$?
$\oplus + \ominus = \ominus$

4. Если $x<0$ и $y>0$:
$x^4 + y^3 = xy$
$\oplus + \oplus = \ominus$
такого быть точно не может, ведь ~~при сумма~~ положит. чисел не может быть отриц.

2) $x<0$, $y<0$

$y=x^4$, $x<0$



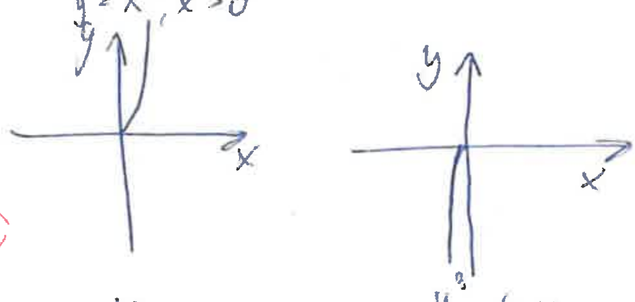
Основания разные ⊖

Не подходит

y^3, $y<0$

3) $x>0$, $y<0$

$y=x^4$, $x>0$



Не подходит

y^3, $y<0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 4 | 8 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение)

Значит, кроме $x=0$ и $y=0$, уравнение $x^4-xy+y^3=0$ не имеет целых корней

Ответ: $x=0$, $y=0$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 8 8 0 6 2 5
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	20	2	-	67

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

П - 6
З - 5
Д - 3

Рассмотрим вторую партию. Если в ней не присутствует Дима, тогда он точно есть в первой и третьей партиях. Всего партий 7 ((6+5+3)/2). На оставшиеся 4 партии приходятся: Д – 1, З – 3 шт., П – 4 шт.

~~З – 3 и 5 – П или 4 – П и~~

Тогда у нас будут две партии подряд ЗП и ЗП, т.к. Д не хватит для смены игроков => Д точно есть во второй партии. В первой партии П и З.

Рассмотрим случай, когда во второй партии Д выиграл:

1п. : П З — порядок П и З здесь неважен.
2п. : Д З
3п. : Д П

После этих 3-х партий осталось: Д - 1 шт., П - 4 шт., З - 3 шт. и возникнет ситуация, когда нам не хватит Д для смены участников => во второй партии проиграет Дима.

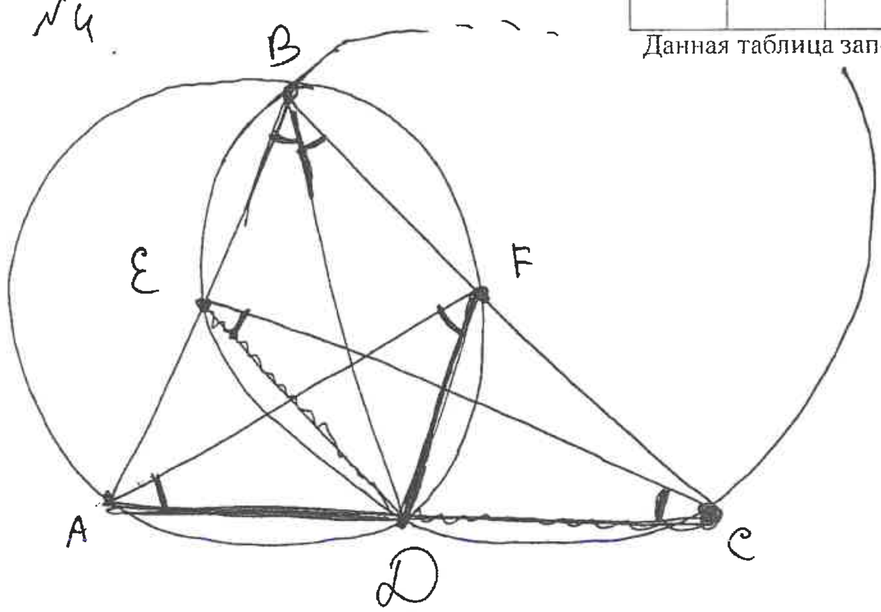
Пример такой игры: 1) П З 2) Д З 3) П З 4) П Д 5) П З 6) П Д 7) П З

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Проведём CE, AF, ED, DF.

1) BFDA – впис. ⟹ $\angle DBF = \angle FAD$, $\angle ABD = \angle AFD$.
EDCB – впис. ⟹ $\angle DEC = \angle DBC$, $\angle EBD = \angle ECD$.

2) $\triangle ADF$ – равноб ⟹ $AD = DF$.
$\triangle EDC$ – равноб ⟹ $ED = DC$.

3) $\angle FDC = \angle B$, $\angle EDA = \angle B$
(т.к. BFDA и EBCD – впис)

4) $\triangle EAD = \triangle DFC$ (по 2-м. ст. и углу) ⟹ $EA = FC$.

+

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 8 8 0 5 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5

$x^4 - xy + y^3 = 0.$

1) Заметим, что $(x^3-y)(x-y^2) =$

$= x^4 + y^3 - yx - y^2x^3.$

$(x^3-y)(x-y^2) = -y^2x^3 \;\Big|: y^2x^3$ $\quad y \neq 0,\ x \neq 0.$

$\dfrac{(x^3-y)(x-y^2)}{y^2x^3} = -1$

обa этих числа не обязаны быть целыми.

$\left(1-\dfrac{y}{x^3}\right)\left(\dfrac{x}{y^2}-1\right) = -1.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\dfrac{y}{x^3} = 1 \\ \dfrac{x}{y^2} - 1 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-\dfrac{y}{x^3} = -1 \\ \dfrac{x}{y^2} - 1 = 1. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (1)\begin{cases} -\dfrac{y}{x^3} = 0,\ y=0, \\ \dfrac{x}{y^2} = 0 \end{cases} \\ (2)\begin{cases} 1-\dfrac{y}{x^3} = -1 \\ \dfrac{x}{y^2} - 1 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

не подх., т.к. у нас ограничение $x, y \neq 0$,

(2):
$\begin{cases} \dfrac{y}{x^3} = 2. \\ \dfrac{x}{y^2} = 2. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 2x^3. \\ \dfrac{x}{(2x^3)^2} = 2. \Leftrightarrow \dfrac{x}{4x^6} = 2. \end{cases}$

$\dfrac{1}{4x^5} = 2. \Leftrightarrow 4x^5 = \dfrac{1}{2}.$, $x^5 = \dfrac{1}{2\cdot 4} = \dfrac{1}{8}.$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{8}}$ – это не целое число.

2) Проверим, что $x=y=0$ подходит: $0^4 - 0 + 0 = 0$; верно. Ответ: $(0; 0)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 8 | 0 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

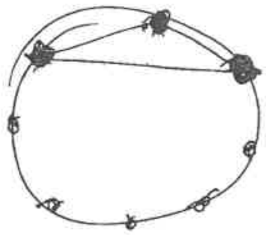
№3

1) ~~Всего способов~~ ~~Выбрать~~ Всего сколько отрезков: $C_8^2 = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$.

2) Всего способов выбрать 4 отрезка из 28: C_{28}^4.

3) Способов выбрать один треугольник и 4-ый отрезок, концы которого не совпадают с вершинами треугольника: $C_8^3 \cdot C_5^2$.

4) Способов выбрать один треугольник и отрезок, одна вершина которого совпадает с вершиной треугольника: $C_8^3 \cdot (3\cdot 5) = 15 \cdot C_8^3$.



5) Вероятность:
$$\frac{C_8^3(15 + C_5^2)}{C_{28}^4} = \frac{\cancel{56}\cdot\cancel{(25)}\cdot 8}{\cancel{25}\cdot\cancel{7}\cdot 13\cdot 9} = \frac{8}{13\cdot 9} = \frac{8}{117}.$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00018805 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2

$$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}.$$

$$\frac{b\cdot 4}{11} < a < \frac{7\cdot b}{19}$$

$\frac{4}{11} \approx 0,(363).$ $\frac{7}{19} \approx 0,3684\ldots$

$0,(363)b < a < 0,3684\ldots\cdot b$

$a \in Z \Rightarrow$ ~~0,(363)~~ между $0(363)b$ и $0,3684\ldots\cdot b$ должно быть целое число.

При $b=100$: $0,(363)\cdot 100 \approx 36,36\ldots$

$0,3684\ldots\cdot 100 = 36,84\ldots$

между ними нет целого числа.

При $b=101$: $0,(363)\cdot 101 \approx 36,663\ldots$

$0,3684\cdot 101 \approx 37,2084$

между ними целое 37.

(~~Провер~~ ~~При b...~~) При $b<100$ между этими произведениями нет целых чисел, при $b>101$ есть.

Проверим, что $b=101$, $a=37$ подходит:

(~~...~~) $37:101 \approx 0,36633$, это больше, чем $0(363)$ и меньше, чем $0,3684$. Ответ: 101.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 9 3 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	20	1	–	66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) Федя $\to \frac{4}{11}$; Лена $\frac{7}{19}$

Даня $= \frac{a}{b}$ при $\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19} \Rightarrow \frac{4}{11}^{\backslash 19}$ и $\frac{7}{19}^{\backslash 11} \Rightarrow \frac{76}{11\cdot19}^{\backslash 2} < \frac{77}{19}^{\backslash 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{152}{11\cdot19\cdot2} < \frac{154}{11\cdot19\cdot2} \Rightarrow$ между 152 и 154 только одно целое число и это 153

$\frac{a}{b} = \frac{153}{11\cdot19\cdot2} = \frac{153}{418}$ ← дробь несократимая, т.к.к. 153 : на 3 или 51 и все, 51 – ~~простое~~ 3-простое.

418 ⋮̸ 3 на 3 и 51.

Ответ: $\frac{a}{b} = \frac{153}{418}$.

1) Составим пример:

w – победил.

П	П	П	Д	П	П	П
З	Д	З	З	З	Д	З
		w	w			

П – 6 раз сыграл
З – 5 раз сыграл
Д – 3 раз сыграл

Проиграл ДИМА.

Далее Оценку:

I) Всего сыграли все:

6 + 5 + 3 = 14 раз, но т.к.к. каждый раз играли по 2-ое, то 14 : 2 = 7 раз играли

II) ~~Всего~~ ~~что~~ Каждый бельчонок будет участвовать минимум через раз. Следовательно Дима, не выиграл ни разу, т.к.к. он уже минимум сыграет 3 раза, и в выигранном разе он тоже выиграть не может т.к. чтоб туда попасть ему надо сыграть больше 3 раз.

III) Дима может начать играть либо с 1-ого матча; либо с 2-ого матча. Но в наших условиях он не может начать с 1-ого, т.к.к тогда он сыграет минимум 1; 3; 5; 7 партию и их кол. больше 3 ⇒ он начинает играть со второй, но он не может выиграть по пункту II. Пример присутствует. Ответ: ДИМА.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 | 3 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) Посчитаем сколькими способами можно покрасить 4 разных отрезка в красный:

$\frac{8\cdot 7}{2}$ ← кол. способов покрасить 1 отрезок

$$\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\left(\frac{8\cdot 7}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{8\cdot 7}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{8\cdot 7}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{4!}=\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{4!}=\frac{\cancel{28}^{7}\cdot\cancel{27}^{9}\cdot\cancel{26}^{13}\cdot 25}{8\cdot 3\cdot 8\cdot 1}=7\cdot 9\cdot 13\cdot 25$$

−1; т.к. 1 отрезок уже покрасили

← чтобы не было повторов

Теперь посчитаем количество ~~способов~~ ситуаций с красными треугол. с вершинами на окружности.

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}\cdot\left(\frac{8\cdot 7}{2}-3\right)=56\cdot(25)$$ ← подходящие нам случаи

выбираем 3 т. и соединяем

красим еще один отрезок, кроме этого треуг.

$P_{(A)}$ (вероятность) $=\frac{A_N}{A_{все}}$ ← нужные элемент; равновероят. ← все возможные элемент. равновероят.

A (наше событие)

$$P_{(A)}=\frac{56\cdot\cancel{25}}{7\cdot 9\cdot 13\cdot\cancel{25}}=\frac{8}{9\cdot 13}=\frac{8}{117}$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 | 3 | 8 | 2 | 5 |

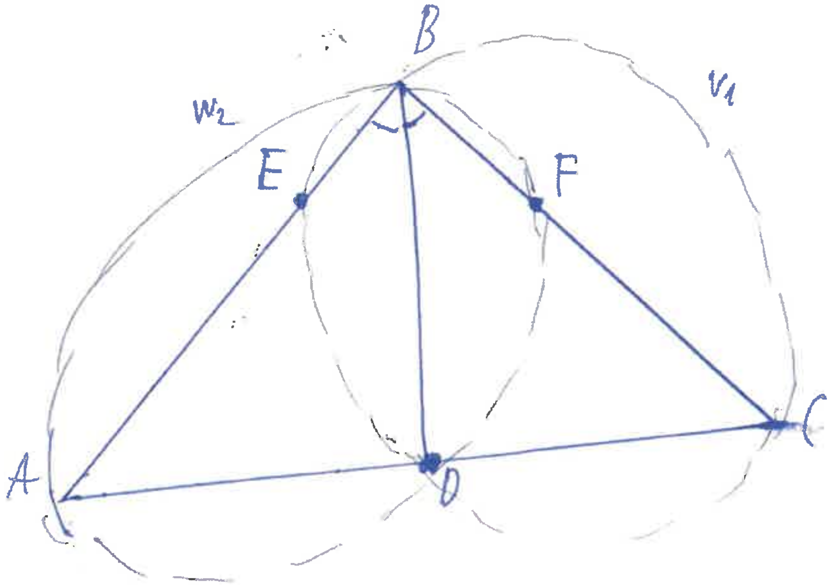
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4



I По Т. секущих $AB \cdot AE = AD \cdot AC$, а также: $CD \cdot CA = BF \cdot CB$

II По св. биссектрисы BF: $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$

Из. I пункта

$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB}$; а $CF = \frac{CD \cdot CA}{CB}$ $\Rightarrow$ $AC = CA$ и $AE = AF$ ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 | 3 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(5) $x^4-xy+y^3=0$

Сразу очев. реш. $x=0$ и $y=0$. $0=0$ ✓

$x\neq y$; т.к. $\Rightarrow$ бы. $x^4-x^2+x^3=0$ $\quad x^4+x^3-x^2=0$

$x^2(x^2+x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+x-1=0 \Rightarrow D=5 \Rightarrow x_{1,2} \text{ — не целые.} \end{array}\right.$

Не имеет смысла по у. 3.

Так же $x^4+y^3=xy$

и $x^4+y^3 \vdots x$; $x^4+y^3 \vdots y$

$\frac{x^4+y^3}{x}=y$ $\qquad \frac{x^4+y^3}{y}=x$

А так же $x(x^3-y)=-y^3$

$x=\frac{-y^3}{x^3-y}$ и $-y^3 \vdots (x^3-y)$; $-y^3 \vdots x$

$\frac{-y^3}{x^3-y}$ $\qquad -y^3 \vdots x^3-y$ $\qquad \frac{x\cdot(x^3-y)}{y^3}=-1 \Rightarrow$ [что-то одно; $x<0$; $y^3<0$; $(x^3-y<0)$ либо кто-то 1

То: $x^4\geq x$

$y^2\geq y$ т.к. целые.

$\frac{x^4-yx}{y^3}=-1$

$\frac{x^4}{y^3}-\frac{x}{y^2}=-1$

$\frac{x^4}{y}=\frac{x}{y^2}-1$

$\frac{x^4}{y}<\frac{x}{y^2}$

$x^4\geq x$

$y^2>y$

А чем больше знаменатель, тем меньше дробь и чем больше числитель, тем больше.

$\frac{x^4}{y}<\frac{x}{y^2}$

$\frac{y^2x^4}{y}<x$ $\quad$] $y>0$ $\qquad \frac{y^2x^4}{y}\leq x$] $y<0$

$y^2x^4<xy$ ← Такое не возможно $\qquad y^2x^4>xy$

$\left[\begin{array}{l} 0>xy-y^2x^4 \\ y<0 \end{array}\right.$ $\qquad 0>-(y^2x^2-xy)$

в конце множим

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 7 9 3 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(5) Продолжение:

$y<0$

$x^4-xy+y^3=0$

$y^3-xy=-x^4$

$\frac{y^3-xy}{x^4}=-1$

$\frac{y^3}{x^4}-\frac{y}{x^3}=-1 \Rightarrow \frac{y}{x^3}>\frac{y^3}{x^4}$ $\quad \frac{x^4 y}{x^3}>y^3$

$xy>y^3$

т.к. $y<0$, то

$x<y^2$

$x^4-y(x-y^2)=0$

~~$x-y^2<0$, т.к. $y^2>x$~~

$\frac{x^3+y^4}{y}=x$, $y<0$

$x^4=\cancel{y(x-y^2)}$

$\cancel{x(x^3-y)+y^3=0}$

$\cancel{x(x^3-y)=-y^3}$

$\cancel{\Rightarrow x\cdot(x^3-y)>0}$

$\exists\, x^4+y^3>0$

$x^4+y^3>0$

Тогда $x\geq 0$

но тогда

$\frac{y^3+x^4}{x}=y \Rightarrow x^4+y^3<0$, $x\geq 0$, $y<0$

~~Тогда: x~~

$x^4-xy+y^3=0$

$x(x^3-y)+y^3=0$ Если $x^3-y>0$

Если $x^3-y<0$, то $x^3<y$

, то корни только $x=0; y=0$.

Но вспомним что ~~$-y^2x^2<xy$~~

$\frac{x^4+y^3}{xy}=1$, $xy<0$

~~$xy>-y^2x^2$~~

~~$0>-yx$~~

$\frac{x^3}{y}+\frac{y^2}{x}=1$

$\Rightarrow \frac{x^3}{y}>\frac{y^2}{x}$ $\quad x^4\leq y^3$

Ответ: $x;y=\{0;0\}$.

Помножим на x^2y^2

~~$x^4 = xy-y^3$~~ ~~x^6y^2~~ ⊕ ⊖

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 | 3 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

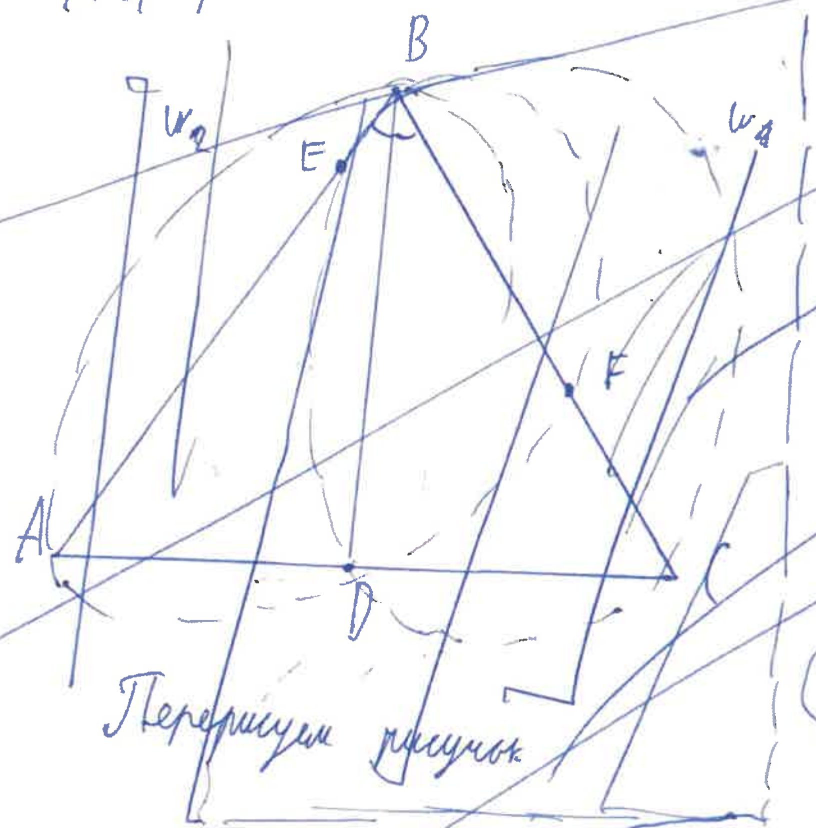
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(4)

$x^4+xy+y^3=0$



Перерисуем рисунок

Iп:

012

012 $1+2$

011 $2{,}1{,}1$

011 13

$6\cdot 36$

(1)

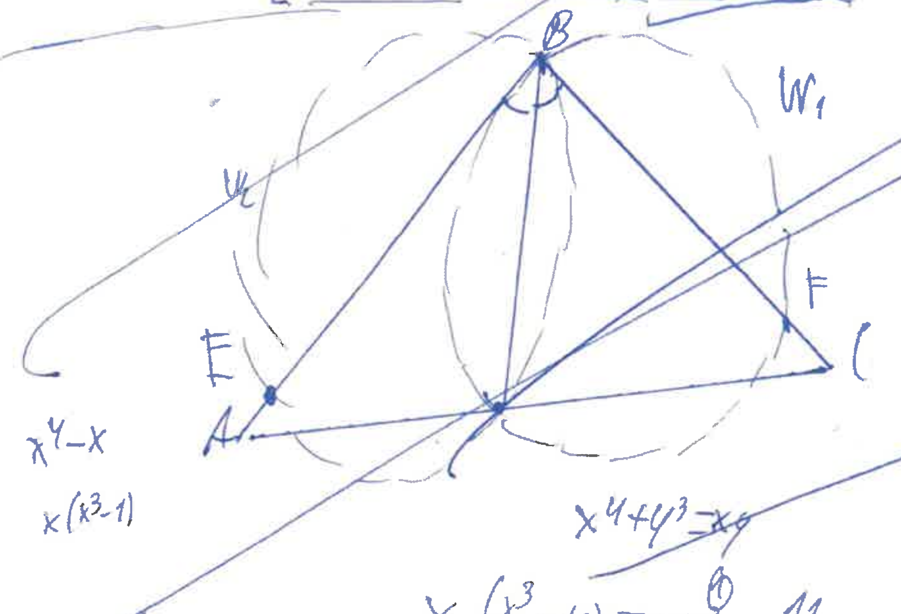
0123 45.1.7.8

01405011

018012018

$6\cdot 36$ $49\cdot 7$

216



329 1:9

19

$8\;64\cdot 8$ $9/9\cdot 7$

542 63

280 3

49

280 63

343

x^4-x

$x(x^3-1)$

$x^4+y^3=xy$

$x(x^3-y)=-y^3$ 11

$0>xy(1-yx^3)$

Лист 6 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	20	1	–	66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Всего игр было $\frac{6+5+3}{2}=7$ штук и в 6 из них играл Петя. Тогда посмотрим, сколько раз Петя играл с Захаром:

1) 5 раз, но тогда после этого останется игр 1 у Пети, 0 у Захара и 3 у Димы, а Дима не может играть сам с собой.

2) 4 раза. Может быть:

4 игры – Петя и Захар
2 игры – Петя и Дима
1 игра – Дима и Захар

3) ≤ 3 раза. Тогда после этого игр ≥ 3 у Пети, ≥ 2 у Захара, 3 у Димы, но т.к. Петя больше не играет с Захаром, то они оба могут играть только с Димой. а это ≥ 5 игр с Димой, когда у него их ровно 3.

Значит противоречие, т.е. Петя с Захаром сыграли 4 игры.

т.к. всего игр 7, а 2 игры Пети и Захара не могут стоять подряд, то 1, 3, 5, 7 игры это Петя с Захаром, а 2, 4, 6 – Димы и Пети или Захара.

То есть т.к. в 3 игре играет Петя и Захар,

Лист 1 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 8 1 3 6 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

а во 2 играл Дима, то во 2 игре проиграл Дима.

Ответ: Дима.

№2

$$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$$

$$\frac{76}{209} < \frac{a}{b} < \frac{77}{209}$$

при знаменателе 209 не м.б. такой дроби чтобы $a \in \mathbb{Z}$

$$\frac{152}{418} < \frac{a}{b} < \frac{154}{418}$$

то есть, как минимум, надо умножить все (и знаменатель) на 2. Чтобы появилось целое число a в промежутке, т.е. есть b $(152; 154)$ $a = 153$.

$$\frac{a}{b} = \frac{153}{418}$$

Ответ: 418.

№3

Всего отрезков $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

способов выбрать 4 отрезка (любых) $C_{28}^4 =$

$$= \frac{\overset{7}{\cancel{28}} \cdot \overset{9}{\cancel{27}} \cdot \overset{13}{\cancel{26}} \cdot 25}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 1} = 63 \cdot 13 \cdot 25$$

теперь посчитаем количество способов выбрать 4 отрезка, 3 из которых образуют треугольник.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 8 1 3 6 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

а 3 отрезка образуют треугольник, если они соединяют точки вида a–b, b–c, a–c

а 4 отрезок можно выбрать любой кроме этих 3, которые мы уже выбрали.

$$C_8^3 \cdot (28-3) = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}^1\cdot 25}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 56\cdot 25$$

C_8^3 — способов выбрать 3 точки для треугольника

28 — всего отрезков

тогда вероятность это $\frac{\text{кол-во случаев с кр. треуг.}}{\text{кол-во способов выбрать 4 отрезка}} =$

$$= \frac{\cancel{56}^{8}\cdot\cancel{25}^{1}}{\cancel{63}_{9}\cdot 13\cdot\cancel{25}_{1}} = \frac{8}{117}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 9 \\ \hline 117 \end{array}$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

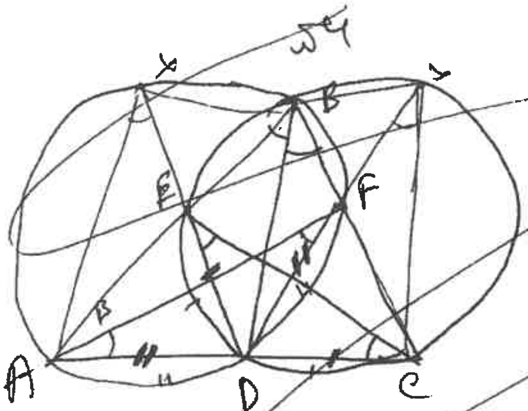
Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



~~т.к. BD - бис-са $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$~~

~~и так же~~

~~$\overset{\smile}{BD} = \overset{\smile}{DC}$ и $\overset{\smile}{AD} = \overset{\smile}{DF}$ =>~~

~~ED = DC и AD = DF =>~~

~~△EDC и △ADF - р/б.~~

~~из вписанности BEDC и ABFD~~

~~∠ECD = ∠DEC = ∠AFD = ∠DAF~~

~~продлим DF и DE =>~~

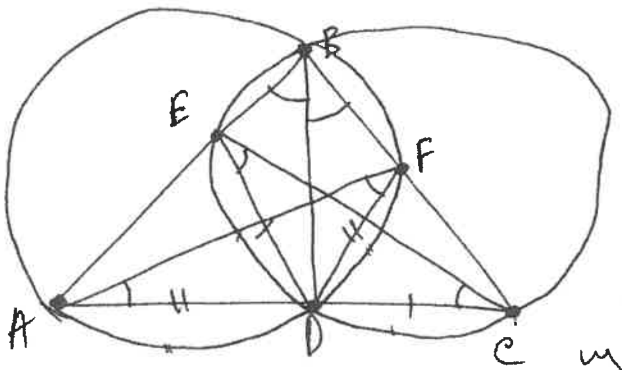
~~∠AXD = ∠DYC = α~~

~~ι ∠EAF = β~~

~~∠BFA = 180° − 2α − β~~

~~∠BCE = 180° − 4α − β~~

№4



т.к. ∠EBD = ∠DBC, то

$\overset{\smile}{ED} = \overset{\smile}{DC}$ и $\overset{\smile}{AD} = \overset{\smile}{DF}$ =>

ED = DC и AD = DF

проведём EC и AF

из вписанности

четырёхугольников

EBCD и BFDA : ∠DEC = ∠DBC и ∠ECD

∠AFD = ∠ABD и ∠FAD.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

тогда из $\triangle AFD$ и $\triangle EDC$ $\angle ADF = \angle EDC$ => получаем, что

т.к. $\angle EDF$ – общий у этих 2 углов, то $\angle EDA = \angle FDC$.

Р. $\triangle AED$ и $\triangle FDC$:

$$\left.\begin{cases} ED = DC \\ AD = DF \\ \angle EDA = \angle FDC \end{cases}\right\} \text{по I пр. = } \triangle \Rightarrow \triangle AED = \triangle FDC$$

$\Downarrow$

$AE = CF$

№5

$x^4 - xy + y^3 = 0$

$\vdots x \quad \vdots x \quad \vdots y \quad \vdots x$

$\quad\quad \vdots y \quad\quad \vdots y$

$x(x^3 - y) + y^3 = 0$

возрастающая функция если рассматривать по отдельности

$\nearrow$ = const

$\Rightarrow$ не более 1 решения

$$\left.\begin{matrix} x^4 \vdots y \\ y^3 \vdots x \end{matrix}\right\} \Rightarrow НОД(x;y) > 1$$

$x = 0$

$y = 0$

подходит

Ответ: $(0;0)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА0001057825

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	5	–	20	-	65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Т.к у Маши 3 ничьи, а
у Пети 1 => Маша сыграла
2 партии вничью с другими людьми.
⇓
Мы имеем уже как минимум 2 партии для Маши.
Два своих выигрыша Маша могла совершить над
Петей (у которого три проигрыша). Все игры Маши
мы распределили. (1 ничья с Петей, 2 ничьи с другими
людьми, два выигрыша над Петей)
Остается распределить партии Пети, среди
которых осталось 2 выигрыша и ещё один проигрыш
Лимит партий Маши исчерпан => все три партии
Петя играет с посторонними людьми (одну
проигрывает, две выигрывает) => общее число игр с
другими ребятами для Маши и Пети = 5.
Это число является минимальным, т.к общее
кол-во партий Пети и Маши = 11, 3 они играют
между собой (1 вничью и 2 в пользу Маши, т.к у ~~Пети~~
Маши максимум 2 победы) => 11 - 3 · 2 = 5 партий они
играют с другими.
Ответ: 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 7 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) Члены ариф. прогрессии:

$\frac{a}{b}$; ab; $\frac{b+a}{a-b}$; $b+a$

$a+b$ и $a-b$ соседние члены прогрессии

$a+b-a+b=\boxed{2b}$ разность ар. прогрессии

Составим систему

$$\begin{cases} ab-\frac{a}{b}=2b \\ \frac{b+a}{a-b}-ab=2b \end{cases}$$

Выразим a

$a-b-ab=2b$

$a(1-b)=3b$

$a=\frac{3b}{1-b}$

$\frac{3b^2}{1-b}-\frac{3b}{1-b}\cdot\frac{1}{b}=2b \,\Big|\cdot(1-b)b$ $\quad b\neq 1$

$3b^3-3b=2b^2(1-b)$

$3b^3-3b=2b^2-2b^3$

$5b^3-2b^2-3b=0$

$b=1$ – корень $\Rightarrow$

$\Rightarrow (b-1)(5b^2+3b)=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=1 \text{ – не подходит по О.Д.З.} \\ b=0 \text{ – не подходит по условию} \\ b=-\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

проверим отдельно, если $b=1$

$a-b-ab=2b$

$a-1-a=2$

$-1=2$

$\varnothing$

$b=-\frac{3}{5}$

$a=\frac{-\frac{9}{5}}{1+\frac{3}{5}}=-\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{8}=-\frac{9}{8}$ $\quad \begin{cases} a=-\frac{9}{8} \\ b=-\frac{3}{5} \end{cases}$

Ответ: решением является одна пара $(a,b)=\left(-\frac{9}{8};-\frac{3}{5}\right)$

Лист 1 из 1

Олимпиада ...

