Математика. 9 класс

Шифр	ФИО	Итого балл	Статус
MA0002223526	Савельева Надежда Сергеевна	100	Победитель
MA0002486926	Драпалюк Денис Михайлович	100	Победитель
MA0003030926	Чехова Софья Сергеевна	100	Победитель
MA0003081926	Комиссарова Дарья Алексеевна	100	Победитель
MA0002282226	Владимиров Алексей Алексеевич	98	Победитель
MA0002011026	Плеханов Илья Денисович	95	Победитель
MA0002483326	Новичкова Ангелина Валерьевна	95	Победитель
MA0002616726	Чеканов Егор Кириллович	95	Победитель
MA0003084326	Юмагузина Аделина Юлаевна	93	Победитель
MA0002013426	Хамидова Мадина Абдуллоджоновна	90	Победитель
MA0002468526	Баленков Владислав Игоревич	90	Победитель
MA0002837026	Евдокимова Анастасия Михайловна	90	Победитель
MA0002623126	Копьева Арина Александровна	88	Победитель
MA0002495226	Мирошниченко Андрей Андреевич	87	Победитель
MA0002837326	Панской Радомир Денисович	87	Победитель
MA0003292126	Овчинникова Виктория Степановна	86	Победитель
MA0002487726	Михайлов Сергей Станиславович	85	Победитель
MA0002168726	Шавалиева Элина Рафаэлевна	83	Призёр II степени
MA0002250626	Губанов Денис Борисович	83	Призёр II степени
MA0002424326	Брюхова Диана Антоновна	83	Призёр II степени
MA0003097326	Кунин Дмитрий Алексеевич	83	Призёр II степени
MA0003112026	Михайлов Алексей Александрович	83	Призёр II степени
MA0002186826	Веригина Софья Ильинична	81	Призёр II степени
MA0003293526	Волков Иван Александрович	81	Призёр II степени
MA0003094626	Куприянов Николай Иванович	80	Призёр II степени
MA0003224926	Юрганова София Игоревна	80	Призёр II степени
MA0002700326	Елизаров Кирилл Денисович	79	Призёр II степени
MA0003219326	Белоус Михаил Тимофеевич	78	Призёр II степени
MA0002571226	Самойленко Арсений Вячеславович	77	Призёр II степени
MA0002939126	Илларионова Камилла Олеговна	76	Призёр II степени
MA0002600326	Блинников Александр Александрович	75	Призёр II степени
MA0002942526	Бирюкова Валерия Владимировна	75	Призёр II степени
MA0003053226	Курбанов Марат Арсланович	75	Призёр II степени
MA0003026826	Музоваткина Аделина Валерьевна	73	Призёр II степени
MA0003293926	Шумилина Юлия Владимировна	69	Призёр III степени
MA0002263326	Белоконь Сергей Петрович	68	Призёр III степени
MA0002896426	Андреев Алексей Александрович	68	Призёр III степени
MA0003252226	Васильченко Вадим Дмитриевич	68	Призёр III степени
MA0002231926	Беляков Мирослав Александрович	67	Призёр III степени
MA0002640326	Разин Михаил Андреевич	66	Призёр III степени
MA0002983826	Фрибус Владислав Сергеевич	66	Призёр III степени

MA0002038826	Мостепанов Алексей Евгеньевич	65	Призёр III степени
MA0002197226	Ащеулов Андрей Сергеевич	65	Призёр III степени
MA0002417126	Зверюгин Вячеслав Евгеньевич	65	Призёр III степени
MA0002502626	Денисов Владислав Артемович	65	Призёр III степени
MA0002813726	Абрамов Демид Андреевич	65	Призёр III степени
MA0003105626	Морозов Богдан Валерьевич	65	Призёр III степени
MA0003274026	Лукинов Михаил Юрьевич	65	Призёр III степени
MA0002719926	Килеев Пётр Андреевич	63	Призёр III степени
MA0002780826	Дмитриев Иван Андреевич	63	Призёр III степени
MA0002043326	Никитин Николай Антонович	62	Призёр III степени
MA0002279526	Помазанов Артём Сергеевич	62	Призёр III степени
MA0002545826	Белослудцев Артём Евгеньевич	62	Призёр III степени
MA0002163326	Миргородский Владимир Владимирович	61	Призёр III степени
MA0002176126	Никифоров Иван Андреевич	61	Призёр III степени
MA0002772326	Перегудова Анастасия Геннадьевна	61	Призёр III степени
MA0003265226	Серко Глеб Валентинович	61	Призёр III степени
MA0003055826	Семов Андрей Михайлович	60	Призёр III степени
MA0002095526	Шломин Александр Михайлович	57	Призёр III степени

*Сканы работ размещены по возрастанию шифра

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 MA0002011026

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	15		95

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Дано: $N = 1120$ представить в виде 3 и 5

Порядок не учитывается.

Решение:

Пусть:

x – кол-во слагаемых, равных 3

y – кол-во слагаемых, равных 5

Тогда: $3x+5y=1120$

где x, y – целые неотрицательные значения.

$x = \frac{1120-5y}{3}$ нужно чтобы: $1120-5y$ делилось на 3

$1120 \bmod 3 = 1$

т.к. $5y \bmod 3 = 2y \bmod 3$, имеем:

$1-2y=0 \pmod 3$

$2y=1 \pmod 3$

$y=2 \pmod 3$

Значит: $y=3k+2,\ k \geq 0$

$x = \frac{1120-5(3k+2)}{3} = \frac{1110-15k}{3} = 370-5k$

ограничение $x \geq 0$

Лист 1 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$370-5k\geq 0 \Rightarrow k\leq 74$

$y\geq 0$ выполняется при $k\geq 0$.

Итак, $k=0,1,2,\ldots,74$ (всего 75 решений)

Требуется $x>y$

$370-5k>3k+2$

$368>8k$

$k<46$

Значит, $k=0,1,\ldots,45$ — это 46 решений

Проверим граничное $k=45$

$x=370-225=145$, $y=137$

$3x+5y=435+685=1120$, $x>y$

$k=46$ даёт $x=y=140$ — не подходит

Ответ: 46

№2

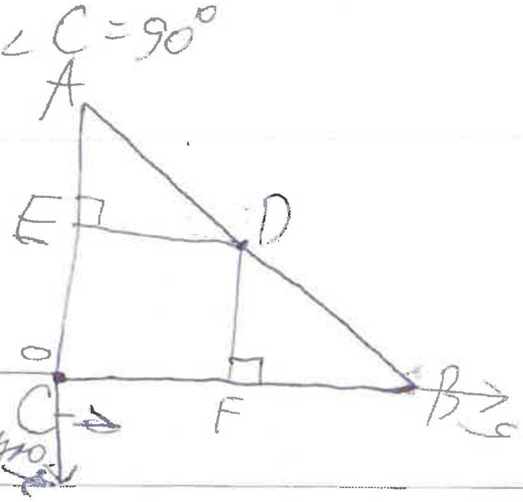
Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг., $\angle C=90°$

$DE\perp CA$, $DF\perp CB$

$AE=4$

$FB=7$

Найти: $S_{\triangle ABC}$ – наименьшую.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Решение:

Расположим систему координат $C(0;0)$, CA по оси x, CB по оси y

Тогда $A(a;0)$; $B(0;b)$, где $a=CA$, $b=CB$

Точка D на AB

$$D=(a(1-s), bs),\quad s\in[0;1]$$

Проекция на CA (ось x) даёт $E=(a(1-s),0)$. Тогда

$$AE = a - a(1-s) = as = 4 \Rightarrow s=\frac{4}{a}$$

Проекция на CB (ось y) даёт: $F=(0;bs)$. Тогда

$$BF = b - bs = b(1-s) = 7$$

Подставим $s=\frac{4}{a}$

~~Проекция на CB (ось y)~~

$$b\left(1-\frac{4}{a}\right)=7 \Rightarrow b\cdot\frac{a-4}{a}=7 \Rightarrow b=\frac{7a}{a-4}$$

$a>4$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a \cdot \frac{7a}{a-4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{a^2}{a-4}$$

Минимизируем $f(a) = \frac{a^2}{a-4}$, $a>4$

$$f'(a) = \frac{2a(a-4)-a^2}{(a-4)^2} = \frac{a(a-8)}{(a-4)^2},$$

Критическая точка $a=8$ (подходит так >4) Это минимум.

Тогда:

$$b = \frac{7\cdot 8}{8-4} = 14 \qquad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 14 = 56$$

Ответ: 56

№4

Дано: 11×11 квадрат.

1×4 и 4×1 — прямоугольники.

Решение:

Раскрасим клетки в 4 цвета по правилу: цвет клетки $(i; j)$ зависит от $(i+j) \bmod 4$.

Тогда любой любой прямоугольник 1×4 или 4×1 всегда накрывает ровно по одной клетке каждого из

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА00020110 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4 цветов (потому что движение на 1 клетку сумма i+j меняется на 1). Знают, если фигура замощаема такими прямоугольниками, то количество клеток каждого цвета должно быть одинаковым

В квадрате 11×11 всего 121 клетка, а по 4 цветам распределение неизбежно неравномерное Один из цветов встречается на 1 раз чаще. После вырезания одной клетки остаётся 120 клеток, и два замощения нужно, чтобы стало по 30 клеток каждого цвета.

На рисунке вырезана клетка „не того" цвета, поэтому равенство по цветам не достигается, а значит замощение невозможно

Ответ: невозможно.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 MA0002011026

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

№4 Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$(x^2+2x+4)(x^2-7x+4)=10x^2$

$(x^2+2x+4)(x^2-7x+4)-10x^2=0$

$(x^2-8x+4)(x^2+3x+4)=0$

Тогда

1. $x^2-8x+4=0$

$D=b^2-4ac=64-16=48$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{48}}{2}=4\pm2\sqrt{3}$

2. $x^2+3x+4=0$

$D=b^2-4ac=9-16=-7$

$D<0 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $x=4-2\sqrt{3};\ 4+2\sqrt{3}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА00020110 26
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Дано: 100 серых и 5 чёрных бельчат.

Каждый чёрный знаком с половиной серых, но есть с 50 серыми.

Решение.

Всего знакомств (рёбер):

$50 \cdot 5 = 250$

Пусть x – число серых, у которых знакомств с чёрными ≤ 2.

Тогда остальные $100 - x$ серых имеют как минимум 3 знакомства, но максимум 5.

Максимум рёбер при фиксированном x достигается, если:

• эти x серых имеют по 2 знакомств (дают $2x$ рёбер)

• оставшиеся $100 - x$ имеют 5 знакомств (дают $5(100-x)$ рёбер).

Тогда:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$250 \le 2x + 5(100-x) =$

$2x + 500 - 5x = 500 - 3x$

$500 - 3x \ge 250 \Rightarrow 3x \le 250 \Rightarrow x \le \frac{250}{3} = 83\sqrt{3}$?

Значит, $x \le 83$. Это значение достижимо?, Как? конструкцией (можно распределить 250 значков так, чтобы 83 серых имели степень 0-2, а 17 серых „забрали" остаток до степени 5)

Ответ: 83

При чем там $\sqrt{3}$?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	2	0	1	3	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	20	15	20		90

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

Рассмотрим случай, когда чисел 3 и 5 равное количество, тогда каждое из чисел 3 и 5 будет записано $\frac{1120}{3+5} = \frac{1120}{8} = 140$ раз.
Значит нужно учитывать суммы в которых число 3 встречается более 140 раз, но менее или равно $\frac{1120}{3} = 373\frac{1}{3}$ (округляем вниз) 373 раз.

С другой стороны число 3 не может встречаться 373 раза, т.к. $373 \cdot 3 = 1119$ и мы не можем добавить число 3 или 5, чтобы получить сумму 1120.

Пусть чисел 3 — n штук, тогда $140 < n < 373$.
Пусть чисел 5 — k штук, тогда $0 < k < 140$ и вся сумма имеет вид: $3n + 5k = 1120 \Leftrightarrow 3n = 1120 - 5k \Leftrightarrow 3n = 5(224-k)$, т.к. n и k — количество чисел, то n и $k \in N$ (являются натуральными числами). Т.к. $3n = 5(224-k)$, то $n \vdots 5$ (n кратно 5). Значит числа n удовлетворяют следующим условиям: $140 < n < 373$, $n \in N$, $n \vdots 5$ и их всего $\frac{373-140}{5} = \frac{233}{5} = 46{,}6$ — округляем вниз до ближайшего целого числа — 46 вариантов (числа от 145 до 370) включительно

Ответ: 46 сумм.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 0 1 3 4 2 6

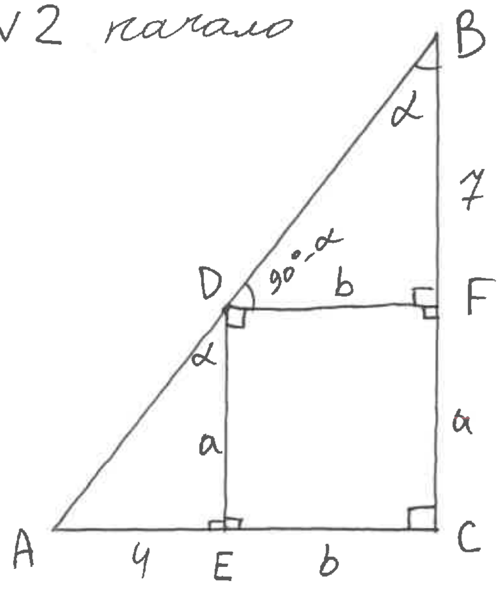
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 начало



Дано:
$\triangle ABC$, $DF \perp BC$, $DE \perp AC$, $\angle C = 90°$; $AE = 4$, $BF = 7$.
Найти: минимальную площадь $\triangle ABC$.

Решение:
Пусть $DE = a$, $DF = b$.
Т.к. DE и DF — перпендикуляры и $\angle C = 90°$, то $\angle EDF = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$
$(360° - \angle C - \angle DEC - \angle DFC) = 90°$ — по теор. о сумме углов выпуклого четырехугольника его сумма углов равна $360°$, т.к. $\angle EDC = \angle DFC = \angle FCD = \angle CED = 90°$ то $EDFC$ — прямоугольник и $DE = FC = a$, $DF = EC = b$.
$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{4^2 + a^2} = \sqrt{16 + a^2}$ — по теор. Пифагора, аналогично $DB = \sqrt{49 + b^2}$ — по теор. Пифагора, значит $AB = AD + DB = \sqrt{16 + a^2} + \sqrt{49 + b^2}$. Но относительно AC и BC, $AB = \sqrt{(4+b)^2 + (7+a)^2}$ — по теор. Пифагора
значит $AB = \sqrt{16 + a^2} + \sqrt{49 + b^2} = \sqrt{(4+b)^2 + (7+a)^2}$, возведем оба значения AB в квадрат, имеем:
$(\sqrt{16+a^2} + \sqrt{49+b^2})^2 = (4+b)^2 + (7+a)^2 \Leftrightarrow 16 + a^2 + 2\sqrt{(16+a^2)(49+b^2)} + 49 + b^2 =$
$= 16 + 8b + b^2 + 49 + 14a + a^2 \Leftrightarrow 65 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{(16+a^2)(49+b^2)} =$
$= 65 + a^2 + b^2 + 8b + 14a \Leftrightarrow 2\sqrt{(16+a^2)(49+b^2)} = 8b + 14a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{(16+a^2)(49+b^2)} = 2(4b + 7a) \Leftrightarrow \sqrt{(16+a^2)(49+b^2)} = 4b + 7a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (16+a^2)(49+b^2) = (4b + 7a)^2 \Leftrightarrow 16 \cdot 49 + 16b^2 + 49a^2 + a^2b^2 =$
$16b^2 + \cancel{28}\,56ab + 49a^2 \Leftrightarrow 784 + a^2b^2 = 56ab$. Заменим ab на x, имеем: $784 + x^2 = 56x \Leftrightarrow x^2 - 56x + 784 = 0 \Leftrightarrow$
$(x - 28)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 28 = ab$, т.е. площадь квадрата $EDFC = 28$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 0 1 3 4 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 продолжение.

т.к. $ab=28$ и площадь $\triangle ABC=(4+b)(7+a)$, то минимум этой площади достигается при минимальной сумме $a+b$. по теореме сумма двух неизвестных множителей при заданном произведении является минимальной при равенстве этих множителей, т.е. $a=b$ и $ab=a^2=28 \Leftrightarrow a=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ для минимизации площади $\triangle ABC$.

площадь $\triangle ABC = \frac{1}{2} AC\cdot BC = \frac{1}{2}(4+2\sqrt{7})(7+2\sqrt{7}) = \frac{1}{2}(28+8\sqrt{7}+14\sqrt{7}+28)=\frac{1}{2}(56+22\sqrt{7}) = 28+11\sqrt{7}$

Ответ: $28+11\sqrt{7}$

Пусть $\angle ABC=\alpha$, тогда $\angle BDF=90^\circ-\alpha$

по теор. о сумме $\angle\triangle$, $\angle ADE=$ ~~$180^\circ-\angle BDF-\angle EDF=$~~ $180^\circ-\angle BDF-\angle EDF = 180^\circ-(90^\circ-\alpha)-90^\circ)=\alpha$.

т.к. $\angle ADE=\angle ABC=\alpha$ и $\angle AED=\angle BFD=90^\circ$, то $\triangle ADE \sim \triangle DBF$. сумма их площадей при $ab=28$ минимальна при их равенстве. т.е. $DE=a=BF=7 \Leftrightarrow DE=7=BF$ и $DF=AE=a=4$. и $\frac{1}{2}(a+7)(b+4)=\frac{1}{2}(14\cdot 8)=56$

не д-но

только ссылка на т-му

Ответ: 56.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 3 Раскрасим квадрат в 4 цвета как показано на рисунке:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
3	1	2	1	2	$\boxed{1}$	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
5	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
6	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
7	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
8	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
9	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
10	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
11	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

каждая клетка имеет координату вида (m, n), где m — номер строки, n — номер столбца если m - нечетное число и n - нечетное, то клетка раскрашивается в цвет „1"; если m — нечетное, n — четное, то клетка раскрашивается в цвет N 2; если m — четное и n — нечетное, клетка раскрашивается в цвет N 3, если m - четное и n - четное, то клетка раскрашивается в цвет N 4.

Заметим, что прямоугольники 1×4 и 4×1 в зависимости от расположения в той или иной строке (или столбце) могут иметь следующие раскраски: 1212 (2121), 3434 (4343), 1313 (3131) или 2424 (4242), т.е. имеют две клетки одного какого-то цвета и две клетки другого цвета, а это значит, что клеток всех цветов должно быть четное количество, т.е. четное кол-во клеток цвета N 1, четное кол-во клеток цвета N 2, четное кол-во клеток цвета N 3 и четное кол-во клеток цвета N 4. Клеток цвета N 1 — 36-1=35 (вычитаем вырезанную клетку), цвета N 2 — 30, цвета N 3 - 30, цвета N 4 — 25. Т.к. клеток цвета N 1 и N 4 — нечетное ~~число~~ количество, то замостить фигуру не получится. Ответ: НЕ получится

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 2 0 1 3 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(x^2+2x+4)(x^2-7x+4)=10x^2$.

Заменим x^2+4+2x на a, имеем ($a=x^2+2x+4$)

$a(a-9x)=10x^2$

$a^2-9ax=10x^2 \Leftrightarrow a^2-9ax=x^2+9x^2 \Leftrightarrow$

$a^2-x^2=9x^2+9ax \Leftrightarrow (a-x)(a+x)=9x(a+x) \Leftrightarrow$

$a=-x$?

$a-x=9x \Leftrightarrow a=10x$, но $a=x^2+4+2x \Leftrightarrow$

следовательно $10x=x^2+4+2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-8x+4=0 \Leftrightarrow D=64-16=48$

$x_1=\frac{8+\sqrt{48}}{2}=4+\sqrt{12}$; $x_2=\frac{8-\sqrt{48}}{2}=4-\sqrt{12}$.

Ответ: $x_1=4+\sqrt{12}$; $x_2=4-\sqrt{12}$

Не рассмотрен 1 случай (корней там нет)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M A 0 0 0 2 0 1 3 4 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

каждый из 5 черных бельчат по условию знаком с половиной т.е. с $\frac{100}{2}=50$ серых бельчат, это значит, что есть $50\cdot 5=250$ ~~обоюдных~~ взаимных знакомств

Предположим, что все серые бельчата знакомы меньше, чем с половиной черных, т.е. каждый из серых бельчат знаком максимум с 2 черными, тогда таких знакомств максимум $2\times 100=200<250$, значит есть серые бельчата, знакомые с половиной или больше черных бельчат. чтобы максимизировать количество серых бельчат, знакомых с двумя черными, предположим, что оставшиеся серые бельчата дружат со всеми пятью черными.

у нас все 100 серых на данный момент бельчат дружат с 2-мя черными бельчатами и подходят под условие, т.е. имеется $100\times 2=$ $=200$ дружб, но остается еще $250-200=$ $=50$ дружб. добавим $\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$ (округлим вниз до 16) 16 серым бельчатам (у которых как и у остальных серых бельчат по 2 друга - черных бельчат) еще 3 друзей черных бельчат, останется еще $50-3\cdot 18=2$ дружбы с черным бельчонком, их тоже отдадим какому-то серому бельчонку с 2-мя друзьями (черными бельчатами). имеем: 16 серых бельчат, дружащих с пятью черными и одного серого дружащего с четырьмя черными, остается максимальное количество, а именно $100-16-1=83$ серых бельчонка, дружащих ~~с черными~~ меньше чем с половиной черных (с двумя из пяти - $\frac{2}{5}=40\%$).

Ответ: 83 бельчонка.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA0002038826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
10	10	5	20	20		65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть x – это количество двоек входящих в сумму, а y – это количество троек входящих в сумму. Поэтому очевидно, что $x \in N$ и $y \in N$

Так как необходимо найти количество сумм, где ~~слагаемых~~ слагаемых равных 3 больше. А число 2025 представлено в виде суммы слагаемых равных 2 или 3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2025 = 2x + 3y \\ x < y \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2025-2x}{3} \\ x < y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2025-2x}{3} \\ x < \frac{2025-2x}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2025-2x}{3} \\ 3x < 2025-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2025-2x}{3} \\ 5x < 2025 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2025-2x}{3} \\ x < 405 \end{cases}$$

Заметим, что $y \in N$, при только том, если

$$2025 - 2x \underset{3}{\equiv} 0$$

$$3^4 \cdot 5^2 - 2x \underset{3}{\equiv} 0$$

А как не трудно заметить это выполняется при $x \underset{3}{\equiv} 0$, а при $x \underset{3}{\equiv} 1$, ~~то~~ $3^4 \cdot 5^2 - 2x \underset{3}{\equiv} 2$, а

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 0 3 8 8 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжение)

при $X \underset{3}{\equiv} 2$; $3^4 \cdot 5^2 - 2X \underset{3}{\equiv} 1$

Значит X должен выполнять условия:

$$\begin{cases} X \in \mathbb{N} \\ X \underset{3}{\equiv} 0 \\ X < 405 \end{cases}$$

Так как $X \in \mathbb{N}$ и $X < 405$, то X может равняться 1; 2; ...; 404. То есть всего 404 значения, которые может принимать X.

А так как $X \underset{3}{\equiv} 0$, то под это подходит каждое 3-ье по ~~ех~~ нумерации число. 0, 1; 2; 3; 4; 5; 6

Из всех значений которые может принимать X, составим группы по 3.

$404 = 3 \cdot \underbrace{134}_{\text{число целых наборов по 3 значения}} + \underbrace{2}_{}$

остаток, они не входят в набор ~~целый~~ по 3, а в наборе каждое 3 подходит по нумерации, а у этих чисел нумерация 1 и 2, то есть эти не подходят.

Значит X может принимать 134 значения, так что $y \in \mathbb{N}$ и $2025 = 2X + 3y$.

Каждому возможному X найдется своё значение y. Так что всего существует 134 суммы.

X может равняться 0

Ответ: 134 суммы

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 8 | 8 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Так как каждый черный бельчонок знаком ровно с пятью серыми бельчатами, то есть со 150 серыми бельчатами. Значит всех число с кем знакомы черные бельчата, будет равно $150 \cdot 5 = 750$ серых бельчат, конечно же некоторые повторяются в этой сумме.

Предположим, что число серых бельчат знакомых меньше чем с пятью черными бельчатами то есть с ~~X~~ 1 или 2 черными бельчатами, может быть равно 251.

Тогда необходимо, чтобы количество знакомых у этих 251 бельчат в сумме было минимально.

То есть верно, что у оставшихся 49 бельчат в сумме количество знакомых ~~их~~ черных бельчат было наибольшим, то есть 5.

$49 \cdot 5 = 245$ - бельчат знакомых между черными и серыми

Получается оставшиеся 251 бельчонок знакомы в сумме с $750-245 = 505$ бельчатами черными.

По принципу Дирихле:

Хотя бы 3 серых бельчонка знакомы с 3 черными бельчатами

$$\left(\frac{505}{251} = 2\frac{3}{251}\right)$$

Поэтому противоречие, 251 серых бельчат не могут быть знакомы с 1 или 2 черными бельчатами. $\boxed{\text{1 пункт 4.Т.М}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 8 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

15 (продолжение)

По изложенным рассуждениям, придем к тому что если 249 бельчат серых знакомы с 1 или 2 черными бельчатами.

То для их наименьшей суммы знакомых:

$51 \cdot 5 = 255$ — знакомых имеют оставшиеся 51 бельчонок

А эти 249 бельчат имеют в сумме знакомых

$750 - 255 = 495$

$\left(\frac{495}{249} = 1\frac{246}{249}\right)$ Принцип Дирихле не позволяет так, чтобы было у хотя бы 1 серого бельчонка 3 знакомых черных.

Пример:

247 бельчат — знакомы с 2

2 бельчонка — знакомы с 1

Они имеют 496 знакомых в сумме, по условию выполняется, только:

Другие из 51 полностью знакомы с 5 черными.

1 знаком с 4 черными.

И в сумме: $750 = 247 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 50 \cdot 5 + 4 \cdot 1$

$750 = 750$

Условие выполняется. Ч.Т.Д.

$\boxed{1 \text{ пункт}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 8 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Оценка:

$13 \cdot 9 = 117$ клеток в прямоугольнике

1 вырезали

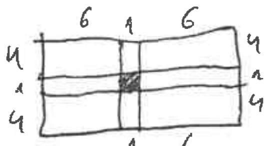
$117 - 1 = 116$ клеток

$1 \cdot 4 = 4$ клетки у фигуры

$\frac{116}{4} = 29$ фигур нужно закрасить

Можно заметить, что полосками 1×4 каким образом ты бы не закрашивал, в конце ты придешь к закраске прямоугольника. (со сторонами (хотя бы 1 - четная по количеству клеток) и (хотя бы 1 - кратная 4 по количеству клеток))

А у нас вырезанная клетка не дает разбить прямоугольник 9×13 на такие прямоугольники где 1 сторона по количеству клеток хотя бы четная и кратная 4.



Поэтому закрасить полосками 1×4 не получится

Ответ: нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000203 8826 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Замена: $2x^2+3x+3=t$

$t(t+2x)=35x^2$

$t^2+2\cancel{x}t-35x^2=0$

$D_1=\cancel{x^2}+35x^2=36x^2$

$\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{-x+6x}{1}=5x \\ t_2=\frac{-x-6x}{1}=-7x \end{array}\right.$

Обратная замена: $\cancel{t=5x}$ $t=2x^2+3x+3$

~~1. 5x(5x+2x)=~~

$\left[\begin{array}{l} ① \ 2x^2+3x+3=5x \\ ② \ 2x^2+3x+3=-7x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x^2-2x+3=0 \\ 2x^2+10x+3=0 \end{array}\right.$

Корни уравнения:

①. $D_1=\cancel{1}-6=-5$ $\Rightarrow \varnothing$ ②. $D_1=25-6=19$

$\left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-5+\sqrt{19}}{2} \\ x_2=\frac{-5-\sqrt{19}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 0 3 8 8 2 6 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

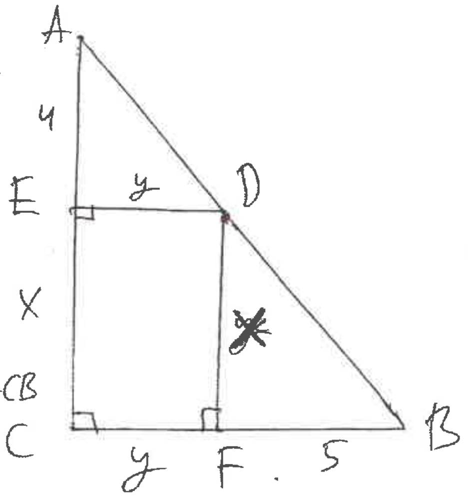
№2

Дано: $\triangle ADC$ – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$, $D \in AB$, $DE \perp CA$, $DF \perp CB$, $AE = 4$, $BF = 5$.

Найти:

$S_{\text{прям } ABC}$

Решение:



Пусть $x = CE$, $y = CF$

$\angle EAD$ – общий

$\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ (по 2 углам)

$ED = CF = y$ (т.к. $CEDF$ – прямоуг)

$CE = DF = x$ (т.к. $CEDF$ – прям/к)

$$\Downarrow \quad \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB}$$

$$\frac{AE}{AE + CE} = \frac{ED}{CF + FB}$$

$$\frac{4}{4 + x} = \frac{y}{y + 5}$$

$$4y + 20 = 4y + xy$$

$$xy = 20$$

$$x = \frac{20}{y}$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(4+x)(5+y)}{2} = \frac{20 + 5x + 4y + xy}{2} =$$

$$= \frac{20 + \frac{100}{y} + 4y + 20}{2} = 20 + \frac{50}{y} + 2y$$

Вариант № 1 MA0002038826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

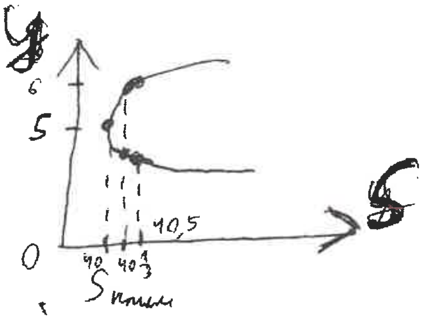
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

Рассмотрим функцию:

$$S(y) = 2y + \frac{50}{y} + 20$$

Нетрудно заметить, что эта функция имеет вид: (не парабола)



~~Подставим~~ Найдём S_{min}:

$y = 4$

$S(4) = 8 + 12\frac{1}{2} + 20 = 40,5$

$y = 5$

$S(5) = 10 + 10 + 20 = 40$

$y = 6$

$S(6) = 12 + 8\frac{1}{3} + 20 = 40\frac{1}{3}$

Значит S_{min} при $y = 5$, то есть $S_{min} = 40$

Ответ: 40

min не найден, оценки нет.

Пример – 5б, выр-е $S(y)$ – 5б. = 10б.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	2	0	4	3	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	3	19	15		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. $2x+5y=875$

$2x=875-5y$

$y>\frac{875-5y}{2}$

$2y>875-5y$

$7y>875$

$y>125$

$175=127+2(n-1)$

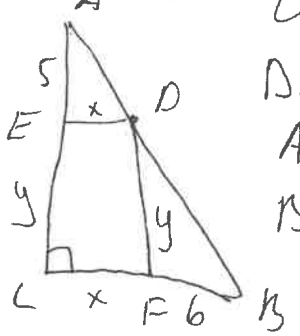
$40=2(n-1)$

$24=n-1$

$n=25$

Ответ: 25

2.



$CE=y$

$DE=x$

$AE=5$

$BF=6$

$\frac{AE}{DE}=\frac{DF}{BF}\Rightarrow\frac{5}{x}=\frac{y}{6}\Rightarrow xy=30$

S_{ABC}: $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}(5+y)(6+x)=$

$=\frac{1}{2}(30+5x+6y+xy)$

минимально когда

$5x=6y$. почему? нет д-ва.

Примера нет

$S_{min}=30+\frac{60}{2}=30+30=60$

Ответ: 60.

3. нельзя, т.к. нечетное количество клеток, и ни 15 ни 14 не делится на 4. поэтому будут оставаться незаполненные клетки

?

Ответ: нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4.

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

замена $3x^2-4x-4=t$

$t(t-x)=56x^2$

$t^2-xt-56x^2=0$ решим квадратное ур. относит. t:

$D=x^2+4\cdot56x^2=225x^2=(15x)^2$

$t_1=\frac{x+15x}{2}=8x$

$t_2=\frac{x-15x}{2}=-7x$

$3x^2-4x-4=8x$

$3x^2-12x-4=0$

$D=144+48=192$

$x_1=\frac{12+\sqrt{192}}{2}$ ← 6

$x_2=\frac{12-\sqrt{192}}{2}$

$3x^2-4x-4=-7x$

$3x^2+3x-4=0$

$D=9+48=57$

$x_3=\frac{-3+\sqrt{57}}{2}$

$x_4=\frac{-3-\sqrt{57}}{2}$

Ответ: $\frac{12+\sqrt{192}}{2}$; $\frac{12-\sqrt{192}}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{57}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{57}}{2}$

5. от обратного:

$500\le 2x+1000-5x$

$500\le1000-3x$

$3x\le500$

$x\le166\frac{2}{3}$

Пример?

Ответ: 166

Лист 2 из 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 9 | 5 | 5 | 2 | 6 |

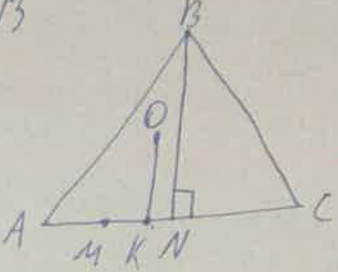
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	2	20	5	10		57

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3



Дано:

$AM=MC$ – по условию

$MK=KN>0$ – по условию

$AC=8$ по условию

решение:

$AC=8,\ AM=MC=\frac{8}{2}=4$

K–точка касания с окружностью $\Rightarrow AK=p-a=p-BC,$

$KC=p-AB=4-t \Rightarrow AB-BC=2t$ t не определено

По теореме Пифагора найдём BN

$BN^2=AB^2-AN^2=BC^2-NC^2$

$AB^2-BC^2=AN^2-NC^2=(4+2t)^2-(4-2t)^2=32t$

$\frac{AB^2-BC^2}{AB-BC}=AB+BC=\frac{32t}{2t}=16$

$P_{\triangle}ABC=AB+BC+AC=16+8=24$

Ответ: $P_{\triangle}ABC=24$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 9 | 5 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Четные числа не могут быть простыми, т.е. все числа д/б нечетными. 4,6,8 не могут стоять в конце. 5 не может стоять в конце, т.к. число будет делиться на 5.

Т.е. все четные цифры и 5 стоят внутри, в начале числа или это отдельные однозначные числа.

Последняя цифра: 1,3,7,9.

Варианты:

4: 41, 43, 47

6: 61, 67

8: 83, 89.

если 47, то остались 1,3,6,8,9.

если 89, то остались 1,3,6.

если 61, то осталась 3 это простое число.

$2+5+3+47+61+89=207$

Ответ: 207

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 9 | 5 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Раскрасим в шахматном порядке, 50 черных и 50 белых. Вместо окраски будем ставить фишки. Те белые клетки в которых стоят фишки — соседствуют только с черными. Остается решить вопрос сколько фишек надо поставить в белые клетки, чтобы касаться всех черных.

Каждая фишка касается четырёх чёрных клеток максимум, поэтому их не меньше чем $\frac{50}{4} = 13$.
Есть 18 клеток на периметре доски, те фишки которые касаются двух — их не менее девяти, имеют 3 соседних, $3 \cdot 9 + 5 \cdot 4 < 50$, поэтому даже 14 фишек не хватит. Те фишки которые касаются периметра не имеют 4 соседних — тогда они касаются только одной фишки периметра, и их не менее 18.
Предъявляем расстановку 15 фишек на белые поля, которые касаются в черных. Еще 15 фишек разместим зеркально этим на черные поля хватает 30 фишек (закрашенных клеток)

Ответ: 30

Нет примера, как расстав. фишки

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 9 | 5 | 5 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Существуют 2 бельчонка, сидящих на одинаковом расстоянии от всех других бельчат - это значит, что ~~существуют~~ существуют четыре различные вершины такие, что расстояние между ~~парами вершин~~ 1 и 2 вершинами равно расстоянию между ~~2~~ 3 и 4. Нет.

Рассмотрим все возможные расстояния между парами вершин правильного 80 угольника.

1: V_i и V_i+1

2: V_i и V_i+2

39: V_i и V_i+39 (диаметр, 80 четное)

(−)

Всего существует 39 различных возможных расстояний между парами вершин. У нас есть 34 бельчонка. Количество пар равно $34\cdot\frac{33}{2}=561$ Но требуется не это

Мы хотим доказать, что среди этих 561 расстояний есть хотя-бы два одинаковых. По принципу Дирихле, если у нас N предметов, которые нужно распределить по M ящикам, и $N>M$, то хотя-бы в одном ящике будет более одного предмета.

В нашем случае:

Предметы – пары ~~воробьев~~ (561 пара).

Ящики – расстояния между вершинами (39 расстояний)

Т.к. 561 больше 39, то по принципу Дирихле, как минимум два расстояния между парами должны быть одинаковыми.

$\Rightarrow$ Существуют как минимум две пары воробьев сидящих на одинаковом расстоянии друг от друга.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 9 | 5 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$$|x+1|-1=\frac{\{x\}}{|x-1|}$$

Правая часть неотрицательна при всех x, а в левой расстояние от x до -1, выбрасываем интервал $(-2;0)$ на котором решений нет. Подстановкой убеждаемся, что концы этого интервала -2 и 0 решения. Проверим остальные варианты.

1) $x\geqslant 0$ $\quad x=\frac{x-n}{x-1}$

где n целая часть x

$x-n=x^2-x$

$0\leq x^2-x<1$

$1<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$n=1$

$x-1=x^2-x$

$x=1$

– не попадает в ОДЗ

2) $x<-2$

$-x-2=\frac{x-n}{-x+1}$

где $n<-2$ целая часть x

$x^2+x-2=x-n<1$

$x^2+x-2=x-n<1$

$x^2+x-3<0$

$\begin{cases} x>-3 \\ n=-3 \\ x^2+x-2=x-3 \\ x^2+1=0 \end{cases}$

Больше решений нет.

Ответ: 2 решения $x=0$ и $x=-2$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	0	1		61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1. Нужно переставить цифры от одного до девяти, и разбить их на несколько чисел, чтобы все полученные числа были простыми. Найдем наименьшую возможную сумму этих чисел.

2. Заметим, что однозначные простые числа это: 2, 3, 5, 7. Их использование дают меньший вклад. Остальные цифры: 1, 4, 6, 8, 9 не являются простыми. Поэтому ~~их~~ нам нужно объединять в многозначные простые числа.

3. Рассмотрим вариант, где в ~~это~~ три однозначных простые: 2, 3, 5. Тогда останутся цифры: 1, 4, 6, 7, 8, 9. Из них составим три двузначных простых числа, используя каждую цифру ровно ~~один~~ один раз. Переберем возможные двузначные простые из этих цифр: 17, 19, 41, 47, 61, 67, 71, 79, ~~8~~ 89, 97. Нужно 3 числа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

числа без повторения цифр, покрывающие все 6 цифр. Подходят, например: 41, 67, 89 (цифры: 4, 1, 6, 7, 8, 9) Проверяем: 41, 67, 89 — все простые. Их сумма $41+67+89=197$. Вместе с 2, 3, 5 получаем: $197+10=207$

Ответ: 207.

№2

1. Пусть бельчата сидят в вершинах правильного 80-угольника, которые пронумерованы числами от 0 до 79. Расстояние между вершинами понимаем как число шагов по окружности, и вершина x равноудалена от вершин y, z, если $y+z=2x \pmod{80}$. Обозначим множество занятых вершин через S, $|S|=34$. Заметим, что сумма двух чисел одной четности четна, а разной — нечетна. Поэтому пары (y, z) с четной суммой — это пары одинаковой четности. Все такие пары разбивают S на два подмножества: A — четные числа, B — нечетные числа. Пусть $|A|=a$, $|B|=b$, $A+B=34$. Количество пар с четной суммой равно:

$N=\binom{a}{2}+\binom{b}{2}$. При $a=b=17$ получаем $N=272$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

В остальных случаях N еще больше. Таким образом, $N \geq 282$.