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 7 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5) НОД $(m, n) = d$

$n + m^2 + d^2 = d$

Т.к НОД$(n, m) = d$ представим $n = dy$, а $m = dx$, где x и y взаимнопросты (НОД$(x, y) = 1$)

$$\Downarrow$$

$$dx + (dy)^2 + d^2 = d \cdot dy \cdot dx$$

$$dx + d^2y^2 + d^2 = d^3xy$$

$$x + dy^2 + d = d^2xy$$

$$x + d = d^2xy - dy^2$$

$$x + d = d(dxy - y^2)$$

$$\Downarrow$$

$x + d \vdots d$, обозначим $x = kd$

$$\Downarrow$$

$$kd + d = d(d \cdot kd \cdot y - y^2)$$

$$d(k+1) = d(d^2ky - y^2)$$

$$k + 1 = d^2ky - y^2$$

$$k + 1 = y(d^2k - y)$$

$$\Downarrow$$

$k + 1 \vdots y$ но т.к x и y взаимнопросты

НОД $(kd, y) = 1$

Если $k + 1 = ay$, то НОД$(kd, y) =$ НОД$(ayd - d, y) =$ $=$ НОД$(d, y) = 1$. Вернемся к уравнению

$$k + 1 = y(d^2k - y)$$

$$ay = y(d^2k - y)$$

$$a = d^2k - y$$

$$y = d^2k - a$$

$$y = d^2k - \frac{k+1}{y} \cdot y$$

$y = d^2k - (k+1)$, т.к НОД$(d, y) = 1$

НОД$(d, d^2k - k - 1) = 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | MA000105782 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$НОД(d, d^2k - k - 1) =$

$= НОД(d, -k-1) =$

$= НОД(d, k+1) = 1$

$\Downarrow$

$k+1$ и d взаимопросты

Вспомним, $k+1 = y(d^2k - y)$, Если $d>1$, то

и $k+1$ взаимопросты с d, вспомним, что x и y взаимопросты $\Rightarrow$ kd и y взаимопросты

$x = kd$ – делится на y,

$k+1 \vdots y \Rightarrow y = 1$

$k+1 = d^2k - 1$

$k+1 = d^2k - 1$

$k(d^2-1) = 2$

Если $d>1$, то $d^2 - 1 \geq 3 \Rightarrow k<1$ противоречие

$\Downarrow$

$d = 1$

Если $d=1$, то подставим $d=1$ в исходное

$n + m^2 + 1 = mn$

$n - mn + m^2 + 1 = 0$

$n(1-m) = -m^2 - 1$

$n = \frac{m^2+1}{m-1}$

$m^2 + 1 = (m-1)(m+1) + 2$

$n = \frac{(m-1)(m+1)}{m-1} + \frac{2}{m-1}$

$n = m + 1 + \frac{2}{m-1}$, т.к. n целочисленное, то

$\frac{2}{m-1}$ – целое

1) $m-1 = 1 \Rightarrow m = 2$

2) $m-1 = 2 \Rightarrow m = 3$

3) $m-1 = -2 \Rightarrow m = -1$ не подходит, т.к. m – натуральное

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»
Вариант № 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 7 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=3 \end{array}\right.$

Если $m=2$, то $n=2+1+\frac{2}{2-1}=5$

Если $m=3$, то $n=3+1+\frac{2}{3-1}=5$

Проверка:

$m=3$; $n=5$ $\quad$ $m=2$ $n=5$

$5+9+1=15$ $\quad$ $5+2^2+1=10$

$15=15$ $\quad$ $10=10$

Ответ: подходят две пары.

$(n,m)=(5;2)$

$(n,m)=(5,3)$

3) Рассмотрим кол-во вариантов раскраски для одного школьника

I) 1 зеленая / 5 красных — единственный вариант; 1 красная / 5 зеленых — единственный вариант

$\Rightarrow 1+1=2$

II) 2 зеленые / 4 красных; 2 красных / една зеленая

Два варианта разместить две одноцветные стороны: смежными или противоположными $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2+2=4$ Но смежные или противопол. могут выбираться несколькими способами

III) 3 зел / 3 крас

~~Один вариант раскраски $\Rightarrow$ 1~~

Два варианта разместить 3 стороны одноцветные: „уголком", где три стороны образуют угол, или „полосой" где две стороны смежные и 2 противоположные.

$\Rightarrow$ 2 варианта

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA0001057825

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

IV 6 зел / 6 красных
один вариант все красными и один вариант все зелеными => 2
Для одного человека: 2 + 2 + 4 + 2 = 10 вариантов раскраски.
Для двух: 10·10 = 100 общее кол-во вариантов
Теперь рассмотрим подходящие нам случаи:
1) И там и там 1 зеленая / красная и 5 красн / зеленых
Только два варианта.
2) И там и там 2 зеленых / красных и 4 красных / зеленых
Вариантов разместить 2 одноцветные - 2 (против друг друга или смежные) => общее кол-во = 4 (по 2 для каждого из двух цветов)
3) 3 красных и 3 зеленых
Очевидно, что только 1 вариант
4) Все красные / зеленые
Очевидно, что 2 варианта для каждого цвета.

Варианты не равновероятны

Итого: 2 + 4 + 1 + 2 = 9

$P = \frac{9}{100}$

Ответ: $\frac{9}{100}$ или ~~0,09~~ 9%

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 7 | 8 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4)

$AS \parallel RD$, где D точка пересечения AH с w_2

$AS \parallel BC \Rightarrow DR \parallel BC \Rightarrow \angle ADR = 90^\circ$

HS – диаметр w_1, т.к. $HS \parallel DR$ и $\angle ADR = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HAS = 90^\circ$, где HS – диаметр

HR диаметр w_2, $\angle HNS$ и $\angle HNR$ прямые, как опирающиеся на диаметры в соот-их окружностях $\Rightarrow \angle HNS$ и $\angle HNR$ смежные и лежат на одной прямой. Поскольку R, S, N лежат на одной прямой, то высоты $\triangle ARS$ и $\triangle CRS$ проведенные из вершин A и C соответственно равны, основание RS общее $\Rightarrow$ их площадь равна ($S = \frac{1}{2}ha$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	5	3	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	19	–	5	–	64

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 2

$\frac{a}{b}$; ab, $a-b$; $a+b$ – арифм. прогрессия

По св-ву арифм. прогрессии $\begin{cases} 2ab = \frac{a}{b} + a - b & (1) \\ 2a-2b = ab + a + b \Rightarrow ab = a - 3b & (2) \end{cases}$

Из (1):

$2(a-3b) = \frac{a}{b} + a - b$; $2a-6b-a+b = \frac{a}{b} = a-5b \quad |b \neq 0$

$a = ab - 5b^2 = a - 3b - 5b^2$; $-5b^2 - 3b = 0$; $-b(5b+3) = 0$

Т.к $b \neq 0$; $5b+3=0$

и $b = -\frac{3}{5}$

Из (2) $a = b(a+3) = -\frac{3a}{5} - \frac{9}{5} \quad |5$

$5a = -3a - 9$; $8a = -9$; $a = -\frac{9}{8}$

Тогда единственная подходящая пара

Ответ: $\left(-\frac{9}{8}; -\frac{3}{5}\right)$

N 1

Если Маша и Петя сыграли наименьшее число игр с другими ребятами, они сыграли наибольшее число игр между собой.

Петя	Маша	
Выигрышей: 2	Проигрышей: 0	Петя не победил Машу ни разу
Ничьих: 1	Ничьих: 3	Ничья могла быть не больше 1 раза
Проигрышей: 3	Выигрышей: 2	Маша не могла победить Петю больше 2 раз

Т.к других исходов игр быть не может, они могли сыграть между собой не больше 3 раз, а с другими ребятами.

Ответ: Маша – 2; Петя – 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ___ | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 3 | 9 | 3 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

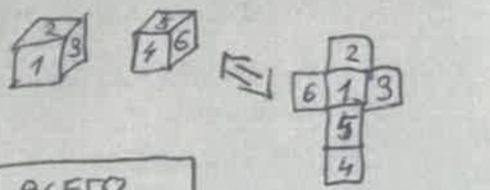
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

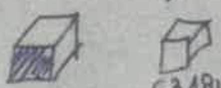
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Рассмотрим все варианты расположения зеленых квадратов на кубе.



1. Один зеленый квадрат.

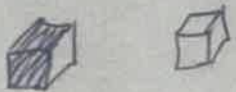


СПЕРЕДИ СВЕРХУ   СЗАДИ СНИЗУ ЗЕЛЕНОГО

| 6 ВАРИАНТОВ |

ВСЕГО 2^6 СПОСОБОВ

2. Два соседних



ПЕРВЫЙ, ВТОРОЙ

$\frac{6\cdot4}{2} = 12$ ВАРИАНТОВ

ТК МЫ ПОСЧИТАЛИ КАЖДУЮ ПАРУ КЛЕТОК 2 РАЗА

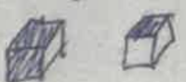
ВТОРОЙ МОЖНО ВЫБРАТЬ ЛЮБОЙ ИЗ 4 СОСЕДЕЙ

3. Два противоположных

$\frac{6}{2} = 3$ ВАРИАНТА

ВТОРОЙ ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ПЕРВЫМ

4. Три в ряд



ВЫБРАТЬ ПЕРВУЮ

$\frac{6\cdot4}{2} = 12$

Направление можно выбрать 4 способами

5. Три в "угол"

| 8 ВАРИАНТОВ |

ЕСТЬ 8 УГЛОВ

6. Четыре в ряд

| 3 |

Таких рядов только 3 тк есть 3 способа выбрать 2 противоположные клетки

7. Угол и соседняя грань

= КОЛ ВУ СПОСОБОВ ВЫБРАТЬ 2 СОСЕДНИЕ КЛЕТКИ = 12

8. 5 КЛЕТОК

= КОЛ ВУ СПОСОБОВ ВЫБРАТЬ ОДНУ КЛЕТКУ = 6

9. 6 КЛЕТОК | 1 СПОСОБ

10. 0 КЛЕТОК | 1 СПОСОБ

$p_1 = \frac{6}{64}$; $p_2 = \frac{12}{64}$; $p_3 = \frac{3}{64}$; $p_4 = \frac{12}{64}$

$p_5 = \frac{8}{64}$; $p_6 = \frac{3}{64}$; $p_7 = \frac{12}{64}$; $p_8 = \frac{6}{64}$

$p_9 = \frac{1}{64}$; $p_{10} = \frac{1}{64}$

ВЕРОЯТНОСТЬ, ЧТО РАСКРАСКА СОВПАДЕТ:

$$p = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{10}^2 = \frac{6^2+12^2+3^2+12^2+8^2+3^2+12^2+6^2+1^2+1^2}{64^2} = \frac{2(6^2+3^2+12^2+1^2)+8^2}{64^2} = \frac{380+64}{2048} = \boxed{\frac{444}{2048}}$$

Ответ:

Не учел, что 12^2 — 3 раза, а не 2.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	1	5	3	9	3	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$m^2 - dmn + (n + d^2) = 0$

$D = d^2n^2 - 4d^2 - 4n$

$m_{1,2} = \frac{dn \pm \sqrt{D}}{2}$; $2m_{1,2} - dn = \pm\sqrt{D}$

Тогда D – полный квадрат и $\sqrt{D} \in \mathbb{Z}$, т.е. $D \in \mathbb{Z}$

$D = d^2n^2 - 4n - 4d^2 = (an+b)^2 =$
$= a^2n^2 + 2abn + b^2$

$d^2 = a^2$; $-4 = 2abn$; $\underline{b^2 = -4d^2}$
Невозможно, т.к. $d \in \mathbb{N}$ — невозможно для всех значений n, d.

Тогда $\sqrt{D} \notin \mathbb{Z}$, а значит, таких n и m нет

Ответ: таких n и m нет

Но при конкретных знач-х возможно: $n = 5$, $d = 1$, $\Rightarrow$
$D = 25 - 20 - 4 = 1 = 1^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00009672 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	5	10	8	–	63

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. Нужно минимизировать кол-во игр, сыгранных с др. ребятами. Тогда, максимизируем кол-во игр, сыгранных между Машей и Петей. Грубо говоря у них есть 3 исхода:

1) Маша выиграла, Петя проиграл
2) ничья
3) Маша проиграла, Петя выиграл

Маша выигрывала 2 раза, Петя проигрывал 3 раза ⇒ таких исходов может быть максимум 2

Маша: 3 раза, Петя: 1 раз ⇒ таких исходов макс. 1

Маша проиг. 10 раз ⇒ таких исходов быть не может.

Значит, максимум П и М могли вместе сыграть 3 раза ⇒ минимум с др. ребятами они сыграли $5+6-3-3=5$ игр. Ответ: 5 игр.

№2.

Пусть q – шаг арифм. прогр., а её первый член a_1.

$a_1 = \frac{a}{b}$, $a_2 = ab$, $a_3 = a-b$, $a_4 = a+b$

1) $a_4 - a_3 = q \to a+b-a+b = 2b = q$
2) $a_2 + q = a_3 \Rightarrow ab+2b = a-b \Rightarrow a = \frac{3b}{1-b}$
3) $a_1 + q = a_2 \Rightarrow \frac{a}{b} + 2b = ab \mid \times b$

$a + 2b^2 = ab^2 \Rightarrow a = \frac{2b^2}{b^2-1}$

Из 2 и 3: $a = \frac{3b}{1-b} = \frac{2b^2}{b^2-1}$

$\frac{3b}{\cancel{1-b}} = \frac{-2b^2}{\cancel{(1-b)}(1+b)}$

$3b + 3b^2 + 2b^2 = 0$

$5b^2 + 3b = 0$

$b = 0$ или $b = -\frac{3}{5}$

$q = 2b = 0$ ⇒ арифм. прогр. нет

единств. подх. пара

$a = \frac{3b}{1-b} = -\frac{9}{5} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{9}{8}$

$a_1 = \frac{a}{b} = \frac{9}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{8}$

$q = 2b = -\frac{6}{5}$

Ответ: возможна единств. пара $\left(-\frac{9}{8}; -\frac{3}{5}\right)$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3. Квадраты одинаковые, если напротив друг друга стоят одинаковые пары цветов.
Докажем это:

~~1) если поменять противоп. грани местами ничего не изменится, т.к. у этих граней одинаковые соседи и это изменение эквивалентно тому, чтобы перевернуть куб и поставить его на верхнюю грань. Аналог. для любых пр. противоп. пар граней.~~
~~2) Если поменять какие-то две пары~~

У грани соседями явл. все ост. кроме лежащей противоп. => если ~~соотв~~ пары противоп. цветов одинаковые ~~=>~~, то у каждой грани одинаковые соседи => кубы совпадают!

Вариантов противоп. граней всего 3: к-к (вер. 0,25)
к-з (вер. 0,5)
з-з (вер. 0,25)

~~Всего вар-ов кубов: $3^3 = 27$ (т.к. противоп. пар 3)~~

~~вероятность того, что выпали~~ Пусть первому выпало 3 раза к-з: вер. того, что второму тоже: $0{,}5^3$ (1 вариант)
Пусть первому выпало 2 раза к-з: второй вер-ть: $0{,}5^2 \cdot 0{,}25$ (2 варианта)
Пусть первому выпал 1 раз к-з: вер-ть второго: $0{,}5 \cdot 0{,}25^2$ (3 вар-та)
Пусть первому не выпадало к-з: вер-ть второго: $0{,}25^3$ (4 варианта)
Итого вероятность того, что у обоих выпал один и тот же куб:

$(0{,}5^3)^2 + 2(0{,}5^2 \cdot 0{,}25)^2 + 3(0{,}5 \cdot 0{,}25^2)^2 + 4(0{,}25^3)^2 =$

~~$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{8}{32} + \frac{3}{32} + \frac{2}{32} = \frac{13}{32}$ — искомая вер-ть.~~

$= \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{2}{16 \cdot 16} + \frac{3}{32 \cdot 32} + \frac{4}{64 \cdot 64} = \frac{64}{64^2} + \frac{32}{64^2} + \frac{12}{64^2} + \frac{4}{64^2} =$

$= \frac{112}{64^2} = \frac{56}{64 \cdot 32} = \frac{7}{64 \cdot 4} = \frac{7}{256}$ — иск. вер-ть. Ответ: $\frac{7}{256}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 0 9 6 7 2 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

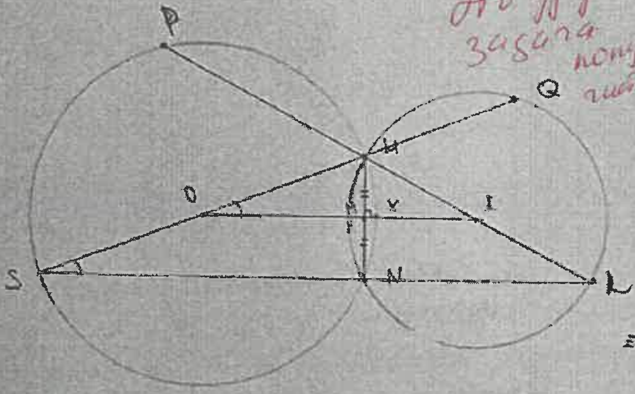
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.

Это другая задача получ[и]лась

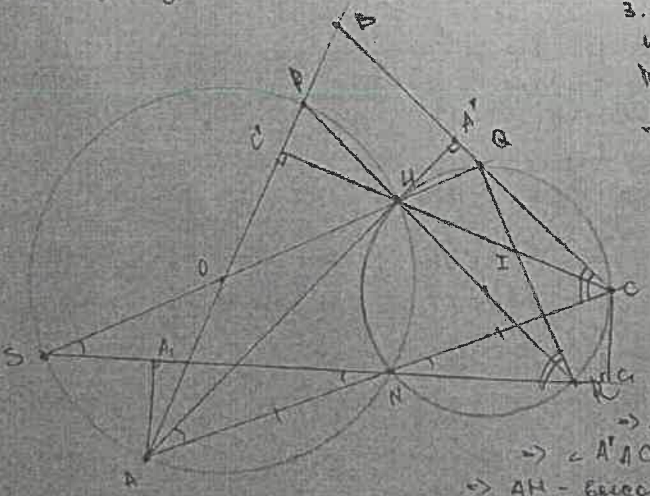


1. Пусть O, H, Q - лежат на одной прямой и R, H, P тоже =>
=> $OH \cap w_1 = S$
$IH \cap w_2 = R$

2. $\angle SHN = \frac{1}{2} \cup HN$
$\angle HOX = \cup HX = \frac{1}{2} \cup HN$
(т.к. O лежит на сер. пер. (OX) к HN => => HX = XN => $\cup HX = \frac{1}{2} \cup HN$) =>

=> $\angle SMN = \angle HOX$
$\angle SHR$ - общ. =>

=> $\triangle OHI \sim \triangle SHR$ с коэф. подобия 2 => M → N, где HX = XN =>
=> ~~Раз~~ Раз O, M, I - на одной пр., то и S, N, R на одной прямой.



3. Проведём AC так, чтобы $N \in AC$, AN = NC
Тогда $AP \cap CQ = B$.
Докажем, что H - точка пересеч. высот.
Пусть $AH \cap BC = A'$,
$CH \cap AB = C'$

4. $\angle HAN = \angle NSH$ - опир. на одну дугу
$\angle QCN = \angle QRN$ - опир. на одну дугу
HR - диаметр => $\angle HQR = 90°$ =>
=> $\angle QSR + \angle QRS = 90°$ =>
=> $\angle A'AC + \angle A'CA = 90°$ => $\angle AA'C = 90°$ =>
=> AH - высота $\triangle ABC$.

5. Аналогично CH - высота $\triangle ABC$ => H - точка пересеч. высот. чтд

6. $\triangle AA_1N$ и $\triangle NCC_1$: $AN = NC_1$, $\angle AA_1N = \angle CC_1N = 90°$ - по постр., $\angle A_1NA = \angle RNC$ - верт. => $\triangle AA_1N = \triangle NCC_1$ - по гип. и остр. углу => $A_1A = CC_1$

7. $S_{ARS} = AR \cdot AA_1 \cdot \frac{1}{2} = AR \cdot CC_1 \cdot \frac{1}{2} = S_{SCR}$ чтд.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 6 | 7 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

$(n,m)=d$ Пусть $n=dk$, где $k\in N$; $m=dp$, где $p\in N$ и $(k,p)=1$

$n+m^2+d^2=dnm$

$dk+d^2p^2+d^2=d^3pk$

1) $d^2p^2 \vdots d^2$, $d^2 \vdots d^2$, $d^3pk \vdots d^2$ $\Rightarrow dk \vdots d^2 \Rightarrow k \vdots d \Rightarrow p \not\vdots d$

Пусть $k=l\cdot d$, где $l\in N$

$ld^2+d^2p+d^2=d^4 l\cdot p \quad |:d^2$

$l+p+1=d^2 l\cdot p \Rightarrow l+1 \vdots p$, $p+1 \vdots l$, $l+p+1 \vdots d^2$

$l \equiv_p -1$, $p \equiv_l -1$, $l+p \equiv_d -1$.

2) $k+dp^2+d=d^2pk$

$dp^2 \vdots m$, $d^2pk \vdots m$ $\Rightarrow k+d \vdots m$

$d(l+1) \vdots m$, $(l+1) \vdots p$

Подходят: 1) $n=5$ $m=2$ $d=1$

$n+m^2+d^2=5+4+1=10$, $dnm=1\cdot5\cdot2=10$ $\Rightarrow$ подходит.

2) $n=5$ $m=3$ $d=1$

$n+m^2+d^2=5+9+1=15$, $dnm=5\cdot3\cdot1=15$ $\Rightarrow$ подходит.

Ответ: $(5;2)$, $(5;3)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 | 3 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	5	20	20	1	–	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Посчитаем общее количество ~~матчей~~ партий:

$\frac{5+3+6}{2} = 7$ партий. Каждый из 3 игроков либо играет, либо проиграл в прошлой партии (не касается 1 партии). Так же ~~в партии~~ не может быть 2 партии с одинаковым составом подряд, т.к. в партии кто-то обязательно проигрывает и уступает место третьему. Дима сыграл 3 раза; т.е он ~~[illegible]~~ не играл 7 − 3 матча = 4 матча. Он не мог не играть 2 матча подряд; т.е единственный вариант партий в которых ~~[illegible]~~ он мог играть это 2; ~~[illegible]~~ 4; 6. И в каждой из них он проиграл (иначе бы он играл ~~[illegible]~~ > 3 партий) т.е во 2ой партии проиграл Дима.

Ответ: Дима.

Лист 1 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 | 3 | 6 | 2 | 5 |

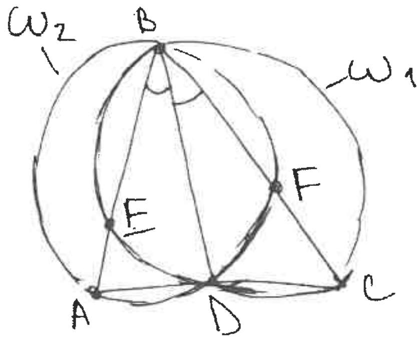
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Дано:

$\angle ABD = \angle DBC$ (т.е BD-биссектриса)

Д-ть:

$AE = CF$

Решение:

BD-биссектриса, по свойству биссектрисы:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BC \quad (1)$$

по теореме об отрезках секущих.

(окружность ω_1; секущие AB, AC)

$$AE \cdot AB = AD \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{AE \cdot AB}{AD}$$

(окружность ω_2; секущие CB, AC)

$$CF \cdot BC = CD \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{CF \cdot BC}{CD}.$$

$$\frac{AE \cdot AB}{AD} = \frac{CF \cdot BC}{CD} \Rightarrow AE \cdot AB \cdot CD = CF \cdot BC \cdot AD$$

по (1) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$

т.е $AE = CF$. ЧТД.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00011636 25
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3)

Тк все 8 точек лежат на одной окружности, то ~~не вырожденно~~ любые 3 несовпадающие точки на ней будут образовывать треугольник.

Для трех отрезков:

Кол-во способов выбрать первую точку - 8, вторую - 7 (тк не совпадает с 1ой), третью - 6. те итого $\frac{7\cdot8\cdot6}{6}$ способов $=7\cdot8=56$ сп.

6 ← тк каждый треугольник учитывается 6 раз.

Для четвертого отрезка.

Всего - 28 отрезков $\left(\frac{C_8^2}{2}\right)$, 3 из которых заняты треугольником, те осталось 25 вариантов для 4ого отрезка.

Всего способов выбрать точки с кристными треугольником - $56\cdot25=1400$

Всего способов выбрать 4 отрезка:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000116З625

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

~~$C_8^8 + C_8^7 + C_8^6 + C_8^5 + C_8^4 = 71$~~

$$C_{28}^{4} = C_{28}^{24} = \frac{\cancel{28}^{7}\cdot\cancel{27}^{9}\cdot\cancel{26}^{13}\cdot 25}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 7\cdot 9\cdot 13\cdot 25$$

$$P(\text{тр}) = \frac{\cancel{56\cdot 25}\ \cancel{7}\cdot 8\cdot\cancel{25}}{\cancel{7}\cdot 9\cdot 13\cdot\cancel{25}} = \frac{8}{9\cdot 13} = \frac{8}{117}$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

№2

~~$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$~~

~~$\frac{76}{209} < \frac{a}{b} < \frac{77}{209}$~~

~~$\frac{152}{418} < \frac{a}{b} < \frac{154}{418}$~~

~~$\frac{a}{b} = \frac{153}{418}$~~

~~Ответ: 418.~~

Если считать $a \geq 0, b > 0$ и a, b целые то

$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$

$\frac{152}{418} < \frac{a}{b} < \frac{154}{418}$

$\frac{a}{b} = \frac{153}{418}$

Ответ: 418.

НО; ~~см. далее~~...

в условии ничего не сказанно про несократимость $\frac{a}{b}$, и целость их. ?

Лист 4 из 6

Дробь = отношение натуральных чисел

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 1 6 3 6 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

~~$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$ | a~~ ~~Если a, b не 0~~

~~$\frac{4}{11a} < \frac{1}{b} < \frac{7}{19a}$~~

Дробь = $\frac{\text{натур.}}{\text{натур.}}$

Если a, b необязательно положительные (но целые), то минимальное значение b невозможно установить, т.к. в условии не сказано что дробь $\frac{a}{b}$ несократимая, т.е. можно предположить что $\frac{a}{b} = \cancel{\frac{ka}{kb}} = \frac{k\cdot 153}{k\cdot 418}$ $(k\neq 0)$, и при уменьшении k будет уменьшаться b, и k ничем не ограничено, то есть и минимальное b нельзя установить.

Если a, b не целые (допустим положительные), то минимальное b тем более нельзя установить, т.к. можно представить $\frac{a}{b}$ как $\frac{\frac{1}{k}\cdot 153}{\frac{1}{k}\cdot 418}$ $(k\neq 0)$ и при ~~уменьшении k~~ увеличение $|k|$ ...

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 1 6 3 6 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

$\frac{1}{k} \cdot 418$ будет уменьшаться. ~~при~~ ~~то ли~~ ~~в~~ минимальное b нельзя установить

Ответ: Я считаю условие не совсем четким и строгим, так что при заданном условии нельзя установить минимальное значение b.

№5

Один из ответов: $(x;y)=(0;0)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	5	20	20	1	–	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

Так как в каждой партии играло по 2 игрока, то количество партий можно вычислить сложив все игры игроков и поделив на 2. Т.е. кол-во игр $= (6+5+3)/2 = 7$. Кроме того, после своей игры игрок точно появится либо в следующей, либо через 1 игру, т.к. после каждой игры меняется один игрок. Тогда, Дима не мог играть первую игру, т.к. иначе бы он смог продержаться максимум 6 игр $(\underbrace{\checkmark, -, \checkmark, -, \checkmark, -}_{6\ \text{игр}})$, а у нас их 7. Тогда Дима появляется только во второй игре, где же и проигрывает, т.к. иначе бы он продержался всего 6 игр $(\underbrace{-, \checkmark, \checkmark, -, \checkmark, -}_{6\ \text{игр}})$.

Ответ: Во 2-й игре проиграл Дима

№ 2

Приведём $\frac{4}{11}$ и $\frac{7}{19}$ к общему знаменателю:

$\frac{4^{\cdot 19}}{11^{\cdot 19}} = \frac{76}{209}$, $\frac{7^{\cdot 11}}{19^{\cdot 11}} = \frac{77}{209}$; Тогда возьмём дробь $\frac{76{,}5^{\cdot 2}}{209^{\cdot 2}} = \frac{153}{418}$ и домножим её числитель и знаменатель на -1 и получим $\frac{-153}{-418}$, которая всё так же лежит в нужном интервале, однако мы теперь можем домножать её числитель и знаменатель на любое положительное ~~[illegible]~~ число, благодаря чему a и b будут становиться всё меньше и меньше, при этом не выводя дробь из интервала. Тогда у b нет ни нижнего, ни верхнего порога.

Ответ: У b нет ~~[illegible]~~ наименьшего значения.

+++

Дробь есть отношение натуральных чисел

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

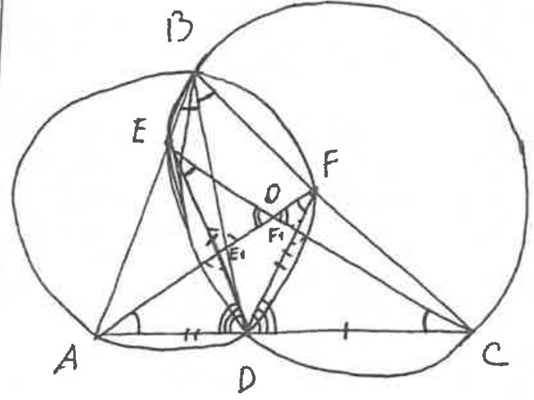
Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 0 3 2 5 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



№ 4

Дано: BD – биссектриса

Док-ть: $AE = FC$

Док-во: $\angle EBC$ и $\angle DCE$ являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу $\Rightarrow \angle EBC = \angle DCE$. Аналогично для углов $\angle DEC$ и $\angle DBC$, $\angle FAD$ и $\angle DBF$, $\angle ABD$ и $\angle AFD$. Все эти равны между собой $\Rightarrow \triangle AFD$ и $\triangle CDE$ – равнобедренные.

$\angle FOC = \angle EOA$ как вертикальные $\Rightarrow \angle EE_1O = \angle OF_1F$ по сумме углов треуг. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AE_1D = \angle DF_1C$ как вертикальные $\Rightarrow \angle E_1DA = \angle FDC$ по сумме углов треуг. $\Rightarrow \triangle AED = \triangle FDC$ по углу и двум прилегающим сторонам $\Rightarrow$ $\Rightarrow AE = FC$, что и требовалось доказать.

№ 3

Всего линий 28. Вариантов взять 4 из них без повторений $= \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{24}$. Вариаций треугольников можно посчитать как взятие 3 точек без повтора, что равно $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. К каждому такому треугольнику можно добавить 4-й отрезок 25-ю способами, т.е. вариаций взятия 4 ~~отрезк~~ отрезков без повторов с треугольником — $56 \cdot 25$. Тогда вероятность:

$$\frac{56 \cdot 25 \cdot 24}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{48}{27 \cdot 26} = \frac{8}{117}$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

№ 5

Ответ: $x=0$; $y=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 8 9 9 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	15	20	2	-	62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

~~[illegible]~~ Посчитаем, сколько всего было сыграно партий. В каждой партии участвуют 2 человека ⇒ ⇒ всего было сыграно $\frac{6+5+3}{2} = 7$ партий.

Заметим, что во всех партиях, кроме одной сыграл Петя. Назовем эту партию x.

Также заметим, что до и после партии x Петя играл во всех партиях, а Захар и Дима чередовались (Если бы они не чередовались, то проигравший из прошлой партии остался бы играть 2 раз)

Если x - нечетная партия, то ~~[illegible]~~ (то есть партия под номеров 1; 3; 5; 7) до и после этой партии было сыграно четное кол-во партий, зная, что Захар и Дима чередуются и из за четного кол-ва партий „до" и „после" они сыграют одинаковое кол-во матчей, что не верно по условию (в партии x играют Дима и Захар)

Если x - четная партия, то ~~[illegible]~~ получаем, что до и после партии x было сыграно нечетное кол-во партий, зная, что Дима и Захар чередуются, и зная, что Захар сыграл больше партий чем Дима, то если первую и x+1 партию против Пети будет начинать Захар, то он из-за нечетности и чередования сыграет на две партии больше чем Дима. x+1 - нечет партия; 1 - нечет партия ⇒ ⇒ Захар играет нечетные партии, а Дима четные.

Если 2 партию играли Петя и Дима, то т.к. x - четное, то Петя проиграл в нечетной партии, значит против Димы он выиграл. Если играют Захар и Дима (это партия x), то т.к x+1 партию играет Захар, то в предыдущей он не проиграл ⇒ проиграл Дима

Ответ: Дима

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 9 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Федя записал дробь $\frac{4}{11}$

Лена записала дробь $\frac{7}{19}$, а дробь Дани $\frac{a}{b}$

$\boxed{\begin{matrix} a \ni \mathbb{Z} \\ b \ni \mathbb{N} \end{matrix}}$ Приведем дроби Лены и Феди к общему знаменателю.

$\frac{4}{11} = \frac{76}{209}$; $\frac{7}{19} = \frac{77}{209}$ заметим, что между числами 76 и 77 нет ни одного целого числа.