3. Каждая такая пара (y, z) дает некоторый центр $t = (y+z) : 2$ (число целое, т.к. сумма четна). Если $t \in S$, то бельчонок t равноудален от y и z. Нужно доказать, что таких центров в S не менее 2.

Предположим, что центров в S меньше 2, возможны 2 случая: ровно 1 центр или 0 центров.

Если ровно один центр $z_0 \in S$, то остальные 33 элемента не являются центрами. Но каждый другой центр (вне S) дает четное кол-во элементов (пары). Сумма четных чисел четна, а 33 нечетно — противоречие. $\Rightarrow$ одного центра быть не может.

Остается случай, когда центров в S нет вовсе. Тогда все N пар дают центры в дополнении T (46 вершин). Рассмотрим отдельно четные и нечетные числа. Без ограничения общности, можно считать, что $a \geq 17$ (иначе $b \geq 17$). (Рассуждение симметрично.)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Множество A состоит из a четных чисел. Поделив каждое из них на 2, получим множество $\bar{A}$ из a чисел в $\mathbb{Z}_{40}$. Условия ~~отсутс~~ отсутствия центра означает, что для ~~л~~ любых двух различных $x, y \in A$, их полусумма $(x+y):2 \notin A$. ~~A~~. В терминах $\bar{A}$, это означает, что в $\bar{A}$ нет трехчленных арифметических прогрессий. (т.к. если $x = 2\bar{x}$, $y = 2\bar{y}$, то $(x+y):2 = \bar{x}+\bar{y}$, и равенство $\bar{x}+\bar{y} = \bar{z}$. $\bar{z}$ дало бы прогрессию.) Таким образом $\bar{A}$ – подмножество $\mathbb{Z}_{40}$ без арифметических прогрессий длины 3. Известно что максимальный размер такого множества в $\mathbb{Z}_{40} = 15$ (например: числа, троичная запись которых ~~чисел~~ содержит только цифры 0 и 1: 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30, 31, 36, 37, 39 – их 15.)

Поскольку $a \geq 17$ – это невозможно. Противоречие.

5. Следовательно, наше предположение неверно, и в S обязательно есть хотя бы один центр. А учитывая док-во выше (невозможность 1 центра) вытекает, что их не менее двух. Таким образом найдутся по-крайней мере два бельчонка, каждый из которых сидит на равном расстоянии от двух

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

друг.
ЧТД.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

1. Пусть $AC = 8$. Точка M - середина AC, поэтому $AM = MC = 4$. Точки на AC располож. в порядке: A, M, K, N, C. обозначим $MK = KN = x$ (по условию). Тогда $AK = AM + MK = 4+x$, $KC = KN + NC$, $NC = MC - MK - KN = 4-2x$, откуда $KC = x + (4-2x) = 4-x$. Для вписанной окружности, касательные, проведенные из одной вершины равны. Пусть $AB = c$, $BC = a$, тогда $AL = AK = 4+x$, $CP = CK = 4-x$, где L, P точки касания на AB и BC соответственно. $\Rightarrow BL = AB - AL = c-(4+x)$, $BP = BC - CP = a-(4-x)$. Т.к. $BL = BP$ получаем
$c-4-x = a-4+x \Rightarrow C = a+2x$ (1). Высота BN опущена из вершины B, на AC, точка N - ее основание, поэтому $AN = AM + MK + KN = 4+2x$, $NC = 4-2x$. По т. Пифагора: в треугольниках $\triangle ABN$ и $\triangle CBN$: $AB^2 = AN^2 + BN^2$, ~~$BC^2 = NC^2 + AN$~~
$BC^2 = NC^2 + BN^2$ ~~Вычитаем, BC … AN^2 NC^2~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Вычитаем $c^2-a^2=AN^2-NC^2=(14+2x)^2-(14-2x)^2=32x.$ (2).

4. Подставим $c=a+2x$ из (1) в левую часть (2): $(a+2x)^2-a^2=4ax+4x^2=32x.$ При $x\neq0$, иначе точки M и K совпали бы, что противоречит условию. Делим на $4x$: $a+x=8 \Rightarrow a=8-x$, тогда из (1) $c=8+x$.

5. $P_{\triangle ABC}=a+b+c=(8-x)+8+(8+x)=24.$ Заметим, что x сократился, поэтому P не зависит от x и равен 24.

Условия: $0<x<2$ обеспечивают расположение точек, и при таких x все построения возможны (например: $x=1$, дает треугольник со сторонами 7, 8, 9, который существует.)

Таким образом искомый $P_{\triangle}ABC=24$.

Ответ: $P_{\triangle}ABC=24$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 2 1 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Заметим, что для любого действительного ~~числа~~ числа x выполняется равенство $\{x-1\}=\{x\}$, потому что прибавление целого числа не меняет дробную часть.

2. Тогда правая часть уравнения $\frac{\{x\}}{\{x-1\}}$

В условии $|x-1|$. →

равна $\frac{\{x\}}{\{x\}}=1$, но только при условии, что $\{x\}\neq 0$ (иначе знаменатель равен 0, и выражение не определено, т.к. на 0 делить нельзя)

Уравнение примет вид: $|x+1|-1=1$, откуда $|x+1|=2 \Rightarrow x+1=2$ или $x+1=-2$, т.е $x=1$ или $x=-3$. Проверим дробные части

при $x=1$ ~~имеем~~ имеем $\{1\}=0$, при $x=-3$ имеем $\{-3\}=0$. Оба значения не подходят, т.к. в них исходное выражение теряет смысл.

$\Rightarrow$ ни одно действительное число, не удовлетворяет уравнению.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: ~~...~~ нет корней

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

1. Нужно закрасить наименьшее кол-во клеток в квадрате 10×10, так, чтобы у каждой клетки, включая закрашенную, была соседняя по стороне закрашенная ~~...~~ клетка.

2. Рассмотрим разбиение квадрата на горизонтальные (горизонтальные) полосы. В каждой полосе можно ~~...~~ использовать комбинацию полных и частичных строк, чтобы уменьшить общее число.

Оптимальная конструкция: взять три ~~...~~ полные строки (например: 2, 5, 8) - в них закрашены все 10 клеток. Итого 30 клеток. Они обеспечивают вертикальных соседей для строк (1-9). Оставшуюся строку 10 можно покрыть частично, используя тотальное доминирование пути длины 10, которое требует 6 клеток (например: ~~Е~~ клетки в столбцах: 2, 3, 5, 6, 8, 9). Однако, так получается 36 клеток.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

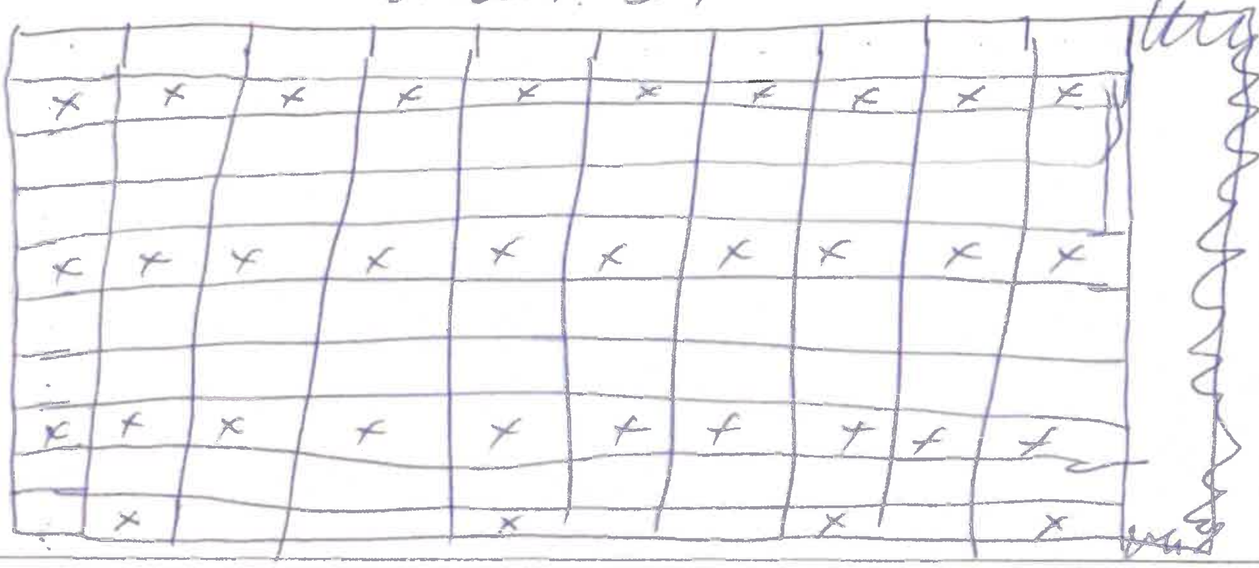
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4. более экономно
вместо долей ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ частичной строки, взять 2 последние
строки (9, 10). И орудовать в них ~~[illegible]~~ тотально
доминировать на прямоугольнике 2×10.
для этого достаточно 7 клеток (например;
закрасить обе клетки в столбцах 2, 5, 8
и одну клетку в столбце 10).
Тогда общее число: 3 полные строки (30) +
+7 = 37
5. Но также есть другие комбинации, но известно
что мин. число для квадрата 10×10 – 34.
Пример такой раскраски существует.
Ответ: 34



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 1 6 8 7 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	20	20	15		83

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

1) $2x^2+3x+3=t \Rightarrow 2x^2+5x+3=t+2x$ Замена

$t\cdot(t+2x)-35x^2=0$

$t^2+2xt-35x^2=0$ $a=1,\ b=2x,\ c=-35x^2$

$D=4x^2+140x^2=144x^2\geq 0$ $(x^2\geq 0)$

1. $t_1=\frac{-2x+\sqrt{144x^2}}{2}=5x$

2. $t_2=\frac{-2x-\sqrt{144x^2}}{2}=-7x$

3. $t_3=\frac{-2x}{2}=-x$

2) Обратная замена.

1. $2x^2+3x+3=5x \rightarrow 2x^2-2x+3=0$ $D=4-24=-20<0 \Rightarrow$ нет корней

2. $2x^2+3x+3=-7x \rightarrow 2x^2+10x+3=0$ $D=100-24=76>0 \Rightarrow$

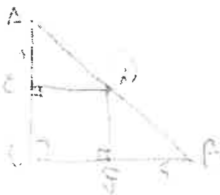
$x_1=\frac{-10+2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-10-2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

3. $2x^2+3x+3=-x \rightarrow 2x^2+4x+3$ $D=16-24<0 \Rightarrow$ нет корней.

Ответ: $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$, $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

№2



$AE=4$ $FB=5$ $S_{ABC}=?$

1) $S_{ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{(AE+EC)\cdot(CF+FB)}{2}=\frac{(4+EC)(5+CF)}{2}$

2) $S_{AED}+S_{DFB}+S_{ECFD}=S_{ABC}$

1) $2CF+10+0{,}5EC\cdot CF+2{,}5EC=S_{ABC}$

2) $\frac{AE\cdot CF}{2}+EC\cdot CF+\frac{EC\cdot FB}{2}=2CF+EC\cdot CF+2{,}5EC=S_{ABC}$

$2CF+10+0{,}5EC\cdot CF+2{,}5EC=2CF+EC\cdot CF+2{,}5EC$

$EC\cdot CF=20$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА 00021 68726
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

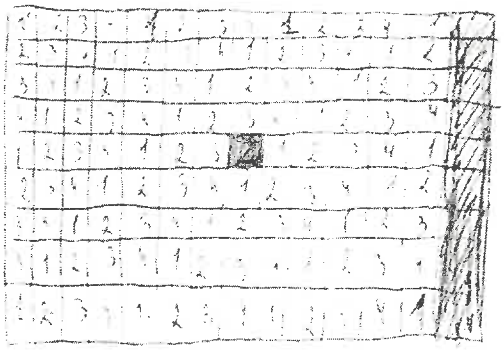
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

чтобы площадь АВС была минимальной [illegible] стороны АС и СВ были наименьшими [illegible] Возьмём [illegible] $9/4$ [illegible] $9/4$ [illegible] стороны $a=4$, $b=C=5$ [illegible] $(4-2a)$ [illegible] Ответ [illegible]

Нет д-ва min.

№ 3.
Раскрасим нашу доску таким способом:



В 1 полоске 1×4 будут все цифры (1–4) независимо от того 1×4 или 4×1 ⇒ в нашем прямоугольнике 13×9 1, 2 и 3, 4 должны быть поровну, чтобы заполнить полосками 4×1 и 1×4, но посчитав какие цифры в заполнили что все 1 – 30 штук, 2 – 29 штук, 3 – 29 штук, 4 – 28 штук, если мы заполним 28 полосок, то у нас останется 1 – 2 штуки, 2 – 1 штука, 3 – 1 штука, которых полосы мы заполнить не сможем, ведь, как бы мы не поставили, в полоске обязательно должны быть 1, 2, 3, 4 по нашей раскраске, что с оставшимися 1, 1, 2, 3 сделать не получится ⇒ Ответ: нет

№ 1.
$2025 = 2m + 3n$, m – кол-во 2, n – кол-во 3 [illegible] 3, $3n$ [illegible] 3 ⇒ $2m$ [illegible] 3, 2/3 ⇒ m [illegible] 3 и представим как $m = 3K$. Заменим [illegible] значение m:

$2025 = 6K + 3n = 3(2K+n) \rightarrow 2K+n = 675$

Каждый раз кол-во двоек увеличивается на 3, а кол-во троек уменьшается на 2 (при уменьшении кол-ва 2) $n > m$, нужно найти m и n при которых $n > m$ [illegible] [illegible].

Лист 2 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA0002168726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

[illegible] когда $m - n$ [illegible] $m = 405 - x$, [illegible] заметим, что каждый раз увеличивая кол-во x на 3, то кол-во [illegible] увеличивается на 2 => $405 + 2 = n$, $m = 405 - 3 = 402$ => $m < n$ и $> m$, это $n = 407$. => $407 \leq n \leq 675$, n [illegible], иначе $n = 2 \cdot m$, а $m \in \mathbb{Z}$ => в промежутке от 675 до 407 нам подходят только нечётные числа => всего для n подходит 135 вариантов => Всего существует 135 [illegible] в которых [illegible] [illegible] равен 3

Ответ: 135.

№5.

[illegible], что может быть такое, что 251 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] => всего 49 [illegible] [illegible] [illegible] с 2 [illegible]. Всего [illegible] [illegible], [illegible] из них [illegible] 150 [illegible] 150 от 250. [illegible] [illegible] 150 [illegible] [illegible] [illegible] в [illegible].

q_1 – 150 (серых от 251, которые дружат с 2 или менее черными [illegible])

q_2 – 151 – (49) (серых от 251, которые дружат с 2 или менее черными [illegible])

q_3 – 50

q_4 – [illegible] (49)

q_5 – 49 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 251 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

А пример реализации?
(Кто с кем дружит, чтоб выполн. условие о половине.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 7 | 6 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
15	–	7	19	20		61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 1

Заметим что $2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow 2025 \vdots 3$

и можно ~~[illegible]~~ представить 2025 как все „3"

то есть кол-во $2 \vdots 0$, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

заметим что мы можем представить 2025 из „2" и „3" только тогда когда часть-целое число „3" а кол-во „2" $\vdots 3$. пример (чисел $\vdots 3$) $2025 \vdots 2-0$ 2022 x, $2019 \vdots 2-3$, 2016 : x; 2013: 2-6; 2010 x; 2004 : 2-9; 2004 x; 2001 : 2-12; 1998 - x; 1995 : 2-15.

Видим закономерность написанную выше, кол-во „2" $\vdots 3$ а „3", нас интересуют случаи когда число слева состоит из большего кол-ва „3" чем кол-во „2"

при кол-во „2" 406, кол-во „3" равно $\frac{2025 - 406 \cdot 2}{3} = \frac{1213}{3} = 403$

$406 > 403 \Rightarrow$ кол-во „2" макс < 406, при 402 кол-во „3" $\frac{2025 - 402 \cdot 2}{3} = \frac{1221}{3} = 407$, $407 > 402$

макс кол-во 2ек $= 402$, но а т.к. чтобы условие выполнялось мы должны брать кол-во 2ек $\vdots 3$ ~~[illegible]~~ 0 кол-во подходящих случаев $\frac{402}{3} = 134$. Значит количество сумм где кол-во 2 < кол-ва 3ек = 134

Ответ: 134

$\underbrace{0, 3, \ldots, 134}_{135}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 1 7 6 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

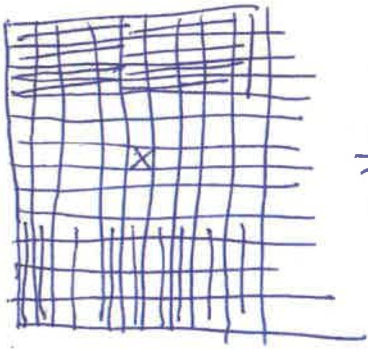
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

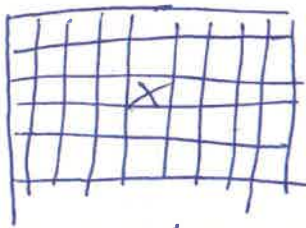
N 3

Оценка – 13·9 – 1 = 116 (V)

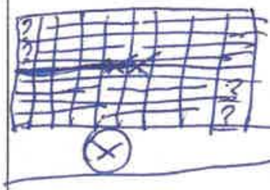
уточним оценку:

I рассмотрим прямоуг 5×9 который „вырежем из изначального прямоуг стой на вырезанной клеткой. это не будет влиять на наше рассмотрение т.к мы вырезали 2 прямоуг 4×9. В нем мы можем как угодно расположить 1×4 и 4×1, но т.к четность оставшихся клеток не меняется мы можем рассматривать оставшийся 5×9 сказав что 2 · 4×9 не влияют на вместимость оставшихся.

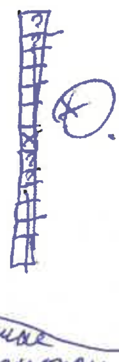




а как бы мы здесь не рассматривали заполнить все нашими прямоуг не получится т.к у нас (2×9) (2 строки 2×9) и 1 с вырезом как бы мы не пытались разложить, не получится т.к „вырез" всегда оставляет 2 прямоуг 2×1 или 1×2 т.к для корректного заполнения в таком прямоуг с 1 вырезанной клеткой, клетка должна быть ~~......~~ строго в углу для заполнения прямоуг прямоугольника с размером четностью 1 стороны, иначе не получится, и это известный факт не требующий доказательства. пример



II либо возьмем и „вырежем 2 прямоуг 13×4



Из моего утверждения следует что будет получатся разместить прямоуг с 1 четной стороной в нечет прямоуголь, только когда вырез в углу:

2×1 в 3×3

4×1 в 5×5

Ответ: нет, не получится

так будет работать всегда но не в случае с вырезом по центру.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	1	7	6	1	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ ~~3~~ 4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$4x^4+10x^3+6x^2+6x^3+15x^2+9x+6x^2+15x+9-35x^2=0$

$4x^4+16x^3+\cancel{24x}-8x^2+24x+9=0$

$4x^4+16x^3-8x^2+24x+9=(2x^2-2x+3)(2x^2+10x+3)=0$

1) $2x^2-2x+3=0$

$D=4-8\cdot 3 \Rightarrow D<0$

решений нет

2) $2x^2+10x+3=0$

$D=100-24=76=38\cdot 2=19\cdot 4$

$x_{1,2}=\dfrac{-10\pm 4\sqrt{19}}{4}=-2{,}5\pm\sqrt{19}$

$\sqrt{4}=2$

Ответ: $-2{,}5+\sqrt{19}$; $-2{,}5-\sqrt{19}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000217612С
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

т.к каждый черпает с 150с

всего $150 \cdot 5 = 750$ ребер в 2g графе

пусть A – нужное кол серое с $x_i \le 2$ а $300-A$ с $x_i \ge 3$

макс значение при $2A + 5(300-A) = 750$ $300-A$ при $x_i = 5$
A с $x_i = 2$

$2A - 5A + 1500 - 750 = 0$

$750 = 3A$ $a = 250$, значит больше 250 быть

не может т.к мы использовали макс, 251 не

подходит.

Приведем пример с $A = 249$

249 со степ 2 = 498 ребер
48 со степ 5 = 240 ребер
3 со степ 4 = 12

750 – сумма степеней

совпадает значит такой
пример возможен
что и требовалось указать.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00021868 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
15	8	20	20	18		81

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

~~Найдём такой x (кол-во слагаемых 2 и 3), при~~

~~Найдём такое кол-во~~

Пусть x — кол-во слагаемых одного типа. Найдём такое x, при котором кол-во слагаемых, равных 2 и равных 3, одинаковое:

$2x + 3x = 2025$

$5x = 2025 \; | : 5$

$x = 405$

Т.е. нам нужно найти кол-во сумм этих двух слагаемых, равных 2025, в которых троек > 405.

Заметим, что сумма всех слагаемых, равных 2, всегда чётна (т.к. 2 – чётное), => сумма всех слагаемых, равных 3, должна быть нечётна (т.к. 2025 – нечётное), тогда для любой суммы слагаемых, равных 3, можно будет получить 2025 последовательностью прибавления 2.

Рассмотрим случай с максимальным кол-вом троек в сумме — 673 тройки + 0 двоек = 2025. Тогда нам подойдёт любая сумма, в которой сумма троек нечётна, при этом троек > 405, но ≤ 673. Если сумма троек чётна, то их кол-во должно быть нечётно (иначе чётное · 3 = чётное). Значит, нам подходят суммы, в которых 407, 409, 411, ..., 669, 671, 673 тройки. Таких сумм $(673 - 405) : 2 = 134$ штуки

т.к. из всех количеств троек каждое второе нечётно

+1

Ответ: 134

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00021868 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Раскрасим в получившейся фигуре клетки в 4 цвета диагональными полосками

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

(пример такой раскраски, где 1,2,3,4 – разные цвета)

Тогда заметим, что в любой фигуре 1×4 или 4×1 будет находиться по одной клетке каждого из 4 цветов, => во всей фигуре клеток каждого из цветов одинаковое количество, равное ((13×9)−1):4 = 29. Проверим, так ли это. Посчитав кол-во клеток каждого цвета, заметим, что есть цвет, в который раскрашено 30 клеток, и цвет, в который раскрашено 28 клеток, => Ответ: нельзя

№5

Если кол-во серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной чёрных бельчат (2 или 1 чёрными бельчатами), равно 249, то оставшиеся 51 серый бельчонок могут быть знакомы больше, чем с 2 чёрными бельчатами каждый. Допустим, что эти 51 серых бельчат знакомы с каждым из чёрных. Т.к. всего каждый чёрный бельчонок должен быть знаком с 300:2 = 150 серыми бельчатами, то из других 249 серых бельчат каждый чёрный должен знать 99 серых. Тогда суммарное кол-во знакомств чёрных бельчат с 249 серыми должно быть равно 99 ×5 = 495 (т.к. всего чёрных бельчат 5), при этом суммарное кол-во знакомств 249 серых бельчат с чёрными не может превышать 249×2 = 498

т.к. каждый серый знаком максимум с 2 чёрными.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	1	8	6	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$495 < 498$, т.е. условие соблюдается и мы доказали, что такое возможно. Надо показать, что есть реализация

Аналогично докажем, что кол-во серых бельчат, знакомых только с 2 или 1 чёрными бельчатами не может быть равно 251. В этом случае серых бельчат, знакомых более, чем с 2 чёрными бельчатами каждый, может быть лишь 49. Тогда из 251 серых бельчат каждый чёрный должен знать 101 серого, т.е. суммарное кол-во знакомств чёрных бельчат с 251 серыми равно $101 \times 5 = 505$, при этом суммарное кол-во знакомств 251 серых бельчат не может превышать $251 \times 2 = 502$

$505 > 502$, следовательно, этот случай невозможен.

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3) = 35x^2$

Пусть $t = 2x^2+3x+3$, тогда $t \cdot (t+2x) = 35x^2$

$t^2 + 2xt - 35x^2 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4x^2 + 140x^2 = 144x^2$, $D > 0$ (т.к. $x^2 > 0$)

заметим, что $x^2 \neq 0$ в нашем случае, т.к. тогда при подстановке в исходное выражение

$(0+3)(0+3) = 0$

$9 = 0$

$\varnothing$

$t_1 = \frac{-2x - \sqrt{144x^2}}{2} = \frac{-2x - 12x}{2} = -7x$

$t_2 = \frac{-2x + \sqrt{144x^2}}{2} = \frac{-2x + 12x}{2} = 5x$

Обратная замена:

$2x^2 + 3x + 3 = -7x$

$2x^2 + 10x + 3 = 0$

$D = 100 - 24 = 76$, $D > 0$

$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{76}}{4} = \frac{-10 - 2\sqrt{19}}{4} = \frac{-5 - \sqrt{19}}{2} = -0{,}5(5+\sqrt{19})$

$x_2 = \frac{-10 + \sqrt{76}}{4} = \frac{-10 + 2\sqrt{19}}{4} = \frac{-5 + \sqrt{19}}{2} = 0{,}5(\sqrt{19} - 5)$

$2x^2 + 3x + 3 = 5x$

$2x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = 4 - 24 = -20$, $D < 0$

$\varnothing$

Ответ: $x = -0{,}5(5+\sqrt{19})$; $x = 0{,}5(\sqrt{19} - 5)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 8 | 6 | 8 | 2 | 6 |

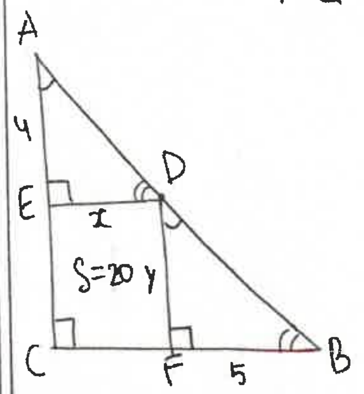
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Пусть $ED = x$, $DF = y$

$tg\angle A = \frac{x}{4}$

При этом $\triangle DBF \sim \triangle ABC$ ($\angle C = \angle F = 90^\circ$, $\angle B$ – общий), т.е.

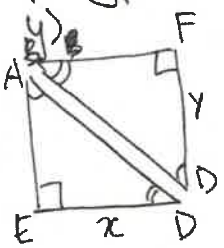
$\angle FDB = \angle A$, $\Rightarrow tg\angle FDB = \frac{5}{y} = tg\angle A = \frac{x}{4}$

$\frac{5}{y} = \frac{x}{4}$

$xy = 20$

Заметим, что S_{CEDF} также $= xy$, [redacted] т.е. $S_{CEDF} = 20$

При $AD = DB$ $S_{AED} + S_{DFB} = xy$ (т.к. полученная сложенная фигура является прямоугольником со сторонами x и y)



Следовательно, $S_{ABC} = S_{AED} + S_{DFB} + S_{CEDF} = 40$?

~~Заметим, что при $AD \neq DB$ сумма $AD + DB$ остаётся такой же~~

Ответ: 40

Частный случай, можно засчитать за пример

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000219 7226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	10	20	0	15		65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1 Пусть x – кол-во „троек",
а y – кол-во „пятерок",
Тогда запишем уравнение:

$$3x + 5y = 1120$$

Попробуем найти вариант с наименьшим кол-вом пятерок в записи. Для этого будем вычитать пять из исходного числа, пока не получим число, кратное 3.

1120
1115
1110 – вот первое число кратное трем, при нем кол-во троек будет наибольшим.

$x_0 = 370$
$y_0 = 2$

Теперь будем дальше вычитать из числа пятерки, и тогда получим другие варианты разложение:

1120
1115
1110 *
1105
1100
1095 *
1090
1085
1080 *   * – числа, кратные трем

Заметим, что каждое 3 число будет кратно 3. Это происходит, потому что для того, чтобы получилась сумма, наше число должно быть кратно 5 и 3, т.е кратно 15. Такие числа встречаются ровно с интервалом в 3.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 1 9 7 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рамках страницы

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Посмотрим на значения х и у при 1095 и 1080:

1095: $x_1 = 365$ 1080: $x_2 = 360$

$y_1 = 5$ $y_2 = 8$

Заметим, что наши числа изменяются равномерно; х с каждым шагом ~~изменяется~~ уменьшается на 5, а у увеличивается на 3.

Значит разница между х и у уменьшается на 8 каждое действие.

Назовем 1110 первым действием, ~~#~~ 1095 вторым и т.д. и посчитаем ~~на~~ до какого действия х будет больше

1 действие: $x_0 = 370$ $y_0 = 2$ разница – 368 $368 : 8 = 46$

46 действие: $x = 145$, $y = 137$, на след. действии х и у сравняются;

Проверка: $145 \cdot 3 + 137 \cdot 5 = 435 + 685 = 1120$

Ответ: 46 сумм

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 9 | 7 | 2 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

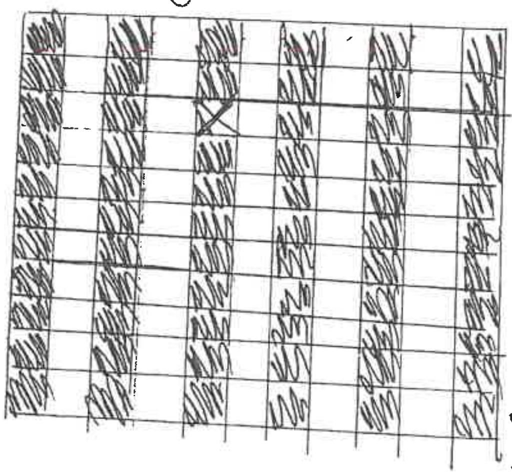
ВНИМАНИЕ! Принимается только то, что написано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

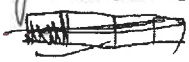
№3

Применим к нашей сетке полосатую раскраску (см. рисунок)



С учетом вырезанной клетки получаем 65 черных клеток и 55 белых клеток

Д-рим черные клетки: прямоугольником 4×1 или 1×4 мы можем замостить либо 4 черные клетки:

; либо 2 черные клетки:  / 

либо ни одной: 

~~Тогда пусть m кол-во~~ мы можем посчитать кол-во замощённых клеток через уравнение.

Пусть m – кол-во замощений по 4 черные клетки;

n – кол-во замощений по 2 черные клетки;

k – кол-во замощений по 0.

Получаем, что чтобы замостить всю доску должно выполняться ~~уравнение~~ равенство:

$4m+2n+0k=65$;

→ так же бывает $4+4=4$

Однако все слагаемые четные, а сумма нечетна => противоречие => Ответ: нет, нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 1 9 7 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Оценка: в сумме 5 черных бельчат дружат с 250 серыми бельчатами. А значит, каждый серый бельчонок знаком в среднем с 2,5 бельчатами черными. Следовательно, хотя бы 1 знаком с 2 или меньше бельчатами.

Чтобы серый бельчонок был знаком с меньшей половиной черными бельчат, он должен быть знаком максимум с 2 черными бельчатами.

Среднее кол-во знакомств высчитывается так:

$$\frac{\text{все знакомства серых с черными}}{\text{кол-во серых бельчат (100)}} = 2{,}5 \text{ — среднее значение.}$$

Максимальное кол-во бельчат с 2 знакомствами будем высчитывать путем сложения их с бельчатами с 5 знакомствами → тогда, очевидно, для получения 2,5 больше кол-во бельчат с ≤ 2 знакомствами брать будет нельзя.

X – кол-во бельчат с 2 знакомствами.

Y – кол-во бельчат с 5 знакомствами

$$\frac{2X+5Y}{100} = 2{,}5$$

$$2X+5Y=250$$

Макс значение X: $X=83$, $Y=17$ $83\cdot2+17\cdot5=16\cancel{8}+85=201 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Больше 83 бельчат с 2 знакомствами взять не получится

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 1 9 7 2 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пример: 83 серых бельчонка с 2 знакомствами
1 бельчонок с 4 знакомствами
16 бельчат с 5 знакомствами

$83\cdot2+1\cdot4+16\cdot5=250$

Ответ: 83 серых бельчат

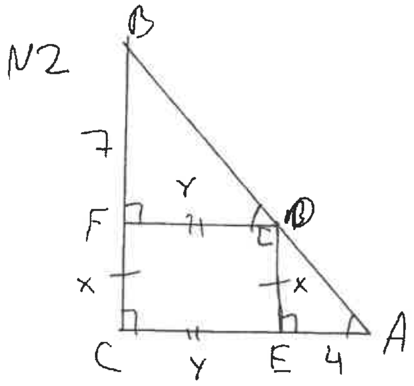
Нет реализации.

Примечание: Почему не получится взять 84 серых бельчонка?

Потому что тогда среднее значение будет не больше, чем:

$$\frac{84\cdot2+16\cdot5}{100}=\frac{168+80}{100}=\frac{248}{100}=2{,}48<2{,}5\rightarrow \text{противоречие.}$$

N2



Дано: $\triangle ABC$ — прямоуг.
AB — гипот.
$DE\perp AC$; $DF\perp BC$
$BF=7$
$EA=4$

Найти: $\min S_{ABC}=?$

~~1) $\triangle FBD \sim \triangle DEA$~~

$\angle BFD=$

1) Пусть $FD=Y$; $DE=X$

$\angle C=\angle CED=\angle CFD\Rightarrow CFDE$ — прямоугольник

$\Rightarrow FD=CE=Y$, $FC=DE=X$ (св-во сторон парал.)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 9 | 7 | 2 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Придержте только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) $\triangle DEA \sim \triangle BFO$ (призн. под. по 2 уг) $\Rightarrow \frac{EA}{FO} = \frac{DE}{BF}$ (по опр под)

$\angle BFO = \angle DEA = 90°$

$\angle A = \angle FOB$ (т.к. соотв. уг)

$\frac{4}{y} = \frac{x}{7}$

$xy = 28$

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2}(x+7)(y+4) = \frac{1}{2}(xy + 4x + 7y + 28)$

$= \frac{xy}{2} + 2x + 3{,}5y + 14 = 2x + 3{,}5y + 28$

$x = \frac{28}{y} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{56}{y} + 3{,}5y + 28$

Посмотрим различные значения y и найдем наименьшее:

y	28	14	7	6	5	4	3	2	1
S	~~51~~	~~60,5~~	~~$57\frac{1}{3}$~~	~~56,7~~	56,7	56	$57\frac{1}{3}$	63	87,5

128 81 60,5 $57\frac{1}{3}$

у не об. целое!

Значит наименьшее значение достигается при $y=4$

$S_{ABC(min)} = 56$

№4 $(x^2+2x+4)(x^2-7x+4) = 10x^2$

$x^2+2x+4=0$?

$D = 4 - 4 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow x^2+2x+4>0$

$10x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 4 \geq 0$

$x^2 - 7x + 4 = 0$

$D = 49 - 4 \cdot 4 = 33;\ \sqrt{D} = \sqrt{33}$

$x_1 = \frac{7+\sqrt{33}}{2}$

$x_2 = \frac{7-\sqrt{33}}{2}$

−

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

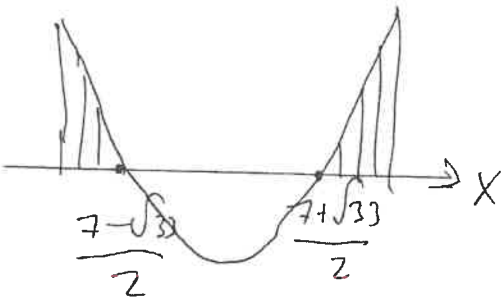
Вариант № 3 | МА000219726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Ограничение: $x \in \left(-\infty; \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	2	2	3	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Пусть x - это количество слагаемых 2, y - количество слагаемых 5. Тогда сумма $2x+5y=875$ по условию.
В условиях дано $y>x$.

$2x+5y=875$

$x=\frac{875-5y}{2}$

$(875-5y)$ должно быть четным числом, чтобы оно могло :2

Тогда $(5y)$ - нечетное, так как нечет. число - нечет. число = = четное число

=> y - нечет, тк нечет • нечет = нечет.

$875-5y \geq 0$ ~~...~~ так как x - может быть любое, но положительное

$5y \geq 875$

$y \geq 875:5$

$y \geq 175$

$y>x$ =>

$y > \frac{875-5y}{2}$ тк $x=\frac{875-5y}{2}$

$2y > 875-5y$

$7y>875$

$y>125$

$=> 125<y \geq 175$

тк y - нечет, то можно сделать $127 \leq y \geq 175$ тк после 125 наименьш. нечет = 127

через арифметическую прогрессию найдем кол-во нечетных среди 127 - 175

$a_1=127$; $a_n=175$ $d=2$ - тк все нечет. попорядку отлич. на 2

$a_n=a_1+(n-1)d$ - подставим

$175=127+2n-2$ $175-127+2=2n$

$50=2n$

$n=25$

Ответ: 25

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	2	2	3	5	2	6

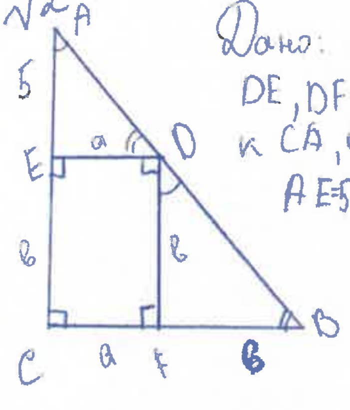
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг.
DE, DF - перпендикуляры к CA, CB соответственно
$AE=5$; $BF=6$

Найти: $S_{ABC}\ min$ - ?

Решение:

отметим CE за в, CF за a

$CE=в$, $CF=a$

CEDF - прямоуг. т.к. все углы равны 90°

$\Rightarrow CE=в=DF$

$CF=ED=a$

тогда $AC=5+в$; $CB=a+6$

$$S_{ABC}=\frac{AC\cdot CB}{2}=\frac{(5+в)(a+6)}{2}=\frac{5a+30+aв+6в}{2}$$

Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle DFB$. они подобны т.к.:

1) $\angle AED=\angle DFB=90°$

2) $\angle CAB=\angle FDB$ | т.к. в $\triangle ACB$ $\angle CAB=\alpha$; $\angle ABF=90-\alpha$ и в $\triangle DBF$ $\angle FDB=90-90+\alpha=\alpha$ т.к. сумма углов $\triangle$ в сумме 180

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle DFB$ по 2 углам

тогда:

$$\frac{AE}{DF}=\frac{ED}{FB}=\frac{AD}{BD}$$

$\frac{AE}{DF}=\frac{ED}{FB}$ - подставим что нам дано из усл.

$\frac{5}{в}=\frac{a}{6}$ $\Rightarrow aв=30$ по св-тву пропорции

$$S_{ABC}=\frac{5a+30+aв+6в}{2}=\frac{5a+30+30+6в}{2}=30+\frac{5a+6в}{2}.$$ Применим нер-ство Коши

$$30+\frac{5a+6в}{2}\geq 30+\sqrt{5a\cdot 6в}=30+\sqrt{30\cdot aв}=30+\sqrt{30\cdot 30}=30+30=60$$

$S_{ABC}\geq 60$ нам нужно минимальную S $\Rightarrow S_{min}=60$

Ответ: $\min S_{ABC}=60$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	О	О	О	2	2	2	3	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

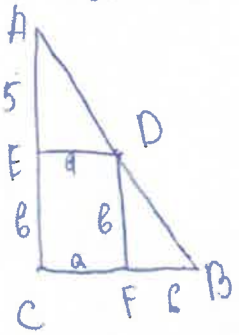
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

пример a и b для того, чтобы $S=60$



$S_{ABC} = 60 = \frac{(5+b)(6+a)}{2}$

~~$b=1;\ a=4$~~

~~$S=\frac{(5+1)(6+4)}{2}=\frac{6\cdot 10}{2}=3$~~

пример: $b=7;\ a=4$

$S_{ABC}=\frac{(5+7)(6+4)}{2}=$

$=\frac{12\cdot 10}{2}=\frac{120}{2}=60$

Ответ: $\min S_{ABC}=60$

№4

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

замена:

$t=3x^2-4x-4$

тогда: $3x^2-5x-4=t-x$

$t(t-x)=56x^2$

$t^2-tx-56x^2=0$

$D=x^2+224x^2=225x^2$

$\sqrt{D}=15x$

$t=\frac{x\pm 15x}{2}= \left\langle \begin{array}{l} \frac{16x}{2}=8x \\ \frac{-14x}{2}=-7x \end{array}\right.$

подставим:

1) $8x=3x^2-4x-4$

$0=3x^2-12x-4$

$D=144+4\cdot 3\cdot 4=144+48=192$

$\sqrt{D}=\sqrt{192}=\sqrt{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3}=\cancel{6}\,8\sqrt{3}$

~~$x=\frac{12\pm 6\sqrt{3}}{6}=\frac{6(2\pm\sqrt{3})}{6}=2\pm\sqrt{3}$~~

$x=\frac{12\pm 8\sqrt{3}}{6}=\frac{6\pm 4\sqrt{3}}{3}$

2) $-7x=3x^2-4x-4$

$0=3x^2+3x-4$

$D=9+48=57$

$\sqrt{D}=\sqrt{57}$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$

Ответ: ~~$2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}$~~; $\frac{-3+\sqrt{57}}{6}$; $\frac{-3-\sqrt{57}}{6}$; $\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{6-4\sqrt{3}}{3}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	2	2	3	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

квадрат 15x15, вырезан 1 угол

(?) заполнить 1x4 и 4x1

3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

если окрасить квадрат в 4-цветную окраску по диагонали, например:

3	4	1
2	3	4
1	2	3

то количество

- 1ого цвета будет : 56
- 2ого цвета – 56
- 3его цвета – 57
- 4ого цвета – 56

если мы вырезаем одну угловую клетку, то эта клетка будет окрашена в 1 цвет,

если мы вырежем клетку у которой 1ый цвет, то мы не сможем расставить прямоугольнички (нужно чтобы в каждом прямоугольнике 1x4 или 4x1 были закрашены все клетки в разные цвета), а для этого нужно чтобы было одинаковое кол-во всех 4 цветов во всем квадрате суммарно, но тогда получится 1ого цвета – 55, 2ого и 4ого – 56, 3его – 57. => нельзя, тк в каких-то прямоугольничках не будет хватать 1-ого цвета

Ответ: нет

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	2	2	3	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Рассмотрим двудольный граф знакомств, который состоит из 200 серых вершин и 5 черных. По усл. задачи каждый черный бельчонок знаком с половиной серых. => всего стрелок вида (ч) -> (с) в графе будет 500.

Пусть x серых бельчат знакомы меньше чем с половиной черных, то есть с 0, 1, 2 черными бельчонками, оставшиеся 200 - x серых бельчат знакомы с 3, 4, 5 черными. Нам нужно максимизировать x при усл, что стрелок (с) -> (ч) также 500, тк. знакомство у бельчат взаимно, тогда max x нужно чтобы каждый из 200 - x бельчат имел наибольш. число знакомств то есть по 5. всего знакомств тогда $5 \cdot (200 - x) = 1000 - 5x$

При этом сами x серых бельчат также должны иметь макс. число знакомств то есть 2x и тогда сумма будет не меньше 500.

т.е. получаем неравенство

$$2x + 1000 - 5x \geq 500$$

$$3x \leq 500$$

$$x \leq \frac{500}{3} = 166\frac{2}{3}$$

тогда $\max(x) = 166$.

пример: 166 серых бельчат дружат с 2 черн.

это $166 \cdot 2 = 332$ знакомств

Осталось 34 серых бельчонка и знакомств $500 - 332 = 168$

Тогда пусть 32 бельчонка знакомы с 5 черными

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 — МА00022319 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	10	2	20	15		67

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$2025 : 3 = 675$

$2025 : 2 \Rightarrow \Sigma$ не может состоять только из двоек, минимальное количество двоек будет достигаться при одной тройке

$(2025 - 3) : 2 = 1011$

если двоек и троек будет одинаково, то таких пар будет 405 $(2025 : (2+3) = 405)$

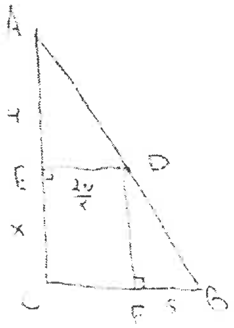
Чтобы сумма была нечетной, количество троек должно быть нечетным $\Rightarrow$

нам подходят все суммы где 3 больше или 405 и их количество нечетно

$(675 - 405) : 2 = 135$ - таких сумм

Ответ: 135

№2



Дано:

∠ABC, ∠AEB

△ABC — гипотенуза AB

D ∈ AB, DE, DF высоты к AC, CB

AE = 4; BF = 5

Найти: минимально возможную площадь

Решение:

В △AED ∠AED = 90° = ∠DFB

Так как ∠ACB = 90° = ∠DFB, то AC ∥ DF $\Rightarrow$ ∠CAB = ∠FDB, ∠ABC = ∠ADE, тогда

△AED ~ △FDB (по двум сторонам)

$\frac{AE}{DF} = \frac{ED}{FB}$, обозначим EC за $x \Rightarrow DF = x$, тогда $\frac{4}{x} = \frac{ED}{FB} \Rightarrow ED = \frac{20}{x} = CF$, тогда $S_{\triangle ABC} =$

$= \frac{(4+x)\left(\frac{20}{x}+5\right)}{2} = \frac{40}{x} + 20 + 2{,}5x$, это парабола с минимальным значением в вершине (4) ?

подставим 4 $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{40}{4} + 20 + 2{,}5 \cdot 4 = 40$ (x - не может быть равен минимуму)

Ответ: 40

Min не найден, только утв-е без д-ва

Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 2 3 1 9 2 6

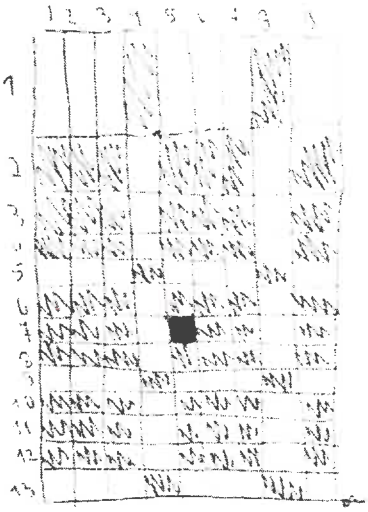
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

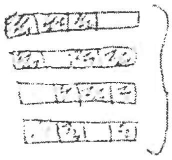
№3



Сделаем крупную шахматную раскраску

черных 70 (не включая вырезанную)

белых 46



любой 4×1 прямоугольник будет занимать 3 клетки одного цвета (с вертикальными так же)

И что?

70 / 3

46 / 3 ?!

нельзя => Ответ нельзя

№4

$$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$$

$$4x^4+16x^3+29x^2+24x+9=35x^2$$

$$4x^4+16x^3-8x^2+24+9=0$$

$$(2x^2+10x+3)(2x^2-2x+3)=4x^4+16x^3\ 3x^2+24+9=0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+10x+3=0 \\ 2x^2-2x+3=0 \end{array}\right.$$

I $2x^2+10x+3=0$ $D=100-24=76=2\sqrt{19}$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$$

II $2x^2-2x+3=0$ $D=4-24$?!

Ответ $\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA000223 1926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Если бобр дружит меньше чем с половиной горилл => он дружит с двумя или менее

максимум 2

если бобр дружит более чем с половиной горилл => они дружат с тремя или более.

максимум 5

4 4 4 4 4

150 150 150 150 150 – всего у нас 750. знакомств

I

если 249 гри мыши дружат меньше чем с половиной => 51 более чем с половиной

рассмотрим самый выгодный нам вариант 249 · 2 + 51 · 5 = 751 – достаточно знакомств

(248 · 2 + 1 · 1) + 51 · 5 = 750 ровно => возможно

ч. т. д.

А можно ли это осущ-ть при условии:

Ответ возможно

каждый знаком с 1/2 С-х?

II

251 гри мыши знакомы меньше чем с половиной => 49 более чем с половиной

рассмотрим самый лучший вариант 251 · 2 + 49 · 5 = 747 – не достаточно

747 < 750 ?!

ч. т. д.

Ответ невозможно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA000225062 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	20	20	15		83

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

I) Разделим 2025 на равное количество двоек и троек.

$2x+3x=2025$

$5x=2025$

$x=405$

405 и 405
"2" "3"

II) При условии кратности числа на 3.

$405\times2=810$

$405\times3=1215$ S_3

К сумме троек нужно прибавить некоторое кол-во троек, чтобы разность между 2025 и этой суммой была ⋮2, для того чтобы эту разность можно было представить в виде двоек. $2025-S_3 ⋮ 2$

Найдём наименьшее число: НОК(2;3)=6 − 2 тройки.

Прибавляя по 2 тройки мы будем получать новую разность, всегда кратную 2. $(405+2)\cdot3=1221$

$2025-1221=804$. $804:2=402$ ~~407 > 402 — минимально возможное~~

~~Таких пар~~ ~~Таких пар будет~~; Найдём максимально возможное количество троек: $2025:3=675$

минимально возможное количество: 407.

$675-407=268$ — общее количество вариантов с тройкой, удовл. условию, троек больше.

$268:2=134$ — прибавляем сразу по 2 тройки.

134+1 вариант, когда все тройки

Ответ: 135.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

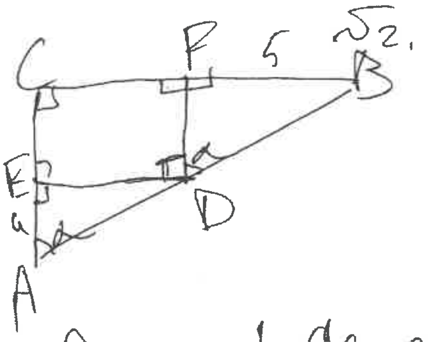
Вариант № 1 МА0002250626

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = S_{ECFD} + S_{AED} + S_{FBD}$

$\triangle AED, \triangle FDB$ – прямоуг.

$\triangle AED \sim \triangle DFB \sim \triangle ACB$ (по 2 углам)

$\frac{1}{2} AC \cdot CB = (AC-4)(BC-5) + \frac{5 \cdot (AC-4)}{2} + \frac{4(CB-5)}{2}$

$\frac{1}{2} AC \cdot CB = AC \cdot CB - 5AC - 4BC + \frac{5}{2} AC + 2BC + 20 - 10 - 10$

$-\frac{1}{2} AC \cdot CB = -2{,}5 AC - 2BC$ $\quad AC$

$AC \cdot CB - 5AC - 4BC = 0$ $\quad AC \cdot CB = 5AC + 4BC$

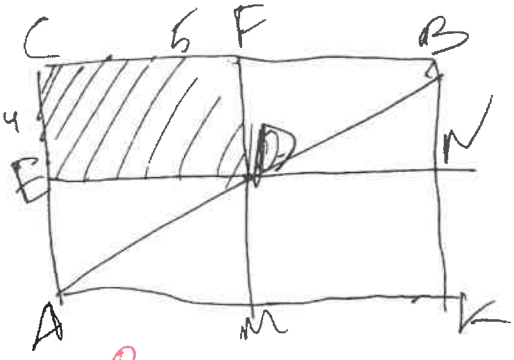


Рисунок – не для общего случая

$S_{CFDE} = S_{DNMK}$

$CFDE \sim DNKM$

$\Rightarrow CFDE = DNKM$

$DE = DN$

$AE = CE = 4$

$CF = FB = 5$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40$

Ответ: 40.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА00022506 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Предположим, что ~~клетка~~ прямоугольник раскрашен в 4 цвета: 1, 2, 3, 4; таким образом, что в каждой полоске 1×4 будет находиться каждый цвет ровно по 1 разу.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	~~3~~	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

V

Таким образом, для распределения полосок нужно, чтобы ~~их~~ кол-во клеток каждого цвета было одинаковым ~~⇒ общая сумма клеток должна быть~~;

В каждой строке 13 цветов, то есть 12:4=3 группы, где каждый цвет встречается по 1 разу и „лишний" цвет. Им последний столбик, отмеченный V: в нём 9 клеток „лишних" в каждой строке. 8 клеток собирают 2 группы и цвет правой нижней клетки совпадает с цветом верхней левой.

Кол-во клеток с цветом:

1: $3\cdot 9+2+1=30$

2; 4; 5: $3\cdot 9+2=29$

3: $3\cdot 9+2-1=28$

Кол-во клеток ~~не равно~~ разных цветов не равные между собой ⇒ невозможно.

Ответ: невозможно.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1. | M A 0 0 0 2 2 5 0 6 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4,

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$4x^4+10x^3+6x^2+6x^3+15x^2+9x+6x^2+15x+9=35x^2$

$4x^4+16x^3-8x^2+24x+9=0$

$4x^4+20x^3+6x^2-4x^3-20x^2-6x+6x^2+30x+9=0$

$(2x^2-2x+3)(2x^2+10x+3)=0$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-24=-20<0$

нет корней

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-24=76$

$\sqrt{D}=\sqrt{76}$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-10+\sqrt{76}}{4} \\ x_2=\frac{-10-\sqrt{76}}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{-10-\sqrt{76}}{4}$; $\frac{-10+\sqrt{76}}{4}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000225О626

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

Давайте найдём наибольшее количество серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной чёрных (≤ 2). Пусть x – это наибольшее число тех самых серых бельчат, которые знакомы максимум с двумя. Зная, что всего знакомств $5 \cdot 150 = 750$ составим ур-е: Для наибольшего значения x нужно, чтобы этих бельчонков были знакомы с максим. значением чёрных бельчат (то есть с двумя). А оставшиеся были знакомы со всеми пятью бельчонками. Это нужно для того, чтобы как можно больше знакомств приходилось на остальную группу серых бельчат.

Сост. ур-е:

$$x \cdot 2 + (300 - x) \cdot 5 = 5 \cdot 150$$

$$2x + 1500 - 5x = 750$$

$$-3x + 750 = 0$$

$$3x = 750$$

$$x = 250$$

получается, наибольшее кол-во серых бельчат, знакомых ~~не более~~ менее чем с половиной серых – 250. 251 бельчонка не может быть: [illegible]

Для 249 нет примера.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	3	7	20	18		68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

В задаче нужно найти кол-во различных сумм, где число слагаемых „3" больше числа слагаемых „2".

Проще записать условие.

n - кол-во „3", m - кол-во „2"

$$\begin{cases} 3n+2m=2025 \\ n>m. \end{cases}$$

т.к. $n>m$, то:

$3m+2m<2025$; $\quad 3n+2n>2025$.

$5m<2025 \qquad 5n>2025$

$m<405 \qquad n>405.$

2025 - нечётное число, значит n - нечётное, т.к.

$$\underbrace{3\cdot n(\text{нечётн})}_{\text{неч.}}+\underbrace{2m}_{\text{чет}}=\underbrace{2025}_{\text{неч.}}$$

первое неч. n - 407, проверим

$407\cdot 3=1221$,

$2025-1221=804$, $m=402<405$ - подходит.

Значит все нечётн. n, $n>405$, будут подходить.

Найдём верхнюю границу для n.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1 (р-ние)

$2025 \vdots 3$, значит макс. значение n $\frac{2025}{3} = 675$,

Но нам сказано, что каждое слагаемое равно 2 v 3,

если каждое слагаемое б. равно 3, всё равно усл. будет вып-се, т.к. сказано <u>или</u>.

Осталось посчитать число n.

Имеем дело с арифм. прогрессией.

(a_n) - арифм. пр.

$a_1 = 407$, $a_n = 675$, $d = 2$, $n - ?$

ф-ла n-го члена: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

подставим: $675 = 407 + 2(n-1)$

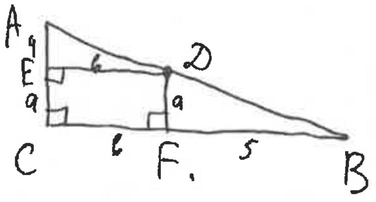
$2(n-1) = 268$

$n - 1 = 134$

$\boxed{n = 135}$

Ответ: 135 сумм.

№ 2.



Дано: $\triangle ABC$ – прям/уг ($\angle C = 90°$),

D – произв. т. на AB,

$DE \perp AC$, $DF \perp BC$

$AE = 4$, $BF = 5$.

Найти: $S_{ABC\,min}$ – ?

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000226 3326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (пл-мие)

1) Рассм 4-ник CFDF:

$\angle EDF = 360-90-90-90 = 90 \Rightarrow$ CFDF — пр-ник.

$\Downarrow$

$CE=DF,\ ED=CF$.

(по св-ву пр-ка).

2) Пусть $CE = DF = a$, $CF = ED = b$.

По т. Пифагора:

$\triangle ABC$ пр-ный: $AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{(4+a)^2+(b+5)^2}$

$\triangle AED$ и $\triangle DFB$ -пр-ные: $AB = AD + DB = \sqrt{AE^2+ED^2} + \sqrt{DF^2+BF^2} = \sqrt{16+b^2} + \sqrt{25+a^2}$.

$\Downarrow$

$$\sqrt{(4+a)^2+(b+5)^2} = \sqrt{16+b^2} + \sqrt{25+a^2} \quad \uparrow 2$$

$$(4+a)^2 + (b+5)^2 = 16+b^2 + 2\cdot\sqrt{(16+b^2)(25+a^2)} + 25+a^2$$

$$\cancel{16} + 8a + \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 10b + \cancel{25} = \cancel{16} + \cancel{b^2} + 2\sqrt{(16+b^2)(25+a^2)} + \cancel{25} + \cancel{a^2}$$

$$2\sqrt{(16+b^2)(25+a^2)} = 8a + 10b \quad |:2$$

$$\sqrt{(b^2+16)(a^2+25)} = 4a+5b \quad \uparrow 2$$

$$(a^2+25)(b^2+16) = (4a+5b)^2$$

$$a^2b^2 + \cancel{16a^2} + \cancel{25b^2} + 400 = \cancel{16a^2} + 40ab + \cancel{25b^2}$$

$$a^2b^2 - 40ab + 400 = 0.$$

Замена $a\cdot b = n$.

$$n^2 - 40n + 400 = 0$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000226332 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (пр-ние)

$n^2 - 40n + 400 = 0$

$D_1 = 20^2 - 400 = 400 - 400 = 0.$

$n = 20$ (+)

Обр. замена.

$a \cdot b = 20.$ (1).

3) $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(4+a)(5+b)}{2} = \frac{\overset{20}{ab} + 5a + 4b + 20}{2} = 20 + 2b + 2{,}5a.$

~~$S_{ABC} = S_{AED} + S_{ECFD} + S_{DFB} = \frac{4b}{2}$~~

Теперь рассуждаем.

Нам нужна наим. пара $(a;b)$ чтобы $2b + 2{,}5a$ был минимальным.

~~А такая пара будет наим. тогда, когда ECFD будет наименьшим прямоуг.~~

(−)

А пара будет наименьшей $\Leftrightarrow$ когда ECFD будет квадратом,

а если ECFD − квадрат, значит $a = b = \sqrt{20}$

$S_{ABC} = 20 + 2\sqrt{20} + 2{,}5\sqrt{20} = 20 + 4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} =$

$= 20 + 9\sqrt{5}.$

Ответ: $20 + 9\sqrt{5}$ (−)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 2 6 3 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

$$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$$

$$(2x^2+4x-x+3)(2x^2+4x+x+3)=35x^2$$

$$(\underline{2x(x+2)+3}-\underline{x})(\underline{2x(x+2)+3}+\underline{x})=35x^2$$

$$(2x(x+2)+3)^2-x^2=35x^2$$

$$(2x(x+2)+3)^2=(6x)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x(x+2)+3=6x \quad (1) \\ 2x(x+2)+3=-6x \quad (2) \end{array}\right.$$

1) $2x^2+4x+3=6x$

$2x^2-2x+3=0$

$D_1=1-3\cdot 2<0$

$\varnothing$

2) $2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2+10x+3=0 \qquad k=5.$

$D_1=25-3\cdot 2=25-6=19.$

$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{19}}{2}.$

Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{19}}{2}.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА00022633 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

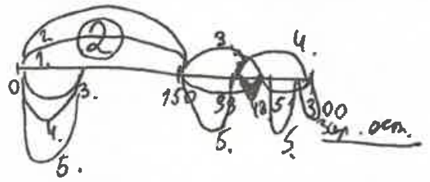
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

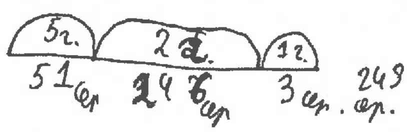
1) Сначала докажем, что может быть 249 сер. бельчат. знакомых с 0, 1, 2 черн., или ~~же~~ м.б. 51 сер. бельчат, знаком. с 3, 4, 5 черн.

Итак, пусть первые два чёрн. бельчонка знакомы с ~~одн~~ одними и теми же ~~серыми~~ 150 серыми.



$\boxed{\text{пустой} = 0 \text{ знаком.}}$

Затем третий знаком с 51 из ②, и с ~~149~~ 99 пустыми. серыми.
4-ый знаком с теми же 51, что и 3-ий, а с ~~100~~ оставшимися 51 пустыми и с 48 вместе с 3-им.
5-ый знаком с теми же 51, значит эти 51 знакомы с всеми 5 черн. ~~и~~ и свои оставшиеся ~~102~~ 99 серых он берёт из 102 сер. белок, знакомых только с одним. В итоге получается:



249 сер. $\begin{cases} 51 \text{ сер} - 5 \text{ ч.} \\ 246 \text{ сер} - 2 \text{ ч} \\ 3 \text{ сер} - 1 \text{ ч.} \end{cases}$

Значит и 249 сер. белок м.б.

2) Если аналогично док-вать для 251 сер ~~249~~ знак. с 0, 1, 2 ~~ч.~~ ч. и 49 сер. знак. с 3, 4, 5 ч. ~~то~~ то при поиске знакомых для пятого чёрн. бельчонка ~~что~~ у нас останется 98 сер. с 1 знак, а нужно 101 сер. ~~Таким образом~~, ~~невозможно~~ ~~и т.д.~~

Док-во, что НЕ может быть надо не на примере, а в общем виде

Лист 6 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 6 | 3 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

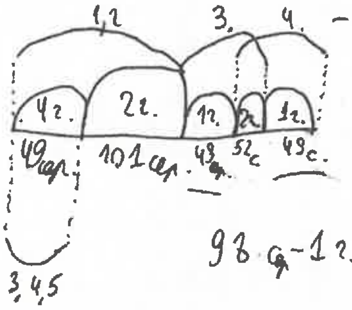
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (пр-ние)

У нас будет такая ситуация. для пятого чёрного



— черные.

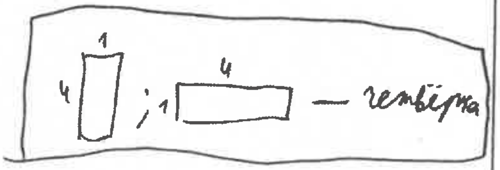
98 ср-1 г., нужно 101 сер (150-49).

Выходит, 49 сер, а знакомых с 3, 4, 5 черн. не существу,

а значит не сущ. 151 сер, знакомых с 0, 1, 2 чёрн.

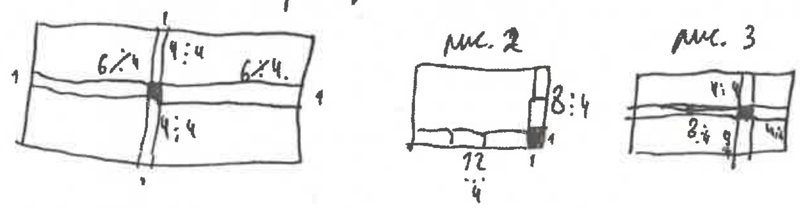
№3

Нет.



S = 13·9-1 = 116 ⋮ 4, 29 полосок.

Центральная клетка разбивает прямоугольник так:



Из этих частей останется после заполнения прямоуг. 1×4 и 4×1:

Центральная клетка разбивает прямоуг так, что справа и слева остаётся по 6 клеток, которые нельзя заполнить четвёрками.

Прямоугольник можно будет заполнить четвёрками, если ~~центральная клетка~~ ~~между сторонами~~ между сторонами прямоуг. и центр. клеткой можно поставить четверки, например так на рис. 2 и рис. 3., а 6 ⋮̸ 4, поэтому поставить четвёрки нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 7 | 9 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
1	3	20	20	18		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$875 = 2\cdot n + 5\cdot q$ и $q > n$.

Заметим, что $875 \vdots 5$ и не $\vdots 2$ => $n \vdots 5$ и $q \not\vdots 2$.

Разложим 875 на множ.:

$$\begin{array}{r|l} 875 & 5 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$875 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 7$.

Значит, $875 = 2\cdot n + 5\cdot q$ можно представить как:

$7 = \frac{q}{25} + \frac{2n}{125}$, причём $\frac{q}{25}$ и $\frac{2n}{125}$ — натур. числа или 0.

$\frac{q}{25}$	$\frac{2n}{125}$	
7	0	=> $q = 175$; $n = 0$ ✓
6	1	=> $q = 150$; $n = \frac{125}{2}$ ✓
5	2	=> $q = 125$; $n = 125$ ✗, $n = q$
4	3	=> $q = 100$; $n = \frac{375}{2}$ ✗, $n > q$.

–

Ответ: 2 варианта.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 7 | 9 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

$\exists\, t = 3x^2-4x-4$

$t(t-x)=56x^2$

$t^2-xt=56x^2$

$t^2-xt-56x^2=0$

$D=x^2+224x^2=225x^2$ (отн. t)

$t=\dfrac{x\pm 15x}{2}=\left[\begin{array}{l}8x\\-7x.\end{array}\right.$

1) $t=8x$

$3x^2-4x-4=8x$

$3x^2-12x-4=0$

$D=144+48=192$

$x=\dfrac{12\pm\sqrt{192}}{2\cdot 3}=\dfrac{12\pm 2\sqrt{48}}{2\cdot 3}=\dfrac{6\pm\sqrt{48}}{3}$.

2) $t=-7x$

$3x^2-4x-4=-7x$

$3x^2+3x-4=0$

$D=9+48=57$.

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{2\cdot 3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$

Ответ: $\dfrac{6\pm\sqrt{48}}{3}$; $\dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 7 | 9 | 5 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

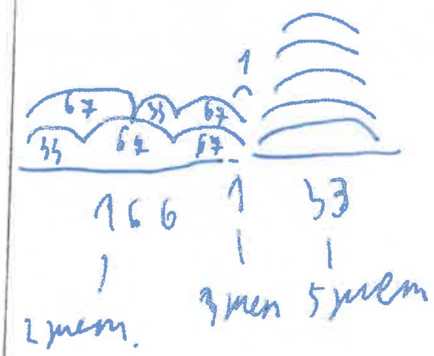
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

Пусть, при знакомстве бельчата получают один жетон, а если у них больше 2 жетонов, то они выбывают. Значит, всего жетонов 500, а кол-во жетонов, при котором ни один серый бельчонок не выбывает – 400. Тогда остается 100 предыд. жетонов, которые мы будем раздавать по 3, чтобы истратить их как можно быстрее. Тогда у нас выбывает 34 бельчонка (33 по 3ж и 1б. с 1ж).

Пример



Ответ: 166 бельчат

Не показано явно, что это максимум

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00022795 26

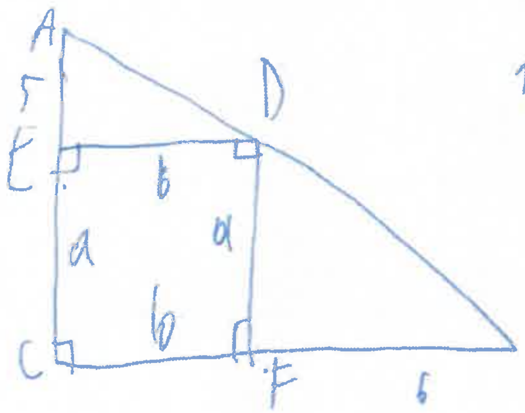
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.



1) Докажем, что CEDF – прямоугольник: $\angle DEC = \angle ECF = \angle CFD = 90^\circ \Rightarrow \angle EDF = 90^\circ$ (по сумме углов в четырёхугольн.) $\Rightarrow$ CEDF – прямоугольник

2) $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(a+5)(b+6)}{2}$, где: a, b – стороны прямоуг. CEDF:

$S_{ABC} = S_{AED} + S_{CEDF} + S_{DFB} = \frac{b \cdot 5}{2} + ab + \frac{a \cdot 6}{2}$

Тогда:

$\frac{5b}{2} + ab + \frac{6a}{2} = \frac{(a+5)(b+6)}{2}$

$\frac{2ab + \cancel{5b} + \cancel{6a}}{2} = \frac{ab + \cancel{5b} + \cancel{6a} + 30}{2} \quad | \cdot 2.$

$2ab - ab = 30$

$ab = 30.$

3) $S_{ABC} = \min S_{ABC}$, если $\underset{P_{CEDF}}{2(a+b)}$ – min, то есть CEDF – квадрат $\Rightarrow a = b = \sqrt{30} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{2ab + 5b + 6a}{2} = \frac{60 + 5\sqrt{30} + 6\sqrt{30}}{2} = 30 + 5{,}5\sqrt{30}$

Нет

Ответ: $30 + 5{,}5\sqrt{30}$.

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 7 | 9 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

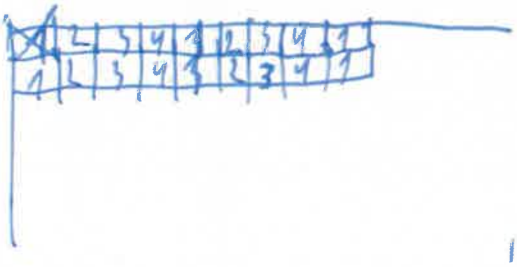
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.

~~Рассмотрим квадрат 5×5:~~

~~Мы не можем заполнить полностью весь квадратик~~

Построим квадрат в четыре цвета:



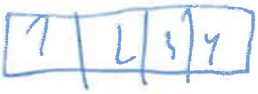
Тогда:

„1": $15 \times 4 - 1 = 59$

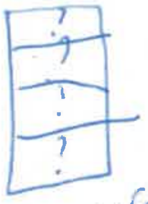
„2": $15 \times 4 = 60$

„3": $15 \cdot 4 = 60$

„4": $15 \cdot 3 = 45$.



„1"; „2"; „3"; „4"



и × „x".

разница на 3 „x"

Всего прямоугольников: $(225-1)/4 = 56$

Но, „4" у нас 45 => невозможно заполнить, т.к. нельзя перевести числа 60, 60, 59 в 45 за 11 прямоуг., т.к. $59 \equiv 2 \pmod 3$, а все ост. равны 0.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 8 | 2 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	18		98

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Если число 875 представить как сумму 2 и 5, то

$875 = 2x + 5y$, где $x, y \in N \cup \{0\}$

Если в сумме больше слагаемых, равных 5, то $Y > X$.

~~При $X = 125$:~~
~~$875 = 2 \cdot 125 + 5 \cdot Y$~~
~~$5 \cdot Y = 625$~~
~~$Y = 125$~~

При $Y = 125$:
$875 = 2 \cdot x + 5 \cdot 125$
$2 \cdot x = 250$
$x = 125 = Y$

Возможные X и Y

X	Y
0	175
5	173
10	171
15	169
20	167
⋮	
120	127
125	125
130	123
⋮	⋮
435	1

(25 — для значений X от 0 до 120)

$\Rightarrow$ Если $Y > 125$, то $X < 125$ (т.е. $Y > X$),
если $Y < 125$, то $X > 125$ (т.е. $Y < X$)

$875 = 2x + 5y$

$x = \dfrac{875 - 5Y}{2}$

$x = 5 \cdot \dfrac{175 - Y}{2}$ $\Rightarrow$ Y – нечетный, т.к. $x \in N \cup \{0\}$ и

$Y \leq 175$, т.к. иначе $x < 0$.

Нечетных чисел от 125 (невключительно) до 175 (включительно) – 25.

Каждый из этих 25 игроков подходит, т.к. X существует и $\in N \cup \{0\}$, а другие Y не подходят, т.к. или $Y \leq X$, или $x \notin N \cup \{0\}$

Отв: 25

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 2 8 2 2 2 6

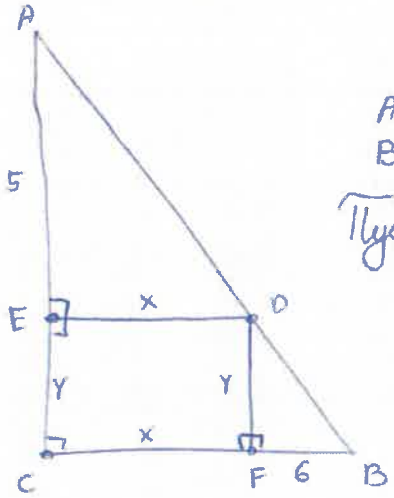
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



$AE = 5$

$BF = 6$

Пусть $DE = x^{>0}$; $DF = Y^{>0}$

DFCE – прямоугольник по определению (3 прямых угла) =>

$\Rightarrow CF = DE = x$; $CE = DF = Y$

по свойству прямоугольника

$$S_{ABC} = \frac{(x+6)(Y+5)}{2} = S_{ADE} + S_{DFCE} + S_{DFB} =$$

$$= \frac{5x}{2} + xY + \frac{6Y}{2}$$

$$(x+6)(Y+5) = 5x + 2xY + 6Y$$

$$\cancel{xY} + \cancel{6Y} + \cancel{5x} + 30 = \cancel{5x} + \cancel{2xY} + \cancel{6Y}$$

$xY = 30$ $\qquad Y = 30/x$ (тк $x > 0$)

$$S_{ABC} = \frac{(x+6)(Y+5)}{2} = \frac{xY + 6Y + 5x + 30}{2} =$$

$$= \frac{60 + 6\frac{30}{x} + 5x}{2} = \frac{5}{2}x + \frac{90}{x} + 30 \longrightarrow \max_x$$

$S_{ABC}'(x) = \frac{5}{2} - \frac{90}{x^2} = 0$ – точка минимума или максимума

$$x^2 = \frac{180}{5} = 36$$

$\left[\begin{array}{l} x = 6 > 0 \Rightarrow \text{подходит} \\ x = -6 < 0 - \text{не подходит} \end{array}\right.$

$$S_{ABC}(6) = \frac{5}{2}\cdot 6 + \frac{90}{6} + 30 = 15 + 15 + 30 = 60$$

$S_{ABC}(7) = 17{,}5 + 12 + \frac{6}{7} + 30 > 60$ => $x = 6$ – точка минимума

Отв: 60

Лист 2 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 8 | 2 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Раскрасим клетки в 4 цвета (цвет №1, цвет №2, ..., цвет №4) следующим образом:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	5	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

P.S. Если в клетке стоит цифра 1, то она покрашена в цвет 1; если цифра 2, то в цвет 2 и тд

Клеток цвета 1 – 56
Клеток цвета 2 – 56
Клеток цвета 3 – 57
Клеток цвета 4 – 56

Нетрудно заметить, что в любом прямоугольнике 4×1 и 1×4 ровно по 1 клетке каждого из 4 цветов =>

=> если такое замощение существует, то вырезана одна из 2 угловых клеток цвета 3 (т.к иначе клеток цвета 3 > чем клеток цвета 1 => вырезана ~~такого замощения не существует~~), т.е. вырезана или клетка (1;1), или клетка (15;15)

P.S. Клетка (x; Y) – клетка в столбце X (если считать снизу и нумеровать с 1) и в столбце Y (если считать слева направо и нумеровать с 1) доп. лист №2

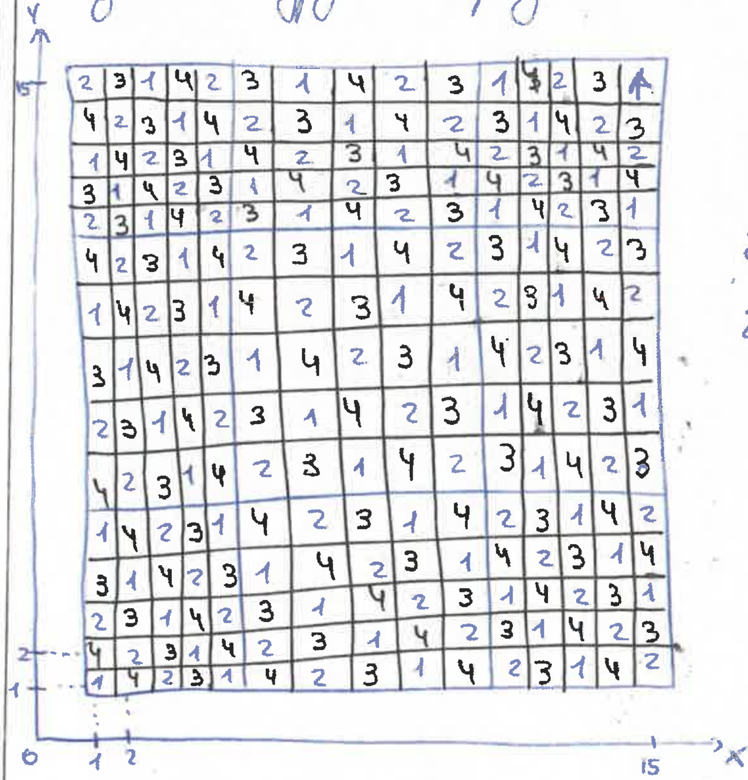
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА 000228 2226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

Раскрасим другим образом:



Клеток цвета 1 – 56

Клеток цвета 2 – 57

Клеток цвета 3 – 56

Клеток цвета 4 – 56

Клеток цвета 2 больше всего =>
=> должна быть вырезана одна из угловых клеток цвета 2, т.е или (1; 15), или (15; 1).

Заметим, что одновременно нельзя вырезать 2 угловые клетки, а если вырезать только 1 клетку, то среди ~~пар~~ пар ((1; 1); (15; 15)) и ((1; 15); (15; 1)) останется пара, из которой не вырезали ни одной клетки => такого замощения не существует

Отв: нет, нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 2 8 2 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

$9x^4-12x^3-12x^2-15x^3+20x^2+20x-12x^2+16x+16=56x^2$

$9x^4-27x^3-60x^2+36x+16=0$

$(3x^2+3x-4)(3x^2-12x-4)=$

$=9x^4+9x^3-12x^2-36x^3-36x^2+48x-12x^2-12x+16=$

$=9x^4-27x^3-60x^2+36x+16=0$ $(\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow)\left[\begin{array}{l}3x^2+3x-4=0 \\ 3x^2-12x-4=0\end{array}\right.$ $D=9+4\cdot4\cdot3=9+16\cdot3=9+48=57$; $D=144+16\cdot3=144+48=192$

$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-3+\sqrt{57}}{6} \\ x=\frac{-3-\sqrt{57}}{6}\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{12+\sqrt{192}}{6} \\ x=\frac{12-\sqrt{192}}{6}\end{array}\right.\end{array}\right.$

Отв: $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{57}}{6};\ \frac{12\pm\sqrt{192}}{6}\right\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 2 8 2 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Пусть существует пример на 168. Тогда ~~то~~ максимальное количество дружб равно:

$168 \cdot 2 + (200-168) \cdot 5 = 336 + 160 = 496$

т.к. дружат не более чем с половиной от 5; тк их всего 5

дружба ≡ ≡ знакомство, т.к. я не умею читать условие с 1 раза

Каждый черный бельчонок дружит ровно с половиной серых ⇒ дружб ровно $5 \cdot 100 = 500$

$496 < 500$ ⇒ такого быть не может, ⇒ примера на 168 не существует

т.к. дружб (возможных) должно быть хотя бы 500

Если есть пример на $x \geq 168$, то максимальное количество дружб равно:

$x \cdot 2 + (200-x) \cdot 5 \leq 168 \cdot 2 + (200-168) \cdot 5 = 496 < 500$ ⇒ противоречие

⇒ примера более чем на 168 не существует

Для 167: $167 \cdot 2 + (200-167) \cdot 5 = 334 + 165 = 499 < 500$

Пример на 167:

Разобьем серых бельчат на ~~7~~ групп. В группах 1–5 по 33 бельчонка, в группе 6 – 34 бельчонка, в группе 7 – 1 бельчонок.