умножим дроби Феди и Лены на $\frac{2}{2}$ и получим;

$\frac{76}{209} \cdot \frac{2}{2} = \frac{152}{418}$ $\frac{77}{209} \cdot \frac{2}{2} = \frac{154}{418}$

между 152 и 154 есть только одно целое число и это 153, значит число, которое загадал Даня – $\frac{153}{418}$ – это несократимая дробь, поэтому минимально возможное $b = 418$

Ответ: 418

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 2 8 9 9 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

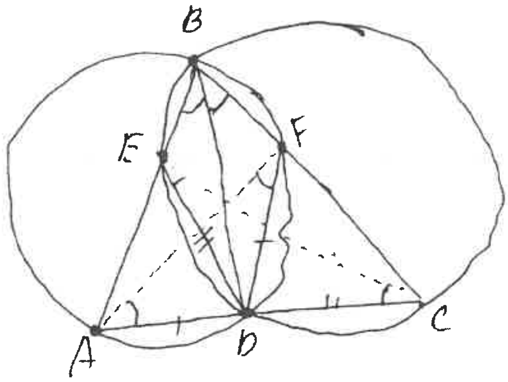
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Дано: $\triangle ABC$
$\angle ABD = \angle DBC$;
$w_1 \cap AB = E$
$w_2 \cap BC = F$

Док-ть $AE = CF$

Док-во № 4



Рассмотрим четырехугольник ABED - он вписан в окружность $\Rightarrow \angle FAD = \angle ABF = \alpha$
$\angle AFD = \angle ABD = \alpha$

$\triangle AFD$ - равнобедренный (по углам при основании) $\Rightarrow AD = FD$

Рассмотрим четырехугольник CDEB - он вписан в окр $\Rightarrow \angle EBD = \angle ECD = \alpha$
$\angle DBC = \angle DEC = \alpha$

$\triangle DEC$ - равнобедренный (по углам при основании) $\Rightarrow ED = DC$

Пусть $\angle EDB = x$; $\angle BDF = y$; $ADE = z$; $EDC = V$, тогда

Т.к. четырехугольник ABFD - вписанный сумма градусных мер противоположных углов равна 180°

$x + y + z = 180 - 2\alpha$

аналогично для четырехугольника CDEB

$x + y + V = 180 - 2\alpha$

$x + y + z = x + y + V \Rightarrow z = V$

$\triangle ADE = \triangle CDF$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow$
$\Rightarrow AE = CF$ (соответствующие элементы)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	2	8	9	9	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Посчитаем кол-во отрезков.
Из каждой точки идет по 7 отрезков, значит всего отрезков $7\cdot 8=56$, однако, каждый из отрезков мы считали дважды, поэтому их всего $\frac{56}{2}=28$

~~Всего~~ Всего существует $28\cdot 27\cdot 26\cdot 25$ вариантов какие отрезки мы покрасим в красный. $C_8^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}=8\cdot 7$

также у нас существует $8\cdot 7\cdot 6$ треугольников на этих 8 точках. Кол-во вариантов сделать красный треугольник $= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 25$

Кол отрезков было 4!

$$\frac{25\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{25\cdot 28\cdot 27\cdot 26}=\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 6}{1\cdot 1\cdot 27\cdot 26}=\frac{2}{9\cdot 13}=\frac{2}{117}$$

Ответ: $\frac{2}{117}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000128 9925

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^3} - \frac{x}{y^2} + 1 = 0 \\ 1 - \frac{y}{x^3} + \frac{y^3}{x^4} = 0 \end{cases}$$

Пусть $y > 0$; $x > 0$, тогда

$$\begin{cases} \left(\frac{x^3}{y^3} - 1\right)\frac{x}{y^2} = -1 \\ \left(\frac{y^2}{x} - 1\right)\frac{y}{x^3} = -1 \end{cases}$$

Пусть $\frac{x}{y^2} = a$, тогда $\frac{y^2}{x} = \frac{1}{a}$

$\frac{x^3}{y} = b$, тогда $\frac{y}{x^3} = \frac{1}{b}$

$$\begin{cases} (b-1)a = -1 \\ \left(\frac{1}{a} - 1\right)\frac{1}{b} = -1 \end{cases} \Rightarrow (b-1)a = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b}\right)$$

$ab - a = \frac{1}{ab} - \frac{1}{b}$ $\quad | \cdot ab$

$a^2b^2 - a^2b = \frac{ab}{ab} - \frac{ab}{b}$

$a^2b^2 - a^2b = 1 - a$

$a^2b^2 - a^2b + a - 1 = 0$

$a^2b^2 \geqslant a^2b$

равенство, если $b = 1$ (т.к. мы в целых числах)

$a \geqslant 1$

равенство, если $a = 1$ (т.к. мы в целых числах)

$a^2b^2 - a^2b + a - 1 = 0$

$a^2(b^2 - b) + a - 1 = 0$

Если

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 2 8 9 9 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$, тогда

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^3} - \frac{x}{y^2} + 1 = 0 \\ 1 - \frac{y}{x^3} + \frac{y^3}{x^4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^3}{y} - 1\right)\frac{x}{y^2} = -1 \\ \left(\frac{y^2}{x} - 1\right)\frac{y}{x^3} = -1 \end{cases}$$

a, b – не обяз. целого.

Пусть $\frac{x^3}{y} = a$; $\frac{y^2}{x} = b$, тогда

$$\begin{cases} (a-1)\frac{1}{b} = -1 \\ (b-1)\cdot\frac{1}{a} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a-1}{b} = -1 \\ \frac{b-1}{a} = -1 \end{cases} \qquad \frac{a-1}{b} = \frac{b-1}{a}$$

$$a^2 - a = b^2 - b$$

Если $|a| > |b|$, то $|a^2| \gg |b^2|$, поэтому $a^2 - a = b^2 - b$ выполняется, если $a = b$

Контрпример: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$. $a^2 - a = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}$. $b^2 - b = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$.

$\frac{x^3}{y} = \frac{y^2}{x}$; $x^4 = y^3$, если в целых числах x, то $y = 1$, $x = 1$, что не подходит

Если $y = 0$, то $x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

Если $x = 0$, то $y^3 = 0 \Rightarrow y = 0$

Ответ: $(0; 0)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 2 7 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	5	20	20	–	–	61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Если Петя сыграл 6 раз, Захар 5, Дима 3, то всего было сыграно $\frac{6+5+3}{2}=7$ партий. Как известно, если игрок не играет в текущей партии, то в следующую он точно войдет. Другими словами, если игрок проигрывает каждую свою партию, то играет он через 1 партию. Получается, что если Дима сыграл 3 раза то он проиграл все 3 игры и играл в таком порядке: („+" – играл, „–" – не играл).

1: –, 2: +, 3: –, 4: +, 5: –, 6 +, 7 –. Только при таком раскладе он мог сыграть всего 3 раза. ~~...~~ Посмотрим на 2 и 3 партию: Если во 2 он играл, а в 3 нет, то во 2 он проиграл, а значит ответ на задачу – Дима.

Ответ: Дима

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00016278 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Дробь Феди $= \frac{9}{11}$, Лени $= \frac{7}{79}$

Нам нужно подобрать дробь лежащую в промежутке $\left(\frac{9}{11}; \frac{7}{79}\right)$

Если привести к общему знаменателю, то $\left(\frac{76}{11\cdot 79}; \frac{77}{11\cdot 79}\right)$. т.к.

~~Разрыв числителя при равных знаменателях между этими дробями ре то меньше знаменатель в искомой дроби уже не станет~~

Докажем, что искомая дробь $\frac{a}{b}$ такая, что $b > 11\cdot 79$.

Пусть это не так. Тогда после умножения дробей в интервале на r мы прибавили к $\frac{76\cdot r}{11\cdot 79\cdot r}$ какое-то k_1, что после этого дробь может сократиться.

$$\frac{76\cdot r + k_1}{11\cdot 79\cdot r} = \frac{77\cdot r - k_2}{11\cdot 79\cdot r}$$

$$\frac{r\left(76+\frac{k_1}{r}\right)}{11\cdot 79\cdot r} = \frac{\cancel{77r}\, r\left(77-\frac{k_2}{r}\right)}{11\cdot 79\cdot r}$$

$$76+\frac{k_1}{r} = 77-\frac{k_2}{r}$$

$\frac{k_1+k_2}{r} = 1$ $\quad k_1+k_2 = r$, однако $76+\frac{k_1}{r}$ и $77-\frac{k_2}{r}$ — натуральные числа, чего не может быть если $k_1+k_2 = r$.

Таким образом k_1 и k_2 числа, которые не делятся ни на 11 ни на 79 ни на r. получается искомая дробь $\frac{a}{b}$ такая что $b > 11\cdot 79$. Минимальным b будет если интервал умножить на 2, т.е. между $\frac{152}{11\cdot 79\cdot 2}$ и $\frac{154}{11\cdot 79\cdot 2}$ и равна $\frac{153}{11\cdot 79\cdot 2}$. То есть $b = 11\cdot 79\cdot 2 = 418$ ответ: 418

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА 0001627825

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Всего отрезков в окружности ~~8~~ $7+6+5+4+3+2+1 = \cancel{10}\ 28$ (Из первой точки во все 7 других точек проводим отрезки, из второй во все 7 кроме первой и т.д.).

То есть способов выбрать 4 отрезка для закрашивания $C_4^{28} = \frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 7\cdot9\cdot13\cdot25$. Теперь рассмотрим любые 3 точки на окружности: Назовем хорошим раскрашивание, если из закрашенных отрезков можно составить треугольник для этих 3 точек. Так вот ~~данных~~ вероятность данного отмеченного раскрашивания равна Кол-ва способов выбрать 3 нужных отрезка из которых мы составим треугольник ~~...~~ и один из 25 оставшихся к всем способам. Численно это равно $\frac{25}{7\cdot9\cdot13\cdot25} = \frac{1}{7\cdot9\cdot13}$. Такая вероятность для одного набора 3 точек. Всего набор из 3 точек можно сделать C_3^8 способами то есть $\frac{8\cdot7\cdot6}{3!} = 8\cdot7$ способов.

Общая вероятность равна $\frac{8\cdot7\cdot\cancel{...}}{7\cdot9\cdot13} = \frac{8}{9\cdot13} = \frac{8}{117}$.

Ответ: $\frac{8}{117}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 2 7 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

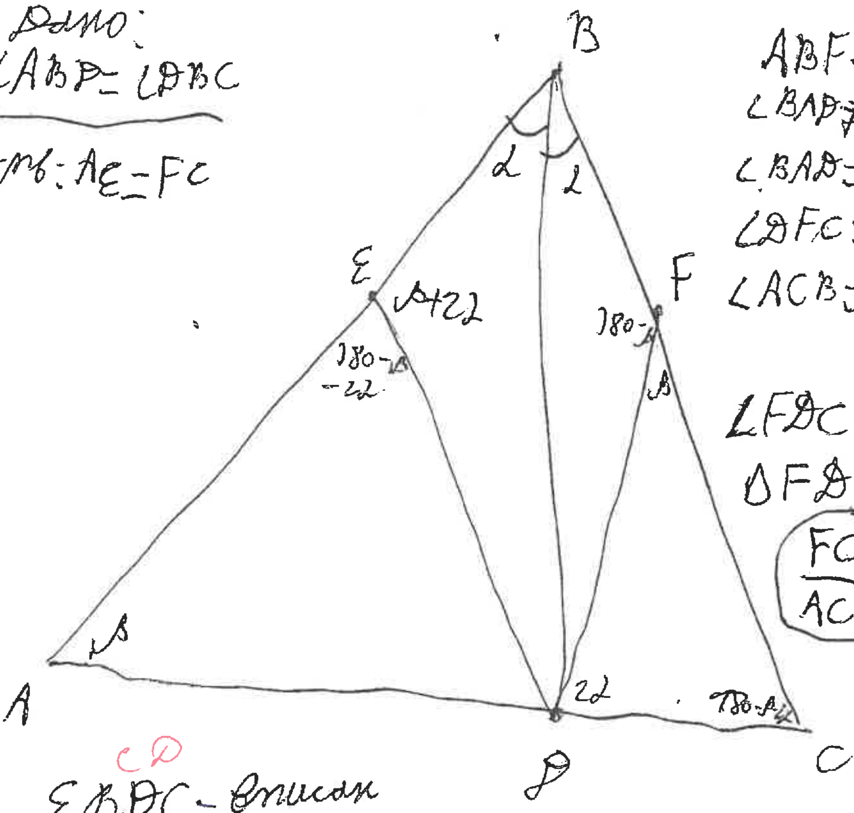
№4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Дано:
∠ABD = ∠DBC

Д-ть: AE = FC



ABFD – вписан

∠BAD + ∠BFD = 180

∠BAD = β ∠BFD = 180 − β

∠DFC = β (смежные с ∠BFD)

∠ACB = 180 − β − 2α (треугольник ABC сумма углов 180)

∠FDC = 2α (180 − ∠FCD − ∠DFC)

ΔFDC ∼ ΔABC: (по 2 углам равным)

$$\frac{FC}{AC} = \frac{DC}{\cancel{AB}\,BC}$$

~~т.к.~~ EBDC – вписан

∠BED = 2α + β (180 − ∠BCD)

AED = 180 − 2α − β

ΔAED ∼ ΔACB (по двум равным углам):

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

По свойству биссектрисы BD: $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

~~Из того~~ Следовательно $\frac{AE}{AC} = \frac{FC}{AC}$ $\left(\frac{DC}{BC} = \frac{AD}{AB}\right)$,

следовательно AE = FC.

(+)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 3 | 6 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
19	20	–	2	20	–	61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Решение

Сначала пункт „а" ~~доказанным~~ ~~нужным~~ доказанным, проведем перпендикуляры AH_1 к CN и CH_2 к RN. Тогда углы ANS и CNR равны как вертикальные, $AN = NC$ по условию, тогда AH_1 равна CH_2, откуда и следует $S_{ARS} = S_{CRS}$ (высоты к общей стороне RS равны).

№1

	выигрыши	проигрыши	ничьи
М	2	0	3
П	2	3	1

Из условие мы понимали, что М и П могли не более одного раза сыграть в ничью (т.к у Пети есть одна ничья) и не более двух раз между собой, так как у Маши нет поражений, а побед 2 (у Пети 3 поражения). Следовательно, не более 3 игр вместе.

Количество игр с другими:

$5+6=11$, $11-3=8$, с другими не менее 8.

Для примера возьмем человека, который 2 раза сыграл в ничью с Машей, 1 раз выиграет у Пети и 2 раза проиграет

$2+1+2=5$

Ответ: 8. !

Лист 1 из

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 1 5 3 6 8 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

По признаку арифметической прогрессии $ab=\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+a-b)$, $a-b=\frac{1}{2}(ab+a+b)$.

Система $\begin{cases} 2ab^2-ab+b^2=0; \\ ab-a+3b=0. \end{cases}$ откуда $b\neq 0$, $b\neq 1$ иначе второе не имеет решений

Выразим из второго $a=\frac{3b}{1-b}$, $\frac{6b^3}{1-b}-\frac{3b}{1-b}-\frac{3b^2}{1-b}+b^2=0$, $5b^3-2b^2-3b=0$, т.к. $b\neq 0$, $b\neq 1$, остается $b=-\frac{3}{5}$, откуда $a=-\frac{9}{8}$

Ответ: $a=-\frac{9}{8}$, $b=-\frac{3}{5}$.

№5

Пусть $n=da$, m ~~равна~~ db, где a и b взаимно простые числа. Тогда $da+d^2b^2+d^2=d^3ab \Rightarrow a=$ $=d^2ab-db^2-d \Rightarrow a \ldots b$? $a \vdots d$

$a=dc \Rightarrow c+b^2+1=d^2bc$, при этом c и b взаимно простые и d и b взаимно простые.

Тогда по т. Виета

$b_1+b_2=d^2c$, $b_1\cdot b_2=c+1$, $d^2c=|b_1+b_2|\leq|b_1|+|b_2|\leq|b_1|\cdot|b_2|+1\leq c+2$. Следовательно $d^2c\leq c+2 \Rightarrow (d^2-1)\cdot c\leq 2 \Rightarrow d=1$.

не д-но

$n+m^2+1=n+m^2+1=mn \Rightarrow n=\frac{m^2+1}{m-1}=m+1+\frac{2}{m-1}=$ $2 \ldots m-1 \Rightarrow m=3$, $m=2$, откуда $n=5$

Ответ: $(3;5)$, $(2;5)$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 | 2 | 3 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	15	5	1	–	61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №1.

1) Рассмотрим игры Пети, по его результатам найдём результаты противников;

	Петя	Противник
1)	•	•
2)	V	×
3)	V	×
4)	×	V
5)	×	V
6)	×	V

V - выиграл
• - ничья
× - проиграл

2) Тоже самое проделаем и для Маши:

	Маша	Противник
1)	•	•
2)	•	•
3)	•	•
4)	V	×
5)	V	×

3) Теперь ~~попытаемся~~ объединить таблицы, создавая партии, где играли Маша и Петя вместе:

1 строчка из табл. Пети может быть продублирована 1 строчкой в табл. Маши, так как нужно минимизировать кол-во противников, то будем считать это за их общую партию, дальше противник(и) Пети дважды проиграли, но Маша не проигрывала, значит это точно не она, затем противник(и) Пети трижды выиграли, но т.к. Маша выигрывала только два раза, то две из партий будем считать общими между Петей и Машей, а третью только Петиной. Рассмотрим и посчитаем партии, которые мы не смогли назвать общими, их 5, три у Пети и две у Маши.

Ответ: 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 1 7 9 2 3 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №2.

Пусть x - некий шаг арифметической прогрессии, тогда:

$$\boxed{\frac{a}{b} \quad ab \quad a-b \quad a+b}$$

$ab = \frac{a}{b} + x$

$a-b = ab + x = \frac{a}{b} + 2x$

$a+b = ab + 2x = \frac{a}{b} + 3x = a-b+x$

Заметим, что: $a+b = a-b+x$, то есть

$a - a + b + b = x$

$2b = x$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} ab = \frac{a}{b} + 2b \\ (a+b) = ab + 4b \end{cases}$$

$a+b = b(a+4) \quad a = b(a+4-1) \quad b = \frac{a}{(a+3)}$

$a \cdot \frac{a}{a+3} = \frac{a}{\left(\frac{a}{a+3}\right)} + \frac{2a}{a+3} \qquad ОДЗ: a \neq -3$

$\frac{a^2}{a+3} = a+3 + \frac{2a}{a+3}$

$a^2 = (a+3)^2 + 2a$

$a^2 = a^2 + 6a + 9 + 2a$

$8a = -9$

$a = \frac{-9}{8}$

$b = \frac{-\frac{9}{8}}{-\frac{9}{8}+3} = -\left(\frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot \cancel{15}5}\right) = -0,6$

Ответ: $a = -\frac{9}{8}$; $b = -0,6$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00017923 25 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №3.

Представим, что первый школьник раскрашивал кубик, а второй пытался повторить такой же кубик, но не видя его.

Представим, что первый кубик имеет пронумерованные ~~грани~~ стороны, а второй нет.

Тогда разукрасить первый кубик двумя цветами существует ~~___~~ 2^6 способа, следовательно вероятность угадать одну из композиций цветов, так чтобы не пришлось переворачивать кубик $\frac{1}{2^6}$. Так второй школьник может переворачивать кубик шансы угадать больше.

Найдём вероятности для ... закрашенных в зелёный цвет стороны:

— для 1 кубика

- 6 (то есть для одноцветного кубика) $= \frac{1}{2^6}$ (не зависит от поворота)
- 2 противолежащих $= \frac{1}{2^6} \cdot 3$ (возможные варианты при повороте)
- 2 соседних $= \frac{1}{2^6} \cdot 12$
- 3 : $\frac{8}{2^6}$
- 1 : $\frac{1}{2^6} \cdot 6$

См. решение.
Учтены не все варианты.

Сложим эти вероятности и умножим на два, т.к. если был ~~два три~~ 1 зелёный, то $(6-1)=5$ красных, следовательно умножив на два мы ~~___~~ найдём вероятности того, что будет 0, 5, 4, заметим, что для трёх у нас уже посчитано, поэтому общая вероятность будет находится по: $\frac{(1+3+12+6)\cdot 2+8}{2^6} = 0{,}8125$

Ответ: 0,8125.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | Ю | 0 | 0 | 1 | 7 | 9 | 2 | 3 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №4.1

Противоположные углы вписанного четырёхугольника в сумме дают 180°, тогда $\angle HQC + \angle MNR = 180°$; $\angle APH + \angle ANH = 180°$

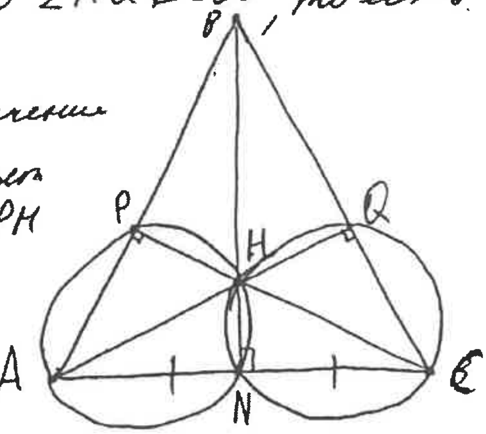
$\angle ANH + \angle HNC = 180°$, как смежные, тогда

$\angle APH = \angle HNC$ и $\angle HQC = \angle ANH$.

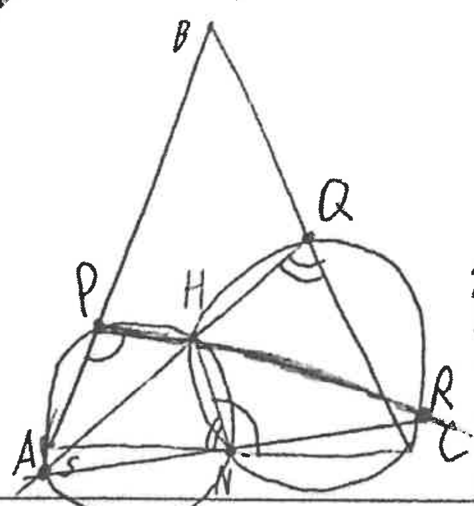
1) Рассмотрим задачу для равнобедренного $\triangle$, тогда $HN \perp AC$, т.к. $\angle HNC = 90°$, то $\angle HQC = 90°$, то есть $\angle APH$ и $\angle ANH$ тоже 90°.

Так как H - это точка пересечения высот в $\triangle ABC$, то прямая HQ будет пересекать ω_1 в $A = S$, а прямая PH будет пересекать ω_2 в $C = R$.

Прямая AC содержит точки S, N, R, то есть они лежат на одной прямой.



2) Теперь рассмотрим все остальные случаи — когда $\triangle ABC$ неравнобедренный, тогда $\angle HNC$ не равен $\angle ANH$, но они зависят друг от друга и в сумме дают 180°, так же как и $\angle APH$ и $\angle HQC$.



Так как $\angle HQC + \angle APH = 180°$, то рассмотрим стадию, где $\angle APH = \angle HQC (= 90°)$, как начальную. Тогда при повышении $\angle HQC$ на 1°, т.к. BC статичная (не передвигается), то BQ поменяет своё положение в более лежачее, в то время как $\angle APH$ тоже изменится на -1° следовательно т.к. AC статическая, PR изменит своё положение на более стоячее, S, N, R будут всегда оставаться на одной прямой, так как положение прямой PR зависит от положения SQ и наоборот, а их изменения равны по модулю, но имеют разные знаки.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00017923 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~3~~ Задание №5.

Если НОД $(n, m) = d$, то

$n = da$, где a целое число, натуральное

$m = db$, где b целое число, натуральное Тогда:

$da + d^2b^2 + d^2 = d^2ab$ поделим на d, так как $d \neq 0$:

$a + b^2d + d = d^2ab$

$db(da - b) = a + d$

$\frac{m+n}{d} = \frac{da+db}{d} = a+b$, а тут $a+d$

$m\left(n - \frac{m}{d}\right) = \frac{m+n}{d}$

$mn - \frac{m^2}{d} = \frac{m+n}{d}$

$dmn = m + n + m^2$, так как $dmn = n + m^2 + d^2$, то:

$m + n + m^2 = n + m^2 + d^2$

$m = d^2$

$n + \cancel{m} d^4 + d^2 = d^3 n$

Задание №4. 1.

Да, их площади одинаковые, т.к. площадь равна полуоснованию на высоту, что и т.д..

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 9 | 1 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	15	20	1	–	61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1) ~~Рассмотрим~~

Суммарно ребята сыграли $6+5+3=$
$=14$ раз. В каждой игре участвовало двое, значит всего игр было $\frac{14}{2}=7$.

Рассмотрим случаи.

1. Пусть во второй игре проиграл Петя.

Заметим, что Петя сыграл 6 раз. Значит он не играл всего одну игру. Обозначим Петю за "П", а остальных за "α" и "β".

1: Пβ αβ

Либо в 1^ой^ игре играли Петя и ~~кто-то~~ (Захар или Дима), либо в 1^ой^ игре играли Захар и Дима

2: П α

3: αβ αβ

В этом случае Петя не играл уже в 2 играх !? противоречие.

Дальше Петя должен выигрывать, чтобы он сыграл в итоге 6 игр.

4: Пα Пβ

5: Пβ Пα

6: Пα Пβ

7: Пβ Пα

Итого: α сыграл 4 раза
β сыграл 4 раза.
Но Захар сыграл 5 раз, а Дима – 3 !? противоречие

=> Петя точно выиграл во 2 игре.

Из пункта 1 мы поняли, что во 2 игре Петя выиграл. Снова обозначим двух оставшихся ребят за "α" и "β".
Не умаляя общности, пусть во второй игре были П и α

1: Пβ αβ (В ~~предыдущей~~ первой игре выиграл либо П, либо α)

2: П α

Дальше П должен выигрывать все игры, иначе он сыграет менее 6 раз

3:

Разберем этот случай на листе 2.

Пβ
Пα
Пβ
Пα
Пβ

α = 4 раза
β = 4 раза
(=> ~~Это~~ противоречие, как в 1 пункте).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 1 5 9 1 1 2 5
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

продолжение №1)

1. $\Pi\beta$
2. $\Pi\alpha$
3. $\Pi\beta$ дальше в какой-то момент П должен проиграть. ~~дальше буд~~ перед этим есть 2 варианта пары: $\Pi\alpha$ или $\Pi\beta$. Разберем случаи.

$\Pi\alpha \to \alpha\beta \to \Pi\beta \to \Pi\alpha$ итд...; $\Pi\alpha \to \Pi\beta$

$\Pi\beta \to \alpha\beta \to \Pi\alpha \to \Pi\beta$ ... итд...; $\Pi\beta \to \Pi\alpha$

Случаи симметричны ($\alpha = \beta$).

Итого наши случаи отличаются только ходом, где П проигрывает и следующим: $\alpha(+2)$, $\beta(+1)$ и $\alpha(+1)$, $\beta(+2)$. (без этих ходов).

Значит: $\Pi = 6$; $\alpha \geq 2$; $\beta \geq 3$.

если $\alpha(+2)$, $\beta(+1)$: $\Pi = 6$; $\alpha = 4$; $\beta = 4$ противоречие!

если $\beta(+2)$, $\alpha(+1)$: $\Pi = 6$; $\alpha = 3$; $\beta = 5$

Значит α – Дима, β – Захар.

Во второй игре проиграл α, то есть Дима.

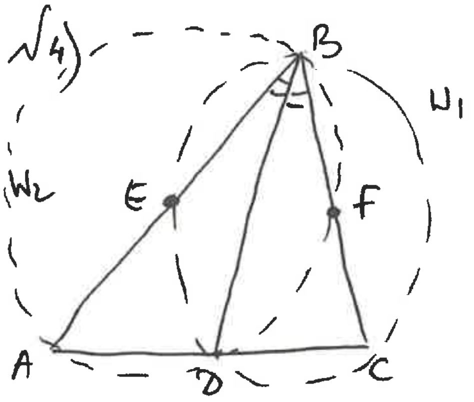
Ответ: Дима.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4)



Решение: 1) По свойству биссектрисы BD:
(BD – биссектриса, так как $\angle ABD = \angle DBC$)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BC.$$

2) Рассмотрим W_1 и отрезки AB и AC:
по теореме об отрезках секущих:
$AE \cdot AB = AD \cdot AC$

3) Рассмотрим W_2 и отрезки AC и BC:
$CD \cdot AC = CF \cdot CB$

4) из. п.2 и п.3. $\Rightarrow AC = \frac{AE \cdot AB}{AD}$ и $AC = \frac{CF \cdot CB}{CD}$

Значит $\frac{AE \cdot AB}{AD} = \frac{CF \cdot CB}{CD}$

$\frac{AE}{CF} = \frac{CB \cdot AD}{AB \cdot CD} \longrightarrow$

Из п.1 $\Rightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BC$
$(AB \cdot CD = AD \cdot CB)$.

Заменим $CB \cdot AD$ на $AB \cdot DC$
т.к. они равны

$\cancel{\frac{AE}{CF}}$

$\frac{AE}{CF} = \frac{AB \cdot DC}{AB \cdot DC}$ (очевидно, что $AB \neq 0$ и $DC \neq 0$)

$\Rightarrow \frac{AE}{CF} = 1 \Rightarrow AE = CF$

Ч.т.д.

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	5	9	1	1	2	5

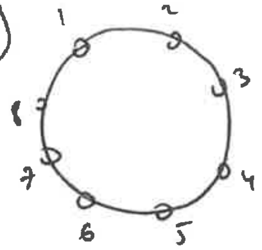
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

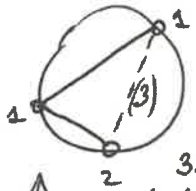
№3)



Всего отрезков: $\frac{8\cdot7}{2!} = 4\cdot7 = 28$ (выбираем 2 точки).

Вариантов выбрать 4 красных отрезка: $28\cdot27\cdot26\cdot25$ ~~ха~~

Посчитаем, сколько вариантов выбрать 4 красных отрезка так, чтобы они образовывали Δ.



1. Для начала выберем любой из 28 отрезков
2. Потом выберем отрезок с началом в одной из точек (1 и 2) первого отрезка. Таких 6+6=12.
3. Выбираем отрезок, чтобы с 1 и 2 он образовал Δ (такой отрезок один).
4. И можем выбрать любой из оставшихся $(28-3)=25$ отрезков

$$\underset{\text{первый}}{28}\cdot\underset{\text{второй}}{12}\cdot\underset{\text{третий}}{1}\cdot\underset{\text{четвертый}}{25} = 28\cdot12\cdot25$$

4 отрезка! 3 образуют тр-к.

~~Но~~ Будем считать, что способы, при которых выбраны одинаковые отрезки, но в разном порядке, одни и те же! ~~В противном случае ответ умножим на 4! = 24.~~

Считаем вероятность: $\frac{28\cdot12\cdot25}{28\cdot27\cdot26\cdot25} = \frac{12}{27\cdot26} = \frac{6}{27\cdot13} = \frac{2}{9\cdot13} = \frac{2}{117}$

Ответ: $\frac{2}{117}$.

~~Такой способ не выбрать~~

(Других случаев, при которых образуются Δ нет, т.к. 2 треугольника образоваться не может. (всего 4 отрезка))

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 9 | 1 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5) $x^4-xy+y^3=0;\ x,y\in\mathbb{Z}.$

$x^4-xy+y^3=0 \mid :xy\neq 0$

если $xy=0$, то:

$x=0$ или $y=0$

$0-0\cdot y+y^3=0$ $\quad$ $x^4-x\cdot 0+0=0$

$y^3=0$ $\quad$ $x^4=0$

$y=0$ $\quad$ $x=0$

Значит пара $(0;0)$ подходит.

если $xy\neq 0$, то:

$$\frac{x^4}{xy}-\frac{xy}{xy}+\frac{y^3}{xy}=0$$

$$\frac{x^3}{y}-1+\frac{y^2}{x}=0$$

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^2}{x}=1$$

Каждое слагаемое д.б. неотриц

Можем оценить выражение $\frac{x^3}{y}+\frac{y^2}{x}$ по неравенству о средних, т.к. оно положительное (равно 1).

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^2}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x^3\cdot y^2}{xy}}$$

$$\underbrace{\frac{x^3}{y}+\frac{y^2}{x}}_{=1}\geq 2\sqrt{x^2y}$$

$$1\geq 2\sqrt{x^2y} \mid ^{\wedge}2$$

равносильно, т.к. $\begin{cases}1>0\\2\sqrt{x^2y}>0\end{cases}$

$\Rightarrow 1\geq 4x^2y$

$x^2y\leq\frac{1}{4}$

~~Может ли x^2y быть меньше 0? То Если это так, то $y<0$ $(x^2>0)$.~~

учитывая, что x и y - целые числа

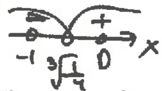
$\Rightarrow x^2y\leq 0$ (но мы сейчас рассматриваем случай при $x\neq 0$ и $y\neq 0$, А значит $\Rightarrow x^2y<0. \Rightarrow x^2y\leq -1.$

~~$\Rightarrow \left[\begin{cases}x>0\\y<0\end{cases}\right.\ \begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$~~

Значит $y\leq -1$, т.к. $x^2>0$, ($x\neq 0$).