~~333~~ $33 \cdot 5 + 34 + 1 = 200$ ⇒ все бельчата разбиты по группам и каждый бельчонок только в 1 группе

Черных бельчат пронумеруем от 1 до 5

Каждый серый бельчонок из группы 1 дружит с черн. бельчатами 1 и 2

.... из группы 2 дружит с черн. бельчатами 1 и 3

.... из группы 3 дружит с черн. бельчатами 2 и 4

.... из группы 4 дружит с черн. бельчатами 3 и 5

.... из группы 5 дружит с черн. бельчатами 4 и 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	2	2	8	2	2	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение)

Каждый серый бельчонок из группы 6 дружит со всеми черными бельчатами

Каждый из группы 7 (в ней всего 1 бельчонок) не дружит ни с кем.

Доказательство, что пример работает:

Каждый из групп 1–5 дружит ровно с 2 черными бельчатами; бельчонок из группы 7 не дружит ни с кем $\Rightarrow$

$\Rightarrow 33 \cdot 5 + 1 = 167$ серых бельчат дружат не более с чем 2 черными бельчатами

166

Для каждого черного бельчонка есть ровно 2 группы, в каждой из которых все бельчата с ним дружат

по 33 бельчонка (из групп 1-5)

Для каждого черного бельчонка в группе 6 (из 34 бельчат) с ним дружат все 34 бельчонка. $\Rightarrow$

Бельчонок из группы 7 не дружит ни с кем

$\Rightarrow$ Каждый черный бельчонок знаком с $33 \cdot 2 + 34 = 100$ серыми бельчатами

Пример на 167 существует и он не противоречит условию, что

Отв: 167

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	2	4	1	7	1	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	–	20		65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Заметим, что число 1120 можно представить в виде суммы 224 пятёрок. Представим, что пятёрок - x; троек - y. Должно выполняться равенство:

$5x + 3y = 1120 \Rightarrow y \vdots 5$, т.к. x и y - целые числа

Но тогда, если с каждым разом мы захотим увеличивать кол-во троек на 5, то общая сумма пятёрок и троек будет увеличиваться на 15 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ чтобы сумма оставалась прежней, с увеличением кол-ва троек на 5, кол-во пятёрок должно уменьшаться на 3. Пусть таких шагов было d, но троек должно быть >, чем пятёрок $\Rightarrow$

$\Rightarrow 224 - 3 \cdot d < 5 \cdot d$

$8d > 224$

$d > \frac{224}{8} = 28$

Значит максимальное кол-во пятёрок $224 - 3 \cdot 29 = 137$. При этом будет $29 \cdot 5 = 145$ троек

Далее так можно делать, пока кол-во пятёрок ≥ 3, т.к. мы за шаг их уменьшаем на 3. Это $\left[\frac{137}{3}\right] = 45$ раз. Значит и кол-во подходящих вариантов, помимо 1-ого найденного будет 45. Тогда кол-во сумм, в которых > слагаемых, равных 3 - 46

Ответ: 46

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	2	4	1	7	1	2	6

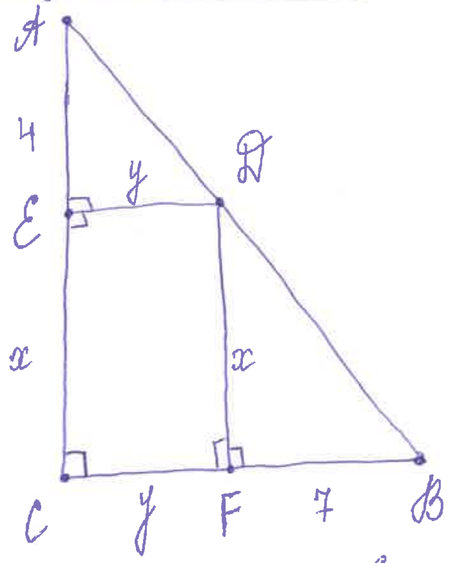
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №2



Обозначим $CE = x$; $CF = y$

Т.к. $CEDF$ - прямоугольник, $DF = x$; $ED = y$ соответственно

С одной стороны $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(4+x)\cdot(7+y)}{2}$

С другой стороны $S_{\triangle ABC} = S_{\square CEDF} + S_{\triangle AED} + S_{\triangle BFD} =$

$= CE \cdot ED + \frac{AE \cdot ED}{2} + \frac{DF \cdot BF}{2} = xy + \frac{4y}{2} + \frac{7x}{2}$

Приравняем эти значения:

$$\frac{(4+x)\cdot(7+y)}{2} = xy + \frac{4y}{2} + \frac{7x}{2}$$

$$(4+x)\cdot(7+y) = 2xy + 4y + 7x$$

$$28 + \cancel{4y} + \cancel{7x} + xy = 2xy \cancel{+4y} + 7x$$

$$28 = 2xy - xy \Rightarrow xy = 28$$

Далее заменим y на $\frac{28}{x}$ и снова рассмотрим $S_{\triangle ABC}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 4 1 7 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Продолжение Задачи №2

После замены $y = \frac{28}{x}$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(4+x)\cdot(7+\frac{28}{x})}{2} = \frac{28 + \frac{4\cdot 28}{x} + 7x + 28}{2}$$

$$2 \cdot S_{\triangle ABC} = 28 + \frac{4\cdot 28}{x} + 7x + 28$$

Площадь $\triangle$ всегда $> 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 28 + \frac{4\cdot 28}{x} + 7x + 28 > 0 \quad (x \text{ всегда } > 0)$$

$$28x + 4\cdot 28 + 7x^2 + 28x > 0$$

$$7x^2 + 28x + 28\cdot 5 > 0$$ Неверные выражения

$$7x^2 + 28x + 140 > 0$$

$$x^2 + 4x + 20 > 0$$

Значит сумма 2 площадей $\triangle ABC$ представима данной функцией ($f(x) = x^2 + 4x + 20$)

Коэффициент $a = 1 \Rightarrow$ ветви параболы (функции) смотрят вверх. $D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 20 < 0 \Rightarrow$ корней у функции нет $\Rightarrow$ минимум функции положителен — минимальные 2 площади в сумме у $\triangle ABC$

$$x_0 = \frac{-4}{2\cdot 1} = -2 \Rightarrow f(x)_0 = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 20 = 4 - 8 + 20 =$$

$$= 16 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{16}{2} = 8 \text{ минимум}$$

Ответ: 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	2	4	1	7	1	2	6

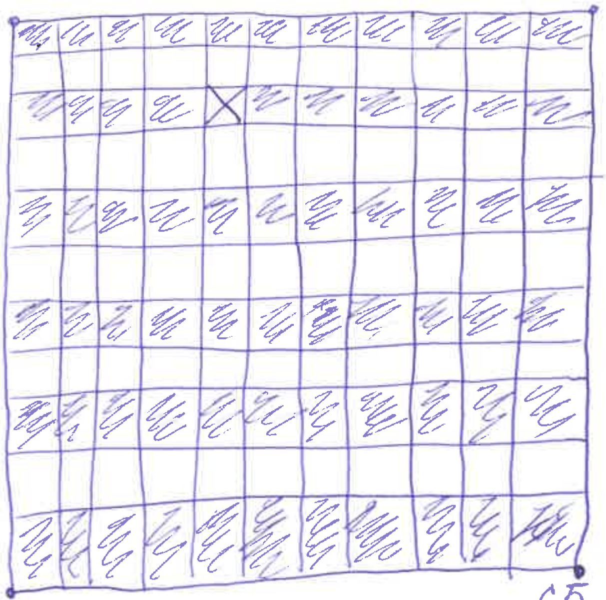
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №3



X – вырезанная клетка

– закрашенная клетка

Раскрасим нашу табличку по принципу: 1 ряд - закрашенные; 2 ряд - незакрашенные и будем так далее чередовать

Всего получается 65 - закрашенных и 55 - незакрашенных клеток. Заметим, что каждый прямоугольник занимает либо 4 закр. клетки, либо 4 незакр., либо 2 закр. + 2 незакр. клетки. То есть каждый прямоугольник 1×4 (4×1) забирает чётное кол-во закр. и незакр. клеток. Но в нашем случае распределить нечётное кол-во закрашенных и нечётное кол-во незакрашенных по чётным кол-вам на каждый прямоугольник невозможно!

Ответ: Нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 | 7 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №5

Если каждый чёрный бельчонок знаком равно с половиной серых бельчат, т.е. с 50, то всего из чёрных бельчат выходит $50\cdot 5=250$ связей. Столько же должно выходить связей и из серых бельчат обратно. Если все серые бельчата будут знакомы < чем с половиной черных бельчат (хотя бы с 2), то max связей будет $2\cdot 100=200$ из серых бельчат. Тогда для того, чтобы максимизировать кол-во серых бельчат, знакомых с <, чем половиной чёрных бельчат, оставшиеся $250-200=50$ связей отдадим как можно меньшему числу бельчат. Всего черных бельчат 5 $\Rightarrow$ из каждого серого max 5 связей выходит. Значит можем добавить к серым бельчатам по $5-2=3$ знакомства. Тогда сделаем оценку кол-ва бельчат, которых нужно найти в задаче. Это $100-\left[\frac{50}{3}\right]=83$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	2	4	1	7	1	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение Задачи №5

Получается, что > 83 серых бельчат, знающих < половины чёрных бельчат быть не может. Составим пример, чтобы доказать, что это работает:

чёрные бельчата

выходит по 50 связей

Пусть будет 17 серых бельчат 1-ая группа, имеющие по 5 связей, 82 серых 2-ая группа по 2 связи и 1 с. 3-я группа имеющий 1 связь.

1-ая группа уменьшит каждому бельчонку (чёрному) по 17 связей (останется по 33) 2-ая группа у 4-ёх чёрных бельчат уменьшит по 33 связи и у одного 32 связи ($82 \cdot 2 = 4 \cdot 33 + 32$), если один серый бельчонок будет знаком с 2 разными чёрными. И 3-я группа заберёт на себя знакомство 33-ье у 5-ого бельчонка

Ответ: 83

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 4 2 4 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	20	20	15		83

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

Пусть x - количество „2", а y - количество „3"

$2025 = 2x + 3y$, при этом, по условию, „3" > „2" =>

$y > x$

$$\begin{cases} 2025 = 2x + 3y \\ y > x \end{cases}$$

$2025 \equiv_3 0$ => $2x \equiv_3 0$ => $x \vdots 3$

$3y \equiv_3 0$

т.к. $y > x$, то ~~x ∈ [0~~ $x = 0; 3; 6; 9 \ldots 402$

(если $x > 402$, то $x \geq y$ (что не подходит под условие):

пусть $x = 405$

$405 \cdot 2 + 3y = 2025$

$3y = 2025 - 810$

$3y = 1215$

$y = 405$

⇓

$x = y$, а нам это не подходит, а если увеличивать x, то y будет уменьшатся и $x \geq y$)

⇓

количество сумм (различных), где каждое слагаемое равно 2 или 3, при этом слагаемых равных 3 больше будет равно $\frac{402 - 0}{3} + 1 = 135$.

Ответ: 135

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 4 2 4 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

Дано:

$\triangle ABC$

$\angle C = 90^\circ$

$DE \perp AC$

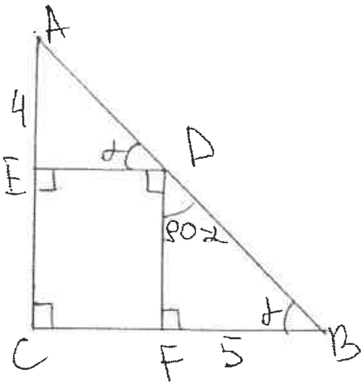
$DF \perp CB$

$AE = 4$

$FB = 5$

$\min S_{\triangle ABC}$

Решение:



$\angle EDF = 360 - 90 - 90 - 90 = 90^\circ$

$\Downarrow$

$CEDF$ – прямоугольник (все углы по 90°)

$\Downarrow$

$ED = CF$ и $DF = EC$.

Пусть $\angle DBF = \alpha$, то $\angle BDF = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$ (по сумме углов $\triangle$)

$\angle EDA = \cancel{\angle D}\ 180 - \angle EDB = \alpha$ (как смежный с $\angle EDB$)

$\Downarrow$

$\angle EAD = 90 - \alpha$ (по сумме углов $\triangle$):

$\triangle EAD \sim \triangle FDB$ (по I пр):

1) $\angle EDA = \angle FBD$

2) $\angle AED = \angle DFB$

$\Downarrow$

$\frac{AE}{DF} = \frac{ED}{FB}$.

$ED \cdot DF = 4 \cdot 5 = 20 = CF \cdot EC$. Пусть $CF = x$, то $EC = \frac{20}{x}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{(CF+5)(CE+4)}{2} = \cancel{\frac{(x+5)(\frac{20}{x}+4)}{2}} = \frac{CF \cdot CE + 4CF + 5CE + 20}{2} =$

$= \frac{20 + 5CE + 4CF + 20}{2} = \frac{40 + \frac{5 \cdot 20}{x} + 4x}{2}$

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

~~при $x < 1$~~

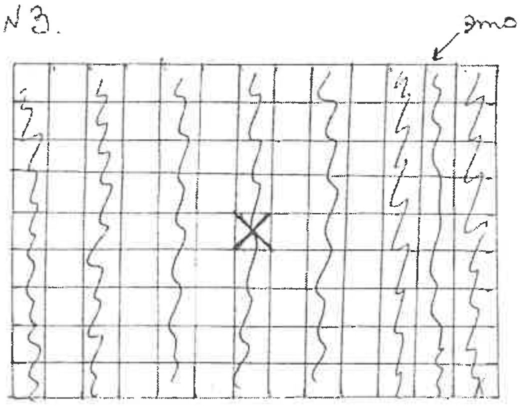
для того, чтобы S была минимальной, то $CE + CF$ должно быть минимальным

$CE \cdot CF = 20 \Rightarrow \min CE + CF = 9$

$$\min S = \frac{40 + \frac{5\cdot 20}{5} + 4\cdot 5}{2} = \frac{40+20+20}{2} = 40.$$

Ответ: 40

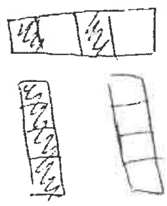
№3.



раскрасим полосками тогда будет

54 белых клетки

62 черных клетки



либо 2 черных клетки, либо 4 черных клетки

т.к. у нас должны быть прямоугольники 1×4 и 4×1, то число черных клеток должно быть $\vdots\, 4$ или $\vdots\, 6$ или $\vdots\, 10$, а у нас 62 черных клетки $62 \not\vdots\, 4$, $62 \not\vdots\, 6$, $62 \not\vdots\, 10 \Rightarrow$ нельзя замостить прямоугольник полосками 1×4 и 4×1.

Ответ: нет, нельзя.

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 4 2 4 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Замена: $t=2x^2+3x+3$

$t(t+2x)=35x^2$

$t^2+2xt-35x^2=0$

$D=4x^2+35\cdot 4x^2=144x^2=(12x)^2$

$t_1=\frac{-2x+12x}{2}=\frac{10x}{2}=5x$

$t_2=\frac{-2x-12x}{2}=\frac{-14x}{2}=-7x$

1) $2x^2+3x+3=5x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-4\cdot 3\cdot 2=-20 \Rightarrow x\in\varnothing$

2) $2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-4\cdot 3\cdot 2=100-24=76$

$x_1=\frac{-10+\sqrt{76}}{4}=\frac{-10+2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-10-\sqrt{76}}{4}=\frac{-10-2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $x_1=\frac{\sqrt{19}-5}{2}$ $x_2=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 1 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

1) 249 серых бельчат знакомы либо с 1, либо с 2-мя бельчатами (черными)

Пример?

пусть 51 серых бельчат знакомы с 5-ю черными

тогда каждый черный знаком с 99 серыми, у которых 1 или 2 знакомых черных, тогда

нам надо $\geq \frac{99 \cdot 5}{2} \approx 248$ бельчат, а у нас 249, значит бельчат хватит

либо с 0

2) 2~~50~~ серых бельчат знакомы либо с 1, либо с 2-мя черными бельчатами

пусть 49 серых бельчат знакомы с 5-ю черными.

тогда каждый черный знаком с 101 серым, у которых 1 или 2 черных знакомых, тогда нам

надо $\geq \frac{101 \cdot 5}{2} \approx 253$ серых бельчат с 1 или с 2-мя знакомыми черными, а у нас их 251. (251<253)

$\Downarrow$

их не хватит

Значит максимум может быть 250 бельчат (серых), у которых число знакомых черных бельчат меньше половины. пример:

250 бельчат (серых) знакомы с 2-мя черными.

50 серых бельчат знакомы с 5 черными.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2   М А 0 0 0 2 4 6 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
10	20	20	20	20		90

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1. Решение: Пусть кол-во слагаемых, равных 2 — x;
кол-во слагаемых, равных 5 — y. $(x, y \in \mathbb{Z};\ x, y \geq 0)$

Тогда по усл.: $\begin{cases} 875 = 2x + 5y & (1) \\ y > x & (2) \end{cases}$

Из (1) $x = \dfrac{875 - 5y}{2}$. $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (875 - 5y) \vdots 2 \Rightarrow y \not\vdots\, 2$

Из (2) $y > \dfrac{875 - 5y}{2} \Rightarrow 2y > 875 - 5y \Rightarrow y > 125$

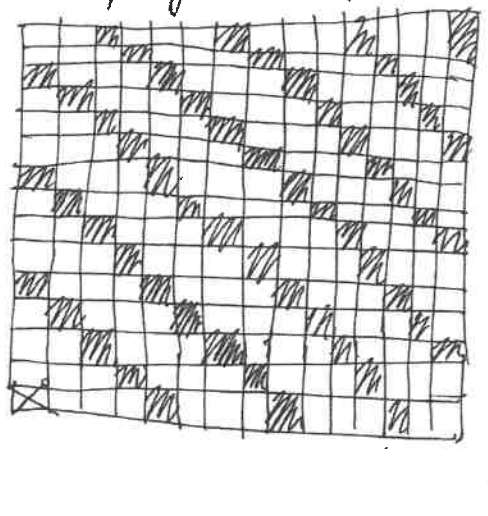
$x \geq 0 \Rightarrow \dfrac{875 - 5y}{2} \geq 0 \Rightarrow 5y \leq 875 \Rightarrow y \leq 175$

Для $\forall\ y \in \{127; 129; 131; \ldots 175\}$ $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$. Тогда сущ-ет столько сумм, сколько чисел в мн-ве $\{127; 129 \ldots 175\}$. Их 30 штук. $\Rightarrow$ Таких сумм 30

$\dfrac{175 - 127}{2} + 1 \neq 30$

Ответ: 30.

№3. Решение: Пусть вырезана левая нижняя клетка. Раскрасим квадрат как на рисунке. Тогда любой прямоуг. 1×4 и 4×1 содержит 1 чёрную и 3 белых клетки.



S квадрата без 1 клетки $= 15^2 - 1 = 224$; $S_{\text{прямоуг.}} = 4. \Rightarrow$ нужно $224 : 4 = 56$ прямоугольн.
Но черных клеток $(5 + 9 + 13) \cdot 2 + 1 = 55$ шт.
Т.е. так замостить квадрат нельзя.

Ответ: нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5. Решение: Построим пример для 166 серых бельчат знакомых меньше, чем с половиной черных. Распределим серых бельчат: 34 знакомы с 5 чёрными (со всеми чёрными) 33 знакомы с 1-ым и 2-ым черными бельчатами; 33 – с 2-ым и 3-им; 33 – с 3 и 4; 33 с 4 и 5; 33 с 5 и 1. 1 серый не знаком ни с кем. Тогда каждый ~~черный~~ чёрный знаком с $34+33\cdot2=100$ = половине серых. Серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной черных – $33\cdot5+1=166$

Предположим, что таких серых бельчат $\geqslant 167$. Тогда назовём степенью бельчонка кол-во бельчат др. цвета, знакомых с данным. Тогда сумма степеней чёрн. = сумме степ. ~~белых~~ серых = $=100\cdot5=500$. Но сумма степ. серых $\leqslant 167\cdot2+33\cdot5=499$. Противоречие.

Ответ: 166.

Вариант № 2 | M A 0 0 0 2 4 6 8 5 2 6

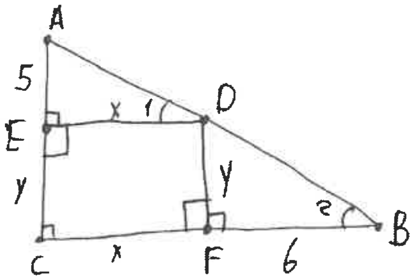
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2. Решение:



Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг., $\angle C = 90°$.
$D \in AB$. $DE \perp CA$, $DF \perp CB$,
$E \in CA$, $F \in CB$. $AE = 5$, $BF = 6$
Найти: наим. S_{ABC}

$BC \perp CA$, т.к. $\angle C = 90°$
$DE \perp CA$ по усл. $\Big\} \Rightarrow BC \parallel DE$

$\angle 1 = \angle 2$ как соотв. углы при $BC \parallel DE$ и секущ. AB

В прямоуг. $\triangle AED$ и $\triangle DFB$ $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle DFB$ по 2 углам. ~~Из подобия~~ Пусть $DE = x$, $DF = y$. Тогда:

[illegible] $\angle DEC = \angle DFC = \angle C = 90° \Rightarrow DECF$ – прямоугольник

$\Rightarrow DE = CF = x$; $DF = CE = y$; $\triangle AED \sim \triangle DFB \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{DF}{FB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = \frac{30}{x}$, $xy = 30$, $x = \frac{30}{y}$

~~$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2}(5+y)(6+x) = \frac{30+6x+5y+xy}{2} =$~~

~~$= \frac{6x+5y}{2} + 30 = 3x + \frac{5y}{2} + 30 = 30 + 3x + \frac{5 \cdot 30}{2 \cdot x} = \frac{75}{x} + 3x + 30$~~

~~По нер-ву Коши: $\frac{\frac{75}{x} + 3x}{2} \geq \sqrt{\frac{75}{x} \cdot 3x} = \sqrt{15^2} = 15 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{75}{x} + 3x \geq 30 \Rightarrow \frac{75}{x} + 3x + 30 \geq 60$. Рав-во при $\frac{75}{x} = 3x \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow x = 5$, $y = 6$.~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 4 6 8 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}(5+y)(6+x)=$

$=\frac{30+6y+5x+xy}{2}=3y+\frac{5x}{2}+30=3y+\frac{5\cdot 30}{2\cdot y}+30=$

$=\frac{75}{y}+3y+30.$ По нер-ву Коши: $\frac{\frac{75}{y}+3y}{2}\geqslant\sqrt{\frac{75}{y}\cdot 3y}=$

$=15.\Rightarrow\frac{75}{y}+3y\geqslant 30\Rightarrow\frac{75}{y}+3y+30\geqslant 60\Rightarrow S_{ABC}\geqslant 60$

Рав-во достигается при $\frac{75}{y}=3y\Rightarrow y=5,\ x=6$

Ответ: 60

№4. $(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$. Пусть $t=3x^2-4,5x-4$.

Тогда: $(t+0,5x)(t-0,5x)=56x^2$

$t^2-0,25x^2=56x^2$

$t^2-56,25x^2=0$

$t^2-(7,5x)^2=0$

$(t-7,5x)(t+7,5x)=0$

$t-7,5x=0 \vee t+7,5x=0$

$3x^2-12x-4=0$ $\quad$ $3x^2+3x-4=0$

$D_1=6^2+3\cdot 4=48$ $\quad$ $D=3^2+4\cdot 3\cdot 4=57$

$x=\frac{6\pm\sqrt{48}}{3}$ $\quad$ $x=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 5 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6+4\sqrt{3}}{3} \\ x = \dfrac{6-4\sqrt{3}}{3} \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{57}}{6} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{57}}{6} \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{6-4\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{-3+\sqrt{57}}{6}$; $\dfrac{-3-\sqrt{57}}{6}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA 000248 7726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	20	20		85

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа

№1

пусть в начальную шкалу n двоек и k троек тогда:

$2n+3k=2025$ (n и k - натуральное либо 0)

пусть $n=k$ тогда имеем:

$5n=2025$

$n=405$

значит если двоек 405, то и троек - 405, с этого момента при увеличении кол-ва троек количество двоек уменьшается. Также очевидно, что при $k:2$ уравнение $2n+3k=2025$ не имеет решений в натуральных числах т.к оба слагаемых $:2$, а $2025 \not\vdots 2$. Найдем наиб. кол-во троек: $3k=2025$

$k=675$

Также очевидно, что для любого нечетного k на отрезке $(405;675]$ найдется натур. либо нулевое n для которого выполнятся равенство. Тогда задача сводится к нахождению кол-ва нечетных чисел на отрезке $(405;675]$ - 405 не включаем т.к в таком случае кол-во слагаемых равны;

Лист 1 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА 0002487726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

не по условию быть
больше.

Натуральных чисел на отрезке (405, 675] = 135

Ответ. 135 различных серий

№5

Для начала докажем, что число знакомых меньше чем с половиной всех может быть 251;
переведём на язык графов:
где правая часть серые бельчата, левая черные

черные серые

рёбра только из одной части в другую
Тк каждый черный знаком
ровно с половиной серых
то из левой доли выходит
$5 \cdot \frac{300}{2} = 750$ рёбер

В свою очередь из правой выходит
максимум $2 \cdot 251 + 5 \cdot 49 = 747$ противоречие
Тк из каждой доли должно выходить
одинаковое кол-во рёбер. ч.т.д

Приведу пример возможности того, что 249 серых
бельчат знакомы с 52 черными: пусть 249
дружат ровно с 2 черными, тогда рёбер в графе
выходящих из правой доли $249 \cdot 2 = 498$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00024877 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

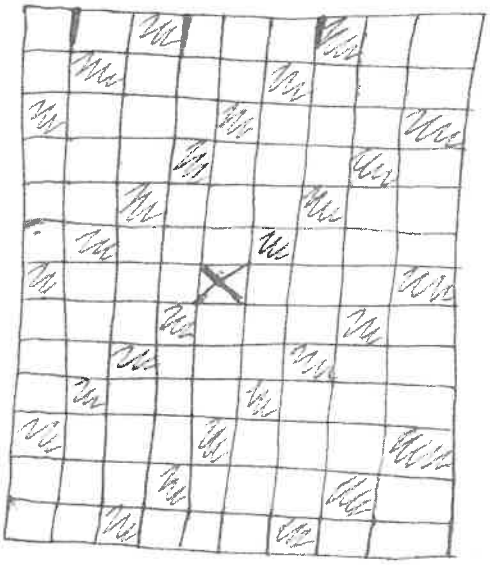
1	2	3	4	5	6	Σ

Оценочная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

осталось еще $750-498=$
$=252$ ребра. и ~~т~~ $300-249=$
$=51$ бельчонок. пусть 49 из оставшихся
дружат с 5 черными: $49\cdot5=245$ ребер
осталось $252-245=7$ ребер, и 2 бельчонка, тогда
один из них дружит с тремя, другой с 4 черными
бельчатами. ч.т.д.

№3

раскрасим клетки таблицы таким образом, чтоб в каждом кусочке 1×4 и 4×1 была только 1 закрашенная клетка см. рисунок. Таким образом закрашенных клеток равно 28 ⇒ кусочков



1×4 и 4×1 в сумме равно 28, но с другой стороны кусочков: $\frac{9\cdot13-1}{4}=29$ противоречие значит нельзя

Ответ: нельзя

№4

пусть $f=2x^2+3x+3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0002487726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Тогда имеем ур-ие:

$t(t+2x)=35x^2$

$35x^2-2tx-t^2=0$

решим кв. ур-ие относительно x:

$D=4t^2-4\cdot35\cdot(-t^2)=144t^2$

$x_1=\dfrac{2t+12t}{70}=\dfrac{t}{5}$

$x_2=\dfrac{2t-10t}{70}=-\dfrac{t}{7}$

т.к. данные x являются таковыми корнями исходного ур-ия то имеем при обр. замене

$x=\dfrac{2x^2+3x+3}{5}$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-4\cdot3\cdot2<0$

значит корней нет

$x=\dfrac{2x^2+3x+3}{-7}$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-4\cdot2\cdot3=76$

$x_1=\dfrac{-10+\sqrt{76}}{4}$

$x_2=\dfrac{-10-\sqrt{76}}{4}$

Ответ: $\dfrac{-10+\sqrt{76}}{4}$; $\dfrac{-10-\sqrt{76}}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

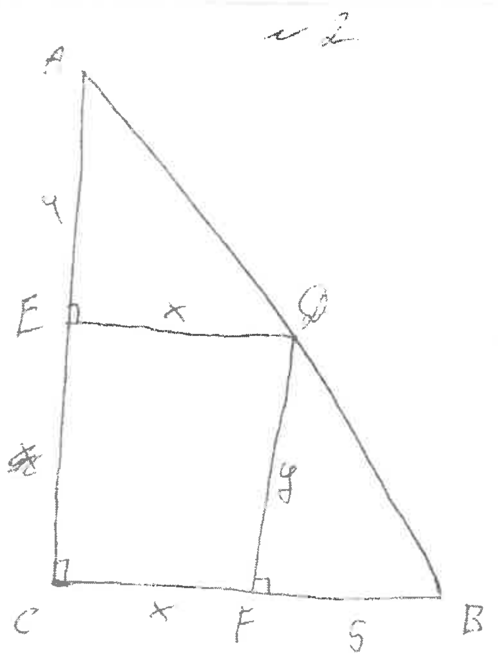
Вариант № 1 MA000248 7726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



пусть $ED = x$, $FD = y$ т.к. $CEDF$ прямоуг., то $ED = CF$; $DF = CE$

т.к. $\triangle AED \sim \triangle DBF$ по 2м углам ($\angle E = \angle F = 90$ по условию)

$\angle EDA = \angle FBD$ в силу паралл. CB и ED при секущ. BA, тогда

в силу подобия $\frac{5}{x} = \frac{y}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = 20$; $y = \frac{20}{x}$ тогда $S_{CEDF} = x \cdot \frac{20}{x} = 20$,

Найдем $S_{ADE} + S_{DFB} = \frac{5 \cdot \frac{20}{x}}{2} + \frac{4x}{2} = \frac{50}{x} + 2x =$

$= \frac{2x^2+50}{x}$ тогда площадь $\triangle ABC$ (min) равна

$20 + \min\left(\frac{2x^2+50}{x}\right)$

Ответ: $20 + \min\left(\frac{2x^2+50}{x}\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 3 | 3 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	15		95

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

x - кол-во слаг. = 3

y - кол-во слаг. = 2

$3x+2y=2025$

$2y = 2025-3x$

$y = \frac{2025-3x}{2}$

$y \geq 0$

$\frac{2025-3x}{2} \geq 0 \Rightarrow x \leq 675$

$x > y$

$x > \frac{2025-3x}{2}$

$2x > 2025-3x$

$x > 405$

$n = \frac{\text{посл. член} - \text{перв. член}}{\text{разность}} + 1$

$n = \frac{675-407}{2} + 1$

$n = 134+1$

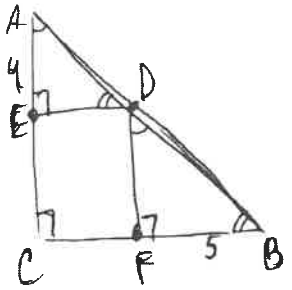
$n = 135$

Ответ: 135.

№2

Дано:
т.D ∈ AB
~~Решение~~
$\triangle ABC$
$AE=4$
$BF=5$

Найти:
$S_{\triangle ABC}$-?



Решение:
чет-ник $CDEF$ - прямоуг.
$AE=4$; $BF=5$
$ED=FC=y$ $DF=EC=x$
$AC=AE+EC=4+x$
$BC=BF+FC=5+y$

$\angle$ $\triangle ADE$ и $\triangle DBF$ - они подобны по двум углам и подобны $\triangle ABC$
из подобия:
$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$; $\frac{4}{4+x} = \frac{y}{5+y}$; $20+4y = 4y+xy \Rightarrow xy=20$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 4 8 3 3 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{(20+4y+5x+xy)}{2}$

$S = \frac{(40+4y+5x)}{2} = 20+2y+2{,}5x$

$2y+2{,}5x$ при $xy=20$ $x,y>0$

$2y+2{,}5x \geqslant 2\sqrt{(2y)(2{,}5x)} = 2\sqrt{5xy}$

$2y+2{,}5x \geqslant 2\sqrt{5\cdot 20} = 20$

min: $2y = 2{,}5x \Rightarrow 4y = 5x$

$x\left(\frac{5}{4}x\right) = 20 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$, тогда $y = 5$

$2y+2{,}5x = 20$

$\Rightarrow S_{ABC} = 20+20 = 40$ Ответ: 40

N 3

общ. $S = 13\cdot 9 = 117$ $117-1 = 116$ - без центр. клетки

$\frac{116}{4} = 29$ - усл. площади выполняется

$i \pmod 4$, $j \pmod 4$, i и j - коорд.

Рассмотр. раскр. в 4 цвета $\left(\frac{(13+1)}{2}; \frac{(9+1)}{2}\right) = (7, 5)$

1; нечет.; нечет ← центр. кл.

2: ч.; н/ч

3; н/ч; ч

4: н/ч; н/ч

пом. прямоугольник

1: $7\cdot 5 = 35$

2: $7\cdot 4 = 28$

3: $6\cdot 5 = 30$

4: $6\cdot 4 = 24$

пом. удален. центр. клетки

1: 35

2: 28

3: 30

4: $24-1 = 23$

$(i\cdot 1 + j\cdot 0) \pmod 4$

Кажд. полоска 1×4 покрывает 4 клетки одного цвета.

кол-во клет. в полном кл п-у.

0: 30 1: 29 2: 49 3: 29

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА00024833326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

центр. клетка (7, 5) (mod 4) = 3

после удал. центр. клетки:

0: 30

1: 29

2: 29

3: 28

Кол-во клеток разн. цветов не совпад. полоски 4×1 покрыв. поровну клеток кажд. цвета. Полоски 1×4 покрывают клетки только одного цвета.

Если замощение возм., то разница должна быть ⋮ 4. 30−28 = 2 − что не кратно 4. => невозможно.

Ответ: нельзя.

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Замена:

$y=2x^2+3x+3$

$(y-x)(y+x)=35x^2$

$y^2-x^2=35x^2$

$y^2=36x^2 \Rightarrow y=6x$ или $y=-6x$

1. Случай: $y=6x$

$2x^2+4x+3=6x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=-20<0$ − действ. корней нет

2. Случай: $y=-6x$

$2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=76>0$

$x=\frac{-10\pm\sqrt{76}}{4}=\frac{-10\pm2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

$x_1=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $x_1=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $x_2=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

№5

$S=300$ $B=5$ $C.=\frac{300}{2}=150$

d_s − число знакомых черных бельчат

d_b − число знакомых серых бельчат

$d_s=245$ − сущ. $d_s=251$ − не сущ.

Представим граф., в котором 300 вершин − одна доля, а др. доля − 5 вершин.

$d_l=150$

Сумма степеней черных вершин $=\Sigma$

$5\cdot150=750$ Д-м $d_s=249$:

$\sum d_s=750$ Пусть у = серые бельч.

$\frac{750}{300}=2,5$ $d_s=249$

Тогда остальная сумма $=750-249=501$

Ост. $\frac{501}{299}\approx1,678$ − значит можно распр. ост. знакомства, что среди серых бельчат было 1 или 2 знакомых черных.

Пример: среди 298 серых бельчат с $d_s=1$ и 1 серый с $d_s=2$. (это противоречит условию.)

$d_s=150 \Rightarrow d_s=249$ − возможно

Предположим, что у серых $d_s=251$

остальная сумма $=750-251=499$

$\frac{499}{299}\approx1,669 \Rightarrow$ среди 299 серых. возможные знач. $d_s=1$ или $d_s=2$

min $=299\cdot1=299$; max $=299\cdot2=598$

Но общее число ребер =750, если у одного серого бельчонка 251 знакомый, то он „забирает" 251 ребро.

251 знак. для серого бельч. => он знаком с $\frac{251}{2}=50,2$ черн.

Если 1 сер. бельч. знаком с k черн, то $k\le5$, но $d_s=251$ => хотя бы один черн. бельч. должен быть знаком с $\frac{251}{5}=50,2$ серых, но это невозможно, т.к. он должн. быть знаком с 150 сер. => невозможно

ч.т.g.

Нет конкретного примера для 249 (не в числах, а − показать, что эти числа реализуются). Кто с кем знаком

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	4	8	6	9	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

1) Пример на 249:

Пусть 51 серый бельчонок знаком с каждым чёрным, тогда, чтобы выполнялось условие о знакомстве с половиной серых бельчат, каждому чёрному бельчонку не хватает $150-51=99$ знакомств.

~~Пронумеруем оставшихся 198 серых бельчат~~ от ~~1 до 249, тогда 1 и 2 чёрных бельчонка знакомятся с 1-99 бельчатами, а 3 и 4 чёрные бельчата знакомятся с 100-198, а последний чёрный~~ бель~~чонок знакомится~~ с 199-)

1,2) Пронумеруем оставшихся серых бельчат от 1 до 249, тогда пусть первый чёрный бельчонок знаком с 1-99, второй с 100-198, третий 199-249 и 1-48, четвёртый 49-147, пятый 147-245. Таким образом, 249 серых бельчат знакомы ≤ 2 чёрными бельчатами, а каждый чёрный с 150 серыми.

2) Оценка:

С одной стороны ~~на~~ общее кол-во знакомств равно $5\cdot150=750$. С другой стороны, если существует пример на 251, то общее кол-во знакомств будет (максимальное) $251\cdot2+49\cdot5=$ $=502+245=747<750 \Rightarrow$ такого примера не существует, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А Р О Р 2 4 8 6 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$(2x^2+4x+3-x)(2x^2+4x+3+x)=35x^2$

$(2x^2+4x+3)^2-x^2=35x^2$

$(2x^2+4x+3)^2=36x^2$

$\left[\begin{array}{l}2x^2+4x+3=6x\\2x^2+4x+3=-6x\end{array}\right.$

1) $2x^2+4x+3=6x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=2^2-3\cdot2\cdot4=4-24<0 \Rightarrow \varnothing$

2) $2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2+10x+3=0$

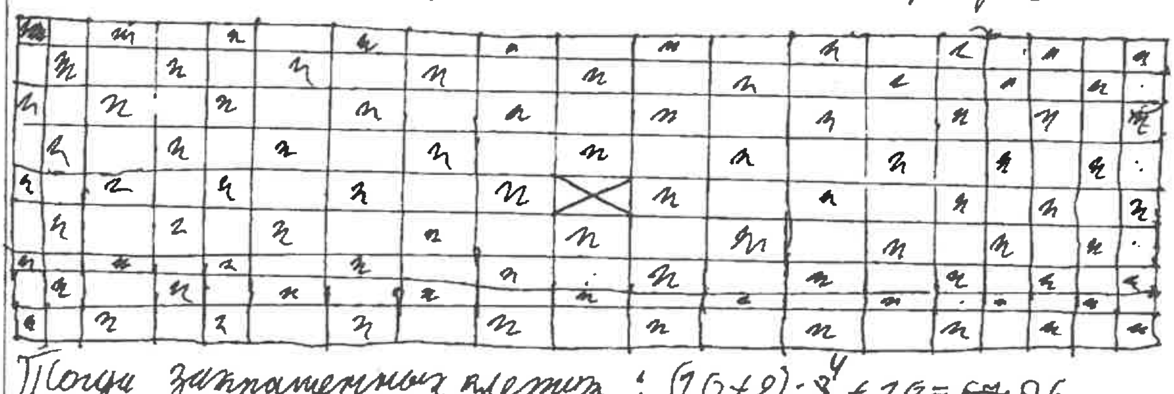
$D=10^2-3\cdot2\cdot4=100-24=76=4\cdot19$

$x_{12}=\dfrac{-10\pm2\sqrt{19}}{4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

№3

1) Раскрасим доску в шахматном порядке



Тогда закрашенных клеток: $(10+9)\cdot\cancel{3}^{4}+10=\cancel{67}\,86$

Лист 2 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | р | 2 | 4 | 8 | 6 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3(продолжение)

Но. незакрашенных клеток всего $(10+9)\cdot 4+8=$

$=76+8=84$

~~Если во~~ Можно заметить, что в любом прямоугольнике 1×4 будут по 2 клетки каждого типа. Но кол-во закрашенных клеток не равно кол-во незакрашенных ($86\neq 84$) $\Rightarrow$ такое невозможно

Ответ: Нет, нельзя.

№1

1) Заметим, что $2025=675\cdot 3$.