$\Rightarrow x^4+x-1\leq 0$. ; $f(x)=x^4+x-1$

$f'(x)=4x^3+1=0 \Rightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$



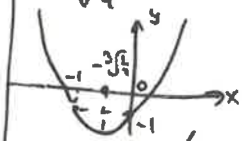
$f(0)=-1$

$f(-1)=-1$

$f(1)=1$

$f(-2)=13$

$\Rightarrow$ ~~корни этого $f(x)$~~ корни лежат на отрезках $(-2;-1)$ и $(0;1)$.



Значит ~~х подх~~ подходит только $x\in\{-1;0;1\}$. $x=0$ уже проверили.

$x=-1$:

$1+y+y^3=0$

$y(y^2+1)=-1$

нет решений в целых числах.

~~$x=1$: $1-y+y^3=0$, $y(y^2-1)=-1$, $y(y-1)(y+1)=-1$, нет решений в целых числах~~

Ответ: $(0;0)$.

Лист 5 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 5 9 1 1 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2) $\frac{4}{11} = \frac{4\cdot 19}{11\cdot 19} = \frac{76}{209}$

$\frac{7}{19} = \frac{7\cdot 11}{11\cdot 19} = \frac{77}{209}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} \in \left(\frac{76}{209}; \frac{77}{209}\right)$.

Если считать, что a и b — любые действительные числа, то b может быть любым, т.к. можно подобрать такое значение a, чтобы $\frac{a}{b} \in \left(\frac{76}{209}; \frac{77}{209}\right) \Rightarrow$ b — максимально близко к $-\infty$.

~~Если считать, что a и b — натуральные числа, то:~~

Но, вероятно, в задаче подразумевается, что $a, b \in \mathbb{N}$. Конечно. Дробь = натур./натур.

$$\begin{cases} \frac{76}{209} < \frac{a}{b} \;\Big|\cdot 209b>0 \\ \frac{77}{209} > \frac{a}{b} \;\Big|\cdot 209b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 76b < 209a \\ 77b > 209a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < \frac{209a}{76} \; (1) \\ b > \frac{209a}{77} \; (2) \end{cases}$$

Чтобы b было натуральным в случае (1) $a \vdots 76$, в случае (2) $a \vdots 77$

$\Rightarrow a \vdots (76\cdot 77)$, т.к. 76 и 77 не имеют общих делителей (кроме 1).

$\Rightarrow$ для $b_{min} \Rightarrow a_{min}$, т.к. $b \in \left(\frac{209a}{77}; \frac{209a}{76}\right)$.

$a = 76\cdot 77 \Rightarrow b \in (209\cdot 76; 209\cdot 77)$

$\Rightarrow b_{min} = 209\cdot 76 + 1 = 15884 + 1 = 15885$

Ответ: если a и b — натуральные, то $b_{min} = 15885$.

если a и b — действительные числа, то b ~~максимально близко~~ стремится к отрицат. бесконечности.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	-	20	20	-	-	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Заметим, что всего игр было $\frac{6+4+8}{2}=9$, а Света играла 8 игр, значит была всего одна игра между мишей и леной, тогда рассмотрим порядок игр, пусть игра Миши и Лены была n-ная по счету, тогда ~~сразу~~ перед этой игрой было сыграно n-1 игр, а после 9-n игр, причем во всех играла Света, а значит Миша и Лена чередовались до и после их совместной игры, заметим, что до ~~1~~ игры ~~Мита~~ Миши и Лены ~~и~~ ~~к~~ либо они сыграли поровну игр, либо кто-то больше на одну, аналогично и после. Теперь заметим, что со Светой Миша сыграл 5 раз, а Лена со Светой 3 раза, а это значит, что до и после игры Миши и Лены ~~Лены~~ Миша сыграл на одну игру больше Лены, а значит Миша ~~~~ сыграл 1 и n-1 игру со Светой и n+1 и 9 игру со Светой. Так как Миша чередовался с Леной до и после n-ной игры, то ~~~~ ~~из~~ ~~~~ ~~одну~~ ~~четность~~, ~~игра~~ ~~есть~~ ~~~~ Миша играл 1, 3, ... n-1 ~~~~ игры, ~~~~ и n+1, n+3, ..., ~~n~~9, заметим что ~~n~~ Миша против Светы играл нечетные игры и n-ную, которую он выиграл, ~~а~~ведь n+1 он тоже играл, а значит Лена не выигрывала ни Мишу, ни Свету и играла только четные игры, против Светы. 2, 4, ..., n-2, n+2, ... и n-ную, а значит 2, 4, 6, 8, вне зависимости от n проиграла каждую, в том числе и 6-ю

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1 (продолжение)

Ответ: Лена

N4

1) для т. A и ω_1:

$AE \cdot AB = AD \cdot AC$

для т. C и ω_2:

$CF \cdot CB = CD \cdot AC$

$\Rightarrow \frac{AE \cdot AB}{CF \cdot CB} = \frac{AD \cdot AC}{CD \cdot AC}$, т. к. $AE = CF$ - по усл., то $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$

Из этого уже следует, что BD — биссектриса

$\rho(B; AD) \cdot AD$ $\quad \rho(D; AB) \cdot AB$

2) $S_{ABD} = \frac{1}{2} d(B; AD) \cdot AD = \frac{1}{2} d(D; AB) \cdot AB$

$S_{CBD} = \frac{1}{2} d(B; DC) \cdot DC = \frac{1}{2} d(D; BC) BC$

т. к. $D \in AC$, то $d(B; AD) = d(B; AC) = d(B; CD) \Rightarrow d(B; AD) = d(B; CD)$

$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2} d(B; AD) \cdot AD}{\frac{1}{2} d(B; CD) \cdot DC} = \frac{\frac{1}{2} d(D; BA) \cdot BA}{\frac{1}{2} d(D; BC) \cdot BC}$

Всё верно, но писать надо разборчивей, и объяснять обозначения.

$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{d(D; AB) \cdot AB}{d(D; BC) BC} = \frac{d(D; AB) \cdot AD}{d(D; BC) \cdot DC}$

$\Rightarrow \frac{d(D; AB)}{d(D; BC)} = 1 \Rightarrow d(D; AB) = d(D; BC) \Rightarrow D$ равноудалена от сторон $\angle ABC$

$\Rightarrow BD$ - бисс $\angle ABC \Rightarrow \angle ABD = \angle DBC$

ч. т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Заметим, что всего отрез $C_9^2=36$, а значит кол-во вариантов покрасить ~~отрез~~ 4 отрезка красным равно C_{36}^4, ~~...~~

~~Заметим, что если найдется треугольник со сторонами красного цвета~~

Теперь посчитаем, сколько вариантов содержат треугольник, выберем три точки - вершины треугольника, так как вершины лежат на окружности, то треугольник существует и однозначно задается. Вариантов выбрать три вершины C_9^3, а теперь выберем один любой отрезок C_{33}^1 способом, он не добавит треугольников, а значит условие сохранятся, тогда вероятность составит:

$$\frac{C_9^3\cdot C_{33}^1}{C_{36}^4}=\frac{\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{33}}{\frac{\cancel{36}\cdot 35\cdot\cancel{34}\cdot\cancel{33}}{4\cdot 3\cdot 2}}=\frac{4}{85}$$

Ответ: $\frac{4}{85}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	7	5	0	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	–	–	–	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1

Арина - 5 раз, Коля - 3 раза, Тимур - 6 раз

Во время партии играют двое, значит ~~в сум~~ за одну игру в сумме +2 сыгранных. Значит всего партий было: $\frac{5+3+6}{2}=7$.

Самое большое кол-во игр у Тимура - 6, значит один раз он проиграл, (или не участвовал в первой партии), а все остальные выигрывал, где Арина и Коля чередовались.

К	А	Т
~~1~~	1	1
1	1	
~~1~~	1	1
1	~~1~~	1
	1	1
1		1
	1	1
3	5	6

(в перемешку)

~~не~~ верно

Можно заметить, что ~~К~~ Т Арина ~~Коля~~ и Тимур играли вместе 4 раза. Всего партий 7, а два раза подряд ~~Коля и Ти~~ они ~~[illegible]~~ играть не могут (без ничьих), значит в первую партию они играли вместе, как и во третью, пятую и седьмую.

Тот, кто проиграл в четвёртой игре, остаётся в сторонке во время пятой, уступая другому место. А если в пятой у нас ~~Коля~~ Арина и Тимур, значит это Коля

Ответ: Коля

3

Всего отрезков будет $\frac{10\cdot 9}{2}=45$, значит кол-во вариантов выбора и четырёх отрезков и их покраса равно $\frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42}{4!}=45\cdot 11\cdot 43\cdot 7$

Теперь посмотрим, сколько треугольников может ~~4·3·2~~ быть с различными вершинами: $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}=120$.

Из четырёх отрезков можно составить только один треугольник, а значит кол-во способов выбрать различные 4 отрезка так, чтобы они составляли треугольник и отрезок: $120\cdot(45-3)=42\cdot 120$

Значит вероятность того, что найдётся красный треугольник с вершинами на окружности равна: $\frac{42\cdot 120}{45\cdot 11\cdot 43\cdot 7}=\frac{16}{473}$

Ответ: $\frac{16}{473}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	7	5	0	0	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2.

$\frac{9}{16} > \frac{a}{b} > \frac{4}{7}$ | $\cdot 16 \cdot 7 \cdot b$

общий знаменатель

~~$63b > 112a > 64b$~~

$a, b \in \mathbb{Z}$, значит межд

$63b < 112a < 64b$

$a, b \in \mathbb{Z}$, значит между $63b$ и $64b$ есть число, кратное 112.

b=?	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
64b	64	16	80	32	96	48	~~90~~ 0	64	16	80	32	96
63b	63	14	77	28	91	42	~~89~~ 105	56	7	70	21	84 ...

в таблице даны остатки деления ~~64~~ 64b и 63b от 112, надо найти такое минимальное b, при котором остаток 63b больше остатка 64b, а значит между ними есть нужное нам число, кратное 112.

$\boxed{63b = 64b - b}$

у 64b цикл равен 7, (у 63b — 16).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
63b	63	14	77	28	91	42	105	56	7	70	21	84	35	98	49	0
64b	64	16	80	32	96	48	0	64	16	80	32	96	48	0	64	16
	80	32	96	48	0	64	16	80	32	96	48	0 ...				

$105 > 16$, $b = 16 + 7 = \underline{23}$

Проверка:

$23 \cdot 63 < 112a < 64 \cdot 23$

$1449 < 112a < 1472$

$a = 13$

$1449 < 1466 < 1472$

подходит

Ответ: 23

Доп лист №1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9 | 3 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	2	20	2	–	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 Федя записал дробь $\frac{4}{11}$.
пусть $x = \frac{4}{11}$

Лена записала дробь $\frac{7}{19}$
пусть $y = \frac{7}{19}$

Даня записал дробь $\frac{a}{b}$

начую, что $\frac{a}{b} \in \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right)$
Какое минимальное может быть b?

1) $x = \frac{4}{11} \approx 0,(36)$; $y = \frac{7}{19} \approx 0,3684$

2) Оценка (неточная): $b > 20$ и $b \leq 30$, т.к. при $b = 30$ $\frac{1}{30} = 0,0(3)$, а при $b = 20$ „шаг" (шагом будем называть значение $\frac{1}{b}$) равен 0,05, т.е. при $b = 20$ не получится попасть в промежуток $\left(\frac{4}{11}; \frac{7}{19}\right)$. при $b = 30$ значение дроби $\frac{11}{30} = 0,3(6)$, что подходит. проверим все значения от 21 до 29 включительно, чтобы доказать, что $b = 30$ минимальное значение или не найти новый минимум.

при $b = 29$: $\frac{10}{29} \approx 0,34$ $\frac{11}{29} \approx 0,37$. не попадает в промежуток

при $b = 28$: $\frac{10}{28} \approx 0,35$ $\frac{11}{28} \approx 0,39$ не попадает в промежуток

! Более точная оценка: при $b = 25$ шаг равен 0,04, но с таким шагом также нельзя попасть в заданный интервал => проверяем значения от 26 до 29 включительно

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

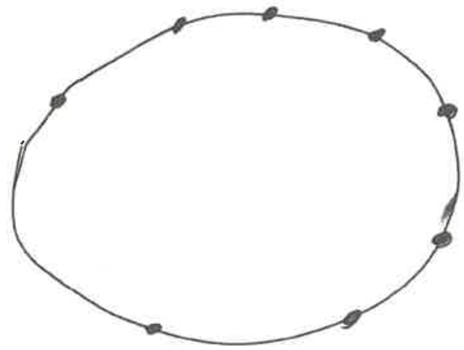
при $b=27$: $\frac{9}{27}\approx 0,(3)$; $\frac{10}{27}\approx 0,37$ не попадает в промежуток

при $b=26$: $\frac{9}{26}\approx 0,34$; $\frac{10}{26}\approx 0,39$ не попадает в промежуток => меньше 30 значения не подходят.

ответ: $b_{min}=30$

№3 Окружность. на ней случайным образом поставлены 8 точек. Каждая пара точек соедин. отрезком. 4 отрезка покрашены в красный. Какая вероятность, что найдётся красный треугольник с вершинами на окружности?

посчитаем, сколько всего будет отрезков:



$$C_n^k=\frac{8!}{2!\cdot(8-2)!}=\frac{8!}{6!\cdot 2!}=\frac{7\cdot 8}{2}=$$

$$=\underline{28}$$

будет 28 отрезков

Пусть искомая вероятность равна N, тогда

$N=n_1+n_2+n_3+n_4$, где n_1 – вероятность того, что первые 3 покрашенные отрезка образуют треугольник;

n_2 – вероятность того, что 2-й, 3-й, 4-й отрезок

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000109 3625

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

образуют треугольник;

n_3 – вероятность того, что 1-й, 3-й, 4-й отрезки образуют треугольник;

n_4 – вероятность того, что 1-й, 2-й, 4-й отрезки образуют треугольник.

$n_1 = 1 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{26} = \frac{1}{27 \cdot 26}$; $n_2 = 1 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{27 \cdot 26 \cdot 25}$

$n_3 = 1 \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{26 \cdot 25}$; $n_4 = 1 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{27 \cdot 25}$;

$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \frac{1}{27 \cdot 26} + \frac{1}{27 \cdot 26 \cdot 25} + \frac{1}{26 \cdot 25} + \frac{1}{27 \cdot 25} =$

$= \frac{25 + 1 + 27 + 26}{27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{79}{27 \cdot 26 \cdot 25}$

Ответ: $N = \frac{79}{27 \cdot 26 \cdot 25}$

№ 1 ~~Петя сыгр~~ Петя → 6 партий (под партией будем понимать сыгранную игру)

Захар → 5 партий

Дима → 3 партии

$\frac{6+5+3}{2} = 7$ → всего партий было сыграно.

1) если бы Дима сыграл в 1-ой партии и во всех бы проиграл, то он сыграл бы в 1-ой, 3-ей, 5-ой,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9 | 3 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

7-ой, то есть в 4 партиях =>
=> противоречие => Дима
впервые сыграл во второй партии (очевидно, что если бы Дима сыграл в 1-ой партии и хотя бы раз выиграл, то количество (сыгранных) партией у него было бы ≥ 4).

2) (Из п.1) Дима впервые сыграл во 2-ой партии, если Дима проиграл во всех сыгранных партиях, то сыграет он только 3 раза, а если хоть в какой-то выиграет, то ≥ 4. => Дима проиграл во 2-ой партии

(во 2-ой, 4-ой, 6-ой)
если проиграет все, то не сыграет в

Ответ: во второй партии проиграл Дима.

ответ

последней, а значит если хоть раз выиграет, то победа добавит партию к его количеству сыгранных, (в отличии от случая, когда Дима играет в 1-ой партии и победа в одной из партий компенсируется „проигрышем" последней; т.к. она должна была сыграть последнее, но победа сдвинула бы график игр и не повлияла бы на кол-во сыгранных им партий)(в скобках пояснение к п.1, а именно к "≥ 4").

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9 | 3 | 6 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(см. ответ на задачу №1 посередине прошлого листа. после ответа идут пояснения) (ответ подчёркнут)

Дублирую ответ на №1:

Ответ: во второй партии проиграл Дима.

№5 $x^4 - xy + y^3 = 0$ $x \in \mathbb{Z}$; $y \in \mathbb{Z}$ (целые) (целые)

$x^4 + y^3 = x \cdot y$ заметим, что подходит решение $(x;y):(0;0)$

Выразим x: $x = \frac{x^4}{y} + \frac{y^3}{y}$ (при $y \neq 0$) $x \in \mathbb{Z}$ по условию, а значит, что $x^4 \vdots y$

Выразим y: ~~$y = \frac{x^4}{x^3} + \frac{y^3}{y}$~~

$y = \frac{x^4}{x^3} + \frac{y^3}{x}$ (при $x \neq 0$). $y \in \mathbb{Z}$ по условию, а значит, что $y^3 \vdots x$

то есть $x^4 = q \cdot y$
$y^3 = p \cdot x$, где p и $q \in \mathbb{Z}$

то есть $\begin{cases} q \cdot y + y^3 = x \cdot y \\ x^4 + p \cdot x = x \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q + y^2 = x \\ x^3 + p = y \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	0	9	3	6	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

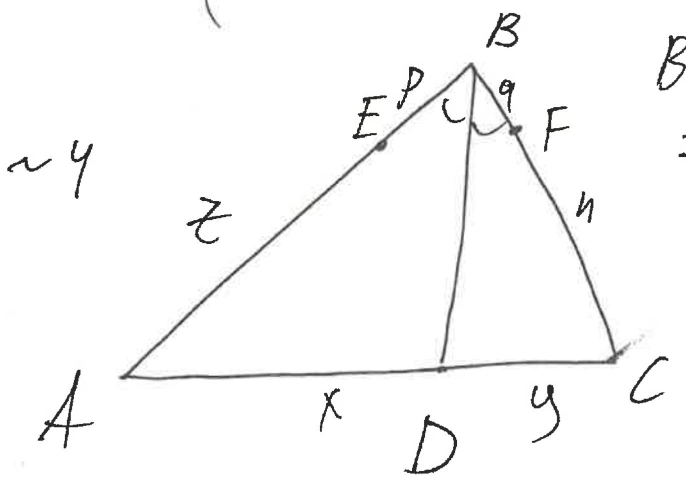
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$x^4 - xy + y^3 = 0$

заметим, что

для такого равенства необходимо, что

$$\begin{cases} x \vdots 2 \ ; \quad y \vdots 2 \\ x \vdots 3 \ ; \quad y \vdots 3 \\ x \vdots 5 \ ; \quad y \vdots 5 \\ x \vdots 7 \ ; \quad y \vdots 7 \end{cases}$$



BD – биссектриса =>

=> $\angle ABD = \angle CBD$

E и F – точки пересечения окружностями сторон

$$\begin{cases} x \cdot (x+y) = z \cdot (z+p) \\ y \cdot (x+y) = n \cdot (n+q) \\ \frac{x}{y} = \frac{z+p}{q+n} \Rightarrow z = n \end{cases}$$

как пересекающие окружности ω_1 и ω_2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00010465 25

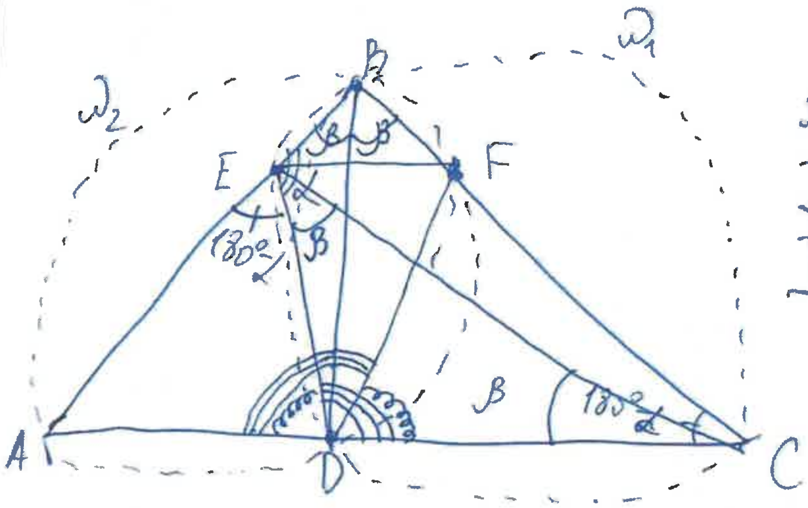
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	–	20	–	–	60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4



Решение:
Проверим ED, EF, DF

] $\angle ABD = \angle DBC = \beta$

] $\angle BED = \alpha$

$E, B, C, D \in \omega_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow EBCD$ – впис. 4-уг.

$A, B, F, D \in \omega_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow ABFD$ – впис. 4-уг.

$\angle BCA = 180^\circ - \alpha$ (как противоп. угол во впис. 4-уг.)

$\angle ADF = 180^\circ - \angle ABF = 180^\circ - 2\beta$ (аналогично $\angle BCA$)

$\angle EDC = 180^\circ - \angle EBC = 180^\circ - 2\beta$ (из вписанности $EBCD$)

$\Downarrow$

$\angle FDA = \angle EDC \Rightarrow \angle ADE = \angle FDC$, т.к они содержат один и тот же угол EDF и равны), а $\angle AED = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - \alpha$ (как смежные)

$\Downarrow$

$\triangle AED \sim \triangle DFC$ по 2 углам

$$\frac{AE}{CF} = \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{DF}$$

$ED = CD \Rightarrow \frac{AE}{CF} = 1 \Rightarrow AE = CF$

ч.т.д.

Осталось лишь провести EC и заметить, что $\angle DEC = \angle DBC = \beta$ (из вписанности $DEBC$)(они опир. на одну дугу)
~~$\angle ECD$~~ $\angle DCE = \angle DBE = \beta$ (аналогично)

$\Downarrow$

$\triangle DEC$ – р/б, т.к углы при основании равны, => $DE = DC$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA000104652 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2:

$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$

① Очевидно, что $b \neq 1$, т.к в интервале $(\frac{4}{11}; \frac{7}{19})$ нет целых чисел, а $\frac{a}{1}$ будет целым

② $|b| = 2$:

$\frac{|a|}{2} \geq \frac{1}{2}$, но! $\frac{1}{2} > \frac{7}{19}$, т.к $\frac{7}{14} > \frac{7}{19}$ => 2 быть не может, т.к $\frac{|a|}{2} \geq \frac{7}{14} > \frac{7}{19}$

~~Значит знаменатель и нужно~~

③ $|b| = 3$

$\frac{|a|}{3}$ Заметим, что $\frac{|a|}{3} \geq \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \vee \frac{4}{11}$

$\frac{4}{12} \vee \frac{4}{11}$

$\frac{4}{12} < \frac{4}{11}$

$\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$

Заметим, что если $b < 0$, то и a должно быть < 0, т.к $\frac{a}{b} > 0$.

Если рассматривать отриц. a и b то

min b ∄! т.к для любого маленького b можно подобрать a так, чтобы оно вошло в нужный интервал

Возьмем, например, $b = -1000$: ~~$a < 0$~~:

$\frac{4}{11} < \frac{a}{-1000} < \frac{7}{19}$

Приведем к общ. знам.:

$\frac{4\cdot(-1000)\cdot 19}{11\cdot(-1000)\cdot 19} < \frac{11\cdot 19\cdot a}{-1000\cdot 11\cdot 19} < \frac{7\cdot 11\cdot(-1000)}{19\cdot(-1000)\cdot 11}$

$\frac{-76000}{-209000} < \frac{209a}{-209000} < \frac{-77000}{-209000}$

⇕

$\frac{76000}{209000} < \frac{-209a}{209000} < \frac{77000}{209000}$

$-209\cdot(-365) = 209\cdot 365 = 76285$ =>

Возьмем a, например $= -365$:

a и b ∄ =>

задача не имеет смысла. Тогда рассмотрим $a, b \in \mathbb{N}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) $b = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$!?, т.к. на инт. $(\frac{4}{11}; \frac{7}{19})$ нет целых

2) $b = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} \in (\frac{4}{11}; \frac{7}{19})$, но $\frac{a}{2} \geq \frac{1}{2}$, а $\frac{1}{2} > \frac{7}{19} \Rightarrow$!?

3) $b = 3 \Rightarrow \frac{a}{3} \geq \frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$), но $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{4}{11}$, а $\frac{2}{3}$ слишком много

4) $b = 4 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{4}$ или $\frac{2}{4}$ или $\frac{3}{4} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ не подх.
$\frac{1}{4} < \frac{4}{11}$ проверили

5) $b = 5 \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{1}{5} / \frac{2}{5} / \frac{3}{5} / \frac{4}{5}$
$\frac{1}{5} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{5} > \frac{7}{19}$, $\frac{3}{5} > \frac{7}{19}$, $\frac{4}{5} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ не подх.

6) $b = 6 \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{1}{6} / \frac{2}{6} / \frac{3}{6} / \frac{4}{6} / \frac{5}{6} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ не подх.
$\frac{1}{6} < \frac{4}{11}$, $\frac{1}{3}$ уже разобр., $\frac{1}{2}$ уже разобр., $\frac{2}{3}$ уже разобр.

7) $b = 7 \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{1}{7} / \frac{2}{7} / \frac{3}{7} / \frac{4}{7} / \frac{5}{7} / \frac{6}{7} > \frac{7}{19}$
$\frac{1}{7} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{7} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{7} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ дальше можно не проверять, т.к. $\frac{4/5/6/7}{7} > \frac{3}{7} > \frac{7}{19}$

8) $b = 8 \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{1}{8} / \frac{2}{8} / \frac{3}{8} / \frac{4}{8} / \frac{5}{8} / \frac{6}{8} / \frac{7}{8}$
$\frac{1}{8} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{8} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{8} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ дальше можно не пров.

9) $b = 9 \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{1}{9} / \frac{2}{9} / \frac{3}{9} / \frac{4}{9} / \frac{5}{9} / \frac{6}{9} / \frac{7}{9} / \frac{8}{9}$
$\frac{1}{9} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{9} < \frac{4}{11}$, $\frac{1}{3}$ уже пров. $\frac{4}{9} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ дальше можно не провер.

10) $b = 10 \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{1}{10} / \frac{2}{10} / \frac{3}{10} / \frac{4}{10} / \frac{5}{10} / \frac{6}{10} / \frac{7}{10} / \frac{8}{10} / \frac{9}{10}$
$\frac{1}{10} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{10} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{10} < \frac{4}{11}$, $\frac{4}{10} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ можно не пров. дальше

11) $b = 11 \Rightarrow \frac{a}{11} = \frac{1}{11} / \frac{2}{11} / \frac{3}{11} / \frac{4}{11} / \frac{5}{11} \ldots \frac{10}{11}$
$\frac{1}{11} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{11} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{11} < \frac{4}{11}$, $\frac{4}{11} = \frac{4}{11} \Rightarrow$ не подх, а дальше — больше.

12) $b = 12 \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{1}{12} / \frac{2}{12} / \frac{3}{12} / \frac{4}{12} / \frac{5}{12}, \ldots \frac{11}{12}$
$\frac{1}{12} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{12} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{12} < \frac{4}{11}$, $\frac{4}{12} < \frac{4}{11}$, $\frac{5}{12} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ можно не пров. дальше.

13) $b = 13 \Rightarrow \frac{a}{13} = \frac{1}{13} / \frac{2}{13} / \frac{3}{13} / \frac{4}{13} / \frac{5}{13} / \frac{6}{13}, \ldots \frac{12}{13}$
$\frac{1}{13} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{13} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{13} < \frac{4}{11}$, $\frac{4}{13} < \frac{4}{11}$, $\frac{5}{13} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ можно не пров. дальше

14) $b = 14 \Rightarrow \frac{a}{14} = \frac{1}{14} / \frac{2}{14} / \frac{3}{14} / \frac{4}{14} / \frac{5}{14} / \frac{6}{14} \ldots \frac{13}{14}$
$\frac{1}{14} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{14} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{14} < \frac{4}{11}$, $\frac{4}{14} < \frac{4}{11}$, $\frac{5}{14} < \frac{4}{11}$, $\frac{6}{14} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ дальше можно не пров.

15) $b = 15 \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{1}{15} / \frac{2}{15} / \frac{3}{15} / \frac{4}{15} / \frac{5}{15} / \frac{6}{15} / \frac{7}{15}$
$\frac{1}{15} < \frac{4}{11}$, $\frac{2}{15} < \frac{4}{11}$, $\frac{3}{15} < \frac{4}{11}$, $\frac{4}{15} < \frac{4}{11}$, $\frac{5}{15} < \frac{4}{11}$, $\frac{6}{15} > \frac{7}{19} \Rightarrow$ дальше можно не провер.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

16) $b=16 \Rightarrow \frac{a}{16} = \frac{1}{16} / \frac{2}{16} / \frac{3}{16} / \frac{4}{16} / \frac{5}{16} / \frac{6}{16} \dots \frac{15}{16}$

$\frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{7}{19} \Rightarrow$ дальше можно не пров.

17) $b=17 \Rightarrow \frac{a}{17} = \frac{1}{17} / \frac{2}{17} / \frac{3}{17} / \frac{4}{17} / \frac{5}{17} / \frac{6}{17} / \frac{7}{17} \dots \frac{16}{17}$

$\frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{7}{19}$

18) $b=18 \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{1}{18} / \frac{2}{18} / \frac{3}{18} / \frac{4}{18} / \frac{5}{18} / \frac{6}{18} / \frac{7}{18} \dots \frac{17}{18}$

$\frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{7}{19}$

19) $b=19 \Rightarrow \frac{a}{19} = \frac{1}{19} / \frac{2}{19} / \frac{3}{19} / \frac{4}{19} / \frac{5}{19} / \frac{6}{19} / \frac{7}{19} / \frac{8}{19} / \frac{9}{19} \dots \frac{18}{19}$

$\frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{7}{19} \Rightarrow$ не входит в интервал, дальше — больше

20) $b=20 \Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{1}{20} / \frac{2}{20} / \frac{3}{20} / \frac{4}{20} / \frac{5}{20} / \frac{6}{20} / \frac{7}{20} / \frac{8}{20} \dots \frac{19}{20}$

$\frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{7}{19}$

21) $b=21 \Rightarrow \frac{a}{21} = \underbrace{\frac{1}{21} / \frac{2}{21} / \frac{3}{21} \dots \frac{7}{21}}_{\frac{4}{11}} / \frac{8}{21} / \frac{9}{21} \dots \frac{20}{21}$

$\frac{7}{19}$

22) $b=22 \Rightarrow \frac{a}{22} = \underbrace{\frac{1}{22} / \frac{2}{22} / \frac{3}{22} \dots \frac{7}{22} / \frac{8}{22}}_{\frac{4}{11}} / \frac{9}{22} / \frac{10}{22} \dots \frac{21}{22}$

$\frac{7}{19}$

23) $b=23 \Rightarrow \frac{a}{23} = \underbrace{\frac{1}{23} / \frac{2}{23} / \frac{3}{23} / \frac{4}{23} \dots / \frac{8}{23}}_{\frac{4}{11}} / \frac{9}{23} / \frac{10}{23} \dots \frac{22}{23}$

$\frac{7}{19}$

24) $b=24 \Rightarrow \frac{a}{24} = \underbrace{\frac{1}{24} / \frac{2}{24} \dots / \frac{8}{24}}_{\frac{4}{11}} / \frac{9}{24} / \frac{10}{24} \dots \frac{23}{24}$

$\frac{4}{11}$

$\frac{9}{24} > \frac{7}{19}$

25) $b=25$

26) $b=26$

27) $b=27$

$\frac{a}{25} = \underbrace{\frac{1}{25} / \frac{2}{25} \dots \frac{8}{25}}_{\frac{4}{11}} / \frac{9}{25} / \frac{10}{25} \dots \frac{24}{25}$

$\frac{4}{11} \quad \frac{7}{19}$

$\frac{a}{26} = \underbrace{\frac{1}{26} / \frac{2}{26} / \frac{3}{26} \dots \frac{9}{26}}_{\frac{4}{11}} / \frac{10}{26} / \frac{11}{26} \dots \frac{25}{26}$

$\frac{7}{19}$

$\frac{a}{27} = \underbrace{\frac{1}{27} / \frac{2}{27} / \frac{3}{27} \dots \frac{9}{27}}_{\frac{4}{11}} / \frac{10}{27} / \frac{11}{27} \dots \frac{26}{27}$

$\frac{7}{19}$

28) $b=28 \Rightarrow \frac{a}{28} = \underbrace{\frac{1}{28} / \frac{2}{28} / \frac{3}{28} \dots \frac{9}{28}}_{\frac{4}{11}} / \frac{10}{28} \frac{4}{11} / \frac{11}{28} \dots \frac{27}{28}$

$\frac{10}{28} < \frac{4}{11} \qquad \frac{11}{28} > \frac{7}{19}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1. | МА000104 6525

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

29) $b = 29 \Rightarrow \underbrace{\frac{4}{29}, \frac{1}{29}, \dots, \frac{10}{29}}_{\frac{4}{11}} / \underbrace{\frac{11}{29}}_{\frac{7}{19}} / \frac{12}{29} \dots \frac{28}{29}$

30) $b = 30 \Rightarrow \frac{4}{30} > \underbrace{\frac{1}{30} / \frac{2}{30} \dots \frac{10}{30}}_{\frac{4}{11}} / \frac{11}{30} / \frac{12}{30} \dots \frac{29}{30}$

$\begin{cases} \frac{11}{30} < \frac{7}{19} \\ \frac{11}{30} > \frac{4}{11} \end{cases} \Rightarrow$ победа, $b = 30$

Ответ: $b = 30$

№1.