2) Проанализируем, как составляется сумма из 2 и 3, так чтобы они дали 2025:

$\cancel{20}\ 675\cdot 3+2\cdot 0=2025$

$674\cdot 3+2\cdot \frac{3}{2}=2025$ – не подходит

$673\cdot 3+2\cdot 3=2025$.

Можно заметить, что кол-во двоек всегда будет $\vdots 3$ (т.к. $2025 \vdots 3$, $3 \vdots 3 \Rightarrow 2\cdot n \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$, где n – кол-во двоек)

3) Составим для удобства таблицу с кол-во двоек и троек, и проанализируем их; тогда N строки равен $\frac{675-m}{2}+1$, где m – число троек (например, $\frac{675-675}{2}+1=1 \Rightarrow N=1$).

N	2	3
1	0	675
2	3	673
3	6	671
⋮	⋮	⋮

4) Пусть n – кол-во двоек, тогда $n=(N-1)\cdot 3 \Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	4	8	6	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1 (продолжение)

$\Rightarrow \left(\frac{675-m}{2}+1-1\right)\cdot 3 = n$

5) Посмотрим при каких m будет больше n:

$\frac{675-m}{2}\cdot 3 < m$

$2m-(675-m)\cdot 3 > 0$

$2m+3m-675\cdot 3>0$

$5m > 675\cdot 3$

$m > 135\cdot 3$

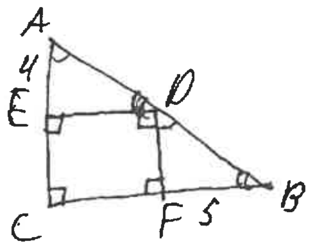
$m > 405$

6) Найдём кол-во строк в таблице, где $m>405$:

$N=\frac{675-405}{2}+1-1=135$ (т.к. $m=405$ не входит)

Ответ: 135

N2



1) Т.к. $\angle ACB = 90^\circ = \angle DEC = \angle CFD \Rightarrow$

$\Rightarrow CEDF$ – прямоугольник

2) Из п. 1 $\Rightarrow \angle ADE = 90^\circ - \angle CAD =$

$= \angle CBD \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle DFB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{DF}=\frac{ED}{FB} \Leftrightarrow \frac{AE}{CE}=\frac{CF}{BF}$ (т.к. $CEDF$ – прямоуг.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4}{CE}=\frac{CF}{5} \Rightarrow CE\cdot CF = 20$

~~3) Также подобны и $\triangle AED \sim \triangle ABC$ и $\triangle DFB \sim \triangle$~~

~~по 3 углам. $\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$; $\frac{BF}{CB}=\frac{DF}{AC} \Rightarrow \frac{4BC}{DE}$~~

3) $S_{ABC} = S_{AED} + S_{DFB} + S_{DECF} = \frac{1}{2}AE\cdot DE + \frac{1}{2}DF\cdot BF + 20.$

Пусть ~~CE~~ $DE = x$, а ~~B~~ $DF = y$, тогда:

$xy = 20$ (из п. 1) и $S_{ABC} = \frac{1}{2}(4x+5y)+20.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 6 | 9 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

	1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2(продолжение)

4) Найдём минимальное знач. $4x+5y$. Если $xy=20$, тогда $x=\frac{20}{y}$ =>

=> $4x+5y=$ ~~$\left(4x+\frac{20\cdot 5}{y}\right)$~~ $\frac{4\cdot 20}{y}+5y=\frac{80}{y}+5y$

5) Из неравенства о средних:

$$\frac{\frac{80}{y}+5y}{2}\geqslant\sqrt{\frac{80}{y}\cdot 5y}$$

$\frac{80}{y}+5y\geqslant 2\sqrt{80\cdot 5}=2\sqrt{4^2\cdot 5^2}=2\cdot 20=40$ =>

=> $S_{ABC}\geqslant\frac{1}{2}\cdot 40+20=40$ => $S_{ABC_{min}}=40$

Ответ: $40=S_{ABC_{min}}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	7	20	20		87

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\boxed{№1}$

$$\begin{cases} 875 = 2x+5y \\ y > \cancel{5}x \end{cases} \to 875_{\vdots 5} = 2x + 5y_{\vdots 5} \Rightarrow 2x \vdots 5 \Rightarrow \overset{(1)}{\boxed{x \vdots 5}}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{875-2x}{5} \\ y > x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{875-2x}{5} > x \quad | \cdot 5$$

$$875 - 2x > 5x$$

$$7x < 875$$

$$x < 125$$

При $x = 125$: $y = 125$, не подходит, т.к. $x \vdots 5 \Rightarrow$ Всего вариантов $\frac{125}{5} \underbrace{+1}_{x=0} \underbrace{-1}_{x=125} =$

$= 25$ вар.

$\boxed{\text{Ответ: 25 вар.}}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 MA000249 5226

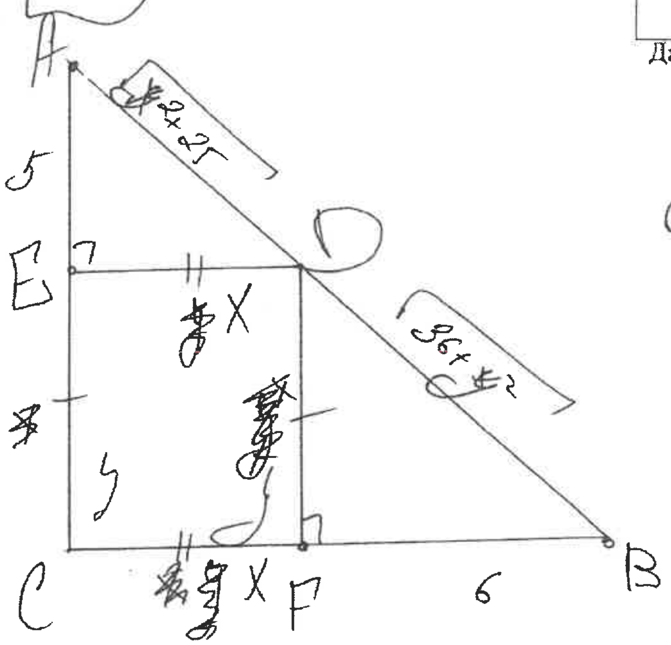
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Пусть: $CF = x$

$EC = y$

Тогда:

$CF = ED = x$

$EC = DF = y$

т.к. $CEDF$ – прямоугольник

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle EAD$ и $\triangle FDB$:

$DB = \sqrt{y^2+36}$

$AD = \sqrt{x^2+25}$

Теорема Пифагора для $\triangle ABC$

$(5+y)^2+(x+6)^2 = (\sqrt{x^2+25}+\sqrt{y^2+36})^2$

$\cancel{y^2}+\cancel{25}+10y+\cancel{x^2}+\cancel{36}+12x = \cancel{x^2}+\cancel{25}+\cancel{y^2}+\cancel{36}+2\sqrt{x^2+25}\sqrt{y^2+36}$

$10y+12x = 2\sqrt{x^2+25}\sqrt{y^2+36} \quad |:2$

1	2	3	4	5	6	Σ

$$5y+6x=\sqrt{x^2+25}\cdot\sqrt{y^2+36}\ \Big|^2$$

$$(5y+6x)^2=(x^2+25)(y^2+36)$$

$$\cancel{25y^2}+\cancel{36x^2}+60xy=x^2y^2+\cancel{36x^2}+\cancel{25y^2}+25\cdot 36$$

$$(xy)^2-2\cdot(xy)\cdot 30+30^2=0$$

$$(xy-30)^2=0$$

$$\boxed{xy=30}=S_{CEDF}$$

~~Совместим~~

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(5+y)(6+x)=$$

$$=S_{DECF}+S_{AED}+S_{DFB}=\underbrace{30}_{const}+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot y$$

Следовательно, нам нужно минимизировать $2{,}5x+3y=f(x)$, при условии, что $xy=30$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 9 | 5 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$xy=30 \Rightarrow y=\frac{30}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 2{,}5x+\frac{90}{x} = \frac{2{,}5x^2+90}{x} = \frac{1}{x}(2{,}5x^2+90)$

Найдём точки экстремума функции при помощи производной:

$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'\cdot(2{,}5x^2+90) + \frac{1}{x}(2{,}5x^2+90)' =$

$= -\frac{1}{x^2}(2{,}5x^2+90) + \frac{1}{\cancel{x}}(5\cancel{x}) = 5-2{,}5-\frac{90}{x^2} =$

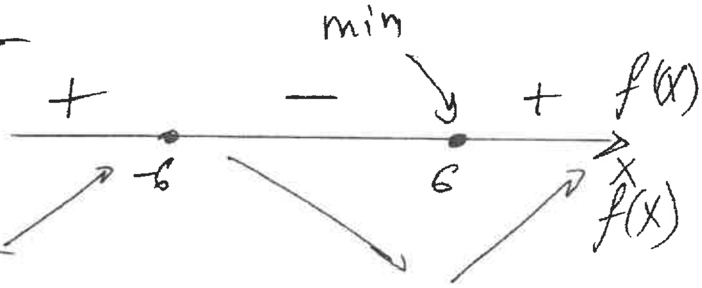
$= 2{,}5-\frac{90}{x^2}$

$f'(x)=0$ - в точках экстремума

$2{,}5=\frac{90}{x^2} \quad |\cdot x^2 : 2{,}5$

$x^2=\frac{90}{2{,}5}=36$

$x=\pm 6$



Получим, точка минимума

$x=6 \Rightarrow y=\frac{30}{6}=5 \Rightarrow \boxed{S_{ABCD}=\frac{1}{2}(10\cdot \cancel{12}^{6})=60}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 9 | 5 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

Пусть: $t=3x^2-4x-4$

$t(t-x)=56x^2$

$t^2-tx-56x^2=0$

$D=x^2+4\cdot 56x^2=x^2+224x^2=225x^2$

$t_1=\dfrac{x+15x}{2}=\dfrac{16x}{2}=8x$

$t_2=\dfrac{x-15x}{2}=-\dfrac{14x}{2}=-7x$

t_1:

$3x^2-4x-4=8x$

$3x^2-12x-4=0$

$D=144+4\cdot 4\cdot 3=144+48=192=4\cdot 48=4^2\cdot 4\cdot 3=4^3\cdot 3$

$x_1=\dfrac{12+4\sqrt{12}}{6}=2+\dfrac{2}{3}\sqrt{12}$

$x_2=\dfrac{12-4\sqrt{12}}{6}=2-\dfrac{2}{3}\sqrt{12}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 9 | 5 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

t_2

$3x^2-4x-4=-7x$

$3x^2+3x-4=0$

$D=9+4\cdot4\cdot3=57$

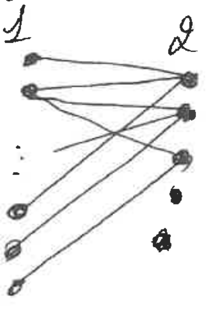
$x_3=\frac{-3+\sqrt{57}}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{57}}{6}$

$x_4=\frac{-3-\sqrt{57}}{6}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{57}}{6}$

Ответ: $x_1=2+\frac{2}{3}\sqrt{12}$, $x_2=2-\frac{2}{3}\sqrt{12}$

$x_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{57}}{6}$, $x_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{57}}{6}$

№5 Введём двудольный граф, где вершины одной доли — серые бельчата, а другой чёрные, а связь 2-х вершин ребром показывает знакомство:



У каждой из вершин доли 2 степень, тогда всего рёбер: $5\cdot100=500$ (300)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000249522 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть x – бельчат серого цвета, знакомыми с 2 чер. а y – с 1 тогда

$$\begin{cases} 2x+y+k=500 & \text{(Подсчёт кол-во рёбер)} \\ x+y+n=200 & \boxed{n>k} \end{cases}$$

где $k=3a_3+4a_4+5a_5$, а $n=a_3+a_4+a_5$

~~Таксама~~ Пусть $x+y=S$, тогда

$2x+y\le 2S \mid \cdot(-1)$ $\Rightarrow$ $k=500-\underbrace{(2x+y)}_{\geq -2S}\geq 500-2S$

$-(2x+y)\geq -2S$

max k, при самом большом a_5 т.е. $5(200-S)$, получим

$5(200-S)\geq 500-2S$

$1000-5S\geq 500-2S$

$3S\le 500$

$S\le 166\frac{2}{3}$

$\boxed{S\le 166}$

Оценка

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА000249522 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пример $\boxed{S=166}$

$34\cdot5+0\cdot4+0\cdot3+164\cdot2+2\cdot1=\boxed{500}$

(Мы рассматривали 1 или 2 связи т.к. по условию их должно быть $<\frac{5}{2}=2{,}5$ т.е. ≤ 2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 9 | 5 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

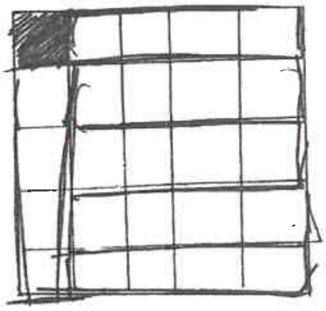
ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Заметим, что 5 на 5 без одной клетки можно замостить таким образом:



Также, нашу доску можно разбить на 9 таких квадратов, или же 9 „лишних" клеток, одной (угловой клетки) у нас нет по условию, => остаётся 8 „лишних" клеток, но в силу расположения квадратов 5 на 5, 2 прямоугольника 4 на 1 выстроить не получится.

(Важно отметить, что „лишней" клеткой может быть исключительно угловая клетка!)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МН000250 2626

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	2	20	15		65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Используем метод замены переменной: пусть ~~$t=2x^2+3x+4$~~ $t=2x^2+4x+3$, тогда уравнение примет вид:

$(t-x)(t+x)=35x^2$

$t^2-x^2=35x^2$

$t^2=36x^2$

$\sqrt{t^2}=\sqrt{36x^2}$

$|t|=\sqrt{36x^2}$

$t=\pm 6x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t=6x \\ 2x^2+4x+3=6x \end{cases} \\ \begin{cases} t=-6x \\ 2x^2+4x+3=-6x \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t=6x \\ \cancel{2x^2 - 2x+3=0} \quad 2x^2-2x+3=0 \ (1) \end{cases} \\ \begin{cases} t=-6x \\ 2x^2+10x+3=0 \ (2) \end{cases}\end{array}\right.$$

Найдем дискриминанты полученных уравнений

(1): $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot3=1-6=-5<0$, то уравнение не имеет корней

(2): $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

$\frac{D}{4}=5^2-2\cdot3=25-6=19>0$, то уравнение имеет 2 различных действительных корня

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $x=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$ или $x=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00025026 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Найдем наибольшее количество слагаемых, равных 3. Для этого нацело поделим 2025 на 3 $2025:3=675$. Тогда всего количество ~~n~~ таких слагаемых не превышает 675, т.е. $n \le 675$.

Так как сумма состоит лишь из слагаемых, равных или 2, или 3, то, по условию, количество „троек" должно превышать количество „двоек". Заметим, что одну „тройку" нельзя представить в виде суммы слагаемых, равных 2, а две — можно, поскольку $3+3=6=2+2+2$, то ~~на~~ каждые два слагаемых, равных 3, в исходной сумме можно заменить на 3 слагаемых, равных 2.

~~Если x — коэффициент пропорциональности~~, то

Тогда сумма всех троек не меньше, чем $\frac{3}{5}$ от исходной суммы, то есть не меньше, чем $\frac{3}{5}\cdot 2025 = \cancel{1350}$ 1215. При таком исходе количество троек в сумме составит ~~1350 : 3 = 450~~ $1215:3=405$, то количество различных комбинаций будет равно $\frac{675-\cancel{450}\,405}{2} = \cancel{122}\ 135$, так как лишь каждую вторую „тройку" можно заменить „двойками".

Ответ: ~~122~~ 135.

№5

Каждый черный бельчонок знаком с $300:2=150$ серыми бельчатами. Если серый бельчонок знаком ~~не~~ менее, чем с половиной черных, то он знаком с $n \le 2$ черными бельчатами.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА00025026 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(№5)

1) Докажем, что число серых бельчат, знакомых с $n \le 2$ черными может быть равно 249.
Для этого приведем пример:
Предположим 249 серых бельчат знакомы с 2 черными, то всего знакомств между ними будет $249 \cdot 2 = 498$.
Заметим, что, если каждый черный бельчонок знаком ровно со 150 серыми, то всего знакомств доступно $5 \cdot 150 = 750$.
Тогда $300 - 249 = 51$ серых бельчонка должны суммарно иметь хотя бы $750 - 498 = 252$ знакомства с черными. Проверим: $\frac{252}{51} = \frac{84}{17} = 4\frac{16}{17} < 5$.
Противоречия с условием нет, то случай возможен.
2) Докажем, что число серых бельчат, знакомых с $n \le 2$ черными не может быть равно 251.
От противного:
Предположим, 251 серый бельчонок имеет знакомство с $n \le 2$ черными:
если $n = 2$, то всего знакомств „использовано" $251 \cdot 2 = 502$.
Осталось знакомств $750 - 502 = 248$ на $300 - 251 = 49$ сер. бельчат. Тогда каждый из оставшихся серых знаком с $\frac{248}{49} = 5\frac{3}{49} > 5$ черными, что противоречит условию.
Если ~~n=1 или n=0~~ $n<2$, то количество „использованных" знакомств уменьшится, а „оставшихся" увеличится. Следовательно, увеличится и число черных бельчат, необходимое оставшимся серым.
Значит, предположение неверно, число таких бельчат не равно 251.

№3

Ответ: нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 5 0 2 6 L 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(№3: решение)

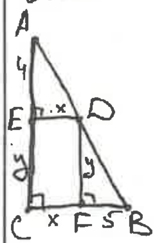
Площадь прямоугольника с вырезанной клеткой составит $13\cdot 9-1=116$ клеток.

Заметим, что, так как каждая полоска состоит из $4\cdot 1=1\cdot 4=4$ клеток, то любая фигура, которую можно накрыть такими полосками, должна делиться на несколько прямоугольников, у которых площадь и длина хотя бы одной из сторон кратны 4.

Исходный прямоугольник без центральной клетки можно разбить на число меньших прямоугольников не меньшее 4.

Заметим, что $116:4=29 \not\vdots\, 4$ то замостить исходный прямоугольник такими полосками нельзя.

№2.



Дано:
$\triangle ABC$ - прямоугольный; AB - гипотенуза; $D\in AB$.
$DE\perp AC$; $DF\perp BC$; $AE=4$; $BF=5$

Найти: $S(\triangle ABC)$ - наименьш.

Решение:

① Пусть $CF=x$; $CE=y$, то т.к. $CFDE$-прямоуг. (по признаку), то $CF=DE=x$; $CE=DF=y$

② $S(\triangle ABC)=S$, то $\begin{cases} S=\frac{1}{2}AC\cdot BC \\ S=S(\triangle AED)+S(\triangle DFB)+S(CFDE)\end{cases}$ $\begin{cases} S=\frac{1}{2}(x+5)(y+4) \\ S=2x+2{,}5y+xy \quad (2)\end{cases}$, то

$\frac{1}{2}(x+5)(y+4)=2x+2{,}5y+xy$

$10+2x+2{,}5y+0{,}5xy=2x+2{,}5y+xy$, то

$0{,}5xy=10 \quad |\cdot 2$

$xy=20$

③ Заметим, что в (2) коэффициент при x меньше $(2<2{,}5)$, то наименьшая площадь будет достигаться при $x>y$

④ $20=20\cdot 1=1\cdot 20=\underline{10\cdot 2}=2\cdot 10=\underline{5\cdot 4}=4\cdot 5$. Подчеркнем выгодные случаи в соответствии с ③

⑤ если $x=20$; $y=1$, то $S=40+2{,}5+20=62{,}5$
если $x=10$; $y=2$, то $S=20+2{,}5\cdot 2+20=45$ Наим. $S=40$
если $x=5$; $y=4$, то $S=10+10+20=40$

Ответ: 40

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 4 | 5 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	3	20	1	18		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Представление числа 2025 с максимальным количеством двоек: $2025 = 1011 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ (1 тройка и 1011 двоек). Но нас интересуют разложение, где троек больше. Чтобы найти кол-во таких разложений запишу уравнение, с помощью которого найду разложение, где кол-во троек равняется кол-ву двоек.

Заметим, что чтобы сумма оставалась равна 2025 мы можем уменьшить кол-во двоек только увеличив кол-во троек. (убрав 3 двойки мы добавим 2 тройки, т.к. $2025 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2025$)

Тогда пусть мы убрали $3x$ двоек и добавили $2x$ троек:

$$1011 - 3x = 1 + 2x,\ 5x = 1010 \Rightarrow x = \frac{1010}{5} = 202,$$

т.е. кол-во ~~двоек~~ двоек = кол-во троек $= 1 + 202 \cdot 2 = 405$.

Теперь считаем наш Ответ как кол-во вариантов убрать определенное кол-во двоек (3, 6...):

$\frac{405}{3} = 135$

Ответ: 135

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	5	4	5	8	2	6

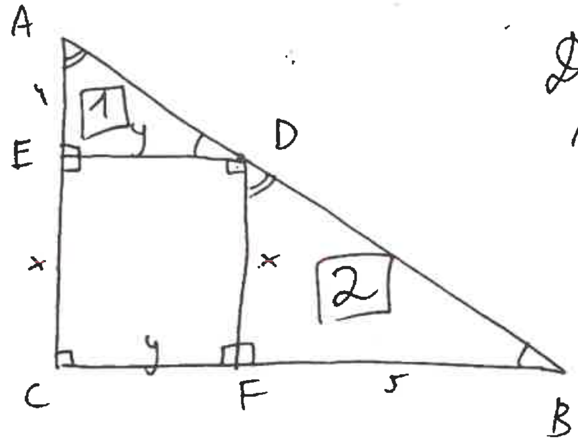
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №2



Дано:

$AE=4$, $BF=5$

$\angle C = 90^\circ$

Найти:

$S_{ABC} = ?$

Решение:

Обозначу EC как x. Тогда раз $CEDF$ - прямоугольник, $DF=x$. Аналогично $ED=CF=y$.

Примечание: $\angle C = 90^\circ$; раз DE и DF - перпендикуляры, то $\angle DEC = \angle DFC = 90^\circ \Rightarrow \angle EDF = 360-90-90-90=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $CEDF$ - прямоугольник.

Заметим, что раз $DF \parallel AC$, то ($\Rightarrow \angle BDF = \angle BAC$) $\triangle BFD \sim \triangle BCA$ (по 2м углам). Тогда $\frac{x}{x+4} = \frac{5}{y+5} \Rightarrow (y+5)x = (x+4)5 \Rightarrow$

$\Rightarrow yx+5x = 5x+20 \Rightarrow xy=20$ (площадь $\square$ со сторонами x и y)

Теперь заметим, что по т-ме Пифагора

$(x+4)^2+(y+5)^2 = y^2+4^2+x^2+5^2$ ← площади 1 и 2

? $10y+8x=15 \Rightarrow \frac{4y}{2} + \frac{5x}{2} = \frac{15}{4}$ и Ответ: $20+\frac{15}{4} = 23\frac{3}{4} = 23{,}75$

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 4 | 5 | 8 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 3

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2		4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

Нарисую данный прямоугольник и раскрашу его в „1234" раскраску (расставлю во все клетки числа от 1 до 4 как показано на рисунке)

Заметим, что при такой раскраске любой прямоугольник 1×4 или 4×1 включает в себе по одной клетке с каждым числом от 1 до 4, т.е. если прямоугольник можно на них разрезать, то клеток с 1, 2, 3, 4 должно быть поровну, но тут: 30 клеток с 1, 29 клеток с 2, 28 клеток с 3, 29 клеток с 4 => замостить прямоугольник по усл. нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 5 4 5 8 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №5

Каждый из черных бельчат знает половину всех серых, т.е. $\frac{300}{2} = 150$. Тогда всего знакомств между ~~тор~~ черными и белыми бельчатами: $5 \cdot 150 = 750$, а $750 = 300 \cdot 2 + 150$, т.е. ~~по п-му~~ ~~Другихсе~~ есть хотя-бы 50 серых бельчат, которые знают $x \geq 3$ черных бельчат (т.к. иначе каждый серый бельчонок знает максимум 2 черных бельчонка - меньше половины, это $300 \cdot 2 = 600$ знакомств, а их 750, т.е. нужно распределить ещё 150 знакомств, это минимум $\frac{150}{5-2} = 50$ серых бельчат,

все уже знают минимум 2х черных бельчат

которые будут знать более половины черных)

Тогда раз таких минимум 50, то бельчат, что знают меньше половины черных максимум 250., $249 < 250$, а $251 > 250 \Rightarrow 249$ - может быть, а 251 - нет., ч.т.д.

Нет примера для 249

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00025458 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Раскрою скобки и приведу подобные

$4x^4+16x^3-8x^2+24x+15=0$

Теперь приведу к виду $(\ldots)(\ldots)$, где в скобках квадратные многочлены вида ax^2+bx+c, и рассмотрев $\overset{1}{(\ldots)}\overset{2}{(\ldots)}$ „1"$=0$ и „2"$=0$ найду решение уравнения:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00025712226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	2	20	20		77

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$(2x^2+5x+3)^2-2x(2x^2+5x+3)=35x^2$

$a=2x^2+5x+3$

$a^2-2xa-35x^2=0$

$D=(-2x)^2-4\cdot1\cdot(-35x^2)=144x^2=(12x)^2$

$a_1=\frac{2x-12x}{2\cdot1}=-5x$

$a_2=\frac{2x+12x}{2\cdot1}=7x$

1) $2x^2+5x+3=-5x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=10^2-3\cdot2\cdot4=76$

$x_1=\frac{-10-\sqrt{76}}{2\cdot2}=-\frac{5+\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-10+\sqrt{76}}{2\cdot2}=\frac{\sqrt{19}-5}{2}$

2) $2x^2+5x+3=7x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=(-2)^2-4\cdot2\cdot3=-20\Rightarrow$ корней нет

Ответ: $\frac{\sqrt{19}-5}{2}$; $-\frac{5+\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 5 7 1 2 2 6 |

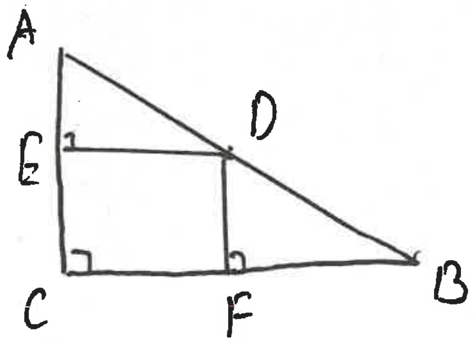
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2.



1) $\angle EDF = 360° - \angle ECF - \angle CFD - \angle DEC$, по теореме о сумме четырёхугольника

$\angle EDF = 360 - 90 \cdot 3 = 90° = \angle ECF = \angle CFD = \angle DEC \Rightarrow$

$\Rightarrow CEDF$ - прямоугольник $\Leftrightarrow CE = DF$, $ED = CF$

2) $\angle EAD = \alpha \Rightarrow \angle EDA = 90° - \alpha$, по теореме о сумме остр. углов в прямоугольном Δ

3) $\angle FDB = 180 - \angle EDF - \angle EDA \Rightarrow \angle FDB = 180 - 90 + \alpha - 90° = \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle FBD = \cancel{90 - \alpha}\ 90 - \alpha$

4) $\angle EAD = \angle FDB$, $\angle AED = \angle DFB$, $\angle FBD = \angle EDA \Leftrightarrow \Delta DBF \sim \Delta ADE$, по признаку подобия треугольников. $\Rightarrow \frac{AE}{DF} = \frac{ED}{FB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow DF = \frac{AE \cdot FB}{ED} = CE$; $ED = CF$

5) $S = \frac{1}{2}(AE + EC)(CF + FB) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(AE + \frac{AE \cdot FB}{ED}\right)(ED + FB) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(AE \cdot FB + \frac{AE \cdot FB}{ED} \cdot ED + \frac{AE \cdot FB}{2\,ED} \cdot FB + AE \cdot ED\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(ED) = AE \cdot FB + \frac{AE \cdot FB^2}{2ED} + \frac{AE \cdot ED}{2}$

$S(ED) = 4 \cdot 5 + \frac{4 \cdot 5^2}{2ED} + \frac{4 \cdot EAD}{2} = 20 + \frac{50}{ED} + 2ED$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 5 7 1 2 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2 (продолжение).

$S'(ED) = 0 + \frac{50}{ED^2} \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot ED^0 = 0$

$50 = 2 \cdot ED^2 \Leftrightarrow ED = 5$ (т.к. длина отрезка ≥ 0)

$S_{min} = 20 + \frac{50}{5} + 2 \cdot 5 = 40$

Ответ: $S_{min} = 40$

Нет примера реализации.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00025712 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 1

$2025 = 2x + 3y$, где $x, y \in \mathbb{Z}$; $x, y \geq 0$ по условию

$2025 \equiv_3 0 \equiv_3 2x + 3y \Leftrightarrow 2x \equiv_3 0 \Leftrightarrow x \equiv_3 0$

$x = y$, при $2025 = 2x + 3x \Leftrightarrow x = 405 = y$

$y > x$, при $x < 405$ $(x \geq 0, x \vdots 3) \Rightarrow$ кол-во таких вариантов $= \frac{405}{3} = 135$

Ответ: 135

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000257l226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 5.

1) Пример на 249:

Расставим серых бельчат вряд и пронумеруем их от 1 до 300

Чёрные бельчата дружат с:

I. 1-99 и 250-300

II. 100-198 и 250-300

III. 199-249 и 1-48 и 250-300

IV. 49-147 и 250-300

V. 148-246 и 250-300

Серые бельчата с ~~на~~ номерами 1-246 дружат с двумя чёрными, с номерами 247, 248, 249 - с одним чёрным и с номерами 250-300 - дружат ~~по 5 чёрных бельчат~~ с 5 чёрными бельчатами.

2) Предположим, что мы нашли 251 таких серых бельчат.

По условию каждый чёрный дружит ровно с половиной серых (150) => # кол-во „рёбер дружбы" = 150·5 = 750. Теперь посчитаем это кол-во от серых:

251 серый бельчонок максимум дружит с 2 чёрными, а ост. 49 - максимум с 5 => максимум рёбер = = 251·2 + 49·5 = 747 < 750 => такого быть не могло, ч.т.д

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0002571226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3.

Полосками 1×4 и 4×1 можно замостить только те фигуры, которые можно разбить на прямоугольники, у которых хотя бы 1 из сторон ⋮ 4. Прямоугольник с вырезан нельзя разбить на такие прямоугольники =>

Ответ: нет

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 0 | 0 | 3 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	5	20	10		75

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

разделим число 2025 на 3 $2025:3=675$ - максимальное число троек. Далее решим уравнение $2n+3n=2025$ n - кол/во 3 и 2 ~~про~~ ~~их~~ ~~частными~~ при равенстве их количества.

$5n=2025$

$n=405$ => Количество случаев когда троек больше двоек $=675-405=270$, но из-за проблем с четностью

a - кол/во 2

в - кол/во 3

$2a+3в=2025$

2a - всегда четное число

3в => то всегда должно быть не чётным => кол/во 3 должно быть всегда нечетным => нужно разделить наш ответ на 2 $\frac{270}{2}=135$ (теперь мы меняем кол/во троек не на 1, а на 2)

Ответ: 135 +

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 0 | 0 | 3 | 2 | 6

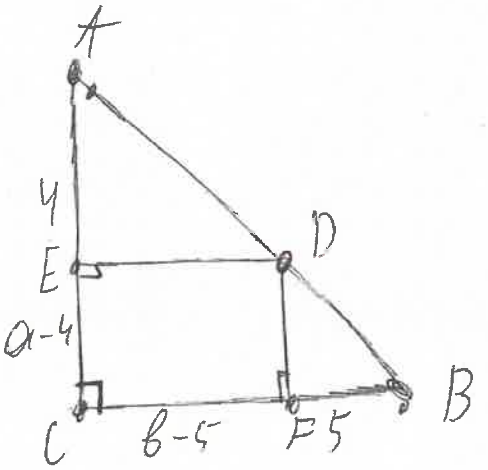
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



По условию:

$\angle C = 90^\circ$, $AE = 4$, $BF = 5$.

Пусть $AC = a$, $BC = b$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow EC = a-4$, $CF = b-5$.

Составим уравнение:

$S_{ABC} = \frac{ab}{2}$

$S_{AED} = \frac{4\cdot(b-5)}{2}$

$S_{DBF} = \frac{5(a-4)}{2}$

$S_{EDFC} = (a-4)(b-5)$

$S_{ABC} = S_{AED} + S_{DBF} + S_{EDFC}$

по св-ву площадей

$\frac{ab}{2} = \frac{4\cdot(b-5)}{2} + \frac{5(a-4)}{2} + (a-4)\cdot(b-5)$

$\frac{ab}{2} = \frac{(a-4+4)(b-5)+(b-5+5)(a-4)}{2}$

занёс $(a-4)(b-5)$ в ~~под~~ числитель

и разделил на две части, после ~~привёл к занёс~~

~~в~~ объеденил части

$(a-4)(b-5) + 4(b-5)$ и

аналогично

$(a-4)(b-5) + 5(a-4)$, и в итоге получил

$\frac{ab}{2} = \frac{a(b-5)+b(a-4)}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 0 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{ab}{2}=\frac{a(b-5)+b(a-4)}{2}$$

$$ab=ab-5a+ab-4b$$

$$ab=5a+4b$$

$$ab-5a=4b$$

$$a=\frac{4b}{b-5} \Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{ab}{2}=\frac{4b^2}{2(b-5)}=\frac{2b^2}{b-5}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{2b^2}{b-5}$$

пусть $S_{\triangle ABC}=x \Rightarrow$

$$\frac{2b^2}{b-5}=x$$

$$2b^2=bx-5x$$

$$2b^2-bx+5x=0$$

$$D=x^2-40x\geq 0 \Rightarrow$$

$x(x-40)\geq 0$

$x\in(-\infty;0]\cup[40;+\infty)$

$\Rightarrow x$ - площадь $\Rightarrow$

$x\in[40;+\infty) \Rightarrow$

$\min S_{ABC}=40$ подставим и проверим

$x=40$

$2b^2-40b-200=0$

$2(b-10)^2=0$

$b=10 \Rightarrow a=\frac{4b}{b-5}=8$

всё сходится $\Rightarrow$

Ответ: 40.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0002600326

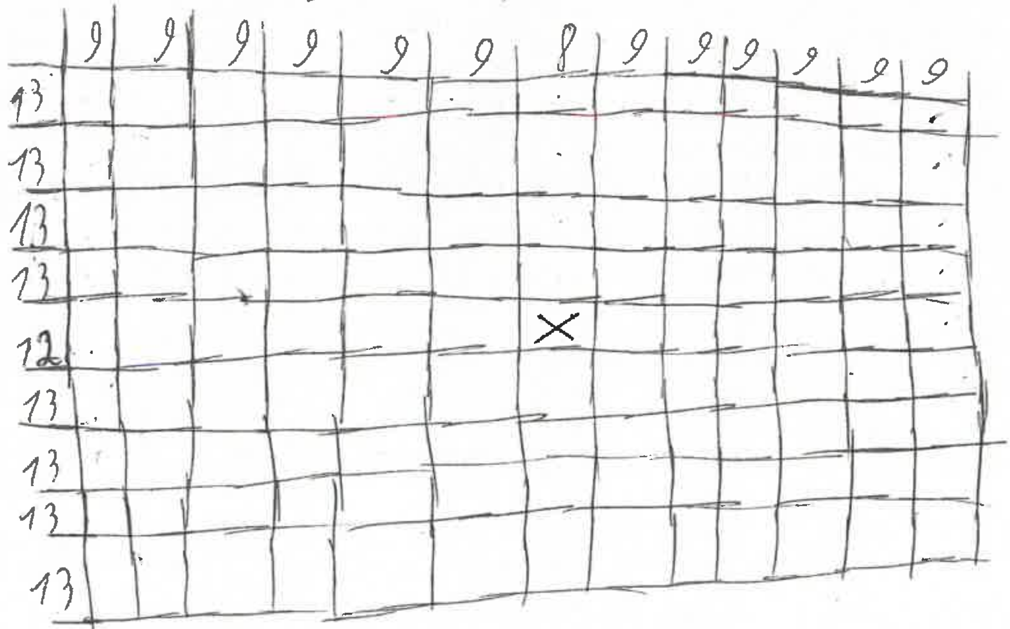
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

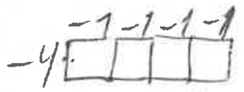
№3

Нарисуем таблицу и напишем сумму клеток в каждой строке и столбце

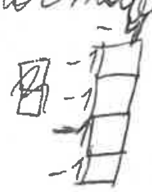


Далее рассмотрим наши действия:

1) поставить прямоугольник 1×4



2) поставить прямоугольник 4×1



Заметим что нашими действиями мы не можем поменять четность одного ~~клетки~~ числа, не поменяв четности других => у нас всегда будет оставаться ~~клетка~~ число с отличной четностью от остальных => нельзя. Ответ: Нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0002600326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

пусть $2x^2+4x+3=a$ =>

$(a-x)(a+x)=35x^2$

$a^2-x^2=35x^2$ $\quad a^2=36x^2$ так как a всегда >0

$2x^2+4x+3=0$

$D=16-24<0$

=> $a=6x$ или $a=-6x$

$2x^2+4x+3=6x$ $\qquad 2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2-2x+3=0$ $\qquad 2x^2+10x+3=0$

$D=4-24<0$ $\qquad D=100-24=76=(2\sqrt{19})^2$

нет корней

$x_1=\dfrac{-10-2\sqrt{19}}{4}$

$x_2=\dfrac{-10+2\sqrt{19}}{4}$

Ответ:

$x_1=\dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}$; $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000260326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

~~Пусть~~ Так как по условию каждый серый бельчонок дружит с половиной серых => если представить граф с вершинами - бельчатами, то сумма степеней серых бельчат должна быть равна сумме степеней белых бельчат с графа - знакомства бельчат друг с другом, знакомство между белыми и белыми, и серыми и серыми откинем - по ним нет условий. =>

$a+2b+3c+4d+5e=750$ $5 \cdot 150$ — 150 - половина от кол-ва белых бельчат; 5 - кол/во серых бельчат

a — кол-во бельчат (белых) знакомых с 1 серым бельчонком

для b кол-во знакомых равно 2, для c - 3, для d - 4, для e - 5. =>

если $a+b=249$ - бельчата белые которые знают меньше половины серых бельчат.

=> $c+d+e=51$ =>

$249 \leq a+2b \leq 498$; $153 \leq 3c+4d+5e \leq 255$ =>

$402 \leq a+2b+3c+4d+5e \leq \boxed{753}$ =>

есть частный случай когда $a+2b+3c+4d+5e=750$

например: $b=249$; $c=1$; $d=1$; $e=49$; $a=0$

Возможно ли, чтобы 249 были знакомы ровно с 2 и т.д.? При условиях задачи?

Лист 6 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА00026003 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

если

$a+b=251 \Rightarrow c+d+e=49$

$251 \leq a+2b \leq 502$; $147 \leq 3c+4d+5e \leq 245 \Rightarrow$

$398 \leq a+2b+3c+4d+5e \leq \boxed{747} \Rightarrow$

$a+2b+3c+4d+5e=750$ — не может выполнятся не при каких a, b, c, d, e

Нет конкретного примера для 249 (что с ним значит).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	2	6	1	6	7	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	15		95

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5

пусть a – кол-во серий с менее чем двумя указанными терминами (указанной и общее кол-во), тогда $100-a$ – кол-во серий с более чем или = двумя указанными терминами; всего указанных терминов – серий $50 \cdot 5 = 250$; тогда подсчитав указанные через a: каждая из „true" серий дает не более двух, а „false" серий не более 5 $\Rightarrow 2a + 5(100-a)$; т.к. их ~~не более~~ не более 250:

$250 \geq 2a + 5(100-a)$

$250 \leq 2a + 500 - 5a$,

$a \leq 83,(3)$, т.к. $a \in \mathbb{Z}$, то $a_{max} = 83$

Ответ: ~~92~~ 83

Нет реализации

№ 2

(т.к. угол ACD: $\angle ADC = 90°$ и $\angle A$ – общ; для DFB: $\angle DFB = 90°$, $\angle B$ – общ)

т.к. $\triangle AED \sim \triangle DFB$ (т.к. оба подобны $\triangle ABC$) $\Rightarrow$

$CA = a$

$CB = b$

$\Rightarrow \frac{4}{a} + \frac{7}{b} = 1$

пусть $p = \frac{4}{a}$, $q = \frac{7}{b}$;

$S = \frac{ab}{2}$, a, $b = \frac{4}{p} \cdot \frac{7}{q} = \frac{28}{pq}$ $\Rightarrow S = \frac{14}{pq}$, значит, чтобы S минимальной, pq – максимальным (т.к. $p+q=1$, то максимальное pq при $p=q=\frac{1}{2}$) т.е.