Мог ли Дима выиграть во 2 партии?
Если Дима выиграл во II партии, то он обязательно сыграет в III партии (по правилам). Рассмотрим исходы III партии:
1) Дима выиграл $\Rightarrow$ сыграет и в IV партии
Рассмотрим исходы IV партии:
Дима выиграл в IV партии — так не может быть, т.к в таком случае он будет играть и в V партии $\Rightarrow$ он играет в II, III, IV, V партиях, а так не м.б, т.к по условию он сыграл всего III партии.
Дима проиграл в IV партии: в V партии он гарантированно играть не будет, но в V партии одна из белок проиграет и в VI партии Дима ее заменит $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Дима сыграет во II, III, IV, VI партиях, а такие бывает. Соответственно, что партий было ≥ 6 просто по условию кол-ва Петиных игр.
2) Дима проиграл $\Rightarrow$ не сыграет в IV партии, но сыграет в V, т.к в IV кто-то проиграет и на смену ему придет Дима. Итак, Дима играл в II, III, V партиях $\Rightarrow$ больше ему играть нельзя. Но если 7 игра $\exists$, то Дима должен принять в ней участие, т.к в 6-ой кто-то проиграет и Дима придёт ему на смену. Итак, если ~~игр~~ партий ≥ 7, то Дима сыграет и в 7-ой $\Rightarrow$ в сумме 4 партии и противоречие с условием.
Докажем, что игр ≥ 7:
Пусть игр 6 $\Rightarrow$ Петя во всех выигрывал:
П X $\rightarrow$ П Y $\rightarrow$ П X $\rightarrow$ П Y $\rightarrow$ П X $\rightarrow$ П Y
партии были такого вида, где X, Y – Захар или Дима

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA0001046525

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

А так происходит потому что Захар и Дима, очевидно, чередуются, т.к. Петя всё выигрывает. Заметим, что в таком случае Захар и Дима играли по 3 партии ⇒ противоречие с условием ⇒ партий ≥ 7.

Осталось лишь сказать что если Дима ~~выиграл~~ играл ещё и в 1-ой игре, то при его победе во II партии противоречие с 3 партиями из условия произойдет ещё быстрее:

I → II → III → V/IV

↑

он как минимум должен играть в 5-ой т.к. в III он либо выиграл ⇒ прошел в IV ⇒ противоречие, либо проиграл ⇒ ⇒ в IV партии без него, а в V он заменит проигравшего.

Итого: Дима не мог выиграть во II партии ⇒ проиграл ⇒ Ответ: Дима.

10кл

нет в таблице шифра

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 8 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	18	–	1	–	59

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1

Петя играл 6 раз.

Если в партии с ним играл сначала Захар, то потом с ним играл Дима и так далее по чередованию.

Т.к. Петя играл больше всех, значит он выигрывал больше всех раз.

Петя может выиграть максимум 4 раза подряд,

~~т.к.~~ Если сначала Петя играл с Захаром, то после выигрыша будет играть с Димой.

Обозначим Петю „П"
Захара „З"
Диму „Д"

Примеры игр:

П и З, П и Д, Д и З.

Рассмотрим выигрыши Пети:

Допустим, он начал играть с Димой:

1) П и Д
2) П и З
3) П и Д
4) П и З
5) П и Д
6) П и З

1)–4) он выиграл 5 раз подряд

6) ← здесь Петя проиграл.

Получается, что Захар сыграл всего лишь 3 раза, а по условию ему надо 5 раз, значит он должен сыграть еще два раза.

Но т.к. Петя уже проиграл, то Захару надо играть с Димой, а Дима уже сыграл 3 раза и больше не может

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 8 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Получили противоречие, но проверим еще 1 вариант, где Петя в первый раз сыграл с ~~Димой~~. Захаром

1) П и З
2) П и Д
3) П и З
4) П и Д
5) П и З

} 5 раз выиграл

6) П и Д — тут он проиграл, и получается, что дальше Дима должен сыграть с Захаром, но Дима уже сыграл 3 раза и больше не может

Значит в обоих случаях Петя, если не может выиграть хотя бы 5 раз подряд, то больше тем более, иначе после 6 выигрыша ему надо будет играть 7-й раз, либо заканчивать. Но П сыграл 6 раз, а если он закончит, то другие не успеют сыграть положенное им кол-во раз.

Рассмотрим случай, где Петя выигрывает 4 раза подряд:

1) П и З — начали с Захара, чтобы Дима не сыграл 3 игры раньше, чем надо
2) П и Д
3) П и З
4) П и Д

} выигрыши Пети.

5) П и З — здесь он (Петя) проигрывает
6) З и Д — ~~З~~ Дима уже сыграл 3 раза и больше не может, значит здесь выигрывает Захар.
7) З и П — Далее играют Захар и Петя, можно заметить, что Захар сыграл 5 раз, Дима 3 раза а Петя 6 раз, что и требовалось по условию.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA000198 1825

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Таким образом, условие соблюдено, значит уверены, что во второй партии проиграл Дима, ведь ~~если бы~~ было объяснение кто ~~стоит~~ проиграл не первой партии

Ответ: Дима

Задача 2|

$\frac{4}{11}$ и $\frac{7}{19}$, ~~переведем~~ приведем эти дроби к общему знаменателю и сравним их.

$\frac{76}{209}$ и $\frac{77}{209}$.

По условию есть такая дробь $\frac{a}{b}$, которая $\frac{76}{209} < \frac{a}{b} < \frac{77}{209}$.

Необходимо найти наименьшее значение b.

Приведем дроби к общему знаменателю.

$\frac{76}{209} < \frac{a}{b} < \frac{77}{209}$

$\frac{76b}{209b} < \frac{209a}{209b} < \frac{77b}{209b} \Rightarrow 76b < 209a < 77b$.

a, b - целые числа.

$b \neq 1$, т.к. 1 не входит в промежуток дроби, это целое число.

$b \neq 2$, т.к. $\frac{1}{2} > \frac{7}{19} > \frac{4}{11}$.

Рассмотрим $a = 1$, но тогда мы не сможем найти b, ведь $76 \cdot 3 = 228$, $77 \cdot 3 = 231$, а 209 не входит в этот промежуток, также $76 \cdot 2$ и $77 \cdot 3$ меньше 209

$\Rightarrow$ нет смысла рассматривать данные числа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 8 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

рассмотрим разные значения a:

$a=2 \Rightarrow 209\cdot 2=418$
$a=3 \Rightarrow 209\cdot 3=627$
$a=4 \Rightarrow 209\cdot 4=836$
$a=5 \Rightarrow 209\cdot 5=1045$
$a=6 \Rightarrow 209\cdot 6=1254$
$a=7 \Rightarrow 209\cdot 7=1463$
$a=8 \Rightarrow 209\cdot 8=1672$
$a=9 \Rightarrow 209\cdot 9=1881$
$a=10 \Rightarrow 209\cdot 10=2090$
$a=11 \Rightarrow 209\cdot 11=2299$

Для того, чтобы перебирать как можно меньше вариантов, будем рассматривать $76\cdot b$ и $77\cdot b$ максимально близкие по значению с числами $209\cdot a$.

$a=2$, $76\cdot b \approx 418$
$b=6$, но $76\cdot 6=456$, что больше 418,
а при $b=5$, $77\cdot 5=385$, что меньше 418

$a=3$, $76\cdot b \approx 627$.
$b=9 \Rightarrow 76\cdot 9 > 627$
$b=8 \Rightarrow 77\cdot 8 < 627$.

$a=4$, $76\cdot b \approx 836$
$b=11 \Rightarrow 76\cdot 11=836$, но $76b \neq 209a$.

$a=5$, $76\cdot b \approx 1045$
$b=14$, но $76\cdot 14 < 1045$.
$77\cdot 14 < 1045$, а должно быть больше

$a=6$, $76\cdot b \approx 1254$,
$b=17 \Rightarrow 76\cdot 17 > 1254$.
$b=16 \Rightarrow 77\cdot 16 < 1254$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 8 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a=7$, $76\cdot b \approx 1463$.

$b=19$, но $77\cdot 19=1462$,

а $1462 < 1463$

$a=8$, $76\cdot b\approx 1672$

$76\cdot 22=1672$, но $76\cdot b \neq 209a$

$a=9$, $76\cdot b\approx 1881$

$b=25$, но $76\cdot 25=1890$

$1890>1881$.

$a=10$, $76b\approx 2090$

$b=27$, но $77\cdot 26=2052$, а $77\cdot 27=2079$,

но $77b>209a$, а здесь противоречие

$a=11 \Rightarrow 76b\approx 2299$

$76\cdot 30=2280$

$77\cdot 30=2310$

$2280<2299<2310 \Rightarrow a=11,\ b=30$

$\frac{4}{11}<\frac{11}{30}<\frac{7}{19}$

30 - наименьшее, ведь все до него не подходят исходя из проверки по a.

А после него? Вдруг a и b сократятся?

Ответ: 30

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 8 | 1 | 8 | 2 | 5

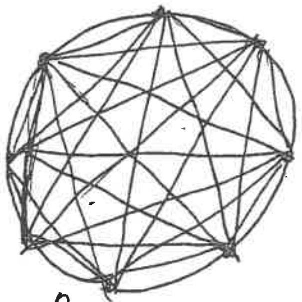
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3



Всего = 28 отрезков.

Нужно, чтобы любые 2 отрезка выходили из одной точки, также был 1 отрезок соединяющий эти 2 отрезка. Последний (четвертый) отрезок может находится в любом месте.

Выбрать первый отрезок можно 28 способами. Второй нужно выбрать, выходящий из одной вершины с первым отрезком. Из одной вершины выходит 7 отрезков всего. Один отрезок использован ⇒ осталось 6. У каждого отрезка 2 вершины ⇒ $6 \cdot 2 = 12$ способов найти второй отрезок.

У двух отрезков есть только 1 отрезок их соединяющий (чтобы был треуг-ник)

Для 4 отрезка есть $28-3=25$ вариантов, т.к. его можно выбрать любыми способами.

Выбрать 4 отрезка можно:

$C_{28}^4 = \frac{28!}{(28-4)!\cdot 4!} = \frac{28!}{24!\cdot 4!} = 819 \cdot 25$ способами

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 8 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Выбрать 4 отрезка для треугольника:

$23 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 25 = 336 \cdot 25$ способами

3!

Вероятность:

$$\frac{336 \cdot 25}{819 \cdot 25} = \frac{336}{819} = \frac{112}{273}$$

(кол-во вариантов

Ответ: $\frac{112}{273}$ — в $3! = 6$ раз меньше

Задача 5

$$x^4 - xy + y^3 = 0$$

При $x = 0$ и $y = 0$

$$0^4 - 0 \cdot 0 + 0^3 = 0$$

$$0 = 0.$$

Ответ: $y = 0$
$x = 0.$

Вариант № 4

М	А	0	0	0	1	4	3	1	8	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	10	19	-	10	-	59

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Петя мог играть только те с Машей только~~

№1

П - Петя, М - Маша

П мог играть с М только те партии, где он сыграл вничью или проиграл, т.к. М ни разу не проиграла. Значит они могли вместе сыграть только 3 партии: 1 вничью (т.к. Петя не сыграл вничью больше партий) и 2, где победила М (т.к. больше побед у неё не было). Получается, что П играл с др. ребятами 2 победных игры и 1 проигрышную, т.е. 3 игры. А М играла 2 игры вничью с др. ребятами. Т.е. вместе они играли с др. ребятами 5 партий (если рассм. наименьший из возможных случаев).

Ответ: ~~5 партий~~ 5 игр - наименьш. число игр с другими ребятами.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Рассмотрим все варианты соотношение цветов в кубике:

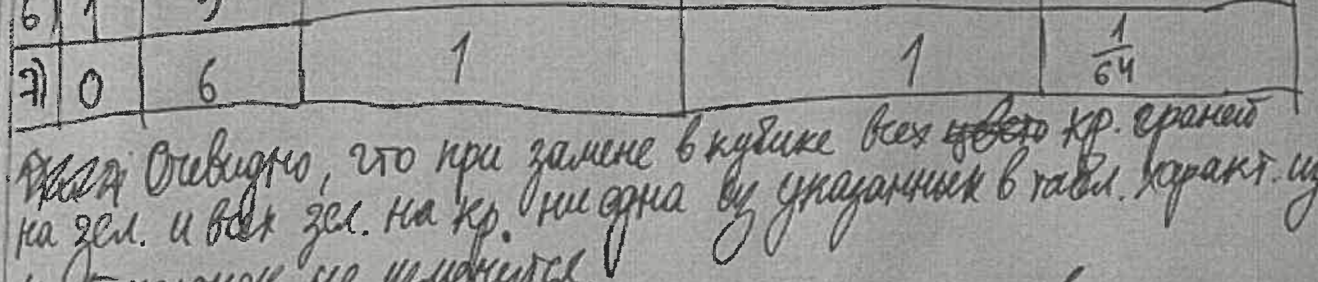
№	К	З	Кол-во способов покрасить развертку куба	Количество разл. кубов с таким соотн. цветов	Вероятн. получ. такого куба
1)	6	0	1	1	$\frac{1}{64}$
2)	5	1	6	1	$\frac{6}{64}$
3)	4	2	12 + 3 = 15	2	$\frac{12}{64}$ и $\frac{3}{64}$
4)	3	3	~~8+8=16~~ 8+12=20	2	$\frac{8}{64}$ и $\frac{12}{64}$
5)	2	4	12 + 3 = 15	2	$\frac{12}{64}$ и $\frac{3}{64}$
6)	1	5	6	1	$\frac{6}{64}$
7)	0	6	1	1	$\frac{1}{64}$

Очевидно, что при замене в кубике всех ~~цвето~~ кр. граней на зел. и всех зел. на кр. ни одна из указанных в табл. характ. из 4 и 5 колонок не изменится.

1), 7): все грани одного цвета, 1 способ покрасить разв.

2), 6): 1 грань отл. по цвету от ост. 5; 6 сп. выбрать эту грань, зн. 6 сп. покрасить разв.

3), 5): 2 грани отл по цвету от ост. 4: есть 2 варианта кубов: грани смежны или противоположн. Если 2 отлич. грани противоп, то есть 3 сп. выбрать эти грани, зн. 3 сп. покрасить развертку. Если 2 отлич. грани смежны, то есть 12 сп. покрасить развертку.



(в общ. сумме 15)

продолж. далее →

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3. продолж.

1	2	3	4	5	6	Σ

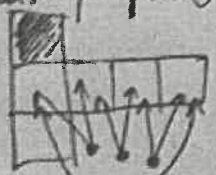
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4) 3 з. грани, 3 к. грани:

есть 2 варианта когда: грани ~~образуют для~~ одного цвета образуют уголок или не образуют его.

а) Если образуют, то есть 8 вар. раскр. развертки:

Если покр. верхн

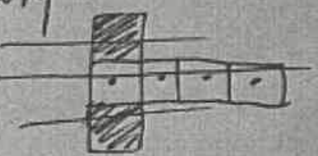


4 варианта

аналогично с нижней гранью (4 варианта) (в сумме 8 вариантов)

~~и варианты, когда и ниж~~

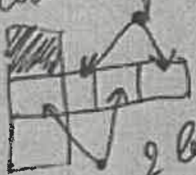
~~и 4 варианта, когда покраш. и ниж. и верхн.~~



~~(в сумме 12 вар.)~~

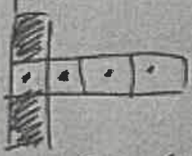
б) Если не образуют уголок:

Если покр. верхн



2 вар.

аналогичн. с нижн. гр. (2 вар.) Когда покрашены и нижн и верхн:

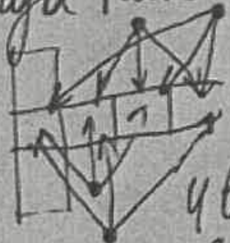


4 вар.

~~(в сумме 8 вар.)~~

~~Получилось также так 8 вариантов. Зн. в общ. сумме 16 в.~~

Когда нижн и верхн. обе не покраш:



(в сумме 12)

4 вар. Зн. в общей сумме $8+12=20$

Всего есть $2^6=64$ варианта раскрасить развертку

(для проверки $2\cdot(1+6+15)+20=64$)

продолж. далее

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 продолж.

Теперь, чтобы посчитать с какой вероятностью раскраски кубов совпадут сложим вероятности совпадения для каждого типа раскраски куба:

$$\left(\frac{1}{64}\right)^2\cdot 2+\left(\frac{6}{64}\right)^2\cdot 2+\left(\frac{12}{64}\right)^2\cdot 2+\left(\frac{3}{64}\right)^2\cdot 2+\left(\frac{8}{64}\right)^2+\left(\frac{12}{64}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{4096}+\frac{36\cdot 2}{4096}+\frac{3\cdot 144}{4096}+\frac{9\cdot 2}{4096}+\frac{64}{4096}=$$

$$\begin{array}{r} \times\,64 \\ 64 \\ \hline 256 \\ +\,384 \\ \hline 4096 \end{array}$$

18 ?

$$=\frac{2+72+432+81+64}{4096}=\frac{651}{4096}$$ (т.к 4096 – это степень 2, то дробь сократить нельзя)

Ответ: с вероятностью $\frac{651}{4096}$ кубы совпадут.

588, т.к. 18, а не 81

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

$НОД(n,m) = d \Rightarrow n = k_1 \cdot d,\ m = k_2 \cdot d$, $НОД(k_1,d)=1$, $НОД(k_2,d)=1$

О.Б.: $НОД(k_1,k_2)=1$

$n+m^2+d^2=dnm$

$k_1d+k_2^2d^2+d^2=d^3k_1k_2$

$k_1+k_2^2d+d=d^2k_1k_2$

$d(k_2^2-k_1k_2d+1)=-k_1$

$НОД(k_1,d)=1$, $k_1\in N$, $d\in N$ $\Rightarrow k_1 \vdots d \Rightarrow k_1 \geq d \Rightarrow d=1$

Не доказано

$\Rightarrow n+m^2+1=nm$

$m^2-mn+n+1=0$

~~$D = n^2-4(n+1)$~~

~~если есть корни m_1 и m_2, то~~

~~$m_1+m_2=n$~~

~~$m_1 \cdot m_2=(n+1)$~~

$k_2^2-k_1k_2+k_1+1=0$

$m^2+1=n(m-1)$

$\frac{m^2+1}{m-1}=n$, $n\in N$

$m^2+1 \vdots m-1$

сумма ост. от деления m^2 на $m-1$ и 1 на $m-1$ равна 0.

$m^2 \underset{m-1}{\equiv} 1^2$, т.к. $m \underset{m-1}{\equiv} 1$, $1 \underset{m-1}{\equiv} 1 \Rightarrow 1+1 \underset{m-1}{\equiv} 0$ (если $m-1\neq 1$)

$m-1=2$

$m=3$

$n=\frac{3^2+1}{3-1}=5$

$(n=5;\ m=3)$

$5+9+1=1\cdot3\cdot5$, $15=15$

Если же $m-1=1$, то $m=2$, тогда $n=\frac{2^2+1}{1}=5$

$5+4+1=1\cdot5\cdot2$

$10=10$

Ответ: $n=5$ и $m=2$ или $n=5$ и $m=3$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. $\frac{a}{b} \xrightarrow{+d} ab \xrightarrow{+d} a-b \xrightarrow{+d} a+b$

$d=0$

$a-b=a+b$

$2b=0$

$b=0$, против. с усл. $\begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$

$d>0$

$\frac{a}{b} < ab < a-b < a+b$

$a-b+d=a+b$

$d=2b$

$\frac{2a}{d}+d=\frac{ad}{2}$

$\frac{4a}{d}+2d=ad \quad |\cdot d,\ d\neq 0$ из

$4a+2d^2=ad^2$

$\cancel{d^2(a-2)=4a}$

$a=\frac{-2d^2}{4-d^2}$

$\frac{ad}{2}+d=a-\frac{d}{2}$

$ad+2d=2a-d$

$a(d-1)=-3d$

$a=\frac{-3d}{d-1}$ 2

Дальше неверно

$\begin{cases} a=\frac{-2d^2}{4-d^2} \\ a=\frac{-3d}{d-1} \end{cases}$

$\frac{-2d^2}{4-d^2}=\frac{-3d}{d-1}$

$2d^2(d-1)=3d(4-d^2)$

$2d(d-1)=3(4-d^2)$

$2d^2-2d=12-3d^2$

$5d^2-2d-12=0$

$D=4+240=244$

$d_1=\frac{2+\sqrt{244}}{10}=\frac{2+2\sqrt{61}}{10}$

$d_2=\frac{2-\sqrt{244}}{10}<0$, не удовл. усл. $d>0$

$b=2\cdot\frac{2+2\sqrt{61}}{10}=\frac{2+2\sqrt{61}}{5}>1$

$a=\frac{-3(1+\sqrt{61})}{5\left(\frac{1+\sqrt{61}}{5}-1\right)}$

$a<0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 3 | 1 | 8 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\frac{a}{b} < ab$

$\left.\begin{matrix} a<0 \\ b>1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| < |ab|$

$\Downarrow$

$\frac{a}{b} > ab$, получим противореч., зн. d не может быть >0

$d \le 0$

$\frac{a}{b} \xrightarrow{+d} ab \xrightarrow{+d} a-b \xrightarrow{d} a+b$. $d=-d'$, $d<0 \Rightarrow d'>0$

$a-b-d'=a+b$

$d'=-2b \Rightarrow b<0$

$b = \frac{2}{d} = \frac{d'}{-2} = \frac{d}{2}$

$\begin{cases} \frac{2a}{d}+d=\frac{ad}{2} \\ \frac{ad}{2}+d=a+\frac{d}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} a=\frac{-2d^2}{4-d^2} \\ a=\frac{-3d}{d-1} \end{cases}$ (аналогично пункту $d>0$)

$5d^2-2d-12=0$

$D=241$

$d_1=\frac{2+2\sqrt{61}}{10}>0$, не удовл. усл. $d<0$

$d_2=\frac{2-2\sqrt{61}}{10}=\frac{1-\sqrt{61}}{5}$

$b=\frac{2-2\sqrt{61}}{5}$

$\frac{a}{b}>ab$

$\begin{cases} a=\frac{-2d^2}{4-d^2} \\ a=\frac{-3d}{d-1} \end{cases}$ (аналогично пункту $d>0$)

$d_1=\frac{1+\sqrt{61}}{10}>0$, не удовл. усл. $d<0$

$d_2=\frac{1-\sqrt{61}}{10}<0$.

$b=\frac{2-2\sqrt{61}}{5}<-1$

$\left.\begin{matrix} \frac{a}{b}>ab \\ a<0 \\ b<-1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{a}{b}>0,\ ab>0$

$\left|\frac{a}{b}\right|<|ab|$

$\Downarrow$

противореч.

А значит, что пар a, b, удовл. усл. задачи не существует.

Ответ: таких пар нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 | 2 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	0	20	20	2	-	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\frac{6+5+3}{2} = 7$ партий всего прошло

После проигрыша ты один раунд пропускаешь, и на следующий выходишь, т.е. минимум выходить можно через 1 раунд (можно ~~[illegible]~~ играть чаще, не проигрывая).

Тогда единственный вариант как Дима мог сыграть только 3 раза, это если он выходил 2м, 4м и 6м и всегда проигрывал

Ответ: Дима

№3

Число сочетаний: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Поэтому вариантов выбрать 4 отрезка: $\frac{28!}{4!\cdot 24!} = 9\cdot 25\cdot 7\cdot 13$

Число вариантов выбрать 3 точки: $\frac{8!}{3!\cdot 5!} = 7\cdot 8 = 56$, это является кол-вом вариантов выбрать треугольник. Последний же отрезок выбирается из 25, поэтому всего вариантов, когда существует красный треугольник: $56\cdot 25$

Тогда вероятность:

$$\frac{56\cdot 25}{9\cdot 25\cdot 7\cdot 13} = \frac{8}{9\cdot 13} = \frac{8}{117}$$

Ответ: $\frac{8}{117}$

№2

$\frac{4}{11} = \frac{76}{209}$ $\frac{7}{19} = \frac{77}{209}$ $\frac{76}{209} < \frac{a}{b} < \frac{77}{209}$ В условии нету ограничений на a и b (в том числе их принадлежание множествам), поэтому минимально $b = -\infty$, тогда $a = -\infty \cdot \frac{76,5}{209}$

Ответ: $-\infty$

Дробь = $\frac{\text{натур}}{\text{натур}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 1 6 0 0 2 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

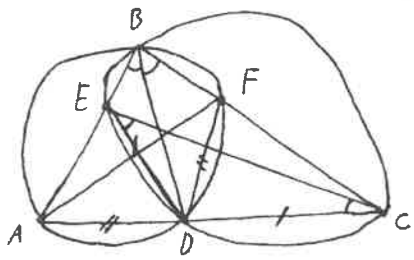
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$\angle ABD = \angle DBC$



В w_1:

$DC = ED$ ($\angle ABD = \angle DBC$, хорды опирающиеся на равные дуги)

В w_2:

$AD = DF$ аналогично

В w_1:

$\triangle EDC$ – р/б. $\angle DCE = \angle DEC = \underline{\angle DBC}$ (опираются на одну дугу)

$\angle EDC = 180 - 2 \cdot \angle DBC$

В w_2:

$\triangle ADF$ – р/б $\angle FAD = \angle AFD = \underline{\angle DBC}$ аналогично

$\angle ADF = 180^\circ - 2 \cdot \angle DBC$

Тогда $\angle ADF = \angle EDC$, тогда $\underline{\angle ADE} = \angle ADF - \angle EDF = \angle EDC - \angle EDF = \underline{\angle CDF}$

Тогда $\triangle EDA = \triangle CDF$ ($ED = DC$; $AD = FD$; $\angle EDA = \angle CDF$) $\Rightarrow AE = CF$, что и т.д.

№5

$x^4 - xy + y^3 = 0$

$x^4 + y^3 = xy$

решение (0;0) подходит

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \to y^3=0 \;\; y=0 \\ y=0 \to x^4=0 \;\; x=0 \\ \begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} x \geq y \;\; xy \leq x^2 < x^4 \\ y > x \;\; xy < y^2 < y^3 \end{array}\right. \;\; \varnothing \\ \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \to x^4+y^3>0>xy \;\; \varnothing \\ \begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y<0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 2 3 5 5 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	2	~~15~~	1	–	58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

Всего игр было сыграно:

$\frac{5+3+6}{2} = 7$ (игр) - всего

Каждый сыграл минимум 3 раза, ~~т~~ потому что если чел. проигрывает, то он след. раз играет через одну, ~~а если выигры-~~ ~~ет то он может сыграть и больше кол-во~~, а если выиграет, ~~то за место через~~ ~~одну сыграет, ет~~ то он заместо „через одну игру сыграет", „сыграет следующую", ~~а если еще раз выиграет то у него будет~~ ~~минимум 4 игры,~~ и у него уже будет плюс одна игра от минимума.

Возможно минимум 3, потому что если чел. начинает с ~~то~~ 1 игры, то он минимум сыграет 4 (если все проиграет => будет играть через ~~одну~~) одну игру, ~~а если~~ ~~начинает со второй, то min 3 сыгра~~ 1, 3, 5, 7), а если со второй игры начинает то min 3, т.к если он все проиграет, то он будет играть через 1 (2, 4, 6)

см. л. 2 →

1	2	3	4	5	6	Σ

значит тик можно сыграть 3.
Коля ~~вы~~ сыграл 3 => коле все проиграли и он играл только на четных играх.
Из этого следует, что он проиграл и в 4 игру.

1) Т пр. А = побед Т
2) Т пр. К = побед Т
3) Т пр. А = побед А
4) А пр К = побед А
5) Т пр А = побед Т
6) Т пр К = побед Т
7) Т пр. А = побед Т

Ответ: Коля

№2

$\left[\frac{9}{10}; \frac{4}{7}\right]$ в этом промежутке $\frac{a}{b}$ есть 2 варианта если в целое и не цел.
Рассмотрим, вариант когда a_n в не ~~обязательно~~ ~~цело~~: обяз. натур.

см л. 3 →

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\frac{9}{16}^{\backslash 7} = \frac{63}{112}$

$\frac{4}{7} = \frac{64}{112}$

значит возьмем $b = 112$, и $a = 63,5$ и мы можем бесконечно ~~делить~~ домножать дробь на знам и числ такие числа, что $b \to 0$, значит $b \to 0$

Теперь рассмотрим, когда a, b - ~~целые~~ натур обязательно:

$\frac{1}{2} < \frac{9}{16} < \frac{4}{7} < 1$

значит должны быть в интер. $(\frac{1}{2}; 1)$

~~значит числ должно быть в интервале~~

~~от~~ Я будем подбирать такие дроби, чтобы знаменатель постепенно увел.:

при $b = 1$, ~~п~~ то чтобы подходило в интервал ~~0,5~~ $0,5 < a < 1$, а в этом интервале нет натур чисел

при $b = 2$, $1 < a$ и должно быть, $1 < a < 2$, тут нет натур.

при $b = 3$, ~~то~~ $a = (1,5; 3)$, есть число 2 сравним

$\frac{2}{3} < \frac{4}{7}$ $\frac{14}{21} > \frac{12}{21} \Rightarrow \frac{2}{3} > \frac{4}{7}$, не подходит

см. л. 4 →

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 2 3 5 5 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

при в $=4$, $a=(2;4]$

есть число 3, сравним $\frac{3}{4}$ с $\frac{4}{7}$

$\frac{3}{4} > \frac{4}{7}$

$\frac{21}{28} > \frac{16}{28}$, не подходит

при в $=5$, $a=(2,5;5]$, есть числа 3 и 4, сравним $\frac{3}{5}$ с $\frac{4}{7}$

$\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$

$\frac{21}{30} > \frac{20}{30}$, не подходит и при $a=4$, т.к. $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$

при в $=6$, $a=(3;6]$, есть числа 4 и 5

ср. $\frac{4}{6}$ с $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{6} > \frac{4}{7}$, не подх. и $\frac{5}{6}$, т.к. $\frac{5}{6} > \frac{4}{6}$

при в $=7$, $a=(3,5;7]$, есть числа 4, 5, 6

ср. $\frac{4}{7}$ с $\frac{4}{7}$, они равны, значит не подх., т.к. $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7} > \frac{4}{7}$

при в $=8$, $a=(4;8]$, есть ч. 5, 6, 7, ср. $\frac{5}{8}$ с $\frac{4}{7}$

$\frac{5}{8}$ и $\frac{4}{7}$ $\frac{35}{56} > \frac{32}{56}$, не подх. и $\frac{6}{8}$ и $\frac{7}{8}$, т.к. они больше, чем $\frac{5}{8}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): МА000123552 5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в рамке

при $b = 9$, $a = (4,5;9)$, есть числа: 5, 6, 7, 8; ср. $\frac{5}{9}$ с $\frac{4}{7}$

$\frac{5}{9} \vee \frac{4}{7}$ $\frac{35}{63} < \frac{36}{63} \Rightarrow \frac{5}{9} < \frac{4}{7}$, и

ср. $\frac{5}{9}$ с $\frac{9}{16}$

$\frac{5}{9} \vee \frac{9}{16}$ $\frac{80}{112} < \frac{81}{112}$

при $b = 10$, $a = (5;10)$, $a = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} > \frac{4}{7}$

$b = 11$, $a = (5,5;11)$ $\frac{6}{11} < \frac{4}{7}$; $\frac{6}{11} < \frac{9}{16}$; $\frac{7}{11} > \frac{4}{7}$

$b = 12$, $a = (6;12)$ $\frac{7}{12} > \frac{4}{7}$

$b = 13$, $a = (6,5;13)$ $\frac{7}{13} < \frac{9}{16}$; $\frac{8}{13} > \frac{4}{7}$

$b = 14$, $a = (7;14)$ $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$, не подх

$b = 15$, $a = (7,5;15)$ $\frac{8}{15} < \frac{9}{16}$ $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} > \frac{4}{7}$, не подх

$b = 16$, $a = (8;16)$ $\frac{9}{16} = \frac{9}{16}$, $\frac{10}{16} = \frac{5}{8} > \frac{4}{7}$ не подх

$b = 17$, $a = (8,5;17)$ $\frac{9}{17} < \frac{9}{16}$ $\frac{10}{17} > \frac{4}{7}$ не подх

$b = 18$, $a = (9;18)$ $\frac{10}{18} = \frac{5}{9} < \frac{9}{16}$; $\frac{11}{18} > \frac{4}{7}$

$b = 19$, $a = (9,5;19)$ $\frac{10}{19} < \frac{9}{16}$; $\frac{11}{19} > \frac{4}{7}$

$b = 20$, $a = (10;20)$ $\frac{11}{20} < \frac{9}{16}$, $\frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$b = 21$, $a = (10,5;21)$, $\frac{11}{21} < \frac{9}{16}$; $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

$b = 22$, $a\ (11;22)$, $\frac{12}{22} = \frac{6}{11}$

$b = 23$, $a\ (11,5;23)$ $\frac{12}{23} < \frac{4}{7}$; $\frac{12}{23} < \frac{9}{16}$; $\frac{13}{23} < \frac{4}{7}$; $\frac{13}{23} > \frac{9}{16}$

ответ: 23

чист →

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

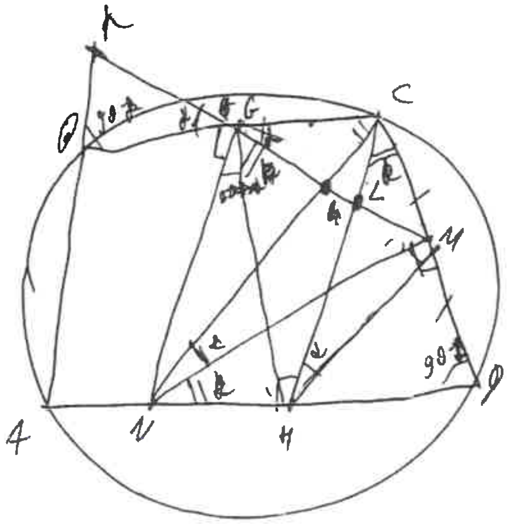
Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 2 3 5 5 2 5
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано в рамках листа

№4



Дано:
Т. C M H N G - леж. на 1 окр.
$CD \perp MN$
M - сер DC

KLHA - впис.

NM - сер. пер $\triangle NCD$ => CND - р/б =>
=> $\angle NCD = \angle NDC$; т.к. M - бисс =>
=> $\angle CNM = \angle MND$
$\angle CNM = \angle CGM$ (впис.) | => $\angle MND = \angle KGM$
$\angle CGM = \angle KGB$ (верт.)

Из $\triangle NMD$
$\angle MDN = 90^\circ - \angle MND = 90^\circ - \angle KGM$

?

$\angle BKG = 180 - \angle KBG - \angle KGB = 180 - 90 + \angle KGM - \angle KGM = 90^\circ$

$\angle CMN = 90^\circ$ => CN - диам окр. CMHNG => $\angle CHN = 90^\circ$ (опир. на диам)

~~$\angle BKG = \angle CH$~~

$\angle BKG + \angle CHN = 90 + 90 = 180^\circ$ => AKLH - впис. четыр. (сумма противополож. углов равна 180)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	1	2	3	5	5	2	5

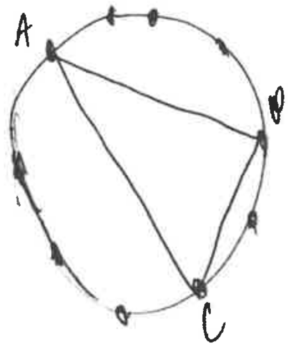
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано на одной стороне листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3



Всего отрезков:

$\frac{9\cdot 10}{2}=45$

Найдем шанс того, что из верш. A в верш. B и C покрашены ребра; назовем ее $P(A)=\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{45}=\frac{8}{405}$?

найдем вероятность того, что ребро между B и C покрашено, включая то, что уже из A ребра в B и C покрашены. $P(B)=\frac{1}{45}\cdot\frac{2}{43}=\frac{2}{675}$

~~$P(A)+P(B)$~~ эти события происходят одновременно:

~~$P(A)+P(B)=P$~~

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=\frac{8}{405}+\frac{2}{675}-\frac{8\cdot 2}{405\cdot 675}=$

$=\frac{5400+910-16}{253125}=\frac{6084}{233125}=\frac{2028}{84375}=\frac{676}{28125}$

№5

$x^4-xy-y^3=0$ $(0;0)$ - корни

~~Думаю еще есть какие-то корни~~, но я их не ~~знаю.~~

Больше корней нет

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	1	0	8	6	1	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

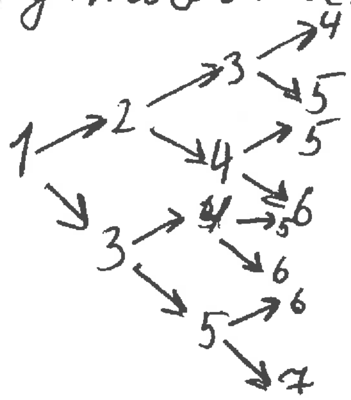
1	2	3	4	5	6	Σ
16	15	5	20	1	–	57

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Всего было: $\frac{6+5+3}{2}=7$ игр.

Пусть Дима играл в первой игре, тогда:



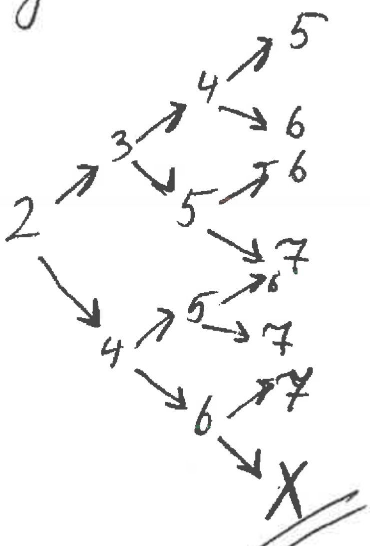
↗ – выигрыш

↘ проигрыш

Как мы видим в данном случае Дима не может сыграть 3 игры.

Если Дима играл в третьей игре, то это значит, что он либо выиграл во второй либо проиграл в первой т. е. играл до этого.

Пусть Дима ~~[illegible]~~ играл во второй игре:



в данном случае Дима мог сыграть всего 3 игры, только если проиграл во 2й, 4й и 6й, а значит Дима проиграл во 2й игре. Ответ: Дима.

Если человек выиграл, то он играет в следующей игре, а если проиграл, то его заменяют на следующую, а через 1 он возвращается за место проигравшего.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | 6 | 1 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{\frac{11}{4}} = \frac{a}{\frac{11}{4}a}$$

$$\frac{7}{19} = \frac{1}{\frac{19}{7}} = \frac{a}{\frac{19}{7}a}$$

$$\frac{a}{\frac{11}{4}a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{\frac{19}{7}a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{7}a < b < \frac{11}{4}a$$

a	$\frac{11}{4}a$	$\frac{19}{7}a$	
1	2,75	≃2,714	×
2	5,5	≃5,429	×
10	27,5	≃27,143	×
20	55	≃54,286	×
21	57,75	57	×
22	60,5	≃59,715	

Не доказана минимальность. Пропущены числа 3÷9, 11÷19, и >22. При в > 60 а м.б. такого, что $\frac{a}{в}$ сократимая, как в Вашем ответе.

√ $b=60 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{22}{60}$

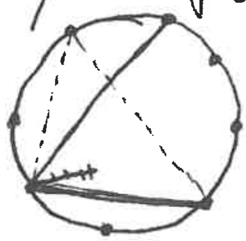
Ответ: минимальное b будет 60?

А сократить?

№3

Всего отрезков $\frac{(8-1)\cdot 8}{2} = 28$

1) У первых двух отрезков есть 1 общий конец:



Чтобы получить Δ мы можем либо выбрать точку (не на этих отрезках) и провести из неё отрезки в концы одного из них (- - -) таких способов всего − 28·27·5·2 либо соединить концы отрезков и выбрать любой другой (28·27·25)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) У первых двух отрезков нет общих концов.:

Чтобы получить Δ нам необходимо выбрать точку и провести из нее отрезки к концам одного из первых $(28 \cdot 27 \cdot 4 \cdot 2)$

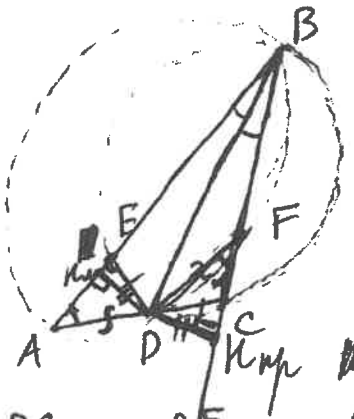
Всего вариантов выбора 4х отрезков $-$ $\underline{- 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}$ $4!$

Вариантов с красным Δ $- 28 \cdot 27 (26+10+8) =$
$= 28 \cdot 27 \cdot 44$

Вероятность $= \frac{\cancel{28 \cdot 27 \cdot 44}^{22}}{\cancel{28 \cdot 27 \cdot 26}_{13} \cdot 25} = \frac{22}{325}$

Ответ: $\frac{22}{325}$

№ 4



1) т.к. $\angle ABD = \angle DBC$, то хорды ED и DC равны, и хорды AD и DF равны.

2) Опустим из точки D перпендикуляры на стороны Δ. Они равны по свойству биссектрисы.

$\triangle ADK_л = \triangle DFK_{пр}$ по признаку равенства пр. тр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CFD = \angle DAE$.

3) $\frac{DC}{\sin \angle CFD} = \frac{DF}{\sin \angle DCF}$
$\qquad \|$
$\frac{ED}{\sin \angle DAE} = \frac{AD}{\sin \angle AED} \Rightarrow \sin \angle DCF = \sin \angle AED \cdot \frac{DF}{AD} = \sin \angle AEF \Rightarrow$

(из суммы углов Δ)

$\Rightarrow \angle DCF = \angle AEC \Rightarrow \angle EDA = \angle FDC$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000108 6125
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\begin{cases} ED=DC \\ AD=DF \\ \angle ADE=\angle FDC \end{cases} \Rightarrow \triangle AED=\triangle FDC$$

$$\Downarrow$$

$$AE=FC$$

ч.т.д

№5

$x=0$
$y=0$

[redacted]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 2 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	19	1	1	-	56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

М	П.	
3	1	ничья
2	2	выигрыш
0	3	проигрыш
5	6	всего игр.

Между собой ребята могли сыграть только 1 игру в ничью и 2 игры с победой Маши (очевидно из таблицы) Тогда Маше нужно сыграть еще 2 игры в ничью с другими ребятами. А Пете надо сыграть 1 игру и проиграть её, сыграть еще 2 игры и выиграть (с другими ребятами). Итог: $2+2+1=5$ игре другими ребятами.

Ответ: 5

* Маша не могла проиграть Пете, значит 2 победы Пети были в игре не с Машей. ~~Маша не могла:~~ Петя не мог проиграть Маше 3 раза, т.к. у неё всего 2 победы (1 игру он проиграл другому человеку). ~~П~~ Маша не могла играть с Петей 3 раза в ничью, т.к. у Пети всего 1 ничья.

№2

a−b Неверное условие

I бельчонок $= a/b$, II $= ab$; III $= b-a$; IV $= a+b$.

Пусть d - разность арифм. прогрессии, тогда:

a/b; $a/b+d$; $a/b+2d$; $a/b+3d$ − арифм. прогр. по усл.

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+d=ab \quad (1) \\ \frac{a}{b}+2d=b-a \quad (2) \\ \frac{a}{b}+3d=a+b \quad (3) \end{cases}$$ − по усл.

Продолжение см. 2.

[redacted]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 1 2 8 2 4 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке сверху

№2 (продолжение)

(3) - (2) - (1):

$a+b-b+a-ab=\frac{a}{b}+3d-\frac{a}{b}-2d-\frac{a}{b}-d$

$2a-ab=-\frac{a}{b}$; $2ab-ab^2+a=0$ $|:a$, т.к. $a\neq0$ по дан

$2b-b^2+1=0$

$(b-1)^2=2$; $\left[\begin{array}{l} b-1=\sqrt2 \\ b-1=-\sqrt2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1+\sqrt2 \\ b=1-\sqrt2 \end{array}\right.$

1) $b=1+\sqrt2$. Из (1) и (3):

$\begin{cases} 1+\sqrt2+a=\frac{a}{1+\sqrt2}+3d \\ a(1+\sqrt2)=\frac{a}{1+\sqrt2}+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sqrt2+a=\frac{a}{1+\sqrt2}+3d \\ \cancel{a+1-8}\ d=2a \end{cases}$

Тогда: $1+\sqrt2+a=\frac{a}{1+\sqrt2}+3\cdot2a$; $(1+\sqrt2)^2+a+a\sqrt2=a+6a\cdot$

$\cdot(1+\sqrt2)$; $1+2\sqrt2+2+a+a\sqrt2=6+6a+6\sqrt2a$

$\Leftrightarrow a=\frac{3\sqrt2+2}{14}$

$\begin{cases} a=\frac{3\sqrt2+2}{14}=\frac{1}{7}+\frac{3}{7\sqrt2} \\ d=2a \end{cases}$; $\begin{cases} a=\frac{1}{7}+\frac{3}{7\sqrt2} \\ b=1+\sqrt2 \\ d=\frac{2}{7}+\frac{3\sqrt2}{7} \end{cases}$

2) $b=1-\sqrt2$. Из (1) и (3):

$\begin{cases} 1-\sqrt2+a=\frac{a}{1-\sqrt2}+3d \\ a(1-\sqrt2)=\frac{a}{1-\sqrt2}+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cancel{+}-\sqrt2=\frac{a}{1-\sqrt2}+3d \\ a(1-\sqrt2)^2=\frac{a\cdot(1-\sqrt2)}{1-\sqrt2}+d(1-\sqrt2) \end{cases}$

$\begin{cases} 1-\sqrt2=\frac{a}{1-\sqrt2}+3d \\ d=2a \end{cases} \Rightarrow 1-\sqrt2=\frac{a}{1-\sqrt2}+6a$; $a=\frac{1}{7}-\frac{3}{7\sqrt2}$

продолжение 3.

[redacted]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	2	8	2	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение)

$$\begin{cases} a = \frac{1}{7} - \frac{3}{7\sqrt{2}} \\ b = 1-\sqrt{2} \\ d = 2a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{7} - \frac{3}{7\sqrt{2}} \\ b = 1-\sqrt{2} \\ d = \frac{2}{7} - \frac{3\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

Итог: 2 пары $(a;b)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \frac{1}{7} + \frac{3}{7\sqrt{2}} \\ b = 1+\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{1}{7} - \frac{3}{7\sqrt{2}} \\ b = 1-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{7\sqrt{2}}; 1+\sqrt{2}\right)$; $\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{7\sqrt{2}}; 1-\sqrt{2}\right)$

№3

Рассмотрим несколько случаев одинаковой раскраски

1) все грани б.о.о. зеленые: $P = C_6^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot C_6^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$

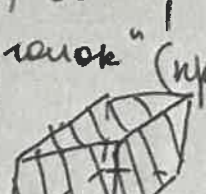
2) все грани кроме одной зелены: $P = C_6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot C_6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5$

– раскраска одинаковая при повороте.

3) все грани кроме 2 - зеленые: 1) Если красные грани напротив друг друга (таких случаев 3 из 15): $\frac{3}{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

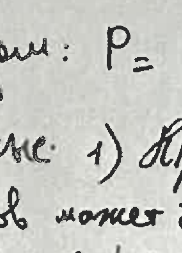
2) Если красные грани рядом: $P = \frac{12}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{12}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

4) все грани кроме 3-зеленые: 1) Три грани образуют „уголок" (пример) (таких уголков может быть 8 из 20):



$$P = \frac{8}{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{8}{20}$$

2) Грани образуют „линию": (12 из 20 случаев)



$$P = \frac{12}{20} \cdot \frac{1}{2}^3 \cdot \frac{1}{2}^3 \cdot \frac{1}{2}^3 \frac{1}{2}^3 \cdot \frac{12}{20}$$

см. продолжение 4

[redacted]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4   М А 0 0 0 1 2 8 2 4 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(продолжение №3)

С красными гранями все будет аналогично (*). Тогда суммируем вероятности и умножим на 2 (из-за (*)) - кроме случая 4)

$$P_{итог} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + 2\cdot 6^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + 2\cdot\left(\frac{3}{15}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{12}{15}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot 2 + \left(\frac{8}{20}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{12} +$$

$$+ \frac{12}{20}^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\left(2 + 36\cdot 2 + \frac{2\cdot 9}{225} + \frac{2\cdot 144}{225} + \frac{64}{400} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{144}{400}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\frac{1893}{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot 75\frac{18}{25} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot 75{,}72 = \frac{1893}{102400}$$

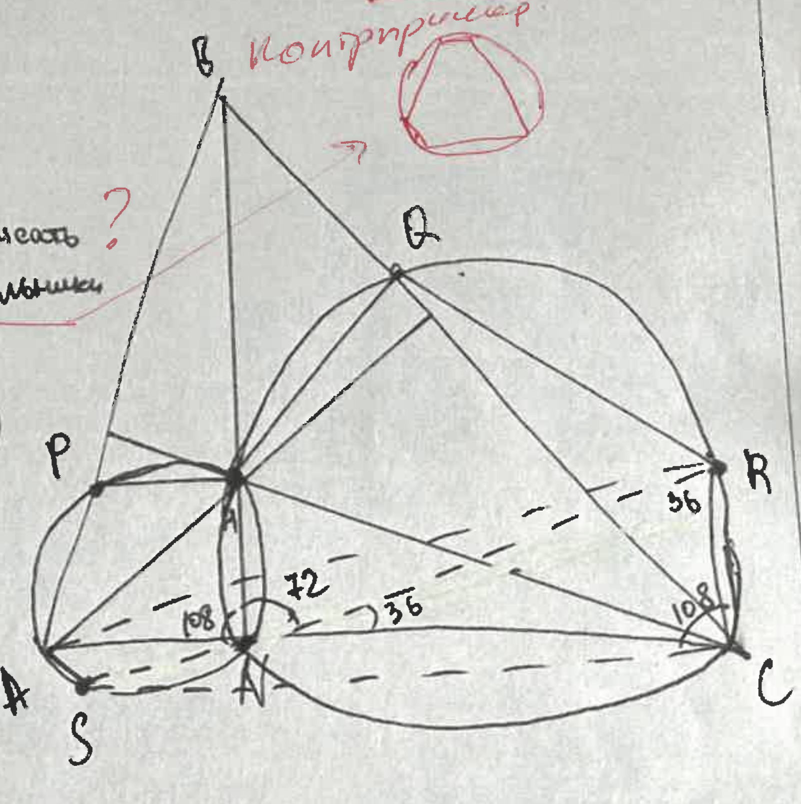
Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot 75{,}72 = \frac{1893}{102400}$

№4

1) Из условия: пятиугольники ASNHP и CNHQR - вписанные.

В окружность можно вписать только правильные пятиугольники ?

контрпример



Тогда ASNHP и CNHQR - правильные пятиуг. (*)

Угол пятиуг = 108°

Все стороны пятиуг. равны (пятиуг. равны, т.к. NH - сторона обоих пятиуг.)

продолжение 5.

[redacted]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 11 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 2 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle HNC = 108$.

$\angle NCR = 108$.

$\triangle NCR$ – р/б $\Rightarrow \angle RNC = \angle NRC = 36°$

$\Downarrow$

$\angle HNR = 108 - 36 = 72°$

$\angle SNH = 108$

$\Rightarrow \angle SNH + \angle HNR = 180°$.

$\Rightarrow SNR$ – не явл. ломаной (т.е. $S, N, R \in SR$). ⊠

2) $AS = SN = NC = RC$ (*).

Тогда $S_{ASR} = \frac{1}{2} AS \cdot RS \cdot \sin\angle ASR = \frac{1}{2} AS \cdot RS \cdot \sin 108$

$S_{SRC} = \frac{SR \cdot CR}{2} \cdot \sin\angle SRC = \frac{SR \cdot CR}{2} \cdot \sin 72 =$

$= \frac{SR \cdot RC}{2} \cdot \sin 108$ ⊠

$AS = RC \Rightarrow S_{ASR} = S_{SRC}$

№5

$\begin{cases} \gcd(n,m) = d; \\ n + m^2 + d^2 = dnm \end{cases}$ $dnm \vdots d^2$, т.к. $d = \gcd(n,m)$

$m^2 \vdots d^2$; $d^2 \vdots d^2 \Rightarrow n \vdots d^2$

$n \vdots d^2 \Rightarrow m \not\vdots d^2$, т.к. иначе $\gcd(n,m) = d^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 | 2 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	15	–	5	–	55

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

(П)Петя: 1 ничья, 2 выигр., 3 проигр.

(М)Маша: 3 ничьи, 2 выигр.

Чтобы М и П играли наименьшее кол-во игр с др. ребятами, между собой они ~~[illegible]~~ должны были сыграть наиб. кол-во раз => по рез-там игр можно составить пары:

П	М
ничья	ничья
проигр. ~~вы~~	выигр.
проигр.	выигр.

— максимум, т.к. у Пети ост. 2 выигр., а М не проигрывала и 1 проигр., но М выиграла только 2 раза. У Маши ост. 2 ничьи, т.к. у П была только 1 ничья => min число партий с др. ребятами: 1+2+2 = 5 партий

Ответ: 5 партий

№2

I – a/b

II – ab

III – $a-b$

IV – $a+b$

тогда по св-ву арифм. прогр.: $\frac{a}{b}+a+b=ab+a-b$ и $\frac{ab+a+b}{2}=a-b$

$ab+a+b=2a-2b$

$ab-a+3b=0$

$a(b-1)=-3b$

$a=-\frac{3b}{b-1}$ $b\neq 1$

$\frac{a}{b}+2b=ab$

↓

$-\frac{3b}{b-1}\cdot\frac{1}{b}+2b=\frac{-3b^2}{b-1}$

$\frac{3b^2}{b-1}+2b=\frac{3}{b-1}$

$3b^2+2b(b-1)=3$

$5b^2-2b-3=0$

$b=\left[\begin{array}{l} 1 \quad a=0, \text{ ~~[illegible]~~ нн} \\ -\frac{3}{5} \quad a=-\frac{3\cdot 3}{5}\cdot\frac{1}{-\frac{3}{5}-1}=-\frac{9}{5}\cdot\frac{-1}{\frac{8}{5}}=\frac{9}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{9}{8}\end{array}\right.$

Ответ. Единств. пара чисел $(a;b)=(9/8;-3/5)$

$-\frac{3}{5}-1=-\frac{8}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 | 2 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N3

Всего вариантов раскраски кубика 2^6 (зел/крас 6 раз) => вар. комбинаций готовых кубиков $(2^6)^2 = 2^{12}$

Разделим на случаи:
Пусть все красные стороны, кроме

0: 1 вар., т.к. все красные

1: любые совпадут, а вариантов $6 \cdot 6 = 36$

2: вариантов с противополож. сторонами 3, с соседними − 8
всего: $3 \cdot 3 + 8 \cdot 8 = 73$

3: вариатов с "линией": 8 , с "уголком" − 8 , всего: $8 \cdot 8 \cdot 2 = 128$

ост. варианты симметричны => просто $\cdot 2$ (они для зелёных)

~~[illegible]~~

тогда всего: $1 + 36 + 73 + 128 = 74 + 164 = 238$, $238 \cdot 2 = 476$

=> вероятность: $\frac{476}{2^{12}} = \frac{476}{4096} = \frac{119}{1024}$

Ответ: $\frac{119}{1024}$

N5 $n + m^2 + d^2 = dnm$ (1)

пусть:
$n = p_1 \cdot d$ $\quad p_1, p_2 \in N$ ~~$+ p_1$ и p_2 — взаимно простые по опр. [illegible]~~
$m = p_2 \cdot d$

$\Downarrow$

$(1) = p_1 \cdot d + p_2^2 \cdot d^2 + d^2 = d^3 \cdot p_1 p_2$

$p_1 = \frac{p_2^2 \cdot d^2 - d^2}{d + d^3 \cdot p_2}$, заметим, что при большом d p_1 будет не целым, т.к. знаменатель будет больше числителя. => пусть $d = 1$, т.е. min; взаимно простые

~~Допустим $d = 1$ $p_1 = \frac{p_2^2 - 1}{1 + p_2}$~~

подходит $n = 5$, $m = 2$, $d = 1$

$5 + 4 + 1 = 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$

Ответ: $n = 5$, $m = 2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 2 | 8 | 7 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	10	20	–	–	55

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

1) Петя сыграл с Захаром и Димой такое кол-во игр, что кол-во игр, не сыгранных с Петей, ~~од~~ у Захара и Димы одинаково, иначе в какой-то из партий учувствовал один участник.

Наибольшее кол-во игр у Димы и Захара равно 3, т.к. Дима сыграл 3 раза. Тогда Петя сыграл 2 раза с Захаром.

2<6. При 2 ~~общих~~ играх между Димой и Захаром, Петя сыграл 3 раза с Захаром и 1 раз с Димой, всего 4 раза, 4<6, получаем противоречие. При 1 игре между Захаром и Димой, Петя сыграл с Захаром 4 раза (кол-во игр, сыгранные Захаром вычесть кол-во игр, сыгранных Захаром с Димой) и 1 раз с Димой (кол-во игр, сыгранных Димой вычесть кол-во игр, сыгранные Димой с Захаром). Обозначим игры Пети с Захаром за a, Пети с Димой за b и игру Захара с Димой за c. Тогда $a = 4$; $b = 2$; $c = 1$.

Выдан дополнительный бланк №1 Лист 1 из 6

Дополнительный бланк №1.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 2 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) Заметим, что 2 одинаковые партии ~~игры~~ не могут идти друг за другом, т.к. в ~~В~~ каждой партии есть проигравший участник, который уступал своё место. Тогда последовательность партий может быть только такой, при которой между a стоят и b или c.
Например:

a c a b a b a

3) Второй партией может быть b или c, ~~а~~ третьей только a. ~~Если~~ ~~В~~
В обоих случаях (если вторая партия b или c) проиграл ~~А~~ Дима, т.к. в ~~во~~ третьей партии в зависимости от случая он уступает свое место либо Пете либо Захару.

Ответ: Дима.

Дополнительный бланк №1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 2 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

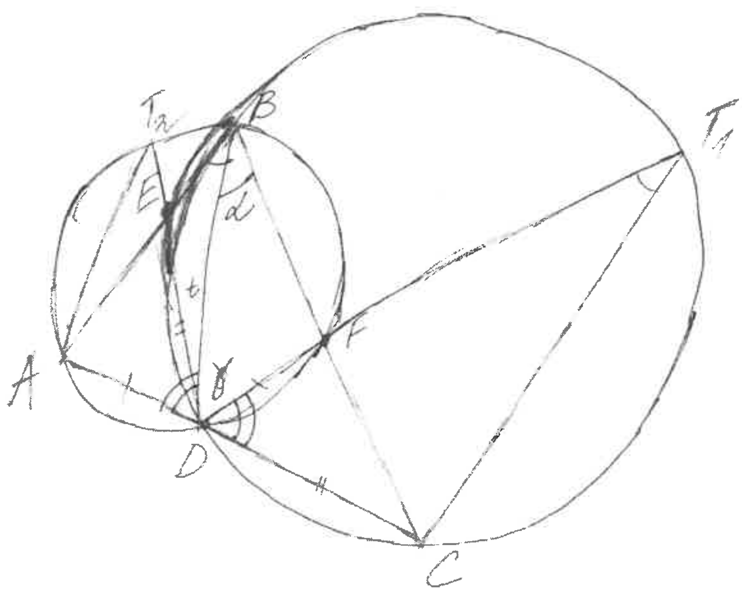
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~№3.~~

№4.



Дано:

$\angle ABD = \angle DBC$

Доказать:

$AE = CF$

1) Т.к. $\angle ABD = \angle DBC$, $\cup AD = \cup DF$ (т.к. вписанные углы, опирающиеся на эти дуги. $\angle ABD$ опирается на дугу AD, $\angle DBC$ опирается на дугу DF) $\Rightarrow AD = DF$, ~~т.к. хорды на равных дугах~~. Аналогично $\cup ED = \cup DC \Rightarrow$ $\Rightarrow ED = DC$.

2) Продлим DE до пересечения с окр. w_2 в точке T_2. $\angle T_2DB = t$. Продлим DF до пересечения с окр. w_1 в точке T_1. $\angle BDT_1 = \gamma$. $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$. $\cup ADF = \cup EDC = 4\alpha$. $\cup T_2B = \cup EB = 2t$. $\cup BF = \cup BT_1 = 2\gamma$ ($\angle T_2DB$ опир. на $\cup T_2B$ в окр. w_2 и на $\cup EB$ в окр. w_1. $\cup T_2B = \cup EB = 2\angle T_2DB = t$, ост. дуги аналогично)

Диагностический бланк №1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 2 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) В окр. ω_2:

$\cup AT_2 = 360° - \cup T_2B - \cup BF - \cup AF$

$\cup AT_2 = 360° - 2t - 2\gamma - 4d$

В окр. ω_1:

$\cup CT_1 = 360° - \cup EC - \cup EB - \cup BT_1$

$\cup CT_1 = 360° - 4d - 2t - 2d$

$\cup CT_1 = \cup AT_2$

$\angle ADT_2 = \frac{\cup AT_2}{2}$

$\angle CDT_1 = \frac{\cup CT_1}{2}$ $\Rightarrow \angle ADT_2 = \angle CDT_1$

4) $\triangle AED = \triangle DFC$, т.к.:

$AD = DF$

$ED = DC$

$\angle ADT_2 = \angle CDT_1$

$\Downarrow$

$AE = CF$

Ответ: ч.т.д.

Дополнительный бланк № 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 2 | 8 | 7 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

1) $\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$

$\frac{76}{11\cdot 19} < \frac{a}{b} < \frac{77}{11\cdot 19}$

a делится на 11 или 19, т.к. в таком случае в числителе и знаменателе сокращается 11 или 19.

2) Если $a \vdots 19$, то т.к. $76 \vdots 19$, $a = k76 + 19$.

k - наименьшее число больше 19. $k = 20$.

$\frac{76\cdot 20}{11\cdot 19\cdot 20} < \frac{a}{b} < \frac{77\cdot 20}{11\cdot 19\cdot 20}$ $\quad 76\cdot 20 = 1520$

$77\cdot 20 = 1540$

$\frac{1520}{11\cdot 19\cdot 20} < \frac{a}{b} < \frac{1540}{11\cdot 19\cdot 20}$

$a = 1520 + 19 = 1539$.

$\frac{1539}{11\cdot 19\cdot 20} = \frac{81}{11\cdot 20} = \frac{81}{220}$. В этом случае $b = 220$.

$k = 20$, т.к. $k77 - k76 > 19$

$k(77 - 76) > 19$

$k > 19$

Числовой промежуток от $k\cdot 76$ до $k\cdot 77$ должен быть больше 19.

Дополнительный бланк №1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	1	7	2	8	7	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) Если $a \vdots 11$, числовой промежуток от $76k$ до $77k$ должен быть больше 11. $k=12$.

$$\frac{76\cdot 12}{11\cdot 19\cdot 12} < \frac{a}{b} < \frac{77\cdot 12}{11\cdot 19\cdot 12}$$

$$\frac{912}{11\cdot 19\cdot 12} < \frac{a}{b} < \frac{924}{11\cdot 19\cdot 12}.$$

т.к. $77\cdot 12 \vdots 11$, $a = 77\cdot 12 - 11$, чтобы $a \vdots 11$

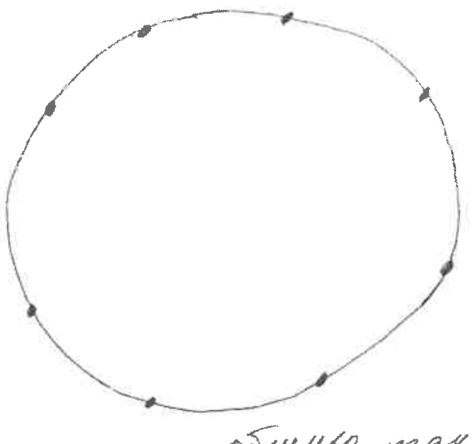
$$\frac{a}{b} = \frac{913}{11\cdot 19\cdot 12} = \frac{83}{19\cdot 12}$$

$b = 19\cdot 12 = 228$

4) В первом случае b получается наименьшее $(220 < 228)$.

Ответ: 220

№3.