тогда $pq = \frac{1}{4}$ и $S_{min} = \frac{14}{\frac{1}{4}} = 56$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 6 1 6 7 2 6 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

исходя из условия мы можем составить данное уравнение $3n+5m=1120$, где n - кол-во 3, а m - кол-во 5, $n, m \in N$ тогда

~~[illegible]~~

по модулю: $3n \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod 5$, значит $n = 5k$, подставим: $3\cdot 5k + 5m = 1120 \Rightarrow 3k + m = 224 \Rightarrow m = 224 - 3k$, т.к. нам известно, что ($n, m \in N$) $m > 0 \Rightarrow k < 74$, и $k > 0$; тогда т.к. нам нужно $n > m$:

$5k > 224 - 3k \Rightarrow 8k > 224 \Rightarrow k > 28$, тогда кол-во ~~$k = 44$~~ $74 - k_1 + 1 = 46$

№4

$(x^2+2x+4)(x^2-7x+4) = 10x^2$

$x^4+2x^3+4x^2-7x^3-14x^2-28x+4x^2+8x+16=10x^2$

$x^4-5x^3-16x^2-20x+16=0$

$(x^2+px+4)(x^2+rx+4)$ (т.к. $16=4\cdot4$)

$x^4+(p+r)x^3+(pr+8)x^2+4(p+r)x+16 = x^4-5x^3-16x^2-20x+16$

тогда получаем: $p+r=-5$; $4(p+r)=-20$; $p+r=-5$; $pr+8=-16$

$pr=-24 \Rightarrow p=3;\ r=-8$

$(x^2+3x+4)(x^2-8x+4)=0$
(1) (2)

$D_1 = 9-16=-7 \Rightarrow D<0$, нет корней

$D_2 = 64-16=48$ $x_1=\frac{8+\sqrt{48}}{2}=4+2\sqrt{3}$, $x_2=\frac{8-\sqrt{48}}{2}=4-2\sqrt{3}$

Ответ: $4+2\sqrt{3}$; $4-2\sqrt{3}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 1 | 6 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

~~по диагонали номера столбцов и строк~~

слева направо и сверху вниз от 1 до 10

присвоим клеткам числа ~~(символы) по столбцам $A_x = i^x$ ($i, -1, -i, 1, \dots$)~~

~~по строкам $B_y = (-1)^y$ ($-1, 1, -1, 1, \dots$)~~

~~тогда в клетке $(x;y)$ стоит число $w(x,y) = A_x \cdot B_y = i^x (-1)^y$~~

~~прямоугольник плитки~~

~~$i^x(-1)^y$, $i^{x+1}(-1)^y$, $i^{x+2}(-1)^y$, $i^{x+3}(-1)^y$~~

~~$i^x(-1)^y(1+i+i^2+i^3)$, но $1+i+i^2+i^3 = \dots = 0$~~

~~ответ нельзя~~

раскрасим клетки квадрата в 4 цвета по правилу

в строке r и столбце c (нумерация с 1) присвоим $(r+c) \bmod 4 \in \{0;1;2;3\}$

рассмотрим плитку 1×4 (горизонт.), в ней r одинаковое, а c идут подряд c; c+1; c+2; c+3, тогда числа $(r+c) \bmod 4$ будут четырьмя и все остатки по одному разу; аналогично для 4×1, r даст остатки, => каждая плитка покрывает ровно по одной клетке каждого из 4 цветов => если фигура вся замостится, то она должна быть поровну всех цветов;

в квадрате 11×11 клеток = 4·30+1 клеток, все не поровну по цветам: 31 одного и по 30 других;

по рисунку вырезанные клетки $(3,8) \bmod 4 = 3$,

3/4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 1 | 6 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Просьба писать только на лицевой стороне листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

но, этот цвет не один в полоске
которого должен быть 30;

тогда после вырезания станет

31 : 30 : 30 : 29 — по цветам не поровну

— а это противоречие.

Ответ: нельзя

4/4

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	20	20	20		88

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Т.к. число 2025 - нечетно, то количество 3 будет нечетным, т.к. 3 умножить на нечетное число будет нечетное, а при вычитании из 2025 нечетного числа, оно станет четным, соответственно станет делиться на 2 и его можно будет представить в виде суммы двоек.

Если „3" было 405, то их сумма $3\cdot405=1215$, тогда количество слагаемых „2" было $\frac{2025-1215}{2}=\frac{810}{2}=405$, то есть в данном случае их количества одинаковы. Значит, под условие подходит количество „3" больших 405 (т.е. начиная с 407), не больших $2025:3=675$ (т.к. иначе сумма будет больше 2025, и при этом их количество нечетно. Тогда их количество $\frac{675-407}{2}+1=\frac{268}{2}+1=134+1=135$ сумм, в которых слагаемых 3 больше.

Ответ: 135

№3

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2		4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

Нарисуем прямоугольник и закрасим в нем центральную клетку.

Раскрасим ~~прямоугол~~ клетки прямоугольника диагональной раскраской в 4 цвета, как на рисунке.

Тогда в каждом прямоугольнике 1×4 или 4×1 обязательно будут все 4 цвета.

Всего прямоугольников 1×4 или 4×1 будет: $\frac{13\cdot9-1}{4}=\frac{116}{4}=29$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Значит, количество клеток каждого цвета должно быть поровну и равняться 29.

Посчитаем по картинке ~~цветов~~ количество клеток каждого цвета

1 цвет: 4 + 3 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3 + 4 = 30

2 цвет: 3 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 29

3 цвет: 3 + 3 + 4 + 3 + 2 + 3 + 4 + 3 + 3 = 28

4 цвет: 3 + 4 + 3 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3 = 29

Т.к. количество клеток первого цвета 30, а прямоугольников должно получаться 29 - это невозможно, а также количество клеток 1 и 3 цветов разное, что тоже приводит к противоречию.

Значит нельзя ~~закрасить~~ замостить такой прямоугольник полосками 1×4 или 4×1.

Ответ: нет, нельзя.

№5

Из условия задачи понимаем, что каждый черный ~~бельчонок~~ знаком с $\frac{300}{2} = 150$ серыми бельчатами.

Значит, всего знакомств черных с серыми $5 \cdot 150 = 750$.

Пусть число серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной черных бельчат, ~~может~~ ~~рав~~ будет 249.

Тогда $249 \cdot 2 = 498$ - наибольшее количество знакомств, где серые знакомы ≤ 2 черными.

$750 - 498 = 252$ - знакомств осталось между серыми и черными, где серые знакомы > 2 черными.

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 6 2 3 1 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

300 − 249 = 51 − осталось серых бельчат, которые знакомы с >2 количеством черных бельчат.

А это получится в случае, когда 49 серых будут знакомы с 5-тью черными, 1 серый с 4 черными и 1 серый с 3-мя: 5·49 + 4·1 + 3·1 = 252.

Пусть число серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной черных бельчат, будет 251.

Тогда 251·2 = 502 − наибольшее количество знакомств, где серые знакомы ≤2 черными.

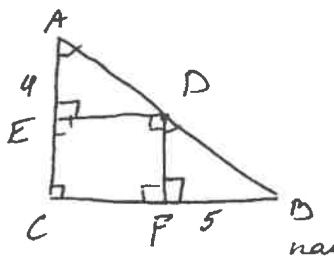
750 − 502 = 248 − знакомств осталось между серыми и черными, где серые знакомы >2 черными.

300 − 251 = 49 − серых бельчат, которые знакомы с >2 к черных бельчат.

И даже, если каждый из них будет знаком со всеми 5 черными бельчатами, то количество знакомств 5·49 = 245 < 248, что приводит к противоречию. Значит, такого быть не может

ч.т.д.

№2



△EAD ∾ △FDB по 2-ум углам
∠AED = ∠DFB = 90°, ∠EAD = ∠FDB, т.к. ~~ED∥FB~~ AE∥DF.

Если AD = DB, тогда K = 1, соответственно получается египетский треугольник с катетами 8 и 10

ED = FB = 5, AE = DF = 4, тогда $S_{ABC} = \frac{8\cdot 10}{2} = 40$.

Если K подобия будет увеличиваться, то и стороны треугольников будут увеличиваться, тогда и их S также увеличится. А если уменьшать?

Ответ: 40

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 6 2 3 1 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

S4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$4x^4+10x^3+6x^2+6x^3+15x^2+9x+6x^2+15x+9-35x^2=0$

$4x^4+16x^3-8x^2+24x+9=0$

По теореме Горнера рациональные корни могут быть: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{9}{2};$ ~~..~~ $\pm \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \frac{4}{3}; \frac{4}{9}$

Пусть $t=2x^2+3x+3$, тогда $2x^2+5x+3=t+2x$, получаем

$t(t+2x)=35x^2$

$t^2+2xt-35x^2=0$

$t^2+2\cdot x\cdot t+x^2=36x^2$

$(t+x)^2=36x^2$

~~$(t+x)^2=(6x)^2$~~

~~$t+x=6x$~~

~~тогда $2x^2+3x+3+x=6x$~~

~~$2x^2-3x+x+3=0$~~

~~$2x^2-2x+3=0$~~

~~$D=4-4\cdot2\cdot3<0$~~

~~корней нет~~

~~Ответ: нет действительных корней уравнения~~

$(t+x)^2-36x^2=0$

$(t+x-6x)(t+x+6x)=0$

$(t-5x)(t+7x)=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	6	2	3	1	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Тогда

$t-5x=0$ или $t+7x=0$

~~$2x^2+3x+3=0$~~ ~~$2x^2+3x+3-5x=0$~~

~~$D=9-4\cdot2\cdot3<0$~~ ~~$2x^2-2x$~~

~~нет корней~~

$2x^2+3x+3-5x=0$ $2x^2+3x+3+7x=0$

$2x^2-2x+3=0$ $2x^2+10x+3=0$

$D=4-4\cdot2\cdot3<0$ $D=100-4\cdot2\cdot3=100-24=76$

нет корней $\sqrt{D}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

$x_1=\frac{-10-2\sqrt{19}}{4}=-2,5-\frac{\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-10+2\sqrt{19}}{4}=-2,5+\frac{\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $-2,5-\frac{\sqrt{19}}{2}$; $-2,5+\frac{\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | Н | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	–	20	18		66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

Пусть у нас есть x слагаемых, равных 3, и y слагаемых, равных 2.

$$2y + 3x = 2025$$

Так как $2025 : 3 = 675$, $x \leq 675$ (иначе сумма будет больше 2026. Также, т.к. $2y$ - чётное, а 2025 - нечётное, то $3x$ - точно нечётное число (иначе сумма была бы чётной) $\Rightarrow$ x - нечётное число.

Для того, чтобы слагаемых, равных 3, было больше, должно выполнятся $x > y$. Стоит также упомянуть, что функция $f(x) = \frac{2025 - 2y}{3}$ монотонно убывает, поэтому чем больше x, тем меньше y. Тогда давайте найдём x_0 - ? $|$ $x_0 = y$. Все x, большие x_0, будут больше, чем y (из-за убывания функции $f(x) = \frac{2025 - 2y}{3}$).

$$2y + 3x_0 = 2025$$

$$5x_0 = 2025$$

$$x_0 = 405$$

Так как x - нечётное целое число, $x \geq 407$.

$$407 \leq x \leq 675$$

Всего в ряду чисел от 407 до 675 есть $\frac{675 - 407}{2} + 1 = 135$ нечётных чисел. Значит,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжение)

x может принимать 135 значений

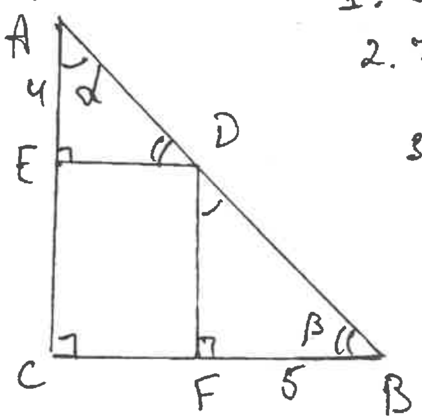
Ответ: 135.

№2

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный; AB – гипотенуза; $D \in AB$; $DE \perp CA$, $E \in CA$; $DF \perp CB$, $F \in CB$; $AE = 4$; $BF = 5$

Найти: $\min(S_{\triangle ABC}) = ?$

Решение:



1. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; $\alpha + \beta = 90°$

2. В $\triangle ADE$: $DE \perp AC \Rightarrow DE \perp AE \Rightarrow \angle AED = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ADE = 90° - \angle A = 90° - \alpha = \beta$

3. $\triangle DAE \sim \triangle BDF$ по двум углам:
$\angle DEA = \angle DFB = 90°$ ($DE \perp AE$, $DF \perp BF$)
$\angle ADE = \angle DBF = \beta$

Из подобия:

$$\frac{DA}{BD} = \frac{AE}{DF} = \frac{DE}{BF}$$

$$DE \cdot DF = AE \cdot BF = 4 \cdot 5 = 20$$

4. $ED \perp AC$ (по усл.)
$BC \perp AC$ (по усл.)
$DF \perp BC$ (по усл.)
$\Rightarrow CEDF$ – прямоугольник $\Rightarrow$
$\Rightarrow S_{CEDF} = DE \cdot DF = 20$

5. В $\triangle DAE$: $\operatorname{tg}\angle A = \operatorname{tg}\alpha = \frac{DE}{AE}$
$DE = 4\operatorname{tg}\alpha$

6. В $\triangle BDF$: $\operatorname{tg}\angle B = \operatorname{tg}\beta = \frac{DF}{BF}$
$DF = 5\operatorname{tg}\beta$

7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} =$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha}}$$

Замена $\cos\alpha = t \geq 0$ (т. к. α – острый угол)

$$t^2 - t^4 = -\left(t^4 - t^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

~~$-\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ при t~~

$-\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ при $-\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$t^2 = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°$

~~$\Rightarrow$ Минимальное значение суммы тангенсов в прямоугольном Δ-ке достигается тогда, когда он равнобедренный и оба угла равны 45°~~

~~8. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADE} + S_{\Delta BDF} + S_{CEDF} = \frac{AE \cdot DE}{2} + \frac{DF \cdot BF}{2} + 20 =$~~

~~$= 8tg\alpha + \frac{25}{2}tg\beta + 20 = 8(tg\alpha + tg\beta) + 20 + \frac{9}{2}tg\beta$~~

~~$tg\alpha + tg\beta > tg\beta$, $8 > \frac{9}{2}$ $\Rightarrow$ Для начала нужно минимизировать $tg\alpha + tg\beta$. Из~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	~~2~~	3	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2 (продолжение)

$tg\alpha + tg\beta = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha} =$

$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}} = 2$

Минимальная сумма ~~тангенсов~~ острых углов прямоугольного Δ-ка $-$ 2. При этом один из углов Δ-ка должен быть равен $45°$. Значит, другой равен $90° - 45° = 45°$

8. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADE} + S_{\Delta BDF} + S_{CEDF} = \frac{AE\cdot DE}{2} + \frac{DF\cdot BF}{2} +$
$+ 20 = 8\,tg\,\alpha + \frac{25}{2}tg\beta + 20 = 8(tg\alpha + tg\beta) + 20 + \frac{9}{2}tg\beta$

$tg\alpha + tg\beta > tg\beta$, $8 > \frac{9}{2}$ $\Rightarrow$ для минимизации суммы нужно сначала минимизировать $8(tg\alpha + tg\beta)$.

Из п. 7 $\min(tg\alpha + tg\beta) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \min(8(tg\alpha+tg\beta)) = 16$. При этом $tg\alpha = tg\beta = tg\,45° = 1$. Тогда общая сумма:

$\min(S_{\Delta ABC}) = 16 + 20 + \frac{9}{2} = \frac{81}{2}$

Ответ: $\frac{81}{2}$

№4

$x - ?$ | $(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3) = 35x^2$

1. $(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3) = 35x^2$
Замена $t = 2x^2+3x+3 = 2(x+\frac{3}{4})^2 + \frac{15}{8} \geq \frac{15}{8}$

1	2	3	4	5	6

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛН

№ 4 (продолжение)

$$t(t+2x)=35x^2$$

$$t^2+2xt-35x^2=0 \quad (*)$$

Уравнение $(*)$ будет иметь решения только тогда, когда его $D/4 \geqslant 0$

$$D/4 = x^2+35x^2=36x^2$$

$$t=-x\pm\sqrt{36x^2}$$

$$t=-x\pm|6x|$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-7x \\ t=5x \end{array}\right.$$

$$t \geqslant \frac{15}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -7x \geqslant \frac{15}{8} \\ 5x \geqslant \frac{15}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\frac{15}{56} \\ x \geqslant \frac{3}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{15}{56}\right] \cup \left[\frac{3}{8}; +\infty\right)$$

2. Обратная замена $t=2x^2+3x+3$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2+3x+3=-7x \\ 2x^2+3x+3=5x \end{array}\right. \\ x\in\left(-\infty; -\frac{15}{56}\right]\cup\left[\frac{3}{8}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2+10x+3=0 \\ 2x^2-2x+3=0 \end{array}\right. \\ x\in\left(-\infty; -\frac{15}{56}\right]\cup\left[\frac{3}{8}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)=\frac{19}{2} \\ 2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{2} \end{array}\right. \\ x\in\left(-\infty; -\frac{15}{56}\right]\cup\left[\frac{3}{8}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{19}{2} \\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{5}{2}\ \varnothing \end{array}\right. \\ x\in\left(-\infty; -\frac{15}{56}\right]\cup\left[\frac{3}{8}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000264032 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 (продолжение)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{19}{4} \\ x\in\left(-\infty;-\frac{15}{56}\right]\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{-5-\sqrt{19}}{2} \\ x=\frac{-5+\sqrt{19}}{2} \end{array}\right. \\ x\in\left(-\infty;-\frac{15}{56}\right]\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right) \end{cases}$$

3. $\frac{-5-\sqrt{19}}{2} \vee -\frac{15}{56}$

$-5-\sqrt{19} \vee -\frac{15}{28}$

$-\sqrt{19} < \frac{125}{28} \Rightarrow \frac{-5-\sqrt{19}}{2} < -\frac{15}{56} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-5-\sqrt{19}}{2} \in \left(-\infty;-\frac{15}{56}\right] \Rightarrow$ решение $x=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$ подходит под условия

4. $\frac{-5+\sqrt{19}}{2} \vee \frac{3}{8}$

$-5+\sqrt{19} \vee \frac{3}{4}$

$\sqrt{19} \vee \frac{23}{4}$

$\cancel{\sqrt{\frac{144}{16}}}$ $\cancel{\frac{144}{16}}$ $\sqrt{\frac{304}{16}} < \sqrt{\frac{529}{16}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-5+\sqrt{19}}{2} < \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{-5+\sqrt{19}}{2} \notin$

$\notin \left[\frac{3}{8};+\infty\right)$

$\frac{-5+\sqrt{19}}{2} \vee -\frac{15}{56}$

$-5+\sqrt{19} \vee -\frac{15}{28}$

Лист 6 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4 (продолжение)

$\sqrt{19} \vee \frac{125}{28}$

$\frac{14896}{784} < \frac{15625}{784} \Rightarrow \frac{-5+\sqrt{19}}{2} < -\frac{15}{56} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-5+\sqrt{19}}{2} \in (-\infty; -\frac{15}{56}] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ решение $x = \frac{-5+\sqrt{19}}{2}$ подходит

Ответ: $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

№ 5

Для удобства одну связь „один чёрный бельчонок знаком с одним серым" назовём знакомством. Для каждого чёрного бельчонка есть ~~~~150 знакомств, значит всего знакомств $5 \cdot 150 = 750$.

Если 249 серых бельчат знакомы меньше, чем с половиной чёрных, то каждый из них имеет не более 2 знакомств. Пусть оставшиеся 51 серых бельчат имеют по 5 знакомств. Тогда „свободных" знакомств есть $750 - 51 \cdot 5 = 750 - 255 = 495$.

В среднем для каждого из 249 серых бельчат есть $\frac{495}{249} < 2$ знакомств. Значит, можно распределить знакомства так, чтобы ни один из этих 249 серых бельчат не был знаком более, чем с двумя чёрными, ч.т.д.

Теперь докажем, что число серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной чёрных, не может равняться 251. В этом

Для примера надо распределения

Лист 7 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение)

случае оставшихся бельчат 49. Пусть каждый из них знаком с 5 чёрными бельчатами. Тогда „свободных" знакомств $750 - 5 \cdot 49 = 505$.

$505 > 251 \cdot 2 \Rightarrow$ по принципу Дирехле будет хотя бы один серый бельчонок с 3 знакомствами. Значит, число серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной чёрных, не может равняться 251 $(3 > \frac{5}{2})$, ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 7 0 0 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	19	15		79

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

~~мет~~ $m \in Z$
$n \in Z$

$2025 = 3m + 2n$

Если m - чётное, то $(3m)$ - чётное, зная, что $2n$ всегда будет чётным, получим сумму 2 чётных, которая не равна 2025. $\Rightarrow$ m - нечётное

$2025 = 3m_{max}$

$m_{max} = 675$ - макс. m.

m - любое нечётное от 1 до 675.

Если $m = 675$, то $n = 0$

Если $m = 673$, то $n = 3$

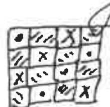
Если $m = 671$, то $n = 6$, и т.д.

Заметим, что m понижается на 2, а n повышается на 3, тогда каждый раз числа „сдвигаются" на 5.

$675 : 5 = 135$

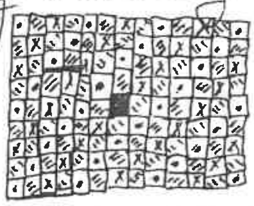
Ответ: 135 сумм.

N3.

Раскрасим доску 13×9 в шахматную окраску по диагоналям в 4 цвета. () Получается, что в каждом 4×1 или 1×4 есть все 4 цвета.

Найдём центральную вырезанную клетку:

~~7 ряд 5 столбец~~



5 ряд 7 столбец

„•" - 30 клеток

„=" - 29 клеток

„X" - 28 клеток

„\\" - 29 клеток

Всего фигур нужно чтоб заполнить $\frac{13 \cdot 9 - 1}{4} = 29$, получается клеток каждого цвета нужно 29 единиц.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00027003 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3, продолжение:

из цвета „x" – 28 клеток

получается 29 фигур мы поставить не сможем, а значит заметить не можем.

Ответ: нельзя.

№5.

Рассмотрим пары серых + белых бельчат.

Всего должно быть $150 \cdot 5 = 750$ таких пар.

Если число серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной чёрных равно 249, тогда:

пусть 249 знакомы с 2 бельчатами, а остальные 51 с 5 чёрными.

$249 \cdot 2 + 51 \cdot 5 = 498 + 254 = 752 > 750$

тогда 247 серых бельчат знакомы с 2 чёрными, 2 с 1 чёрным, а 51 с 5 чёрными.

Нет примера

$247 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 51 \cdot 5 = 750$, может равняться 249.

Если число 251, тогда:

251 с 2 чёрными, а 49 с 5 чёрными:

$251 \cdot 2 + 5 \cdot 49 = 502 + 245 = 747 < 750$

получается 251, не может

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 7 0 0 3 2 6 |

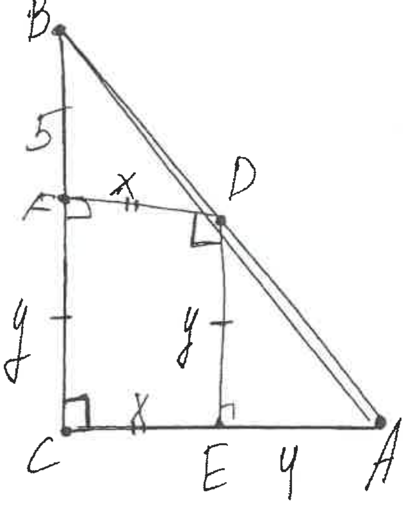
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.



CDEF – прямоугольник

$\Downarrow$

$FD = CE = x$

$FC = DE = y$

$S_{ABC} = S_{BFD} + S_{ADE} + S_{FDEC} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot x + \frac{1}{2}\cdot y\cdot 4 + xy = 2{,}5x + xy + 2y$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(5+y)(4+x) = 10 + \frac{1}{2}xy + 2{,}5x + 2y$

$2{,}5x + xy + 2y = 10 + \frac{1}{2}xy + 2{,}5x + 2y$

$xy = 20 = S_{FDCE}$ $\qquad x = \frac{20}{y}$

По т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{(5+y)^2 + (x+4)^2}$

По т Пифагора для $\triangle BDF$ и $\triangle DAE$:

$BD = \sqrt{BF^2 + FD^2} = \sqrt{25 + x^2}$

$DA = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{16 + y^2}$

~~$AB = BD + DA$~~

~~$\sqrt{(5+y)^2 + (x+4)^2} = \sqrt{25+x^2} + \sqrt{16+y^2}$~~

~~$(5+y)^2 + (x+4)^2 = 2$~~

$S_{ABC} = 2{,}5x + xy + 2y = 2{,}5x + 2y + 20 = \frac{50}{y} + 2y + 20 =$

$= \frac{50 + 2y^2 + 20y}{y} = 2\left(\frac{y^2 + 10y + 25}{y}\right) \cancel{= 2\frac{(y+5)^2}{y}}$

$\frac{y^2 + 10y + 10}{y}$ – когда принимает наименьшее значение. мин. равно 20, то $S_{ABC\,min} = 40$

?

Ответ: 40.

0

Лист 3 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 0 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$\cancel{4x^4+6x^3+6x^2+10x^3+15x^2+15x+6x^2+9x+9=35x^2}$

$\cancel{4x^4+16x^3+27x^2+24x+9=35x^2}$

Пусть $t=2x^2+3x+3$:

$t(t+2x)=35x^2$

$t^2+2xt=35x^2$

$D=4x^2+140x^2=144x^2\geq 0$

$t_1=\dfrac{-2x+12x}{2}=5x$

$t_2=\dfrac{-2x-12x}{2}=-7x$

(I)

$2x^2+3x+3=5x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-2\cdot3\cdot6<0$

$\varnothing$

(II)

$2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-4\cdot3\cdot2=76$

−10

$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{76}}{4}=\dfrac{-3+2\sqrt{19}}{4}$

$x_2=\dfrac{-3-2\sqrt{19}}{4}$

Ответ: $\dfrac{-3+2\sqrt{19}}{4}$; $\dfrac{-3-2\sqrt{19}}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 7 1 9 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	3	20	5	15		63

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Пусть a – кол-во 5, а b – кол-во 2, тогда: $\underset{\vdots 5}{875} = \underset{\vdots 5}{5a} + \underset{\vdots 5}{2b} \Rightarrow b \vdots 5$

~~875~~ $875 = 5^3 \cdot 7 \Rightarrow$ число может состоять только из пятёрок

$$\begin{cases} 875 - 5a = 2b \ (1) \\ a > b \ (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{845 - 5a}{2} = b$

$a > \frac{845 - 5a}{2}$

$2a > 845 - 5a$

$7a > 845$

$a > 5^3 \Rightarrow b < 5^3$

$b < 125$ и $b \vdots 5 \Rightarrow$ существует $\frac{120}{5} = 24$ b

Но и еще вариант тогда $b = 0$, итого 25

Ответ: 25

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	2	7	1	9	9	2	6

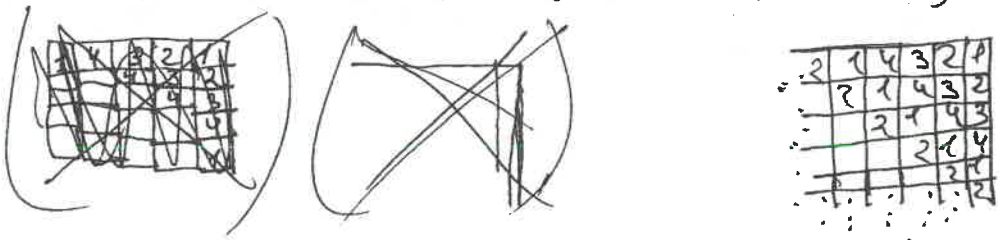
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

раскрасим нашу доску в четыре цвета (1; 2; 3; 4)



Посчитаем количество 1, 2, 3, 4

$n_1 = n_2 = n_{\cancel{3}4} = 56$

$n_3 = 57$

разберём фигуру 4×1:

в ней содержится каждый цвет по 1, тогда чтобы фигура разбивалась $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$

В одном из углов есть 3, тогда казалось бы убрав их мы получим равенство, но если повернуть ~~эту~~ этот квадрат так, чтобы 3 встала в угол где 1, квадрат нельзя будет замостить ведь в том месте была 1 убрав которую не будет равенства

⇒ нет, нельзя замостить

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 9 | 9 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Изобразим граф:

Оценка:

C M

из черных выходит $5 \cdot 100 = 500$ рёбер тогда и из серых выходит 500 рёбер

Пусть a - кол-во вершин со степенью 1; b - 2; c - 3; d - 4; e - 5; f - 0;

$$\begin{cases} f+a+b+c+d+e = 200 \\ a+2b+3c+4d+5e = 500 \end{cases}$$

$$b+2c+3d+4e-f = 300$$

$$b = 300-2c-3d-4e+f$$

$$2f-c-2d-3e+a+300 = 200$$

~~$c+2d+3e = 2f+a+100$~~

$$2f+a = c+2d+3e-100$$

$\Rightarrow c+2d+3e \geq 100$, чтобы c; d; e были мин. $c+2d+3e = 100$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 9 | 9 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа
и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

продолжение №5

$c+2d+3e=100$

$\Rightarrow f=0;\ a=0$

$b = 300-2c-3d-4e$

$b = 200-c-d-e$

b должно быть максимально

$$\begin{cases} c+2d+3e=100 \\ c+d+e=\min \end{cases} \Rightarrow e=33;\ c=1;\ d=0$$

$b = 200-34=166$

Пример: 33 серых бельчат знакомы с пятью черными, 1 серый знаком с тремя черными бельчатами, 166 серых знакомы с 2 черными

Где видно, что вып-ся условие о половине?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 7 1 9 9 2 6

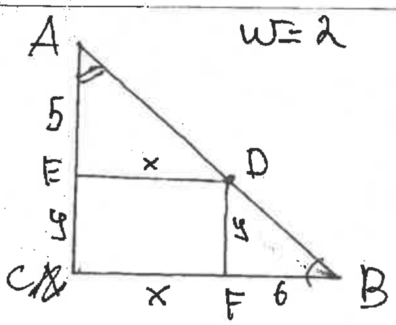
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$w = 2$



$$tg\angle CBA = \frac{y}{6} = \frac{5+y}{x+6}$$

$$yx + \cancel{6y} = 6\cdot 5 + \cancel{6y}$$

$$xy = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{x}$$

$$S_{ABC} = \frac{(5+y)(6+x)}{2}$$

$$2S_{ABC} = 30 + 5x + 6y + xy$$

$$2S_{ABC} = 60 + 5x + 6y$$

$$2S_{ABC} = 60 + 5x + \frac{6\cdot 30}{x} \;\Big|\cdot x$$

$$5x^2 + \cancel{60}\,x(60 - 2S_{ABC}) + 180 = 0$$

$$D = \cancel{60-2S}\,4(30 - S_{ABC})^2 - 5\cdot 4\cdot 180$$

чтобы $S_{ABC} = min \Rightarrow D = 0$? Почему?

$$(30 - S_{ABC})^2 = 5\cdot 180 = 5^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1$$

$$30 - S_{ABC} = \pm\,\cancel{5\cdot3}\;30$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	7	1	9	9	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

продолжение №2

если $30 - S_{ABC} = 30$, то

$S_{ABC} = 0$ – такого быть не может

$\Rightarrow 30 - S_{ABC} = -30$

$S_{ABC} = 60$

Ответ: 60

Пример реализаций?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 9 | 9 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$w=4$

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

$(3x^2-4{,}5x-4)^2-0{,}25x^2=56x^2$

$(3x^2-4{,}5-4)^2=56{,}25x^2 \quad |\cdot 100$

$100(3x^2-4{,}5-4)^2=5625x^2$

$5625=5^4\cdot 3^2$

~~1) $10(3x^2-4{,}5x-4)=75x^2$~~

~~2) $10(3x^2-4{,}5x-4$~~

1) $10(3x^2-4{,}5x-4)=75x^2$

2) $10(3x^2-4{,}5x-4)=-75x^2$

1) $30x^2-45x-40=75x^2$

~~$30x^2-120x-40=0$~~

~~$30x(x-1)-40(x-1)$~~

~~$(x-1)(30x-40)=0$~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000271992б
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

продолжение №4

$30x^2-120x-40=0$ Откуда это уравнение?

$3x^2-12x-4=0$

$D=144+4\cdot4\cdot3=3^2 4^2+4^2\cdot3$

$D=4^2(9+3)=4^2\cdot12=4^3\cdot3=$

$x_1=\frac{12+\sqrt{4^3\cdot3}}{6}=\frac{12+8\sqrt{3}}{6}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

x_2 – не удовлетв. – Почему?

2) $30x^2+30x-40=0$

$3x^2+3x-4=0$

$D=9+4\cdot4\cdot3=3\cdot19=57$

$x_1=\frac{-3+\sqrt{57}}{6}=\frac{\sqrt{57}}{6}-\frac{1}{2}$

x_2 – не удов. – почему?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 7 | 2 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	1	20	–	20		61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Пусть k_2 - кол-во слагаемых, равных 2

k_5 - кол-во слагаемых равных 5

Найдем max k_5, чтобы $k_5 > k_2$, если $k_5 = 125$, то $k_2 = 125$ наименьш.

$125 \cdot 2 + 125 \cdot 5 = 875$

Заметим, что $k_2 \vdots 5$, т.к. $875 \vdots 5$, если $k_2 \not\vdots 5$ то сумма не $\vdots 5$

$\Rightarrow k_2 = 120$ (наибольшее значение) $k_5 = 127$ (наименьшее значение)

$\max k_5 = 875 : 5 = 175$, тогда $k_2 = 0$

рассмотрим k_5 и k_2, $k_5 > k_2$

$k_5 = 127$; $k_2 = 120$.

$k_5 = 129$; $k_2 = 115$

$k_5 = 131$; $k_2 = 110$

Заметим, что $k_5 \not\vdots 2$ т.к. если $k_5 \vdots 2$, $k_5 = 2x$, $5 \cdot 2x$ четное, то $k_2 \cdot 2$ - четное всегда, $\Rightarrow k_2 \cdot 2 + k_5 \cdot 5$ - четное, а 875 нечет. $\Rightarrow k_5 \not\vdots 2$

Тогда $k_5 \in$ всем нечет. числам от 127 до 175

Подсказка:

$5 \cdot 2x + k_2 \cdot 2 = 875$

№1

Пусть k_2 – кол-во слагаемых, равных 2

k_5 – кол-во слагаемых, равных 5

Если $k_2 = 125$, то $k_5 = 125$, $2 \cdot 125 + 5 \cdot 125 = 875$

$k_2 \vdots 5$ - всегда, т.к. $k_5 \cdot 5 \vdots 5$, $\underbrace{k_2 \cdot 2}_{\vdots 5} + \underbrace{k_5 \cdot 5}_{\vdots 5} = \underbrace{875}_{\vdots 5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00027723 26 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 (продолжение)

$k_5 \vdots 2$, т.к. 875 – нечетное, а

$k_2 \cdot 2$ – четное всегда

(ϟ – противоречие)

$\underbrace{k_2 \cdot 2}_{\text{чет.}} + \underbrace{k_5 \cdot 5}_{\text{нечет.}} = \underbrace{875}_{\text{нечет.}}$

Тогда max $k_5 = 875 : 5 = 175$, а $a_2 = 0$

мин. $k_5 = 127$, тогда $k_2 = 120$

Если $k_5 < 127$, то k_5 хотя бы 125, но если $k_5 = 125$, то $k_2 = 125$ ϟ

(чем меньше k_5, тем больше k_2

$5 > 2$

$k_5 > k_2$

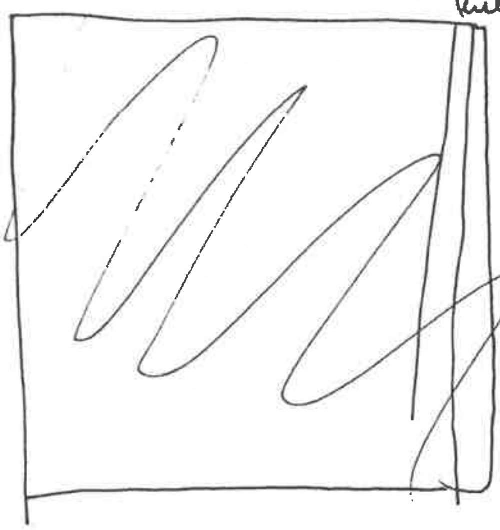
$\Rightarrow k_5 \in$ 127 до 175, только нечет. числа

Всего различных k_5 может быть 25 вариантов $\Rightarrow$

всего сумм где $k_5 > k_2$ = 25

Ответ: 25

№3



Вырезанная клетка

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | О | О | О | 2 | 7 | 7 | 2 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

раскрасим квадрат

15×15 без одной угловой клетки в цвета 1; 2; 3; 4

посчитаем кол-во цветов.

1 цв - 55 шт.

2 цвет - 56 шт.

3 цвет - 57 шт.

4 цвет - 56 шт.

Чтобы замостить прямоуг. 1×4; 4×1 в каждом прямоуг должно быть по каждому цвету 1 раз т.е. кол-во клеток каждого цвета должно быть равно, но т.к. 1 цвета 55 клеток, а 3 цвета 57 клеток ↯

Значит нельзя.