1) Отрезков: $\frac{8(8-1)}{2} = 7\cdot 4 = 28$

Кол-во вариантов выбрать 4 отрезка:

$28\cdot 27\cdot 26\cdot 25$

2) ~~вероятности~~ Кол-во вариантов выбрать 1 отрезок: 28. Кол-во вариантов выбрать отрезок, имеющий общую точку с предыдущим: 12

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА000182З025
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	10	1	1	–	52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Заметим, что у Пети в одной игре была ничья, и у Маши было три ничьих, тогда Петя и Маша могли сыграть вместе и результатом их игры стала ничья. Ещё известно, что Маша два раза выиграла, а Петя 3 раза проиграл, тогда Маша и Петя могли сыграть ~~ещё~~ максимум 2 игры, в которых выиграла Маша и проиграл Петя. Значит, Маша и Петя сыграли 1 игру в ничью и 2 игры, где победила Маша и проиграл Петя. Всего, Маша и Петя сыграли вместе 3 игры. Но помимо двух выигрышей и одной ничьи у Маши было ещё две ничьих, но эти две ничьих не могли быть результатом игры с Петей, т.к. у Пети была ~~всего~~ только одна ничья, которую мы упомянули и посчитали ранее. $\Rightarrow$ Маша сыграла минимум 2 игры с другими ребятами.

Аналогично и для Пети, он одержал ещё два выигрыша и ~~т~~ один проигрыш, но не в игре с Машей (т.к. Маша либо выигрывала, либо была ничья, а случай с выигрышем Маши и двумя проигрышами Пети, мы уже рассмотрели ранее) $\Rightarrow$ Петя сыграл минимум 3 игры с другими ребятами.

Ответ: 5 игр – наименьшее число игр с другими ребятами, которое могли сыграть Маша и Петя

Лист 1 из 5

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

1) Пусть c_1 - это первый член арифметической прогрессии:

$c_1 = \frac{a}{b}$

$c_2 = ab$

$c_3 = a - b$

$c_4 = a + b$

2) Пусть d - разность арифметической прогрессии, тогда:

$c_1 = \frac{a}{b}$; $c_2 = \frac{a}{b} + d$; $c_3 = \frac{a}{b} + 2d$; $c_4 = \frac{a}{b} + 3d$.

3) Из 1) и 2), составим систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + d = ab \\ \frac{a}{b} + 2d = a - b \\ \frac{a}{b} + 3d = a + b \end{cases}$$

4) Вычтем из 3 уравнения 2-е:

$\frac{a}{b} + 3d - \frac{a}{b} - 2d = a + b - a + b$,

$d = 2b$

5) Т.к. $d = 2b$, то:

$c_1 = \frac{a}{b}$; $c_2 = \frac{a}{b} + 2b$; $c_3 = \frac{a}{b} + 4b$; $c_4 = \frac{a}{b} + 6b$.

6) $\frac{a}{b} + 4b = a - b$, $\frac{a}{b} = a - 5b$, $\Rightarrow a = b(a - 5b)$

$a = ab - 5b^2$;

7) Т.к. $\frac{a}{b} = a - 5b$, то

$c_1 = a - 5b$; $c_3 = a - 5b + 4b = a - b$

$c_2 = a - 5b + 2b = a - 3b$; $c_4 = a - 5b + 6b = a + b$.

8) $c_2 = ab = a - 3b$ (из 1) и 7)), ~~заменяем в~~

$a = ab - 5b^2$, $\Rightarrow a = a - 3b - 5b^2$,

$-5b^2 - 3b = 0$,

$b(-5b - 3) = 0$

$b = 0$, - не удовл. условию, т.к. $b \neq 0$ или $-5b - 3 = 0$

$-5b = 3$

$b = -\frac{3}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 2 | 3 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

9) Найдем а.

$\frac{a}{b}+2b=ab$ (из 5) и 1))

$\frac{a}{-\frac{3}{5}}-2\cdot\frac{3}{5}=-\frac{3a}{5}$,

$-\frac{5a}{3}-\frac{6}{5}=-\frac{3a}{5}$

$-\frac{25a-18}{15}=\frac{-3a}{5}$, $-125a-90=-45a$,

$-80a=90$

$a=-\frac{90}{80}=-\frac{9}{8}$. $a=-\frac{9}{8}$; $b=-\frac{3}{5}$

Ответ: $\left(-\frac{9}{8}; -\frac{3}{5}\right)$

№3

В данной задаче нас не интересует ~~ф~~ форма развертки куба, а главное - это количество и расположение зеленых и красных граней куба. ~~Всего~~ т.к. при одинаковом количестве зеленых и красных граней и одинаковым расположением по их сути ~~ы~~ можно получить одинаковое раскраски путем переворачивания куба.

Рассмотрим варианты раскраса куба (по количеству зеленых граней) с учетом возможности ~~поворот~~ поворота куба. Тогда мы получим всего ~~9~~ 10 различных вариантов:

1. 0 зеленых граней (все грани красные)
2. 6 зеленых граней
3. 1 зеленая грань.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 2 | 3 | 0 | 2 | 5 |

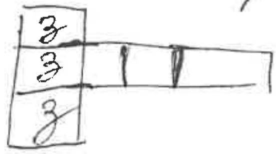
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

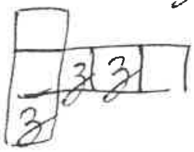
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

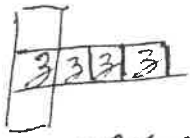
4. 2 зеленые смежные грани
5. 2 зеленые (противоположные) грани
6. 3 зеленые грани, когда одна из граней смежна с двумя другими, а каждая из этих двух смежна только этой грани. На развертке 1 это выглядит вот так:



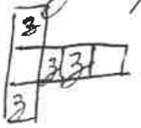
7. 3 зеленые грани, когда грани попарно смежные. На развертке выглядит так:



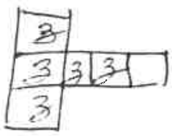
8. 4 зеленые грани, когда каждая грань смежна двум другим (они расположены как бы „по кругу", „опоясывают куб").



9. 4 зеленые грани, когда одна из граней смежна трем другим, а каждая из трех граней смежна этой грани и еще одной.



10. 5 зеленых граней



Первый школьник для своего куба выберет одну из 10-ти раскрасок, значит, второй школьник ~~по~~ должен выбрать такую же

Эти 10 случаев не равновероятны

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА0001823025

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

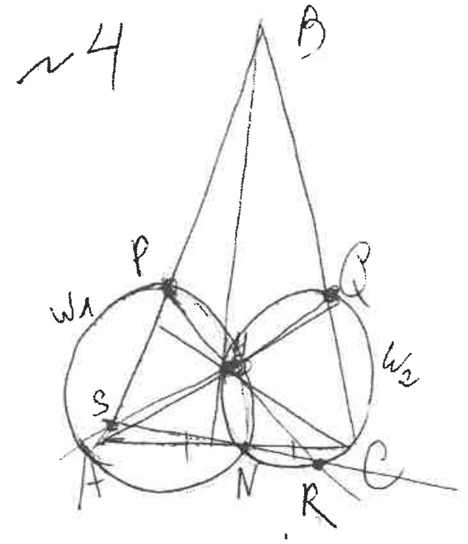
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

раскраску для своего куба.
Вероятность того, что 2-й школьник выберет такую же раскраску, что и 1-й равна $\frac{1}{10}=0,1$.

Ответ: 0,1

№4



Дано: $AN=NC$, $BK\perp AC$, $CK\perp AB$, $AH\perp BC$.

№5

$n+m^2+d^2=dnm$, $n=xd$, $m=yd$

$xd+y^2d^2+d^2=d^3xy$,

$d(x+yd+d)=d(d^2xy)$, $/:d$

$x+yd+d=d^2xy$

$x=\frac{n}{d}$, $d=\frac{n}{x}$

$\frac{n}{d}+\frac{n}{x}+m=n\cdot m$

$\frac{nx+nd}{d\cdot x}+m=n\cdot m$

$\frac{nx+nd+mn}{n}=n\cdot m$

$\frac{n(x+d+m)}{n}=n\cdot m$, $x+d+m=n\cdot m$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	5	20	2	-	52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

Можно заметить, что указанной конструкции соответствует такое „расписание" партий (П – Петя, З – Захар, Д – Дима)

1. П З (проиграл Захар)
2. П Д (проиграл Дима)
3. П З (проиграл Захар)
4. П Д (проиграл Дима)
5. П З (проиграл Петя)
6. Д З (проиграл Дима)
7. П З

А также такое расписание

1. П З
2. ~~Д З~~ – проиграл Дима
3. П З
4. П Д
5. П З
6. П Д
7. П З

чтобы Петя сыграл на 1 больше Захара, Захара должен 2 раза „разбавить" Дима, а Петю всего 1 раз. Очевидно, „разбавление" происходит после каждой игры, значит через каждую игру появляется Дима, но если он будет играть две подряд, то мы потеряем 1 игру П З, которая без „разбавления" случиться не может (если Дима играет 2 подряд, то теряем одно „разбавление")

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Поставить первым игру с Димой нельзя, теряем „разбавление", значит он однозначно играет во второй, после которой НЕ проиграть не может, ведь тогда мы останемся без „Разбавления". Почему так важно 3 „разбавления"? ~~которые~~ Они дают 4 игры П-3 и в каждом так же задействует либо П либо 3, без этого 5 и 6 игр у Захара и Пети не наберётся. (Если будет 3 ~~не~~ П3, то в ~~Ответ~~ сумме П и 3 поиграют 6+3=9 раз, а у нас 11)

Ответ: Дима

№2

$\frac{4}{11}=\frac{76}{209}$ $\frac{7}{19}=\frac{77}{209}$, между ними нет дроби с целым числителем и знаменателем 209, значит надо удвоить (умножаем на наименьшее простое число)

$\frac{152}{418}<\frac{153}{418}<\frac{154}{418} \Rightarrow b_{наим}=418$

Ответ: 418

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 9 | 2 | 5 |

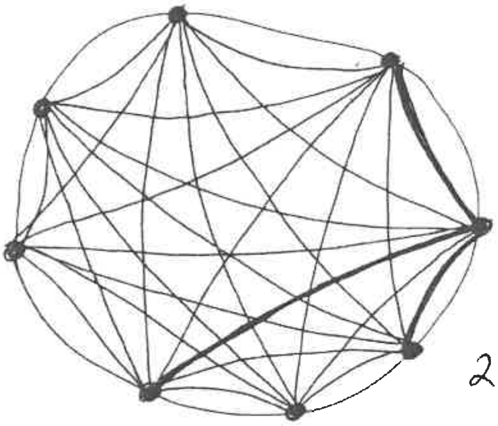
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

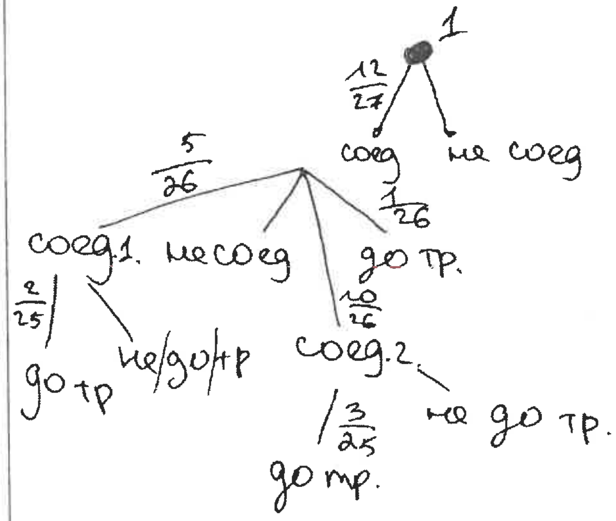


всего рёбер: $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

1. Какой ~~закрашена первой~~ — первый закраш. отрезок не важно, подойдёт любой

2. Надо, чтобы следующий был соединён с первым, таких 12. пусть P-вероятность

$P = \frac{12}{27}$ $(28-1=27)$



3. Далее подходит 2 ситуации

3.1. сразу соединение до треугольника $P = \frac{1}{26}$

3.2. ~~соединение~~ отрезок, соединённый с одним из закрашенных.

тут тоже 2 ситуации

3.2.1. 3 из 1 вершины

$P = \frac{5}{26}$

3.2.2. не больше 2-х из вершины ()

$P = \frac{10}{26}$

И если 3.1 - не важно

если 3.2.1: 2 подходят для достроения до треугольника

$P = \frac{2}{25}$

если 3.2.2: $P = \frac{3}{25}$

Значит вероятность равна

$\frac{12}{27}\cdot\left(\frac{1}{26} + \frac{5}{26}\cdot\frac{2}{25} + \frac{10}{26}\cdot\frac{3}{25}\right) =$

$= \frac{12}{27}\cdot\left(\frac{25+10+30}{26\cdot 25}\right) = \frac{12^{6}\cdot 65^{13}}{27\cdot 26_{13}\cdot 25_{5}} = \frac{6}{27\cdot 5} = \frac{6}{135} = \frac{2}{45}$

Ответ: $\cancel{\frac{6}{135}}$ $\frac{2}{45}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 9 | 2 | 5 |

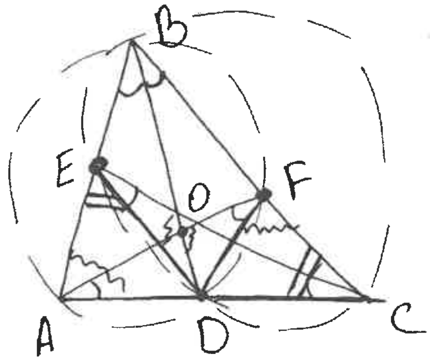
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



~~1) △AOB ∼ △ODF – по 2-м углам (∠ABD = ∠AFD, т.к. A, B, F, D лежат на одной окружности) (∠BOA = ∠FOD – вертикальные) ⇓~~

~~$\frac{AB}{FD} = \frac{AO}{OF} \Rightarrow FD = \frac{AB \cdot OF}{AO}$~~

~~св-во биc-cы: $\frac{AB}{AO} = \frac{BF}{OF} \Rightarrow BF = \frac{AB \cdot OF}{AO} \Rightarrow BF = FD$~~

~~1) △AOB ∼ △OFD (по 2-м углам) (∠ABD = ∠AFD т.к. A, B, F, D на одной окр, ∠BOA = ∠FOD – вертикальные)~~

~~$\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{DF}$ $DF = \frac{OD \cdot AB}{AO} \Rightarrow \frac{DF}{OD} = \frac{AB}{AO}$~~

~~из св-ва бис-сы: $\frac{AB}{AO} = \frac{BF}{OF} \Rightarrow \frac{BF}{OF} = \frac{DF}{OD}$~~

~~∠AFD = ∠ECD~~ ~~(∠FAD = ∠DBF)~~

1) ∠EBD = ∠ECD = ∠AFD = ∠DBC = ∠DEC = ∠FAD (четыре точки лежащие на окр. несколько раз) ∠ABD = ∠DBC

⇓

△ADF и △EDC – р/б, ED = DC; AD = DF

2) ∠BAC + ∠BFD = 180°, ∠BFD + ∠DFC = 180° } ⇒ ∠BAC = ∠DFC

аналогично ∠AED = ∠FCD

⇒ △AED ∼ △DFC, т.к.

раз ED = CD ⇒ △AED = △DFC ⇒ AE = FC ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 9 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5

1) 0 - целое число, при $x=y=0$

$x^4 - xy + y^3 = 0$ $(0-0+0=0)$

2) $x^4+y^3=xy$ — $|x^4+y^3| > |xy|$ везде, кроме нуля

посмотрим, что происходит с ур-нием в разных промежутках.

$x>0$ $y>0$

$|x|<|y|$

$|2^4+3^3|>|6|$

$|1^4+3^3|>|3|$

$|1^4+2^3|>|2|$

и т.д. (вверх также)

$|y|<|x|$

$|3^4+2^3|>|6|$

$|4^4+2^3|>|8|$

$|2^4+1^3|>|2|$

и т.д.

$x<0$; $y<0$

$|x|>|y|$

$|3^4-2^3|>|6|$

$|3^4-1^3|>|3|$

$|4^4-2^3|>|8|$

$|x|<|y|$

$|2^4-3^3|>|6|$

$|2^4-4^3|>|8|$

$|1^4-3^4|>|3|$

и т.д.

$x>0$; $y<0$

$|x|>|y|$

$|3^4-2^3|>|-6|$

$|3^4-1^3|>|-3|$

$|2^4-1^3|>|-2|$

$|x|<|y|$

$|2^4-1^3|>|-2|$

$|3^4-2^3|>|-6|$

$|3^4-1^3|>|-3|$

и т.д.

а с $x<0$, $y>0$ и подавно ($x^4+y^3>0$, $xy<0$)

всё из-за того, что число в кубе и тем более в 4 степени растёт быстрее

Ответ: $x=0$; $y=0$

Д-ва нет

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	8	3	8	4	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	5	—	6	—	51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. x - разность арифметической прогрессии

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + x = a\cdot b & 1) \\ a\cdot b + x = a - b & 2) \\ a - b + x = a + b & 3) \end{cases}$$

3) $x = 2b$

подставим 3 в 2

$a\cdot b + 2b = a - b$

$a(b-1) = -3b$

$a = \frac{-3b}{b-1} = \frac{3b}{1-b}$ 4)

подставим полученный результат в 1.

$\frac{3b}{(1-b)\cdot b} + 2b = \frac{3b\cdot b}{1-b}$

$\frac{3\cancel{b} + 2b - 2b^2 - 3b^2}{1-b} = 0$ ОДЗ: $b = 1$

$-5b^2 + 2b + 3 = 0$

$5b^2 - 2b - 3 = 0$

$D = 4 + 3\cdot 5\cdot 4 = 64$

$b_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{10}$

$b_1 = -\frac{3}{5}$; $b_2 = 1$ - не уд. ОДЗ

подставим $b = -\frac{3}{5}$ в 4

$a = \frac{-\frac{9}{5}}{1 + \frac{3}{5}} = -\frac{9}{8}$ Ответ: $a = -\frac{9}{8}$; $b = -\frac{3}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 1 8 3 8 4 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 + - выиграл
− - проиграл
± - ничья

М	±	±	±	+	+	
П	±	+	+	−	−	−

Ответ: Маша 2 раза
Пете 3 раза.

Из таблицы видим, что Маша и Петя могли сыграть вместе 3 раза (1 раз ничья и 2 раза победа Маши)

Т.к. Маша по условию сыграла всего 5 раз 3 из которых с Петей ~~это~~ она может сыграть 2 раза с другими ребятами.

Т.к. Петя по условию сыграл всего 6 раз 3 из которых с Машей с другими он может сыграть 3 раза

Это количество игр с другими у Маши и Пети является минимальным т.к. с друг другом они могут сыграть максимум 3 раза (1 раз ничья и 2 раза победе Маши)

№3. Какой квадратик закрасит первый и второй мальчик не имеет значения т.к. раскраска совпадающие при повороте считаются одинаковыми. Рассмотрим все возможные случаи.

1). 1 квадратик не играет роли

2 квадратик закрасили не смежный с первым тогда вероятность что второй закрасит его же $\frac{1}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 8 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3 квадратик не играет роли т.к. их кубики можно повернуть

4 квадратик

1. если он совпадает с первым то второй мальчик может закрасить любой цвет с первого и вероятность этого $\frac{2}{3}$

2. если они не совпадают с 3 то второй мальчик должен закрасить только такой же цвет с 3 вероятность этого $\frac{1}{3}$

5 ~~вр~~ квадратик

~~...~~ вне зависимости от того как были закрашены квадрат 4 5-й должен быть закрашен в у второго мальчика точно так же как у и у ~~вт~~ первого вероятность этого $\frac{1}{2}$

6 квадрат ~~...~~ останется с вероятностью 1

1. случай $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$

1.2 случай $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$

2) 1 квадрат кол не играет

2 квадрат закрашен цветом с первого

вероятность, что второй мальчик закрасит ~~его же~~ такой же цвет $\frac{4}{5}$ (подойдет любой оттенок т.к. кубики можно повернуть.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA0001838425

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3, 4, 5, 6 квадраты должны быть закрашены у второго мальчика только также как и у первого. В этом случае нет вариативности

тогда вероятность ~~б~~ $\frac{1}{4}$ - закрасить 3-й квадрат

$\frac{1}{3}$ - закрасить 4-й квадрат; $\frac{1}{2}$ закрасить 5-й квадрат

1 - закрасить 6-й квадрат

вероятность ~~верои~~

2-й случай $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{30}$

В первом и втором случае рассмотрены только положения квадратов. Надо еще учитывать цвета: всего 2 цвета и 6 ходов (т.к 6 квадратов) вероятность, что первый и второй мальчик в ряд подряд ~~одинаковые цвета~~ выберут одинаковые между собой цвета равна $\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$

Итоговая вероятность $\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{1920}$

Ответ: $\frac{1}{1920}$

N5 методом подбора

$n=5$ $m_1=2$; $m_2=3$; $d=1$

Проверка:

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 3 | 8 | 4 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

1) $5+2^2+1^2=5\cdot2\cdot1$

$5+4+1=10$

$10=10$

2) $5+3^2+1^2=5\cdot3\cdot1$

$5+9+1=15$

$15=15$

Ответ: $n=5$; $m_1=2$; $m_2=3$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 3 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа. Ниже справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	5	1	10	-	51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Петя: 1 ничья; 2 победы; 3 проигрыш; всего 6

Маша: 3 ничьи; 2 победы; 0 проигрышей; всего 5

1. Пусть Петя и Маша сыграли 1 партию в ничью (больше невозможно, т.к. у Пети в партиях была, только 1 ничья). В задаче сказанно, что в партиях Пети было 2 победы, пусть Петя играл с Машей 2 партии и проиграл, тогда в этих двух партиях будет 2 победы Маши, 2 поражения Пети. Остались партии в которых Маша сыграла 2 ничьи и Петя 1 раз проиграл ⇒ они сыграла с другими $\boxed{3 \text{ партии}}$

2. Но тогда мы получим, что Петя сыграл: 1 ничью и 2 проигрыша с Машей и 1 проигрыш с кем-то другим получим: 4 партии, а по условию он сыграл 6, тогда пусть Петя с Машей сыграли 1 ничью, 2 победы Маши и 2 поражения Пети, тогда с другими ребятами Маша должна сыграть 2 ничьи, а Петя должен сыграть 2 победы и 1 проигрыш: всего $\boxed{5 \text{ партий}}$

Ответ: 5 партий.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 | 3 | 8 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано на этой странице ... в ниже спра ...

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2

1 — $\frac{a}{b}$

2 — ab

3 — ~~b~~ $a-b$

4 — $a+b$

1) т.к. это числа образующие арифм. прогрес. то:

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+x=ab \\ ab+x=a-b \\ a-b+x=a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ab-\frac{a}{b} & (1) \\ ab+x-a+b=0 & (2) \\ x-2b=0 & (3) \end{cases}$$

2) Подставим $x=ab-\frac{a}{b}$ во (2) и (3), тогда:

$$\begin{cases} ab+ab-\frac{a}{b}-a+b=0 \\ ab-\frac{a}{b}-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab-\frac{a}{b}-a+b=0 \mid \cdot b \\ ab-\frac{a}{b}-2b=0 \mid \cdot b \end{cases}$$

$b\neq 0$ по услов.

$$\begin{cases} 2ab^2-a-ab+b^2=0 & (4) \\ ab^2-a-2b^2=0 & (5) \end{cases}$$

3) из (5) ~~...~~ $a=\frac{2b^2}{b^2-1}$ подставим в (4):

$$2b^2\cdot\frac{2b^2}{b^2-1}-\frac{2b^2}{b^2-1}-b\cdot\frac{2b^2}{b^2-1}+b^2=0$$

$$\frac{4b^4}{b^2-1}-\frac{2b^2}{b^2-1}-\frac{2b^3}{b^2-1}+b^2=0 \mid\cdot(b^2-1) \quad b\neq\pm1$$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

$4b^4 - 2b^2 - 2b^3 + b^2(b^2-1) = 0$

$4b^4 - 2b^2 - 2b^3 + b^4 - b^2 = 0$

$5b^4 - 3b^2 - 2b^3 = 0$

$5b^4 - 2b^3 - 3b^2 = 0 \quad | : b^2 \;;\; b \neq 0$, по услов.

$5b^2 - 2b - 3 = 0$

$D/4 = 1^2 + 15 = 16$

$b_1 = \frac{1+4}{5} = 1$ т.к. $b \neq 1$ на ОДЗ.

$b_2 = \frac{1-4}{5} = -\frac{3}{5}$, тогда: $a = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1} =$

$= \frac{2\cdot\frac{9}{25}}{\frac{9}{25}-1} = -\frac{9}{7}$ $= -\frac{18}{16}$

Мы получили $\boxed{b = -\frac{3}{5}\;;\; a = -\frac{9}{7}}$

4) Посмотрим, что будет при $b = \pm 1$:

Подставим $b = 1$ в (4) и (5):

$\begin{cases} 2a - a - a + 1 = 0 \\ a - a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ -2 = 0 \end{cases}$ неверно

Подставим $b = -1$: $\begin{cases} 2a - a + a - 1 = 0 \\ a - a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -2 = 0 \end{cases}$ неверно.

Ответ: $b = -\frac{3}{5}\;;\; a = -\frac{9}{7}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 1 0 4 3 8 2 5

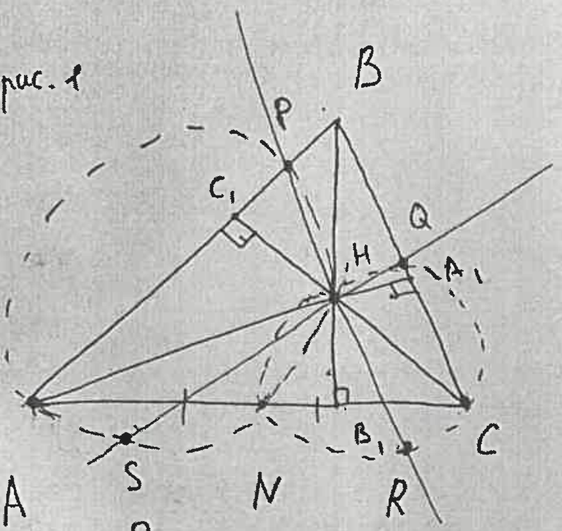
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

рис. 1



Дано: $\triangle ABC$

AA_1; BB_1; CC_1 — высоты

$H \in AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$;

$A; N; H \in$ окруж w_1

$C; N; H \in$ окруж w_2

$P \in AB \cap w_1$; $PH \cap w_2 = R$

$Q \in BC \cap w_2$; $QH \cap w_1 = S$

рис. 2

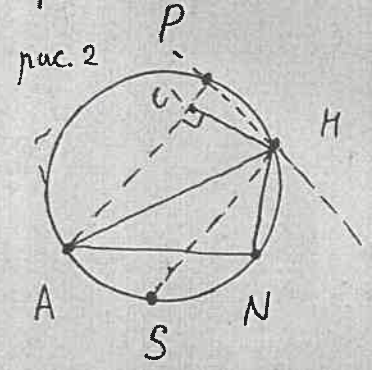
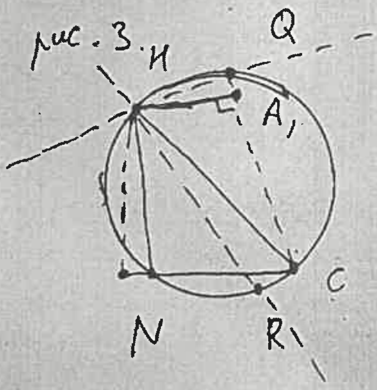


рис. 3



№3

1.) Всего может существовать 11 расскрасок кубика, (если поворот кубика не даёт новую расскраску)

1 вар.; если 6 квадратиков зелёные (1 красн.)

2 вар.; если 4 квадратика зелёные (2 крас.)

3 вар.; если 3 квад. зелёные (3 крас.)

2 вар.; 2 зел; 4 крас. 6 зел., 0 к, и наоборот

1 вар.; 1 зел; 5 крас. $C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6 + C_6^6$

2.) У школьника :

вариантов расскрасить 1 кубик в 2 цвета.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | MA00010438 25

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа

№5

$HOD(m;n)=d$

$n+m^2+d^2=dmn$ т.к. $m \vdots d$, то $m^2 \vdots d^2$, $dm \vdots d^2$

$\Rightarrow n \vdots d^2$

$n+m^2+d^2=dmn \;|: d^2$

$\frac{n}{d^2}+\frac{m^2}{d^2}+1=\frac{mn}{d}$

$\frac{mn}{d}-\frac{n}{d^2}-\frac{m^2}{d^2}=1$

$\frac{mn}{d}-\frac{n+m^2}{d^2}=1$

$\frac{1}{d}\left(mn-\frac{n+m^2}{d}\right)=1$ т.к. m и $n \in N$; то и $d \in N$, $mn-\frac{n+m^2}{d} \in N$

$\begin{cases} \frac{1}{d}=1 \\ mn-\frac{n+m^2}{d}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=1 \Rightarrow m \text{ и } n \text{ взаимопрост.} \\ mn-\frac{n+m^2}{d}=1 \end{cases}$

Не обязательно-это подбор

$mn-(n+m^2)=1$

$mn-n-m^2=1$

$n(m-1)-m^2-1=0$

$m(n-m)-n=1$

$m^2-mn+n+1=0$

$\begin{cases} m_1+m_2=n \\ m_1\cdot m_2=n+1 \end{cases}$ по т. Виета можно угадать корни $\boxed{m_1=2;\ m_2=3;\ n=5}$

Как угадать и m, и n?

$D=(-n)^2-4(n+1)=n^2-4n-4$ $m_1=\frac{n-\sqrt{n^2-4n-4}}{2}$

Ответ: $(n=5; m=2); (n=5; m=3)$ $m_2=\frac{n+\sqrt{n^2-4n-4}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | MA0001034925

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	5	10	20	–	–	51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Всего партий было сыграно (можно посчитать как сумму партий, которые сыграл каждый человек т.е 5+3+6 и разделить на 2, поскольку в партии всегда 2 игрока)

Значит, всего партий сыграно:

$\frac{5+3+6}{2} = 7$.

~~Значит, если Тимур сыграл 6 партий, то он либо не играл первым, либо проиграл одну, при этом всегда найдется одна партия, где играли Арина и Коля. Коля не мог выиграть даже 1 партию, поскольку в таком случае останется 5 партий. Если Арина и Коля играли первую партию то Тимур выиграл оставшиеся 6 (либо 3 и поочерёдно каждый Тимур), т.е каждого из них 3 раза, а значит Коля сыграл 4 партии, что противоречит условию, значит Коля хотя бы 1 раз проиграл Тимуру, что (2 возможно Тимур в случае, если он проиграл в последней партии)~~ Заметим, что в любых 2х подряд ~~одних~~ идущих партиях обязательно все сыграли хотя бы один раз (т.к один проиграл в первой, а во второй сыграл оставшийся игрок), значит в любой из 2х партий сыграл Коля, но Коля сыграл всего 3 раза, значит

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Коля точно не играл в первой партии (иначе он сыграет ≥4 партии напр.: 1, 3, 5 и седьмую, что противоречит условию). Т.е. если он сыграет в первой, то остальных 6 сыграет хотя бы 3 раза, т.к. играет в любых двух (доказано) подряд идущих. И не в последней (т.к. тогда сыграет тоже ≥4: например 2, 4, 5 и 7) значит в первой и последней играли Арина и Тимур. ~~Если из партий 2-6 в которых мог играть Коля он хотя бы одну выиграл, то~~ тогда во 2-й и 6-й играл Коля. Предположим, что Коля выиграл 2 партию, тогда он сыграет в 3-й, а в 4 и 5 не сможет, т.к. должен сыграть в 6-й партии (суммарно 3 партии), но это противоречит доказанному в том, что в любых двух последовательных партиях сыграет Коля (т.е. невозможно, чтобы Коля не играл в 4 и 5), значит Коля проиграет во 2-й и будет играть в 4-й, а потом в 6-й. Если Коля после 4-й сыграет только в 6-й, (в 5-й не может, т.к. тогда сыграет в 4-х партиях, а это противоречит условию) то он проиграет 4 партию, но в партии может проиграть только один игрок, значит проиграет только Коля.

Ответ: Коля

Без примера,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 4 | 9 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4

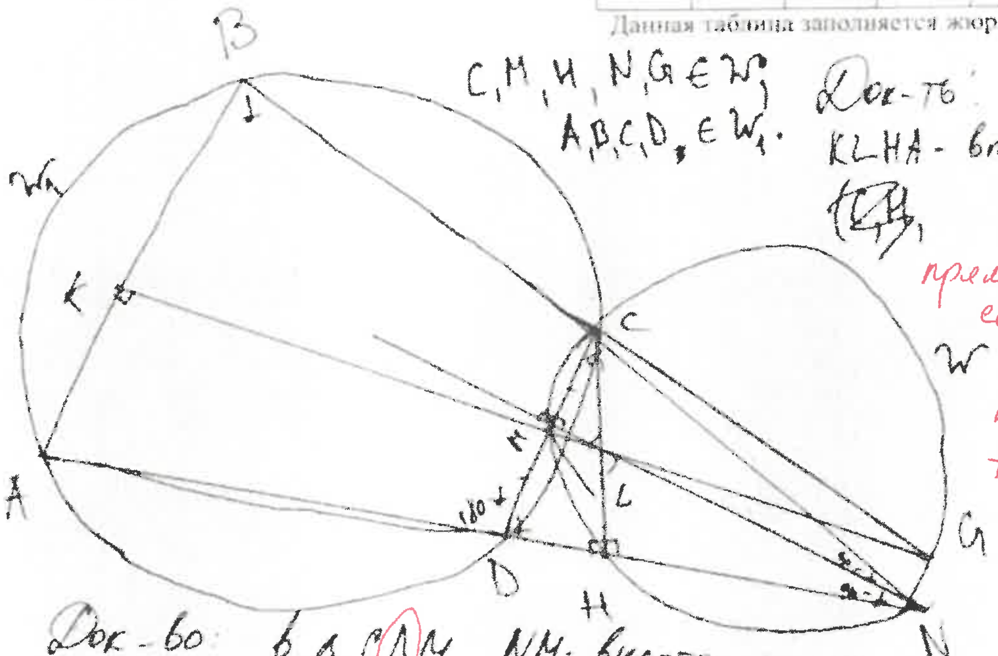
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$C, M, H, N, G \in W$; $A, B, C, D \in W_1$.

Док-ть: KLHA - вписан.

(C, H),



По условию, прямая MN пересекает сторону AD, а не прямую AD, т.е. не её продолжение.

Док-во: в △CDM NM - высота и медиана => NC = DN, ∠CDN = ∠DCN = α. Заметим, что ∠CMN = 90° и опирается на CN, но и ∠CHN опирается на CN => ∠CHN = 90°, значит в △DCN CH - высота. В △DMN ∠MND = 180° - 90° - α = 90° - α = ∠CNM т.к. MN - медиана и высота в △CDM, а значит и биссектриса. ∠CGM также как и ∠CNM опирается на CM => ∠CGM (тоже вписанный) = 90 - α. Т.к. точка G взята на продолжении BC, а точка K на продолжении MG, то ∠CGM = ∠BGK. Точки A, D, N лежат на 1 прямой (по усл.) Значит, ∠ADC = 180° - ∠CDM = 180° - α. ~~Через точки A, B, C, D проходит окружность (последовательно в указанном~~

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

порядке), значит

т.к. ABCD - вписанный,

значит $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, но $\angle ADC = 180° - \alpha$

$\Rightarrow \angle ABC = \alpha$. Заметим, что в $\triangle BGK$

$\angle BGK = 90° - \alpha$, $\angle KBG = \alpha$, значит $\angle BKG = 180° - (90 - \alpha + \alpha) = 90° = \angle AKG$ (смежный с ним)

K, M, L, G - лежат на 1 прямой (по усл.),

значит $\angle AKL = 90°$, но ~~т~~ $L \in CH$ по усл,

значит т.к. $CH \perp DN$, $\angle LHD = 90° = \angle LHA$ (т.к. A лежит на DH по усл).

Заметим, что в AKLH $\angle AKL + \angle AHL = 90° + 90° = 180°$ и являются противоположными относительно AL, значит через точки AKLH можно описать окружность, $\Rightarrow$ KLHA - вписанный, что и требовалось док-ть.

Задача 2

Достаточно найти тройку соседних чисел, где в числителях этих чисел значения будут отличаться на 1, т.е.

$\frac{x}{b}, \frac{a}{b}, \frac{x+2}{b}$, где $a = x+1$, в таком случае b будет минимально, ведь если предположить обратное, то тогда

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 3 4 9 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

если найдется какое-то $b_1 < b$, то соответственно уменьшатся и числители этих дробей

Пример: есть дроби $\frac{x}{b}$ и $\frac{x+1}{b}$

если b_1 такое найдется, то получим:

$$\frac{x\cdot\frac{b_1}{b}}{b\cdot\frac{b_1}{b}} \text{ и } \frac{(x+1)\frac{b_1}{b}}{b\cdot\frac{b_1}{b}} \Rightarrow \frac{x\cdot\frac{b_1}{b}}{b_1} \text{ и } \frac{x\frac{b_1}{b}+\frac{b_1}{b}}{b_1},$$

но как можно заметить, $\frac{b_1}{b} < 1$, т.к. $b_1 < b$, значит шаг между $x\cdot\frac{b_1}{b}$ и $x\frac{b_1}{b}+\frac{b_1}{b} < 1$, значит при чтобы выполнялось $\frac{x}{b}$; $\frac{x+1}{b}$; $\frac{x+2}{b}$ b должно быть единственным и как следствие минимальным

Тогда будем приводить числа $\left(\frac{9}{16} \text{ и } \frac{4}{7}\right)$ к виду $\left(\frac{a-1}{b} \text{ и } \frac{a+1}{b}\right)$

$$\frac{9}{16}\cdot 7 \text{ и } \frac{4}{7}\cdot 16 \Rightarrow \frac{63}{112} \text{ и } \frac{64}{117}$$

$$\frac{63}{112}\cdot 2 \text{ и } \frac{64}{112}\cdot 2 \Rightarrow \frac{126}{224} \text{ и } \frac{128}{224}$$

Значит, т.к. условие выполнилось,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 0 3 4 9 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

найдется $\frac{(a-1)+1}{b}$, и оно равно:

$\frac{126+1}{224} = \frac{127}{224}$, Значит, так как

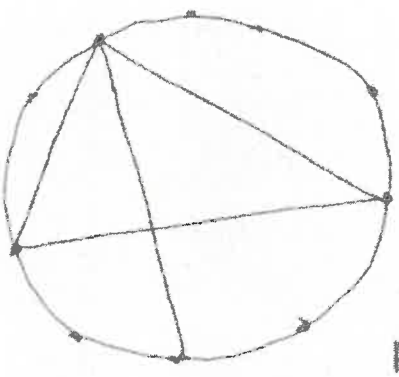
$224 = 2^5 \cdot 7$, а $127 \not\vdots\, 7$ и $127 \not\vdots\, 2$, то

224 – минимально возможное, ведь

$\frac{127}{224}$ – несократимо

Ответ: 224

Задача 3.



Если соединить соседние точки, то получится 10-ти угольник (10 рёбер), но в каждом выпуклом многоугольнике количество диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$, где n – количество рёбер (сторон) многоугольника. Т.е. в нашем случае $\frac{10\cdot 7}{2} = 35$. Значит всего через 10 точек можно провести $35+10=45$ отрезков. Пусть произвольно выбрали первый отрезок (вероятность этого события 1), тогда вероятность, что из одной из 2х вершин

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 1 0 3 4 9 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

этого отрезка будет проведен другой в какую-то из оставшихся 8 незакрашенных точек: $\frac{8\cdot 2}{44}$, поскольку 1 отрезок уже занят (т.е. осталось 44). Значит вероятность, что из 2-х закрашенных отрезков они имеют общую закрашенную вершину: $\frac{16}{44}$. Остается еще 2 отрезка, среди которых один должен достроить получившийся угол до треугольника. Осталось 2 ~~43~~ отрезка (незакрашенных, и один из двух закрашенных должен ~~иметь~~ "достроить" угол до треугольника. Т.е. вероятность такого исхода: $\frac{2}{43}$

Значит вероятность события, описанного в условии можно расчитать как

$P(A) = \frac{16}{44}\cdot\frac{2}{43} = \frac{32}{44\cdot 43}$ (~~т.к~~ умножаем, т.к. события не зависят друг от друга)

$= \frac{4\cdot 2}{11\cdot 43} = \frac{8}{473}$, что и будет являться Ответом.

Ответ: $\frac{8}{473}$

3-й отрезок единственным способом строится.

Но 4-й выбирается 4 способами

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	5	5	1	–	51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Маша: 5 игр (3 ничьих, 2 выигрыша)

Петя: 6 игр (1 ничья, 2 выигрыша, 3 проигрыша)

Тогда Маша с Петей могли сыграть 1 ничью, Маша могла 2 раза выиграть Петю

Тогда они вместе сыграли 3 игры.

Тогда Маша сыграла 2 партии с другими ребятами, а Петя 3 партии с другими ребятами.

Ответ: 5 партий с другими ребятами
(2 – Маша, 3 – Петя)

№2

1ый: $\frac{a}{b}$; 2ой: ab; 3ий: $a-b$; 4ый: $a+b$

Эти числа образуют арифм. прогрессию

$\Downarrow$

$$\frac{\frac{a}{b}+a-b}{2}=ab \qquad \frac{ab+a+b}{2}=a-b$$

$$\frac{a}{b}+a+b=ab+a-b.$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Получим систему

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+a-b=2ab \\ ab+a+b=2(a-b) \\ \frac{a}{b}+a+b=ab+a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b}+a-b=2ab & (1) \\ ab=a-3b & (2) \\ \frac{a}{b}+2b=ab. & (3) \end{cases}$$

$(2)\ a\cdot(b-1)=-3b$

$a=-\frac{3b}{b-1}$

Подставим в 1ое уравнение

$$\frac{-3b}{(b-1)\cdot b}+\frac{-3b}{b-1}-b=2\left(\frac{-3b}{b-1}\right)\cdot b \quad \Big|\cdot\frac{1}{b},\ b\neq 0.$$

$$\frac{-3}{(b-1)b}\ \frac{-3b}{b(b-1)}-\frac{(b-1)\cdot b}{b\cdot(b-1)}=\frac{2b(-3b)}{b(b-1)}$$

$-6b^2+b^2-b+3b+3=0.$

$5b^2-2b-3=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Но $b(b-1)\neq 0 \Rightarrow b=-\frac{3}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$b = -\frac{3}{5}$

$a = -3\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{3}{5} - 1\right) = \frac{9}{5} : \left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{9}{8}.$

Тогда $\frac{a}{b} = \frac{75}{40}$

$ab = \frac{27}{40}$

$a - b = -\frac{21}{40}$

$a + b = -\frac{69}{40}$

Заданные числа действительно образуют арифм. прогрессию.

Ответ: $\begin{cases} a = -\frac{9}{8} \\ b = -\frac{3}{5}. \end{cases}$

№5

$n + m^2 + d^2 = dmn$, $d, m, n \in N$

$n \vdots n$, $dmn \vdots n \Rightarrow m^2 + d^2 \vdots n$

$m^2 \vdots m$, $dmn \vdots m \Rightarrow n + d^2 \vdots m$

[redacted] $n + m^2 + d^2 \geq n + 2md$, $mdn \geq n + 2md$, $md(n-2) \geq n \geq 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$n \geq 3$

№3

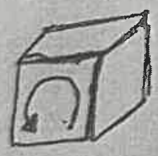
Рассмотрим несколько вариантов, когда у школьников получились одинаковые кубики.

1) Кубики одноцветные

вероятность $P = \left(2\cdot\frac{1}{2^6}\right)^2 = \left(2\frac{1}{64}\right)^2 = \left(\frac{1}{32}\right)^2 = \frac{1}{1024}$

для крас- а еще для зел- [illegible]

2) Кубик можно повернуть по часовой стрелке, чтобы получился кубик другого школьника.

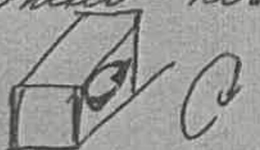


Значит передняя и задние грани одинаковые $P = \frac{1}{(2)^2}\cdot 2 = \frac{1}{2}$

Тогда для каждой раскраски 1-го школьника, найдётся 4 возможных раскраски из 16, которые можно так повернуть.

Значит вероятность равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{16} = \frac{1}{2\cdot4} = \frac{1}{8}$

3) Кубик можно повернуть от нас или на нас



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 1 2 3 6 5 2 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

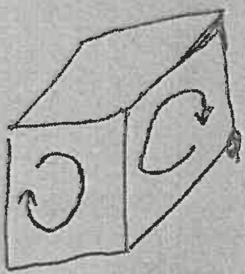
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

эта вероятность тоже равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{16}=\frac{1}{8}$

4) Кубик можно повернуть сразу по часовой стрелке и от нас



Это значит, что видимые 3 грани симметричны 3 ~~...~~ другим

Вероятность равна $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$.

Тогда итоговая вероятность равна

$\frac{1}{1024}+\frac{3}{8}^{(128}=\frac{3\cdot128+1}{1024}=\frac{385}{1024}$

№4

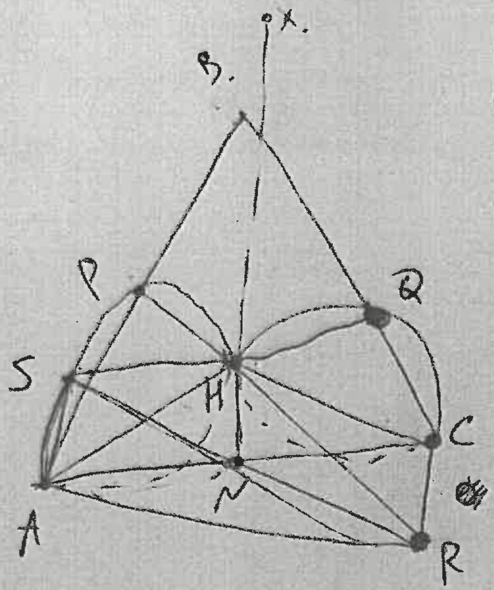
Вариант № 4 | МА 0001236525

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



1) Продлим NH за точку H и отметим точку X.

2) HCNQ – вписанный ⇒ $\angle C = \angle XHQ$. Аналогично $\angle A = \angle XHP$

3) ~~$\angle PHQ = \angle XHQ + \angle XHP = \angle A + \angle C$ ⇒ $\angle PHQ + \angle B = 180^\circ$ ⇒~~

3) $\angle PHQ = \angle XHQ + \angle XHP = \angle A + \angle C$, $\angle PHQ = \angle SHR = \angle A + \angle C$ (вертикальные)

4) Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты ⇒ $\angle BAH = 90 - \angle B$, $\angle BCH = 90^\circ - \angle B$

~~5) [illegible]~~

5) $\angle BAH = \angle A - \angle HSN$, $\angle BCH = \angle C - \angle HRN$ ⇒ $\angle BAH + \angle BCH = \angle A + \angle C - \angle HSN - \angle HRN = \angle A + \angle C + 2\angle B - 180 = \angle B$.

Непонятно и $\angle BAH \neq \angle B$.

6) Четырехуг SHRN:

$\angle HSN + \angle HRN + \angle SHR = \angle A + \angle C + \angle B = 180^\circ$.

Тогда $\angle SNR = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ ⇒ SHR – треугольник,

S, N, R лежат на 1ой прямой.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 1 4 7 4 5 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
16	15	20	–	0	–	51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

Арина – 5
Коля – 3
Тимур – 6

$$\left.\begin{array}{l}5\\3\\6\end{array}\right\} = \frac{\overset{11}{5+3+6}}{2} = 7$$ партий сыграли бельчата

~~Арина~~ 7 – 1 = 6 – проиграл Тимур
6 - 1 = 5 партию проиграла Арина
5 - 1 = 4 партию проиграл Коля

Отв: Коля.

№ 2

$$\left(\frac{9}{16}; \frac{4}{7}\right)$$

9 | 16 → 0,5625
0 ; 90 ; 80 ; 100 ; 96 ; 40 ; 32 ; 80 ; 80 ; 0

$$\frac{9}{16} = 0{,}5625$$

$$\frac{4}{7} \approx 0{,}5714$$

4 | 7 → 0,571 42 . . . .
0 ; 40 ; 35 ; 50 ; 49 ; 10 ; 7 ; 30 ; 28 ; 20 ; 14 ; 6

$$\frac{9}{16} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$$

b_{min} – ?

решим методом подстановки:

$\frac{8}{17}$ = 8 | 17 → 0,4 – неуд мало (80)

$\frac{11}{18}$ = 11 | 18 → 0,6 – неуд много (110)

$\frac{10}{19}$ = 10 | 19 → 0,52 – неуд (100, 95, 50)

11 | 19 → 0,6 – неуд (110)

12 | 21 → 0,57 – неуд (120, 105, 150, 147, 3)

13 | 22 → 0,59 – неуд (130, 110, 200, 198)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	4	7	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\frac{13}{23} = 13 \,|\, 23 = 0,5652$ — удовлетворяет интервалу

130
115
150
138
120
115
50
46
40

$(0,5625 < 0,5652 < 0,5714)$

$\left(\frac{9}{16} < \frac{13}{23} < \frac{4}{7}\right)$

Не доказана минимальность

$b = 23$

Отв: 23

№3

$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2!)} = \frac{\cancel{10}^{5}\cdot 9}{1\cdot \cancel{2}} = 45$ отрезков всего

$C_{45}^4 = \frac{45!}{4!(45-4)!} = \frac{\cancel{45}\cdot\cancel{44}\cdot 43\cdot\cancel{42}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 148995$ — вариантов отрезков

$C_{42}^1 = 42$ — отрезка в

$C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ т.

$120\cdot 42 = 5040$

$p = \frac{\text{благ вар}}{\text{всего вар}} = \frac{5040}{148995} \approx 0,0338$

5040 | 148995
0,0338
50400
504000
446985
168985

Отв: 0,0338

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	1	4	7	4	5	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$x^4 - xy - y^3 = 0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	5	1	5	–	51

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5.

~~Дано~~ пусть gcd(a,b) – наиб. общий делитель чисел a и b.

т.к. $\gcd(n,m)=d$, значит $n=d\cdot a$, $m=d\cdot b$ $(a,b\in N)$

это подставим в уравнение (данное) и преобразуем

$$n+m^2+d^2=d\,n\cdot m$$

$$d\cdot a+(d\cdot b)^2+d^2=d\cdot d\cdot a\cdot d\cdot b$$

$$d\,a+d^2 b^2+d^2=d^3 a\cdot b \quad \Big|\cdot\frac{1}{d}$$

$$a+d\cdot b^2+d=d^2\cdot a\cdot b$$

$$d^2 a\cdot b-a-d\cdot b^2-d=0$$

$$a(d^2 b-1)-d(b^2+1)=0$$

$$a(d^2\cdot b-1)=d(b^2+1)$$

$$a=\frac{d\cdot(b^2+1)}{d^2\cdot b-1}$$

числитель больше знаменателя

$d\cdot(b^2+1)\geq d^2 b-1$, т.к. $a\in N$

[illegible] знаменатель будет больше [illegible]

перебираем d

$d=1$: $a=\dfrac{b^2+1}{b-1}$

подберём натуральные a и b

$b=2$, $\Rightarrow a=\dfrac{2^2+1}{2-1}=5$

действительно, $\gcd(a,b)=1=d$

$\Rightarrow n=a\cdot d=5\cdot1=5$

$m=b\cdot d=2\cdot1=2$

Ответ: $n=5$, $m=2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 1 0 3 0 0 2 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2.

Запишем члены ар прогрессии в ряд

$\frac{a}{b}$, $a\cdot b$, $a-b$, $a+b$

разность прогрессии d должна быть постоянной

$a\cdot b-\frac{a}{b}=(a-b)-a\cdot b=a+b-(a-b)=d$

рассмотрим каждое из равенств отдельно

I. $(a-b)-a\cdot b=a\cdot b-\frac{a}{b}$

II. $a+b-(a-b)=(a-b)-a\cdot b$

(преобразуем)

решим I

$2a\cdot b-\frac{a}{b}=a-b \quad |\cdot b$

$2\cdot a\cdot b^2-a=ab-b^2$

$2a\cdot b^2-a-ab+b^2=0$

$a(2b^2-b-1)+b^2=0$

II $a-b-ab=2b$

$a-ab=3b$

$a(1-b)=3b$

$a=\frac{3b}{1-b}$ ~~случай, где b=1,~~ рассмотрим отдельно $b\neq 1$!

получим

$\begin{cases} a(2b^2-b-1)+b^2=0 \\ a=\frac{3b}{1-b} \end{cases}$

подставим $a=\frac{3b}{1-b}$ в I.

$\frac{3b}{1-b}(2b^2-b-1)+b^2=0$

$\frac{6b^3-3b^2-3b+b^2(1-b)}{1-b}=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

так $b \neq 1$ случай $b=1$ рассмотрим отдельно домножим на $b-1$

$6b^3-3b^2-3b+b^2-b^3$

$5b^3-2b^2-3b=0 \mid \cdot \frac{1}{b}$

$5b^2-2b-3=0$ найдём корни кв. ур.

$D=(-2)^2-4\cdot5\cdot(-3)=4+60=64$

$b_1=\frac{2+8}{10}=1$ (но $b\neq1$, не подходит)

$b_2=\frac{2-8}{10}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$ → найдём a.

$a=\frac{3b}{1-b}=\frac{-\frac{3}{5}\cdot3}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{-\frac{9}{5}}{\frac{8}{5}}=-\frac{9}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{8}=-\frac{9}{8}$

$\frac{a}{b}=-\frac{9}{8}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{45}{24}=\frac{15}{8}=\frac{75}{40}$

$a\cdot b=\frac{9\cdot3}{8\cdot5}=\frac{27}{40}$

$a-b=-\frac{9}{8}-\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{9}{8}+\frac{3}{5}=\frac{-45+24}{40}=-\frac{21}{40}$

$a+b=-\frac{9}{8}-\frac{3}{5}=-\frac{45+24}{40}=-\frac{69}{40}$

Действительно, они образуют ар. прогр., $d=-\frac{48}{40}=-\frac{6}{5}$

Ответ $a=-\frac{9}{8}$, $b=-\frac{3}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1.

Если нужно ~~максимизировать~~ минимизировать число игр с другими ребятами, значит нужно ~~минимизировать~~ макс максимизировать число игр друг с другом.

Найдем макс число игр друг с другом (Маши и Пети)

6 – не подходит, т.к Маша сыграла 5 всего.

5 – не подходит, т.к. Маша из 5 игр ни разу не проиграла, а Петя выиграл 2 из 6, значит он хотя бы раз должен был выиграть Машу.

4 – не подходит, т.к. Петя должен был ни разу не выиграть, значит из 4 партий он сыграл 1 ничью и 3 проигрыша (т.к Маша ни разу не проиграла). Но Маша не могла выиграть трижды. (по усл.)

3 – Маша сыграла с Петей 1 ничью и 2 выигрыша
=> Петя – 1 раз ничья и 2 проигрыша. Это удовл. всем условиям.

Значит остаток игр у Пети и Маши:
Маша: $5-3=2$
Петя $6-3=3$

Значит не друг с другом они сыграли $2+3 = 5$ игр.

Ответ: 5 игр.

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

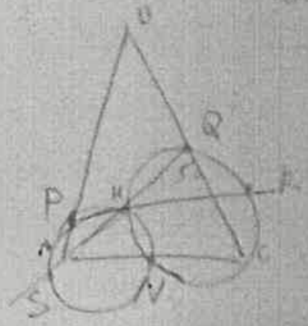
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4 Дано $\triangle ABC$, H — пересеч. высот. N — середина AC. w_1, w_2 — окр. $AHN \in w_1$, $CHN \in w_2$. $(AB) \cap w_1 = \{P\}$, $BC \cap w_2 = \{Q\}$. $PH \cap w_2 = \{R\}$, $QH \cap w_1 = \{S\}$

Доказать: R, S, N лежат на 1 прямой, $S_{\triangle ARS} = S_{\triangle CRS}$

Решение.



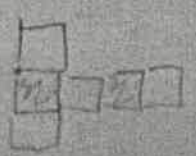
$2^6 = 2^6$

Задача 3. Всего случаев $2^6 = 64$. Нас интересуют случаи, когда кубики с одинаковой раскраской. Если взять ~~две~~ 6 одинаковых цветов для 1 кубика, то второй можно раскрасить 1 способом (6 таких же). Если пять одного и 1 другого цвета — тоже один. (ещё) Если поровну (3 одного, 3 другого) ~~+~~. ещё если 4 одного 2 другого. ещё случай, когда красим 3 в ряд либо 3 одинакового цвета у угла (7 всего способов выбрать). ~~[illegible]~~ +3 из-за поворотов

таким образом ~~всего случаев~~ вероятност, когда покраски совпадают,

$\frac{10}{64} \cdot \cancel{7} = \frac{70}{64}$ и ещё делить на 7 из-за поворотов

$\frac{\frac{10}{64}}{7} = \frac{5}{32 \cdot 7} = \frac{5}{224}$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 | 4 | 5 | 2 | 2 | 5 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	–	2	8	–	50

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 Петя = 6 раз И В В П П П

Маша = 5 раз И И И В В

И - ничья
В - выиграл
П - проиграл

1 игра = = 3 партия

Составим табличку, какие партии М и П могли сыграть вместе.

	М	П
1	И	И
	И	В
	И	В
2	В	П
3	В	П
		П

Допустим первая партия Маши и Пети: 1 Ничья-Ничья

вторая партия: 2 Маша выиграла Петю

третья партия 3 Маша снова выиграла Петю

=> Между собой М и П сыграли 3 раза

⇒ после этого Маша сыграла 2 раза на ничью, а Петя 2 раза одержал победу и 1 раз проиграл, т.к нам не важно с одним и тем же (или разными людьми) человеком М и П играли, то можем дать ответ, что с другими ребятами М и П сыграли 5 игр. Допустим пример: О - Оля, Б - Борис =>

$\Rightarrow M \xleftrightarrow{И} O \quad П \xleftrightarrow{В} Б$ => или же

$M \xleftrightarrow{И} O \quad П \xleftrightarrow{В} Б$ М и П оба играют с Олей по несколько раз (несколько партий)

$П \xleftrightarrow{П} O$

=> 1) $M \xleftrightarrow{И} O$
2) $M \xleftrightarrow{И} O$
3) $П \xleftrightarrow{В} O$
4) $П \xleftrightarrow{В} O$
5) $П \xleftrightarrow{П} O$

5 партий сыграли (2 Маша, 3 Петя)

Ответ: 5 игр (если когда Петя и Маша одновременно играют с другими людьми это разные игры) → если нет, то ответ 3 (т.к по порядку прогрессии)

№2 Пусть бельчонок это $S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{a}{b}, S_2 = a\cdot b, S_3 = a-b, S_4 = a+b \Rightarrow \begin{cases} S_2 - S_1 = d \\ S_3 - S_2 = d \\ S_4 - S_3 = d \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ab - \frac{a}{b} = d \\ a-b-ab = d \\ a+b-a+b = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab - \frac{a}{b} = d \\ a-b-ab = d \\ 2b = d \end{cases} \Rightarrow$ т.к все равны $\begin{cases} ab - \frac{a}{b} = 2b \\ (a-b)-ab = 2b \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{ab^2-a}{b} = \frac{2b}{1} \quad 2b^2 = ab^2 - a \Rightarrow a(b^2-1) = 2b^2 \Rightarrow a = \frac{2b^2}{b^2-1}}$

и из $a-b-ab = 2b \Rightarrow -b + a - ab = 2b \Rightarrow a - ab = 3b \Rightarrow a(1-b) = 3b \Rightarrow a = \frac{3b}{1-b}$

$\Rightarrow$ можем приравнять a (т.к система) $\Rightarrow \frac{3b}{1-b} = \frac{2b^2}{b^2-1} \Rightarrow$ ФСУ $\frac{3b}{1-b} = \frac{2b^2}{(b-1)(b+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-3b(b+1)}{-1(1-b)(b+1)} = \frac{2b^2}{(b-1)(b+1)} \Rightarrow \frac{-3b^2-3b}{(b-1)(b+1)} - \frac{2b^2}{(b-1)(b+1)} = 0 \Rightarrow \frac{-3b^2-3b-2b^2}{(b-1)(b+1)} = 0 \Rightarrow \frac{-5b^2-3b}{(b-1)(b+1)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5b^2 - 3b = 0 \Rightarrow b(-5b-3) = 0 \Rightarrow -5b-3 = 0 \Rightarrow 5b = -3 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{5}}$ нашли b $\Rightarrow$

можем подставить его в $a = \frac{3b}{1-b} \Rightarrow a = -\frac{3\cdot 3}{5} : \left(1+\frac{3}{5}\right) = -\frac{9}{5} : \frac{8}{5} = -\frac{9\cdot 5}{5\cdot 8} = -\frac{9}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{9}{8}}$ нашли a через b, пол-ва пара $\left(-\frac{9}{8}; -\frac{3}{5}\right)$ — одна возможная пара!

Ответ: $\left(-\frac{9}{8} = a, -\frac{3}{5} = b\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА0001745225

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 НОД$(m,n)=d$ $n,m\in\mathbb{N}$ Найти: m и n

$n+m^2+d^2=d\cdot m\cdot n$

$\Rightarrow n=d\cdot a,\ m=d\cdot b \Rightarrow da+(db)^2+d^2=d^3ab$

$da+d^2b^2+d^2=d^3ab$

$d(a+db^2+d)=d^3ab \quad |:d$

$a+db^2+d=d^2ab \rightarrow \boxed{a=\frac{b^2+1}{b-1}}$

Пусть $d=1$: $a+b^2+1=a\cdot b \Rightarrow n=a\ \ m=b \Rightarrow n+m^2+1=m\cdot n$

$n+1=m\cdot n-m^2$

$\underbrace{n+1}_{>0}=\underbrace{m(n-m)}_{>0} \Rightarrow (n-m)$ не может быть $\leq 0 \Rightarrow n>m$

$n=\frac{m^2+1}{m-1}$

$m=2$: $n=\frac{4+1}{1}=5$ ✓

$m=3$: $n=\frac{9+1}{2}=5$ ✓ $\Rightarrow n=5\ m=2\ d=1$; $n=5\ m=3\ d=1$ (при $m>3$ дробь(n) − не целое)

$m=4$: $n=\frac{16+1}{4}$ ✗

При $d>1$: $a+db^2+d=d^2ab$

преобразуем $\Rightarrow db^2+d=ad^2b-a$

$d(b^2+1)=a(d^2b-1)$

$a=\frac{d(b^2+1)}{d^2b-1} \Rightarrow$ если $d>1$ (d увеличивается) $\Rightarrow d^2b-1$ (знаменатель) будет тоже увеличиваться и для маленьких значений в дробь становится не целой

Ответ. $n=5, m=2$ и $n=5, m=3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	1	7	4	5	2	2	5

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Дано:

$AN = NC$

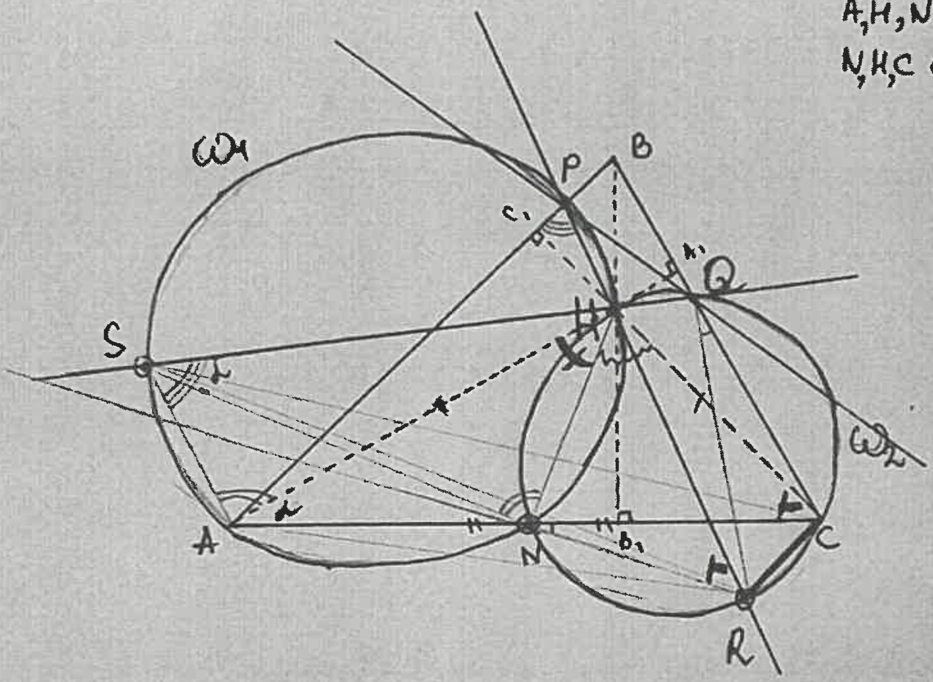
$A, H, N \in \omega_1$, $S \in \omega_1$

$N, H, C \in \omega_2$, $R \in \omega_2$

Док-ть:

1) R, S, N на одной прямой

2) $S_{\Delta ARS} = S_{\Delta CRS}$



Решение:

1) $\angle CQR = \angle RNC$ т.к они опираются на $\smile RC$

Проведем $[SN] \Rightarrow \angle SAH = \angle SNH$ (на $\smile SH$)

Продлим (RN)

$\angle ASH = \angle APH$ ($\smile AH$)

Т.к $AN = NC \Rightarrow \angle NHC = \angle AHN \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~ΔAHC – р/б (HN – бис. и медиана) $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow AH = HC$~~

$\Delta B_1A_1C_1$ – ортотреугольник