Ответ: Нет, нельзя

№2

FDEC прямоуг по определению

$\angle C = 90^\circ$ по услов.
$\angle E = 90^\circ$ $DE \perp AC$
$\angle F = 90^\circ$ $DF \perp CD$ $\Big\} \Rightarrow \angle D = 90^\circ$

тогда, пусть $ED = CF = x$, $EC = DF = y$ $\Big\}$ $x; y > 0$

ΔABC по т. Пифагора $AB^2 = (x+5)^2 + (6+y)^2$, $\angle C = 90^\circ$

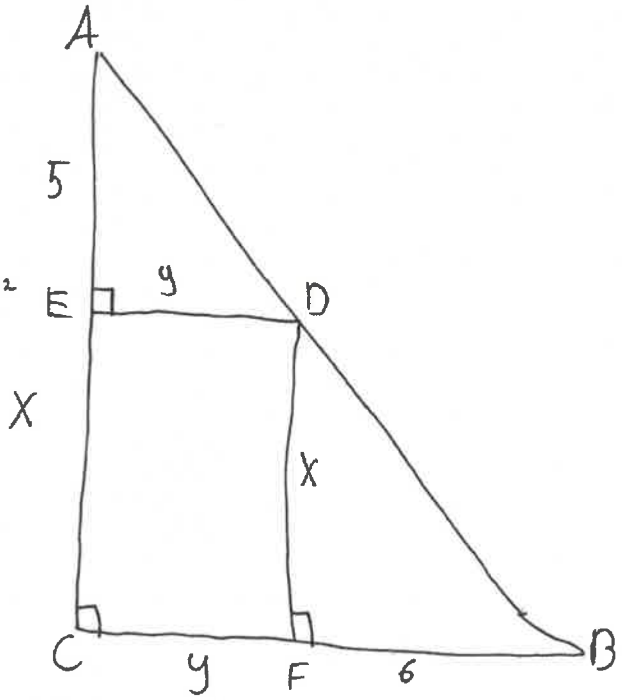
ΔAED, $\angle E = 90^\circ$ $AD = \sqrt{5^2 + y^2}$ по т. Пифагора

ΔDFB, $\angle F = 90^\circ$ $BD = \sqrt{6^2 + x^2}$, тогда

$AB^2 = (\sqrt{5^2 + y^2} + \sqrt{6^2 + x^2})^2 =$

$= 5^2 + y^2 + 2\sqrt{(5^2 + y^2)(6^2 + x^2)} + 6^2 + x^2$

$AB^2 = AB^2$



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 7 | 2 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$(x+5)^2+(y+6)^2=$

$=(\sqrt{5^2+y^2}+\sqrt{6^2+x^2})^2$

$5^2+y^2+2\sqrt{(5^2+y^2)(6^2+x^2)}+6^2+x^2=5^2+10x+x^2+y^2+12y+6^2$

$2\sqrt{25\cdot36+25x^2+36y^2+y^2x^2}=10x^2+12y^2$

$\sqrt{25\cdot36+25x^2+36y^2+y^2x^2}=5x^2+6y^2$

$25\cdot36+25x^2+36y^2+y^2x^2=(5x^2+6y^2)^2$

$25\cdot36+25x^2+36y^2+y^2x^2=25x^4+2\cdot5\cdot6\cdot y^2x^2+36y^4$

$25x^4+30x^2y^2+30x^2y^2+36y^4-25x^2-36y^2-x^2y^2-25\cdot36=0$

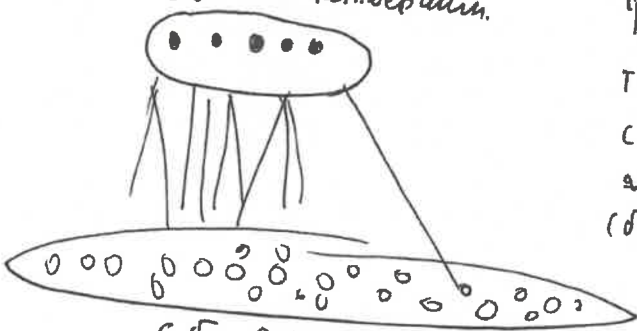
$x^2(25x^2-25)+y^2(36y^2-36)+30(x^2y^2-30)+\cancel{36x^2y^2}\ 29x^2y^2=0$

$(5^2+y^2)(6^2+x^2)=(5x^2+6y^2)(5x^2+6y^2)$

№5

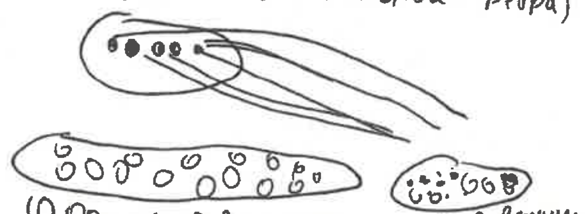
200 серых бельчат (с.б.) 5 черных бельчат (ч.б.)

ч.б. 500 степ. вершин



с.б 500 ~~к~~ ст. вершин

Пусть n с.б. уже знакомы 5 ч.б., тогда ч.б. ~~им~~ надо познакомиться ещё с 100−n с.б., так чтобы ст. вершин у ~~ср~~ каждой вершины графа была ≤ 2 (бельчата − вершины, знакомства − ребра)



(200−n) ~~ч~~ вершин

n-вершин

~~степень вершин~~ каждой вершины

Например если n = 50, то ч.б. надо ~~нуно~~ познаком. (100−50 = 50 с.б.

200−50 = 150 − с.б. с которыми ещё не познакомились

Тогда, если нужно, чтобы ст. каждой вершины была ≤ 2 нужно, чтобы $5\cdot50=250<150\cdot2=300$, т.е.

$(100-n)\cdot5<(200-n)\cdot2$, n − кол-во с.б. со ст. каждой вершины 5, ~~м~~ т.е. с которыми знакомы все ч.б.

100 − n − кол-во с.б. с которыми ~~ни~~ осталось познакомиться 5 ~~ч.б.~~ 5 ч.б.

200 − n − кол-во всех оставшихся, ~~которых~~ которые ~~знакомы~~ не знакомы с ними

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 7 | 2 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

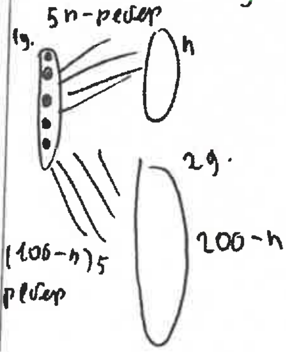
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение)

есть n с.б. у которых каждая степень вершин = 5, т.е. ~~эт~~ г.б. осталось познакомиться с (100−n) с.б., т.к. у n с.б. макс. ст. вершин, ~~оставшиеся~~ 5 г.б мы будем знакомить с 200−n с.б.,,

Нам нужно, чтобы степень каждой вершины (200−n) с.б была ≤ 2

т.е. макс. ~~ху~~ сумма ст. вершин была (200−n)·2.



Из первой доли во вторую должно прийти (100−n)·5 ребер и если ~~ддд~~ будет выполнятся

(200−n)·2 ≥ (100−n)5, то мы сможем сделать так, чтобы у 200−n ст. каждой вершины была ≤2, минимальное n − 34 =>

наибольшее кол-во с.б. которые знакомы с меньше чем половиной г.б. это 200−34=166

Ответ: 166

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00027808 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	3	20	15		63

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

Замена: $3x^2-4x-4=t$, тогда $3x^2-5x-4=t-x$

$t(t-x)=56x^2$

$t^2-tx-56x^2=0$

t – переменная

x – параметр

$D=b^2-4ac$

$D=x^2-4(-56x^2)=x^2+224x^2=225x^2$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ $\quad t_1=8x$

$t_{1,2}=\frac{x\pm15x}{2}$ $\quad t_2=-7x$

Обратная замена:

$3x^2-4x-4=8x \quad \vee \quad 3x^2-4x-4=-7x$

$3x^2-12x-4=0$ $\quad 3x^2+3x-4=0$

$D_1=k^2-ac$

$D_1=6^2+4\cdot3=36+12=48=$
$=8\cdot6=2^3\cdot2\cdot3=2^4\cdot3$

$D=9+16\cdot3=57$

$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$ $\quad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$

$x_{1,2}=\frac{6\pm4\sqrt{3}}{3}$ $\quad x_1=\frac{-3+\sqrt{57}}{6}$

$x_1=2+\frac{4\sqrt3}{3}$ $\quad x_2=\frac{-3-\sqrt{57}}{6}$

$x_2=2-\frac{4\sqrt3}{3}$

Ответ: $2\pm\frac{4\sqrt3}{3};\ \frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$

№3

Ответ: нельзя. Пояснение: при разбиении будет получаться либо квадрат со сторонами 12 на 12, либо спираль, в обоих случаях будет нельзя поставить прямоугольник 4 на 1 в оставшиеся клетки.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА 000278 0826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

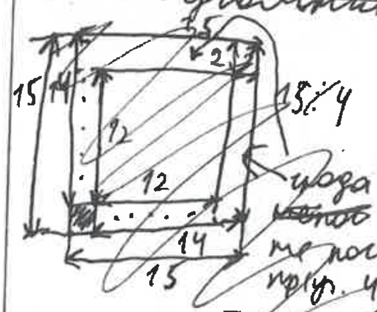
Т.к. нужно, чтобы „5" было больше, то представление 875 в виде 175·5 — подходит. Добавление „2" происходит сразу по 5 штук, т.к. 875 — нечетное и кратное 5. При этом количество „5" уменьшается на 2 штуки. Крайний случай, при котором кол-во „5" и кол-во „2" ~~приблизительно~~ равны, 875 = 125·5 + 125·2. При увеличении кол-ва „2" сумма уже не подходит. Тогда кол-во сумм:

$$\frac{175-125}{2} = 25$$

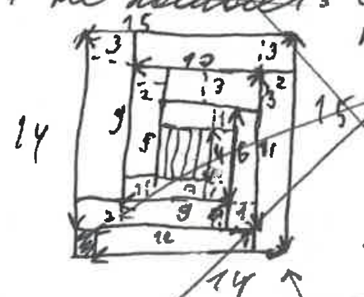
Ответ: 25

№3

Площадь квадрата без угловой клетки — 254, ~~при заходе разбиения на прямоугольники площадь по 4,~~ 254 кратно 4. Однако при разбиении большого квадрата получается малый квадрат со сторонами 12. При любом расположении малого квадрата остается площадь, которую нельзя полностью заполнить прямоугольниками со сторонами 4 на 1. ~~Можно попробовать~~ располагать прямоугольники по кругу от вырезанной клетки, но ~~тогда хотя~~ ~~тогда, ближе к концу, мест для постановки прямоугольников 4на1 не хватает.~~ Если ставить прямоугольники по кругу от вырезанного угла, то можно



тогда нельзя не поставить прям. 4на1 так чтобы накладывалось



~~Пример~~

~~Ответ: нельзя нельзя можно~~

Лист 2 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 8 | 6 | 8 | 2 | 6 |

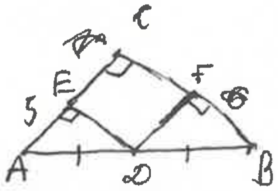
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ: Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Дано: ΔABC - прям
$\angle C = 90°$
$AE=5$; $BF=6$
$D \in AB$ $DE \perp AC$
$DF \perp BC$
Найти: $S_{ABC\,min}$

Р-е

Не доказано

1) ~~Т.к. нужно~~ наименьшая площадь ΔABC будет $\Rightarrow$ ~~D~~ т. D будет серединой AB ~~AD=DB~~, т.е. $AD=DB$

2) $DF \perp CB$, $AC \perp CB$ $\Rightarrow AC \parallel DF$; $AD=DB$ $\Rightarrow$ DF - сред. лин. $\Delta ABC \Rightarrow CF=FB=6$

3) $DE \perp AC$, $CB \perp AC$ $\Rightarrow DE \parallel CB$; $AD=DB$ $\Rightarrow$ DE - сред. лин. $\Delta ABC \Rightarrow AE=EC=5$

4) $S_{ABC\,min} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2}(AE+EC)\cdot(BF+FC) = \frac{1}{2}(5+5)(6+6) = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 12 = 60$

Ответ: 60

№5

~~Если серый бельчонок знаком меньше чем с половиной чёрных бельчат, значит он знаком либо с 1, либо с 2 черными бельчатами. Значит наибольшее кол-во серых~~ Таких серых бельчат, если все бельчата, которые знакомы меньше чем с половиной, знают 2 черных бельчат. Каждый чёрный бельчонок знаком с половиной серых, т.е 100 бельчат. Тогда на 5 черных бельчат — 500 серых, не серые знакомы с несколькими черными. ~~Тогда составим ур-е~~

~~500 = 2x~~ Получается 150 серых - знакомы с 2 чёрными, 450 серых с 4 черными Ответ: 150

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000278О826 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Известно, что ~~какое~~ какое-то кол-во, пусть будет x, ~~что~~ серых бельчат знакомо меньше чем с половиной чёрных, т.е. либо с 1, либо с 2. Значит наибольшее кол-во таких серых бельчат, ~~что~~ если все они знакомы с 2 черными бельчатами. Чтобы 5 черных бельчат знали половину серых, т.е. 100 серых, нужно 500 „пучков". Тогда ~~можно~~ можно составить 3 ур-я и решить их в ~~целых~~ натуральных числах.

$500 = 2\cdot x + 3(200-x), x \in N$

$500 = 2x + 600 - 3x$

$-100 = -x$

$x = 100 \in N$

$500 = 2x + 4(200-x)$

$500 = 2x + 800 - 4x$

$-300 = -2x$

$x = 150 \in N$

$500 = 2x + 5(200-x)$

$500 = 2x + 100 - 5x$

$500 = 3x$

$x = \frac{500}{3} \notin N$

Оценка для 166

$\frac{500}{3} > 166 > 150.$

Тогда наибольший $x = 150$

пример: 150 серых знакомы с 2 черными
50 серых знакомы с 4 черными

Это не пример.
Пример: кто с кем знаком

Ответ: 150

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000281372 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	5	20	15		65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) $2025 : 3 = 675$ (когда все слагаемые равны 3)

Найдем число, где количество 2 и 3 равно (их количество), пусть оно будет n.

$n \cdot 3 + n \cdot 2 = 2025$

$n \cdot 5 = 2025 \Rightarrow n = 405$

$405 \cdot 2 + 405 \cdot 3 = 2025$

Заметим, что все суммы с 3, уменьшающиеся с $3 \cdot 675$ до $405 \cdot 3 + 402 \cdot 3$ отличаются на числа, кратные 6.

1) $675 \cdot 3$

2) $6 + 3 \cdot 673$

3) $12 + 3 \cdot 671$

последняя пара) $402 \cdot 2 + 407 \cdot 3$

следующая пара) $405 \cdot 2 + 405 \cdot 3$

Заметим прогрессию относительно числа, кратного 6:

первая пара $- 3 \cdot 675$, вторая $6 + 3 \cdot 673$, а последняя $134 \cdot 6 + 3 \cdot 407$

Значит всего пар, содержащих числа, кратные 6 и состоящие из 2 134; а всего пар с 3, где их больше чем 2 $134 + 1 = 135$

Ответ) 135

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000281372 6

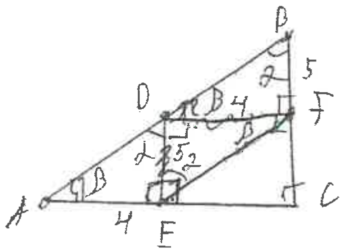
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Пусть угол $B=\alpha$, тогда угол $A=90^\circ-\alpha=\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADE = 90^\circ-\beta=\alpha$

$\angle BDF = 90^\circ-\alpha=\beta$

$\angle FDE = 360^\circ - 90^\circ\cdot 3 = 90^\circ$

$\triangle ADE \sim \triangle DFB$ (по 2 углам)

$\frac{AE}{DF} = \frac{DE}{BF} = \frac{AD}{DB}$

$\frac{4}{DF} = \frac{DE}{5} \Rightarrow DF\cdot DE=20$

Проведем диагональ четырехугольника $DEFC$

Получим трапецию $ABFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DFE = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = \beta$ (так как сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне 180°)

$\angle DEF = 90^\circ - \beta = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DEF = \triangle DBF$ (по 2 углам и стороне (DF - общ.))

$\triangle ADE = \triangle DFE$ (по 2 углам и стороне) $\Rightarrow$

$\Rightarrow DE=5=BF$ и $DF=4=AE \Rightarrow$

$\Rightarrow BC=2BF=10$; $AC=2AE=8$

$S_\triangle = \frac{1}{2} AC\cdot BC = 40$

Пример есть, оценки нет.

Ответ: 40

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 8 | 1 | 3 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

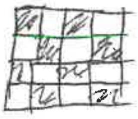
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~№4~~ №3

Пусть поле 9·13 будет шахматной раскраски.



Тогда центральная клетка будет либо черной, либо белой.

Заметим, что фигура 4×1 и фигура 1×4 всегда занимает 2 белых и 2 черных клетки.

Тогда, если вырезать центральную клетку, то пропадет одна белая, либо одна черная.

1) Пропала черная:

~~13·9=130 13=117~~ 13·9=117

~~117-1=120~~ 117-1=116

58 черных и 58 белых клеток (черных было 59)

116-4 ~~116-5~~ (черных с центральной горизонтальной линии 1×9) = 112 белых и черных, тогда снизу в фигуре 6·9 будет 27 черных и 27 белых и сверху тоже самое => нельзя расставить, так как их нечетное количество

Уберем вертикаль из центра 13×1.

По бокам останется по 26 черных, но в центре останется нечетное количество => нельзя

2) Пропала белая:

13×9=117

117-1=116

58 белых и 58 черных (белых было 59)

Лист 3 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0002813726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~[illegible]~~ №3

Уберем горизонталь из центра 1×9,
сверху прямоугольник с 27 белыми клетками,
снизу такой же, так как это нечетное количество, то
не получится разместить фигуры 4×1 и 1×4 =>
=> и так же там не получится

Ответ: Нельзя.

Нельзя часть, а
с заходами с части
на часть?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA0002813726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Пусть $2x^2+4x+3=t$, тогда запишем новое уравнение:

$(t-x)(t+x)=35x^2$

$t^2-x^2=35x^2$

$t^2=36x^2$

$t=|6x|$

$t=\pm 6x$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+4x+3=6x \ (1) \\ 2x^2+4x+3=-6x \ (2) \end{array}\right.$$

(1) $2x^2+4x+3=6x$

$2x^2-2x+3=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-24}}{4}$, $\sqrt{4-24}<0 \Rightarrow \varnothing$

(2)

$2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2+10x+3=0$

$x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-24}}{4}=\dfrac{-10\pm\sqrt{76}}{4}=\dfrac{-10\pm2\sqrt{19}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $\dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00028137 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Всего в лесу живет 300 серых и 5 черных бельчат.
Каждый черный знаком ровно с половиной => ровно со 150 бельчатами серыми.

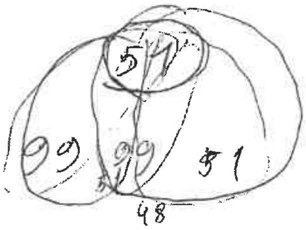
1) 300 − 249 = 51 ~~бельчат~~ бельчат, которые будут знакомы со всеми черными.

~~150 − 49 = 101 + 1 101~~

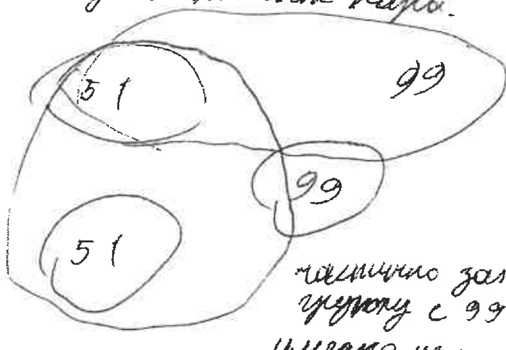
150 − 51 = 99

249 − 99 − 99 = 51

уже 2 таких пары.



5 групп.

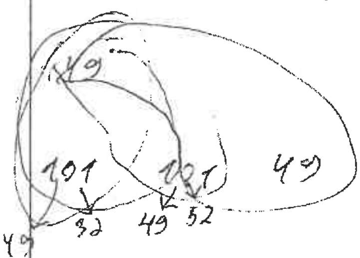


51 из 99 прошли.

частично закрашивает группу с 99 бельчатами, а именно 48 из них = 151 из них пока свободных

Попробуем также со 251:

300 − 251 = 49 (которые будут знакомы ~~со~~ со всеми 5)



Примером нельзя доказать: "невозможно". Только "возможно".

и остаются только 3 ~~пары~~ группы по 49, но они не дают в сумме 150 => ч.т.д.

Для "невозможно" надо д-ть в общем виде, (для всех возм. примеров)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000283702б

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	~~15~~ 20	20	20	15		90

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть всего „3" в сумме будет x, а „2" будет y

Тогда $2y+3x=2025$. Зная, что $x>y$, составим неравенство

$x = \frac{2025-2y}{3} = 675-\frac{2y}{3}$

$x>y$

$\Rightarrow 675-\frac{2y}{3}>y$, при таких y удовлет. условия.

$2025-2y>3y$

$2025>5y$

$405>y$

Рассмотрим $2y+\underbrace{3x}_{\vdots 3}=\underbrace{2025}_{\vdots 3} \Rightarrow$ Значит $2y \vdots 3$, т.е. $y \vdots 3$

Получаем, что $y \vdots 3$ и <405. $\Rightarrow \begin{cases} y \le 402 \\ y \vdots 3 \end{cases}$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., 399, 401, 402

Из 402 первых чисел (от 1 до 402) всего $\vdots 3$ чисел: $402:3=134$.

Значит всего y может принимать 134 различных значений, а значит и 134 различных x, т.е. различных сумм, где „3" больше „2"

И ещё один случай при $y=0$: $x=675$, т.е. все „3"

Ответ: ~~134~~ 135.

№3

13

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2		4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

9

Обозначим цвета цифрами 1, 2, 3, 4. Клетку по центру не будем раскрашивать в цвета, т.к. мы её вырезали, а остальные покрасим шахматной раскраской (как представлено на рисунке)

Всего получаем: 30 клеток „1"
29 клеток „2"
29 клеток „4"
28 клеток „3"

Полоса 1×4 или 4×1 занимает ровно по 1 клетке каждого цвета

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00828370 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

Значит всего можно поставить 28 полосок, но ещё одну не хватит клеток с „3" цветом. Но у нас оставшиеся клетки других цветов => нельзя замостить.

Ответ: нельзя.

№4

$$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$$

Замена $2x^2+4x+3=t$:

$$\left.\begin{array}{l}2x^2+3x+3=t-x\\ 2x^2+5x+3=t+x\end{array}\right| \Rightarrow (t-x)(t+x)=35x^2$$

$$t^2-x^2=35x^2$$

$$t^2=36x^2$$

$$\left[\begin{array}{l}t=6x\\ t=-6x\end{array}\right. \Rightarrow$$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+4x+3=6x\\ 2x^2+4x+3=-6x\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll}2x^2-2x+3=0 & (1)\\ 2x^2+10x+3=0 & (2)\end{array}\right.$$

(1) $2x^2-2x+3=0$

$D=4-24=-20<0$ нет корней

(2) $2x^2+10x+3=0$

$D=100-24=76$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-10+2\sqrt{19}}{4}=\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}\\ x_2=\dfrac{-10-2\sqrt{19}}{4}=\dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $\dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 8 3 7 0 2 6

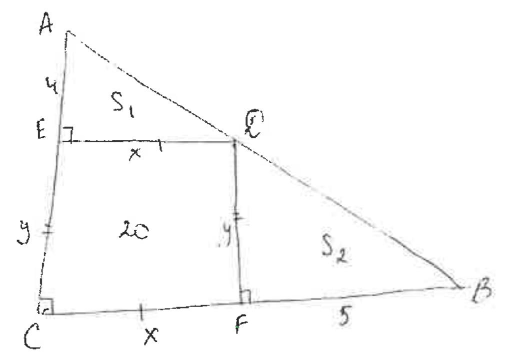
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Пусть $DE = x$, а $DF = y$

Тогда $EC = DF = y$
$DE = CF = x$ т.к. $ECDF$ – прямоуг. (3 угла $90°$ => четвёртый = $90°$ и стороны паралл)

Получаем $S_{ABC} = \dfrac{(4+y)(5+x)}{2}$

а также $S_{ABC} = S_{AED} + S_{EDFC} + S_{DBF} = \dfrac{4x}{2} + xy + \dfrac{5y}{2}$ =>

$$=> \frac{(4+y)(5+x)}{2} = \frac{4x}{2} + xy + \frac{5y}{2} \quad |\cdot 2$$

$$20 + 4x + 5y + xy = 4x + 2xy + 5y$$

$$20 = xy \; => \; x = \frac{20}{y}$$

Проверим могут ли $S_{AED} = S_1$ и $S_{DBF} = S_2$ в сумме быть <20:

? $S_1 + S_2 < 20$

$\frac{4x}{2} + \frac{5y}{2} < 20 \quad | \cdot 2$

$4x + 5y < 40$, подставим $x = \frac{20}{y}$

$4 \cdot \frac{20}{y} + 5y < 40 \quad | \cdot y$ (т.к. $y > 0$, y – это сторона)

$80 + 5y^2 < 40y$

$5y^2 - 40y + 80 < 0 \quad |:5$

$y^2 - 8y + 16 < 0$

$\underbrace{(y-4)^2}_{\geq 0} < 0$!!! противоречие => значит $S_1 + S_2 \not< 20$

$S_1 + S_2 \geq 20$.

наименьшая S_{ABC} будет при наименьших $S_1 + S_2$, а это $S_1 + S_2 = 20$ =>

$=> S_{ABC} = \underbrace{S_1 + S_2}_{20} + \underbrace{S_{EDFC}}_{20} = 40$ – наим.

Ответ: 40.

Пример того, что это возможно?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000283 7026
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

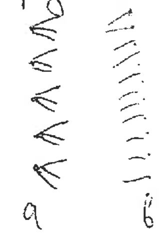
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Сначала докажем, что может быть 249:

Представим в виде двудольного графа (а столбец чёрные, в столбец серые), рёбра - знакомство



из столбца а выходит $150 \cdot 5 = 750$ ребер

из столбца в должно выходить столько же

Если 249 знакомы с $< \frac{1}{2}$ чёрных, то степень вершины у 249 вершин должна быть ≤ 2. Тогда сумма рёбер из этих вершин ≤ 498. У оставшихся 51 вершины степ. вершины ≥ 3, но ≤ 5. Сумма оставш. рёбер должна быть ≥ 252, их сумма $\leq 51 \cdot 5 = 255$.

Это получится, если у 49 (или больше) будет степ. $= 5$, а у 2 степень равная 3 и 4, в сумме 252 противоречия нет. =>

=> Значит может быть такое.

Теперь р/м (рассмотрим) почему не может 251:

Такой же двудольный граф.

Теперь у 251 степень ≤ 2, т.е. сумма их рёбер ≤ 502

У оставшихся 49 степень вершины ≤ 5, значит их сумма рёбер ≤ 245.

Всего тогда из в столбца выходит $\leq 502 + 245 = 747$

≤ 747 рёбер,

а из а столбца выходит 750 рёбер также. $750 > 747$

Получается, что рёбер в в столбце не хватает =>

=> противоречие и 251 не могут быть знакомы с $< \frac{1}{2}$ чёр.

Для 249 нет примера, только теор. обосновали, что это возможно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	8	3	7	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
10	5	20	19	20		74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1 Пусть 3ек K штук, 2ек m штук, тогда m и $K \in N$ и $2025 = 3K + 2m$

Оценка: т.к. $m < K \Rightarrow 3K + 2m > 5m \Rightarrow$ ~~2025~~ $2025 > 5m \Rightarrow m < 405$.
при этом т.к. m и $K \in N \Rightarrow 2025 - 2m \,\vdots\, 3 \Rightarrow m \,\vdots\, 3$

Значит подходят могут только $m \in N \,\vdots\, 3$ и ≤ 404., ну
и т.к. $2025 = 3 \cdot (675)$, то т.к. $m \,\vdots\, 3 \Rightarrow$ сделав замену $m = 3x \Rightarrow x \leq 105$
то $3(2x + K) = 675 \cdot 3 \Rightarrow 2x + K = 675$ при
$\Rightarrow$ т.к. K получ. $K > m$, то эти варианты подходят $x \leq 105$; K - натуральное,
тогда т.к. каждому x соответствует m, а каждому m определенное
K, то вариантов столько-же, сколько и подходящих
значений m, то есть целая часть от $\left[\frac{404}{3}\right] = 134$ $x = 0?$

Ответ: 134.

3

13 

9

Раскрасим доску диагональной раскраской в 4 цвета (в цвет 1,2,3,4) как на рисунке слева

Тогда любой прямоугольник 1×4 и 4×1 покрывает по одной клетке каждого цвета, но если покрыть доску возможно, то $\frac{13 \cdot 9 - 1}{4} = \frac{116}{4} = 29$ штук, а клеток цвета „3" 28 штук, противоречие $\Rightarrow$ можно, не вместить ≤ 28 прямоугольников, а хотят 29

Ответ: нет

Лист 1 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00028373 26

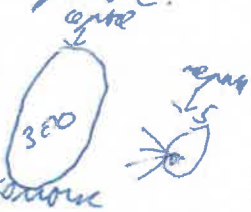
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Пусть бельчата - вершины, знакомство - ребро

5 Перефразируем условие - дан двудольный граф: одна доля которого - серые бельчата, вторая - черные. степень ~~черных~~ вершин в черной доле $=150 \Rightarrow$ между долями проведено $750 (=150 \cdot 5)$ ребер.



Предположим, что число серых бельчат, знакомых меньше чем с половиной черных бельчат оказалось равно 251, тогда из них в другую долю выходит ≤ 2 ребер $\Rightarrow$ из серой доли выходит $\leq 251 \cdot 2 + 49 \cdot 5 = 502 + 245 = 747$, но из черной доли в серую идет $750 > 747$ ребер, противоречие

Теперь приведем пример на 249

Пусть из 50 серых ведет по 5 ребер к черным,

Пронумеруем черных бельчат по цветам 1, 2, 3, 4, 5

один серый знаком с 1, 5, 3, 4 цветами.

50 знакомы с "1" и "2"

50 знакомы с "2" и "3"

49 знакомы с "3" и "4"

49 знакомы "4" и "5"

49 знакомы "5" и "1"

~~4 знакомы~~ 1 знаком с "4" и "5"

1 ни с кем не знаком.

Легко проверить, что этот пример подходит.

QED

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	8	3	7	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4 $(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Замена:

$t=2x^2+3x+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t(t+2x)=35x^2$

$t^2+2tx=35x^2$

$(t+x)^2=36x^2$

Значит

$t+x=6x$ или $t+x=-6x$

$t=5x$ $\qquad$ $t=-7x$

Обратная замена:

$2x^2+3x+3=5x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-24<0 \Rightarrow$

Корней нет

$2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-24=76 \Rightarrow$

$x=\dfrac{-10\pm\sqrt{76}}{4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{24}}{2}$

Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{24}}{2}$

$76=4\cdot19$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 8 | 3 | 7 | 3 | 2 | 6 |

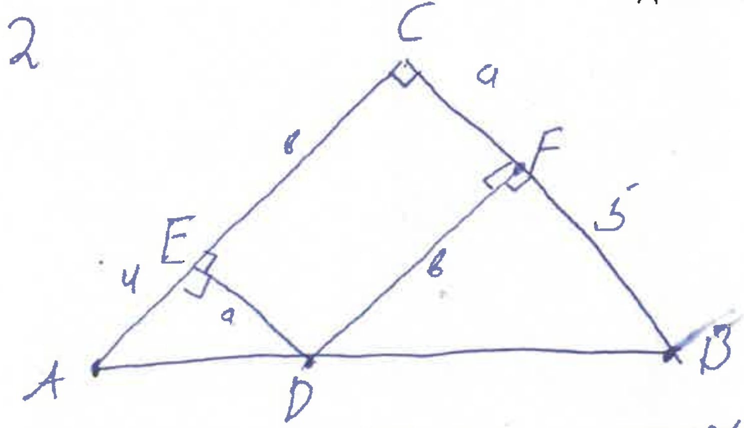
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2



Заметим, что DEFC – прямоугольник => $ED=CF=a$; $CE=DF=b$

$\angle BFD \sim \triangle BCA$ => по углу CBA и $\angle DFB=\angle ACB=90^\circ$

их площади относятся как $\frac{DF^2}{AC^2}=\frac{b^2}{(b+4)^2} \Rightarrow \frac{b^2}{(b+4)^2}=\frac{5b}{(b+4)(a+5)} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+5b=5b+20 \Rightarrow \boxed{ab=20} \Rightarrow a=\frac{20}{b};\ b=\frac{20}{a}$

$S\triangle ABC=\frac{(b+4)(a+5)}{2}=\frac{ab+5b+4a+20}{2}=20+\frac{5b+4a}{2}$

Значит надо найти минимум $5b+4a$

~~Когда наименьшее~~

$$\begin{cases} 5b+4a=\frac{4a^2+100}{a} \\ 5b+4a=\frac{5b^2+80}{b} \end{cases}$$

~~Заметим, что если ED<4 и FD<5 => по свойству углов △FDB и AED: ∠EDA>∠EAD => ∠EAD<45°, ∠FBD<∠FDB => ∠FBD<45°~~

~~Но тогда Σ углов △ABC < 90+90 < 180° – противоречие => значит ED=a≥4 или DF=b≥5~~

Если $a\geq 4$, то $\frac{4a^2+100}{a}=41$ докажем, что при увеличении a, значение площади увеличивается. пусть a увеличилось на K, ~~тогда~~ надо доказать что $\frac{4(a+K)^2+100}{a+K} > \frac{4a^2+100}{a} \Rightarrow 4a(a^2+2aK+K^2)+100a > 4a^3+4a^2K+100a+100K$,

$4a^3+8a^2K+4aK^2 > 4a^3+4a^2K+100K$

$4a^2K+4aK^2>100K$

$a^2K+K^2a>25K \Rightarrow a^2+aK>25$ т.к. $a\geq 5 \Rightarrow a^2\geq 25$, $aK>0$ – верно

Продолжение на листе 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 8 | 3 | 7 | 3 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача номер 2 продолжение.

мы получили, что при увеличении a со значения 5 площадь увеличивается, а

если уменьшать, а то увеличивается b. (т.к. ab=20)

Пусть b увеличилось на k, докажем что при $b \geq 4$ площадь увеличилась: (а т.к. a было $5 \Rightarrow b=4$.)

$$\frac{5b^2+80}{b} \overset{!}{<} \frac{5(b+k)^2+80}{b+k}$$

$$\cancel{5b^3}+\cancel{80b}+80k+5b^2k<\cancel{5b^3}+5k^2b+10b^2k+\cancel{80b}$$

$80k<5b^2k+5k^2b$ (разделим на $k>0$)

$80<5b^2+5bk$ т.к. $k>0 \Rightarrow 5bk>0$

$[b^2\cdot 5 \geq 16\cdot 5=80 \Rightarrow$

если уменьшать a со значения $5 \Rightarrow$ увеличивать b, то площадь увеличивается $\Rightarrow$ лучший вариант, когда $a=5; b=4 \Rightarrow S\Delta ABC=\frac{8\cdot 10}{2}=40$ пример только

Ответ: 40.

Очевидно, что пример существует, ~~т.к.~~ т.к. ~~[illegible]~~ стороны Δ-ка = 8 и 10, а точка D выбирается ~~[illegible]~~ ~~перпендикуляров~~ пересечением перпендикуляров ~~к серединам AC и CB~~ серединой AB, тогда

$DA=DC=DB \Rightarrow DE$ и DF — медианы и высоты в Δ ΔADC и Δ DCB соответственно $\Rightarrow AE=EC=4; CF=FB=5$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 8 | 9 | 6 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
15	8	10	20	15		68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) Представим 2025 в виде равного кол-ва 3 и 2

$2025 = 405 \cdot 3 + 405 \cdot 2$

$2025 : 5 = 405$

2) постепенно увеличивая кол-во 3, уменьшая кол-во 2

1. $406 \cdot 3 + ? \cdot 2$ $\quad 2025 - 406 \cdot 3 \not\vdots\, 2$
   не подходит
2. $407 \cdot 3 + ? \cdot 2$ $\quad 2025 - 407 \cdot 3 \vdots\, 2$
   подходит
3. $408 \cdot 3 + ? \cdot 2$ $\quad 2025 - 408 \cdot 3 \not\vdots\, 2$
   не подходит
4. $409 \cdot 3 + ? \cdot 2$ $\quad 2025 - 409 \cdot 3 \vdots\, 2$
   подходит

Видим закономерность: кол-во 3 не чётное.

3) Найдём максимальное кол-во 3

$2025 : 3 = 675$

4) Ответом будет кол-во нечётных чисел от 407 до 673 включительно

$407; 409; 411; \ldots; 673$ — арифм. пр.

$a_1 = 407$

$d = 2$

$a_n = 673$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$673 = 407 + 2(n-1)$

$2n - 2 = 266$

$2n = 268$

$n = 134$

Ответ: 134

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0002896426

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Замена: $2x^2+3x+3=t$

$t(t+2x)=35x^2$

$35x^2-2xt-t^2=0$

~~Или~~ x – переменная

t – параметр

$D=4t^2+4\cdot35\cdot t^2=144t^2$

$x_{1,2}=\dfrac{2t\pm12t}{70}$

$x_1=\dfrac{14t}{70}=\dfrac{1}{5}t \qquad t=5x$

$x_2=-\dfrac{10t}{70}=-\dfrac{1}{7}t \quad t=-7x$

Обр. замена:

$2x^2+3x+3=5x \qquad 2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2-2x+3=0 \qquad 2x^2+10x+3=0$

$D<0 \qquad D=100-4\cdot3\cdot2=76$

$\varnothing$

$x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{76}}{4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Лист 2 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 8 | 9 | 6 | 4 | 2 | 6 |

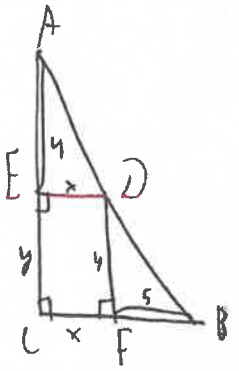
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Дано: $\triangle ABC$ – п/у ($\angle C = 90°$)

$DE \perp AC$; $DF \perp BC$

$AE = 4$; $BF = 5$

Найти: наименьшую S_{ABC}

Р-е:

1) $\angle DEC = 90°$ (по усл.)
$\angle DFC = 90°$ (по усл.)
$\angle ECF = 90°$ (по усл.) $\Rightarrow$ $EDFC$ – □к

$\Downarrow$

$EC = DF = y$

$ED = CF = x$

2) $S_{ABC} = S_{ECDF} + S_{DFB} + S_{AED} = xy + \frac{1}{2}\cdot 4x + \frac{1}{2}\cdot 5y = xy + 2x + 2{,}5y$

$S_{ABC} = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{(y+4)(x+5)}{2} = \frac{xy}{2} + 2x + 2{,}5y + 10$

$10 + \frac{xy}{2} + \cancel{2x} + \cancel{2{,}5y} = xy \cancel{+2x} + \cancel{2{,}5y}$

$\frac{xy}{2} = 10$

$xy = 20$

3) $S_{ABC} = \frac{xy}{2} + 2x + 2{,}5y + 10 = 2x + 2{,}5y + 20$

наименьшая, при условии, что $xy = 20$, при $x = 5$, $y = 4$

$10 + 10 + 20 = 40$

Ответ: 40

Как найдено?

3б, 5б

3+5 = 8 баллов

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 11 | MA0002896426

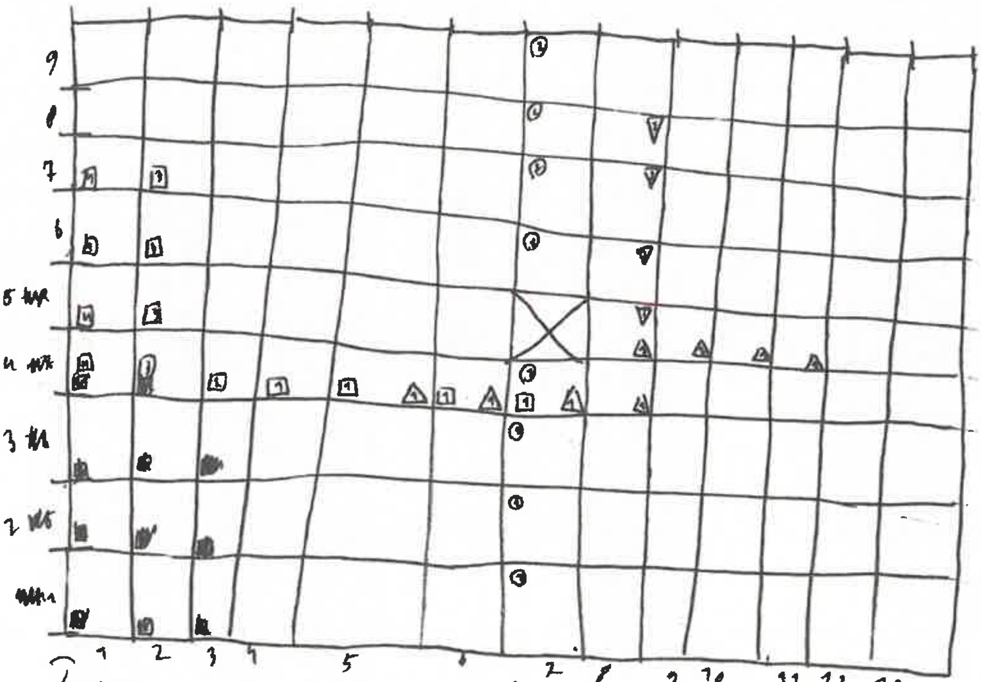
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

w/3

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Рассмотрим разные способы расположения уголка 4×1 и 1×4 на клетке (7;4)

1) ~~[illegible]~~ Горизонтально 1, тогда на линии 1; 2; 3 будут расположены горизонтальные плашки 1; 2; 3. ~~[illegible]~~ Заметим, что клетка (6;3) невозможно закрасить, если расположить 2; 3; 4 ниже, чем на рисунке. Но тогда не получится закрыть от (1;1) до (6;3). Значит 1 нельзя расположить как на рисунке

2) тогда расположим её на 1 клетку правее △1. Тогда возможны два случая в зависимости от расположения уголка на (8;5) △ ▽

В случае △, как бы мы не располагали уголки на 12 и 13 вертикали, 5 линия будут вертикальные плашки, а значит на горизонтали 1 или 9 будут горизонтальные, но тогда невозможно будет закрыть (9;4) или (1;9), значит △ не подходит

Рассмотрим ▽: клетка (8;9) будет закрыта горизонтальной плашкой, значит клетки (7;8) (7;7) (7;6) тоже, тогда (6;5) также будет закрыта горизонтально, значит (2;5) и (7;5) вертикальными, и не получится закрыть клетки (3;6) или (1;9). Даже если плашка накрывающая (8;9) будет сдвинута максимально вправо, не получится закрыть (12;9) или (9;8). Значит ▽ тоже не подходит

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 11 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 8 | 9 | 6 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 продолжение:

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) если двигать плитку △ дальше вправо или влево будет получаться ситуация аналогичная ① и ②, только отзеркаленная,

4) если расположить плитку ~~[illegible]~~ вертикально, то она дальше закрывает (7; 4) в ①, то возможны несколько случаев:

4.1) если при этом плитку, покрывающую (7; 6) расположить горизонтально, то будут получаться ситуации, аналогичные 1; 2; 3, ~~[illegible]~~ но отзеркаленные относительно 5 горизонтали

4.2) если плитку, покрывающую (7; 1) расположить вертикально, ②, то не получится закрыть квадраты от (1; 1) до (6; 9) и от (8; 1) до (13; 9)

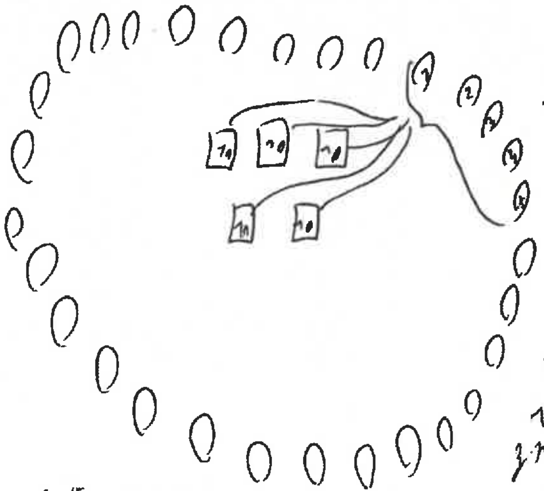
5) Вывод: этот прямоугольник невозможно закрыть плитками 1×4 и 4×1

Очень неразборчиво, не всё читается

Ответ: нет

№5

1) для наглядности разделим серых в группы по 10 белок ○ – серые □ – чёрные



1) Найдём максимальное кол-во серых, знакомых 1 или 2 знакомыми чёрными:

Пусть 5 групп знакомы с каждым из чёрных (1; 2; 3; 4; 5), тогда кроме них, каждый чёрный знаком с его 10 группами, значит вместе у них 50 знакомых. (С повторением, а значит 25 неповторяющихся серых, так как раз пятый, так каждая группа имела 2 знакомых чёрных бельчонка. Значит максимальное кол-во серых, знакомых с 1 или 2 чёрными равно 25 (250 белочек), значит вариант с 251 бельчонком не подходит.

2) ~~[illegible]~~ Пусть один чёрный бельчонок не будет знаком с серыми из групп 1; 2; 3; 4; 5, а будет знаком с кем-то из остальных, тогда получится 249 белочек, знакомых с одним или двумя чёрными

Что невозможно 251 – показано на примере, а вдруг для другого примера возможно? Надо в общем виде доказывать

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 | 3 | 9 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	1	20	15		76

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) ~~Нельзя. Найдем площадь прямоугольника: 13·9 = 117. Площадь полоски 4·1 = 4. Тогда посчитаем сколько полосок мы можем уместить в прямоугольник: 117 : 4 = 29 и остаток 1, значит остается 1 клетка, которую мы не можем замостить.~~

1) Пусть 2 – x, тогда 3 – y; $x, y \in N$

$2x + 3y = 2025$

Тогда $3y \le 2025 \Rightarrow y \le 675$

$2x = 2025 - 3y \Rightarrow x = \frac{2025 - 3y}{2}$

Чтобы x – целое, нужно $2025 - 3y$ было четное

Т.к. 2025 – нечетное $\Rightarrow$ $3y$ – нечетное $\Rightarrow$ y – нечетное

Получаем, $y = 1, 3, 5, \dots, 675$

Кол-во возможных y от 1 до 675 (нечет.)

$\frac{675-1}{2} + 1 = 338$ значений

По условию („больше спасенных, равных 3") получаем $y > x$

$y > x = \frac{2025 - 3y}{2} \Rightarrow 2y > 2025 - 3y \Rightarrow 5y > 2025 \Rightarrow y > 405$

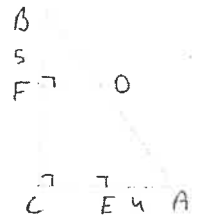
y – нечетное и больше 405 $\Rightarrow y = 407, 409, \dots, 675$

Кол-во таких y: от 407 до 675

$\frac{675 - 407}{2} + 1 = 134 + 1 = 135$

Ответ: 135

1	2	3	4	5	6	Σ



(2) Дано:
$\triangle ABC$ - прям
AB - гип
$DE \perp AC$
$DF \perp BC$
$D \in AB$
$AE = 4$
$BF = 5$
Найти:
S_{min}

Решение:
1) Пусть $AC = b$, $BC = a$
2) $CE \cdot DF = CE \cdot DF$
$\frac{CE \cdot DF}{CE} = DF \Rightarrow$ ~~CE = DE~~ $CE = DF$
Аналогично $CF = DE$
3) ~~...~~ $ED \parallel BC$, $DF \parallel AC$ - ~~...~~ $\perp$
~~...~~
Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$
1. $\frac{ED}{CF} = \frac{AE}{AC}$
~~...~~
2. $\angle AED = \angle ACB = 90$
$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ по 2 ст. и $\angle$ м/у ним.
4) Рассмотрим $\triangle BDF$ и $\triangle ABC$
1. $\frac{BF}{BC} = \frac{DF}{AC}$
2. $\angle BFD = \angle C = 90°$
$\Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle ABC$ по 2ст. и $\angle$ м/у ним.
5) Пусть $DF = x$, DE ~~...~~ $= y$. Тогда $AE = 4 = b - x$, $BF = 5 = a - y$
6) Дадим точкам координаты: Пусть $C(0;0)$; $A(b;0)$, $B(0;a)$
Гипотенуза AB: $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$? (не д-но) Ур-е прямой в отрезках, можно исп-ть. (+)
Точка $D(d_x; d_y)$ на AB
$DE \perp AC$ (ось x) $\Rightarrow DE$ - верт. $\Rightarrow E(d_x; 0)$
$DF \perp BC$ (ось y) $\Rightarrow DF$ - горизонт. $\Rightarrow F_1(0; d_y)$
7) $AE = b - d_x = 4 \Rightarrow d_x = b - 4$ ~~...~~ $= x$
$BF = a - d_y = 5 \Rightarrow d_y = a - 5$ ~~...~~ $= y$
8) D на AB: $\frac{b-4}{b} + \frac{a-5}{a}$
$1 - \frac{4}{b} + 1 - \frac{5}{a} = 1$
$2 - \left(\frac{4}{b} + \frac{5}{a}\right) = 1$
$\frac{4}{b} + \frac{5}{a} = 1$
9) $S_{AOC} = \frac{ab}{2}$
$\frac{5}{a} = 1 - \frac{4}{b} = \frac{b-4}{b} \Rightarrow a = \frac{5b}{b-4}$, при $b > 4$
$ab = \frac{5b^2}{b-4}$
Мин. знач $b > 4$
$S'(b) = \frac{10b(b-4) - 5b^2}{(b-4)^2} = \frac{10b^2 - 40b - 5b^2}{(b-4)^2} = \frac{5b(b-8)}{(b-4)^2}$
$S'(b) > 0 \Rightarrow b > 8$
$a = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$
$S_{min} = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40$
Ответ: 40

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$4x^4+16x^3+27x^2+24x+9=35x^2$

$4x^4+16x^3-8x^2+24x+9=0 \quad | : x^2$

$4x^2+16x-8+\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$

$4x^2+\frac{9}{x^2}+16x+\frac{24}{x}-8=0$

Пусть $2x+\frac{3}{x}=t$, тогда $t^2=4x^2+12+\frac{9}{x^2}$

$(t^2-12)+8t-8=0$

$t^2+8t-20=0$

$\begin{cases} t_1=2 \\ t_2=-10 \end{cases}$

t_1: $2x+\frac{3}{x}=2$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-24<0$

нет решений

t_2: $2x+\frac{3}{x}=-10$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-24=76$

$x_1=\frac{-10+\sqrt{76}}{4}=\frac{-10+2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-10-\sqrt{76}}{4}=\frac{-10-2\sqrt{19}}{4}=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Ответ. $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ МА000293912 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(5) Общее число знакомств „черный - серый" $= 5 \cdot 150 = 750$

Пусть a_i - число черных, с которыми знаком i-серых

$\sum a_i = 750$

Пусть k - число серых, у которых $a_i \leq 2$ (знаком меньше с половиной)

Максимальная сумма a_i достигается, если первые k имеют $a_i = 2$. остальные $300-k$ имеют $a_i = 5$

$750 \leq 2k + 5(300-k) = 1500 - 3k \Rightarrow 3k \leq 750 \Rightarrow k \leq 250$

Минимальная сумма a_i достигается, если первые k имеют $a_i = 0$, остальные $300-k$ имеют $a_i = 3$

Пример на 249?

$750 \geq 0k + 3(300-k) = 900 - 3k \Rightarrow 3k \geq 150 \Rightarrow k \geq 50$

Таким образом, $50 \leq k \leq 250$. Значение 251 - невозможно

Чтд!

(3) Площадь прямоугольника равна $13 \cdot 9 = 117$. После вырезанной клетки 116. Полоска покрывает 4 клетки, $116 : 4 = 29$ полосок - по площади возможно.

Ответ: нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 9 4 2 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	20	20	-		75

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$5\cdot 405 = 2025$

$(3+2)\cdot 405 = 3\cdot 405 + 2\cdot 405 = 2025$

Если троек 405, то двоек тоже 2025. $\Rightarrow$ троек > 405.

Заметим, что троек может быть только нечётное количество, т.к. в ином случае наша сумма будет чётной, а 2025 нечетное число.

$\Rightarrow$ троек ≥ 407

А максимальное количество троек — 675:

$3\cdot 675 = 2025$

Тогда нам подходят следующие суммы:

$3\cdot 407 + 2\cdot 402 = 2025$

$3\cdot 409 + 2\cdot 399 = 2025$

$3\cdot 411 + 2\cdot 396 = 2025$

...

$3\cdot 667 + 2\cdot 12 = 2025$

~~3·667~~

$3\cdot 669 + 2\cdot 9 = 2025$

$3\cdot 671 + 2\cdot 6 = 2025$

$3\cdot 673 + 2\cdot 3 = 2025$

$3\cdot 675 = 2025$

(Двойка в подходящих суммах встречается ~~только~~ раз в три числа, а тройка через одно)

Посчитаем количество таких сумм:

Через двойки:

~~$\frac{402-0}{3}$~~ $\frac{402-0}{3} + 1 = 134 + 1 = 135$

Через тройки:

$\frac{675-407}{2} + 1 = \frac{268}{2} + 1 = 134 + 1 = 135$

Ответ: 135 сумм

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000294 2526

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	■	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

■ — вырезанная (центральная клетка).

Сделаем следующую раскраску (см. рис. слева): где 1, 2, 3, 4 — 4 различных цвета. ~~вырезанная клетка, цвета 3~~)

Раскрасим всю доску в 4 цвета. (Вырезанная клетка цвета 3)

Раскраска такая, что любая полоска 1×4 или 4×1 содержит 4 цвета.

Посчитаем количество клеток каждого цвета:

30 клеток первого ~~цвета~~ цвета;

29 клеток второго цвета.

28 клеток третьего цвета (вырезанную клетку мы не считаем, т.к. она не может участвовать в образовании полосок 1×4);

29 клеток четвёртого цвета

Суммарно их $30+29+28+29 = 116$ (верно, т.к. 1 вырезали, а было $13 \cdot 9 = 117$)

Как уже сказано выше, в любом прямоугольнике 1×4 содержится 4 различных цвета. Соответственно, чтобы замостить данный прямоугольник с вырезанной клеткой полосками 1×4, ~~нужно~~ необходимо, чтобы каждого цвета было поровну.

А у нас 30 клеток 1го цвета, 29 клеток 2го и 4го, 28 клеток 3го цвета. $\Longrightarrow$ замостить прямоугольник полосками не получится.

Ответ: нет, нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 | 4 | 2 | 5 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Пусть $(2x^2+3x+3)=t$. Тогда:

$t\cdot(t+2x)=35x^2$

$t^2+2xt-35x^2=0$

$D=b^2-4ac$

$D=4x^2+140x^2=144x^2=(12x)^2$, $D>0$

$t_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$t_1=\frac{-2x-12x}{2}=-\frac{14x}{2}=-7x$

$t_2=\frac{-2x+12x}{2}=\frac{10x}{2}=5x$

Обратная замена:

1) $2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2+3x+7x+3=0$

$2x^2+10x+3=0$

$D=b^2-4ac$

$D=100-24=76$, $D>0$

$76=(2\sqrt{19})^2$

$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{-10x-2\sqrt{19}}{}=-2,5x-0,5\sqrt{19}$

$x_2=\frac{-10x+2\sqrt{19}}{4}=-2,5x+0,5\sqrt{19}$

2) $2x^2+3x+3=5x$

$2x^2+3x+3-5x=0$

$2x^2-2x+3=0$

$D=b^2-4ac$

$D=4-24=-20$, $D<0$

действительных решений уравнения нет

Ответ: $x_1=-2,5x-0,5\sqrt{19}$; $x_2=-2,5x+0,5\sqrt{19}$

№5

Каждый чёрный бельчонок знаком ровно с половиной серых бельчат. $\longrightarrow$ каждый черный бельчонок знаком со 150 серыми бельчатами. Всего черных бельчат 5. $\Rightarrow$ хотя бы 150 серых бельчат знакомы с тремя черными ~~150 серых бельчат~~ ~~знакомы с~~ $\Rightarrow$ ≤ 150 серых бельчат знакомы с ≤ 2 черными бельчатами. А т.к. число бельчат целое,

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00294 2526

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

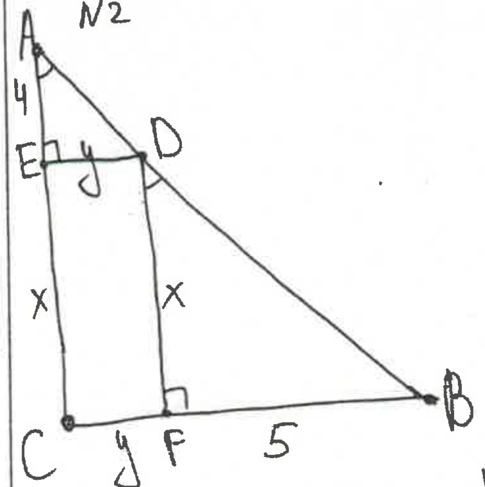
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

то ~~бельчата, зна~~ формулировки „серые бельчата, знакомые с ≤ 2 черными бельчатами" и „серые бельчата, знакомые меньше, чем с половиной черных бельчат" равнозначны.

$\Longrightarrow$ число бельчат серых, знакомых меньше, чем с половиной черных бельчат, не больше 150.

№2



Пусть $CE = x$, а $CF = y$.

Тогда $CE = DF = x$, а $CF = ED = y$

$\angle CAB = \angle FDB$

$tg A = \frac{y}{4} = \frac{5}{x}$

$\Longrightarrow xy = 4 \cdot 5 = 20$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2}(4+x)(5+y) = \left(\frac{1}{2}x+2\right)(5+y) =$

$= \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}xy + 10 + 2y = \frac{5}{2} \cdot \frac{20}{y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{y} \cdot y + 10 + 2y =$

$= \frac{50}{y} + 10 + 10 + 2y = \frac{50}{y} + 2y + 20$

Исследуем функцию, берем производную

$S' = \frac{-50}{y^2} + 2$

$\frac{2y^2 - 50}{y^2} = 0 \Longrightarrow y^2 = 25 \Longrightarrow$ минимальное значение при $y = 5$ и $x = 4$ соотв.

$\Longrightarrow S_{ABC}(мин.) = \frac{1}{2}(4+4)(5+5) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40$

Ответ: 40

Пример?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ___ МА00029838 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	~~5~~	20	1		66

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Можно представить 1120, как $3x+5y$, где x и y - нат

Найдем значение x, если кол-во 3 и 5, было бы равно.

$1120 = 3x+5x = 8x = 1120$

$x=140$

Каждые 3 пятерки можно заменить на 5 троек, пусть

$x=140$, $y=140$ и можно заменить на $x=145$, $y=137$

Всего вариантов таких замен, таких, что $x>y$ и x и y-нат

46 ($140:3 \approx 46$, округлим в нижнюю сторону).

Последний вариант - $x=370$ $y=2$

Ответ: 46.

№6.

Представим, что выбор знакомых черных бельчат как игру, где есть 5 игроков и каждый ход, они выбирают одного из 8 бельчат, которого еще не выбирали.

Заметим, что есть 2 типа ходов. 1- Становиться другом бельчонка, если у него на данный момент 0,1,3,4 друга. При этом ходе кол-во бельчат, знакомых менее, чем с половиной не меняется.

А вот если выбрать бельчонка с 2 друзьями, то это количество уменьшится. Они будут делать такой ход, если не могут сделать ход I вида

Заметим, что после первых 200 ходов, кол-во друзей каждого кроме бельчонка -2, значит, что выбор бельчонка с 2 знакомыми, а затем оставшиеся при возможности, пока выберут его

113

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 9 | 8 | 3 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только лицевая сторона. Записи на обороте не проверяются.

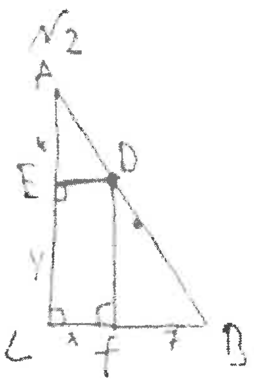
№5 (продолжение)

?

Получается, что максимальное кол-во серых бельчат, которые могут быть здесь меньше чем с половиной - $400 - 17 = 83$? Откуда 17?

Ответ: 83

№2



$AE = 4$

$BF = 7$ $\angle C = 90°$

1) Пусть $CF = x$, а $CE = y$, тогда

$S_{\triangle ABC} = \frac{(4+y)(7+x)}{2}$

2) Также $\square EDFC$ - прямоуг., т.к. $\angle C = 90°$, $\angle DEC = 90°$, $\angle DFC = 90°$

$\Downarrow$

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} + S_{\square EDFC} + S_{\triangle DBF} =$

$= 2x + xy + 3,5y$

$2x + xy + 3,5y = 14 + 2x + 3,5y + \frac{xy}{2}$ $\Big| -2x - 3,5y$

$xy = 14 + \frac{xy}{2}$

$xy = 28$

3) $S_{\triangle ABC} = 2x + 3,5y + 28$

Нужно минимизировать $2x + 3,5y$, учитывая, что $xy = 28$

Вспомним о неравенстве,

$2x + 3,5y \geq 2\sqrt{2x \cdot 3,5y}$

$2x + 3,5y \geq 2\sqrt{7xy}$ $(xy = 28)$

$2x + 3,5y \geq 2\sqrt{7 \cdot 28}$

$2x + 3,5y \geq 2\sqrt{14^2}$

$2x + 3,5y \geq 28.$

Значит мин. площадь $- 28 + 28 = 56$

Ответ: 56

2/3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ МА00029838 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Закрасим все клетки квадрата в 4 цвета, по порядку, вот таким образом –

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

, ? Заметим, что любой прямоугольник 4на1 и 1на4, ? содержит каждый цвет ровно 1 раз.

Это не по порядку? Непонятен переход на др. строку после 11 столбца

Если уберем эту клетку, то всех цветов станет ровно по 30 => можно. ?

№4

$(x^2+2x+4)(x^2-7x+4)=10x^2$

$x^4-7x^3+4x^2+2x^3-14x^2-8x+4x^2-28x+16-10x^2=0$

$x^4-5x^3-14x^2-20x+16=0$

$x^4+3x^3-8x^3+4x^2-24x^2+4x^2-32x+12x+16=0$

$(x^4+3x^3+4x^2)+(-8x^3-24x^2-32x)+(4x^2+12x+16)=0$

$x^2(x^2+3x+4)-8x(x^2+3x+4)+4(x^2+3x+4)=0$

$(x^2+3x+4)(x^2-8x+4)=0$

$\left[x^2+3x+4=0\ (D<0) \right.$

$x^2-8x+4=0$

$D=64-4\cdot 4=48$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{8-4\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{8+4\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$(x-(4-2\sqrt{3}))(x-(4+2\sqrt{3}))=0$

$\left[\begin{array}{l} x=4-2\sqrt{3} \\ x=4+2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ответ: $4-2\sqrt{3}$; $4+2\sqrt{3}$

3/3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000302 6826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	20	20	5		73

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

кол-во троек обозначим за x
кол-во двоек обозначим за y.
⇓
составим уравнение

$3x + 2y = 2025$

$x > y$ (должно быть по усл.)
$x \geq 0$ $y \geq 0$.

выразим y через x

1) $2y = 2025 - 3x$
⇓
$2025 - 3x \vdots 2$
⇓
четное число
⇓
2025 - нечетное, значит 3x тоже нечет
⇓
x - нечетное.

2) $y \geq 0$ $\left(\begin{array}{l} 3x = 2025 \\ x = 675 - \text{MAX} \end{array}\right)$
⇓
~~$x \geq 675$~~ $1 \leq x \leq 675$
x принимает все нечетные значения от 1 до 675.

→

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00030268 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) $x > y$

подставим в уравнение x, чтобы узнать огранич x, чтобы $x > y$.

$3x + 2x = 2025$

$5x = 2025$

$x = 405$

$\Downarrow$

x чтобы быть больше y, должно быть боль. 405

$\Downarrow$

$x > 405$

4) $\left.\begin{matrix} x > 405 \\ x \geq 675 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 405 < x \leq 675$

$\Downarrow$

считаем все возможные x

$$\begin{array}{r} 675 \\ -\,405 \\ \hline 270 \end{array}$$

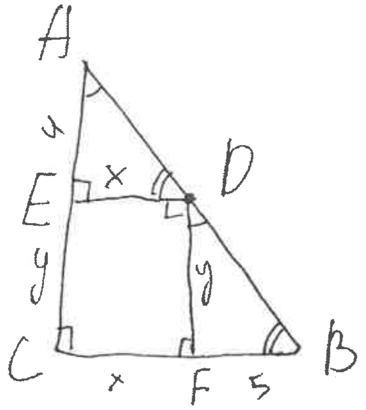
$270 : 2 = 135$ (т.к. берем только нечетные числа)

$\Downarrow$

135 существует сумм, подходящих под условие.

Ответ: 135.

№2.



Дано:

$\triangle ABC$ - п/у.

AB - гипотенуза

DE, DF - перпендикуляры

Найти:

$\min S_{\triangle ABC}$.

$\rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00030 26826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Решение: ~~∗~~ $\triangle AED$ и $\triangle DFB$

- $\angle AED = \angle DFB$ (т.к. DE, DF - перпендикуляры)
- $\angle EAD = \angle FDB$ (т.к. ~~∗~~ $\triangle ACB$ и $\triangle FDB$:

$\angle B$ - общ.

$\angle C = \angle DFB$

т.к. п/у $\triangle$ т.к. DF - перпендикуляр)

$\Downarrow$

$\triangle ACB \sim \triangle FDB$

$\Downarrow$

$\angle CAB = \angle FDB$

$\Downarrow$

$\triangle AED \sim \triangle DFB$

$\Downarrow$

$$\frac{AE}{DF} = \frac{ED}{FB}$$

пусть $x = ED$

пусть $y = CE$

$\Downarrow$

$$\frac{4}{y} = \frac{x}{5}$$

$\Downarrow$

$xy = 20$

Не обяз. целое!

$\Downarrow$

$x = \frac{20}{y}$ — y не может быть другими числами представленными, потому что даже если мы возьмем 4,25 у нас S будет все равно нецелая, надо рассматривать когда нам.

$y = 1, 2, 4, 5, 10, 20$

$$S = \frac{(4+y)(5+x)}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40$$

$24 \cdot 6 = 144$; $144 : 2 = 72$; $25 \cdot 5 = 125$

20 и 1.

$$\frac{24 \cdot 6}{2} = \frac{144}{2} = 72$$

1 и 20

$$\frac{5 \cdot 25}{2} = 62{,}5$$

10 и 2

$$\frac{14 \cdot 7}{2} = 49$$

2 и 10

$$\frac{6 \cdot 15}{2} = 45$$

4 и 5 ($y = 4$; $x = 5$)

$$\frac{8 \cdot 10}{2} = 40$$ - наша площадь

5 и 4

$$\frac{9 \cdot 9}{2} = 40{,}5$$

Ответ: 40

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA000302 6826

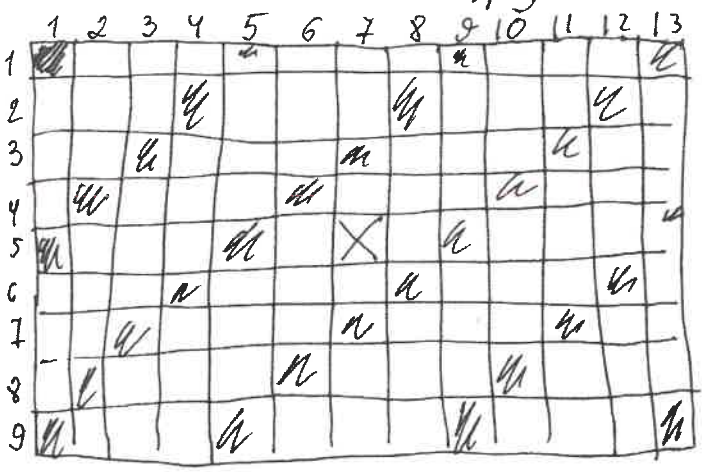
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3



Каждый прямоугольник 1×4 имеет ~~одну черную клетку~~

Всего прямоугольников должно быть 29, (т.к. 117 - всего клеток)

117 - 1 = 116(кл) - без центра)

116 : 4 = 29 прямоугольник.

А закрашеных клеток 30

⇓

противоречие.

⇓

замостить прямоугольник нельзя.

Ответ: нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00030 26826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$2x^2+4x+3=a.$

$(a-x)(a+x)=35x^2$

$a^2=36x^2$

$a=\pm 6x$

$2x^2+4x+3=6x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-4\cdot 2\cdot(+3)<0$

к. нет.

$2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-\underbrace{4\cdot 2\cdot 3}_{8\ 24}=76$

$x_1=\frac{-10+\sqrt{76}}{4}=\frac{-10+4\sqrt{19}}{4}=$

$=\frac{\cancel{2}(-5+2\sqrt{19})}{\cancel{4}_2}=\frac{-5+2\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-5-2\sqrt{19}}{2}.$

Ответ: $x_1=\frac{-5+2\sqrt{19}}{2}$; $x_2=\frac{-5-2\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА0003026826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5.

300 : 2 = 150 (половина серых бельчат)

150 · 5 = 750 - всего знакомств черных с серыми бельчатами.

Если ~~250~~ - б. знакомы с тремя и более.

$750 : 3 = 250$ - знакомства с трех бельчат.

249 бельчат могут быть знакомы с 2-мя и менее.

251 - не может быть тогда знакомства будет больше.

— с 2 и менее!

$251 \times 3 = 753$

753 > 750 (max знакомств)

⇓

753 точно быть не может

Лист 6 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

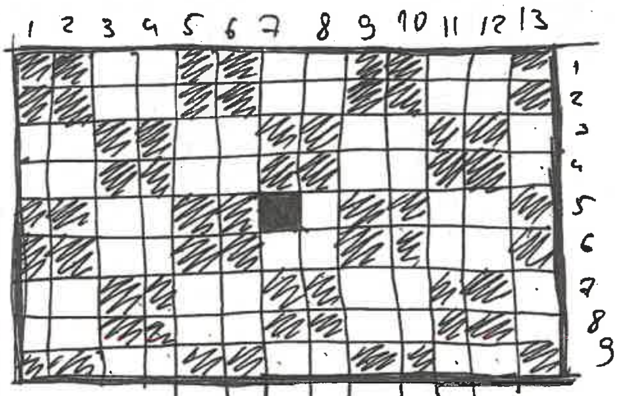
Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 0 3 0 9 2 6 |

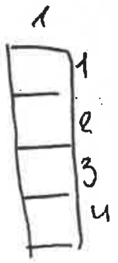
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

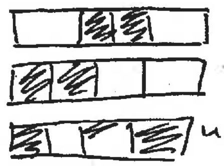




Раскрасим фигуру так, как показано на рисунке в крупную шахматную раскраску.

Предположим, что можно замостить, тогда:

Заметим, что как бы не поставили прямоуголь-ник 1×4 (или 4×1) при такой раскраске на доску на нём всегда будет 2 черных клетка и одна белая. Примеры того, как может стоять такой прямоугольник:



и пр.

⇒ на любой фигурке черных и белых клеток должно быть поровну ⇒

На всей доске черных и белых клеток должно быть поровну.

Посчитаем кол-во клеток каждого цвета:

Черные кл ▨ : $12 \cdot 4 = 48$ полных квадратов, + 11 одиночных и парных клеток = $\boxed{59 \text{ шт}}$

Белые кл. □ : $12 \cdot 4 = 48$ полных квадратов без одной клетки − 1 + 10 парных клеток = $\boxed{57 \text{ шт}}$

⇒ Чёрных клеток больше, чем белых ⇒ пр-е.

Ответ: Нет, нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000303092 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=$

$=35x^2$

Заметим, что: ~~при~~

$(2x^2+3x+3)(2x^2+3x+3+2x)=35x^2.$

Пусть $2x^2+3x+3=y$, тогда:

$y(y+2x)=35x^2$

$y^2+2xy=35x^2$

$y^2+2xy-35x^2=0$

$(y+7x)(y-5x)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=-7x \\ y=5x \end{array}\right.$ Подставим $y=2x^2+3x+3$:

$\left[\begin{array}{l} 2x^2+3x+3=-7x \; (1) \\ 2x^2+3x+3=5x \; (2) \end{array}\right.$

(1) $2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-4\cdot2\cdot3=100-24=76$

$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{76}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

(2): $2x^2+3x+3=5x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-4\cdot3\cdot2<0.$

$\Rightarrow$ ~~...~~ $x_{3,4}\in\varnothing.$

Заметим, что если подставим $y=-7x$ в исходное ур-е, то действительно получим: $(-7x)\cdot(-5x)=35x^2$

Ответ: $x_1=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}.$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 3 0 3 0 9 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

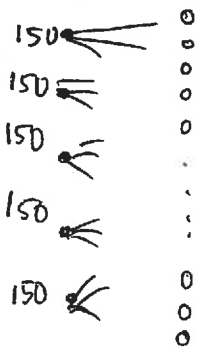
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5

Решим задачу с помощью построения графа, где вершины - бельчата, а ребра - знакомства между ними.

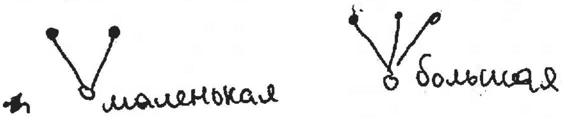
① Не будем учитывать знакомства между бельчатами одного цвета в графе, ведь для задачи имеют значение только знакомства между бельчатами разных цветов. ② Черные • вершины - черные бельчата, тогда белые o вершины - серые бельчата, тогда граф выглядит следующим образом:



③ Заметим, что такой граф является двудольным, ведь ребра проведены только между вершинами разного цвета (п. 1)

Т.к. по условию каждый бельчонок знаком ровно с 300:2=150 серых бельчат, т.е из каждой черной вершины проведено ровно 150 ребер к белым вершинам, то всего проведено 150·5 = 750 ребёр. (5 бельчат на каждого по 150).

④ Тогда докажем почему не может быть 251 бельчонка знакомого меньше, чем с половиной черных (≤2) бельчат. Назовём ~~такие~~ вершины ~~...~~ таких бельчат маленькими, а тех, кто знаком больше чем с половиной (≥3) черных бельчат (большими)



Лист 3 из 9

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000303 0926 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5(продолжение)

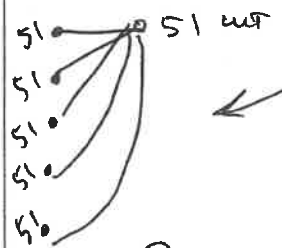
Заметим, что если всего 251 маленькая вершина, то из таких вершин выходит $\le 2\cdot 251 = 502$ ребра (≤ 2 от каждого)

А из оставшихся 49 больших вершин $\le 49\cdot 5 = 245$ ребёр (каждый может быть знаком ≤ 5 другими черными большими, тк их всего 5)

$\Rightarrow$ Всего $\le 502+245 = 747$ ребёр, но по усл. рёбер всего 750, что > 747.

$\Rightarrow$ Нельзя построить такой граф $\Rightarrow$ Такой ситуации быть не могло. чтд

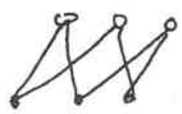
⑤ Построим пример для 249 маленьких вершин: Все 51 большие вершины соединены со всеми черными



Теперь у всех черных вершин степень равна 51 (каждая большая вершина провела ребро к ней)

Пусть 240 вершин имеют степень 2, тогда каждые будут проводить по 2 ребра к черным: Соберём группу из n вершин так, чтобы среди них были все возможные пары черных для этого достаточно $n = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ вершин.

Пример для 3:



Разобьём эти 240 вершин на группы по 10, так как показано в примере на 3. Тогда к степени каждой черной вершины прибавиться $(240:10)\cdot 4 = 96$. У каждой станет степень (тк пар образованных с каждой вершиной 4)

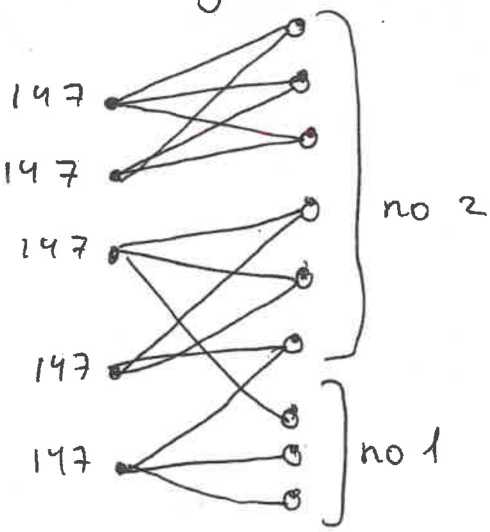
Лист 4 из 6

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$51+96=147$. №5 (продолжение)

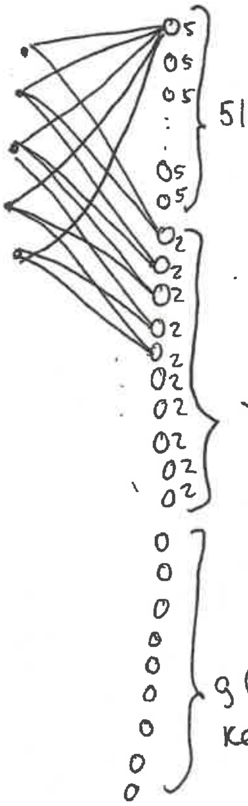
Тогда рассмотрим оставшиеся 9 вершин маленьких и проведем ребра к черным вершинам от них следующим образом:



Теперь из каждой черной вершины выходит по 3 доп ребра (не считая 147 уже проведенных).

Получилось 246 вершин со степенью 2 и 3 вершины со степенью 1 → Итого: 249 маленьких вершин, что и требовалось.

Итоговый граф:



51

×24 группы

9 вершин как показано выше.

Всего $150\times5=750$ ребер

Или $51\times5+246\cdot2+3=255+492+3=$

$=750$ ребёр

⑥ Таким образом в п.4 была доказана невозможность для 251 маленького строго бельчонка (бельчонок маленький тогда и только тогда, когда вершина его замещающая маленькая) и был построен пример для 249 маленького бельчонка, что доказывает его возможность.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 9 | 2 | 6 |

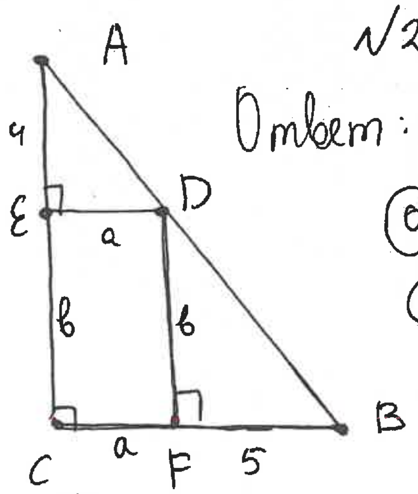
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Ответ: 40

Дано:

ΔABC - прямоугол. ($\angle C = 90°$)

т. $D \in AB$

$DE \perp AC$

$DF \perp BC$

$AE = 4$, $BF = 5$

Найти:

$S_{ABC} \to min$ - ?

(0) Пусть $DE = a$, а $DF = b$.

(1) Заметим, что $EDFC$ - прямоугольник, т.к. $\angle ECF = 90°$, $\angle DEC = 90°$ ($DE \perp AC$ по усл.), $\angle DFC = 90°$ ($DF \perp BC$ по усл.)

$\Rightarrow DE = CF$, $DF = EC$

$\Rightarrow CF = a$, $EC = b$.

(2) Заметим, что с одной стороны $S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2}$ $S_{ABC} = \frac{(4+b)(a+5)}{2}$.

А с другой [illegible]

$S_{ABC} = S_{AED} + S_{EDFC} + S_{DBF}$

$S_{ABC} = \frac{AE \cdot ED}{2} + ED \cdot DF + \frac{BF \cdot DF}{2}$.

$S_{ABC} = \frac{4 \cdot a}{2} + a \cdot b + \frac{5 \cdot b}{2} = 2a + 2{,}5b + ab$

$\Rightarrow \frac{(4+b)(a+5)}{2} = 2a + 2{,}5b + ab$

$\frac{4a + 5b + ab + 20}{2} = 2a + 2{,}5b + ab$

$\cancel{2a} + \cancel{2{,}5b} + \frac{ab+20}{2} = \cancel{2a} + \cancel{2{,}5}b + ab$

$\frac{ab+20}{2} = ab$

$ab + 20 = 2ab$

$\boxed{ab = 20}$

$\Rightarrow S_{EDFC} = 20$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 9 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Rightarrow S_{ABC} = 2a + 2{,}5b + 20$

$b = \frac{20}{a}$ из $ab = 20$

$S_{ABC} = 2a + \frac{2{,}5 \cdot 20}{a} + 20 = 2a + \frac{50}{a} + 20$

(т.е S всего треугольника ABC)

③ Докажем, что такая сумма ≥ 40:

$2a + \frac{50}{a} + 20 \geq 40$

$2a + \frac{50}{a} \geq 20 \;/\cdot a$

$2a^2 + 50 \geq 20a \;/:2$

$a^2 + 25 \geq 10a$

$a^2 - 10a + 25 \geq 0$

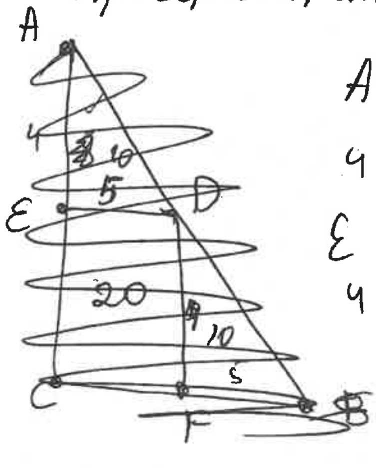
$(a-5)^2 \geq 0$ — очевидно, что это правда, ведь квадрат всегда ≥ 0, для $a \in R$

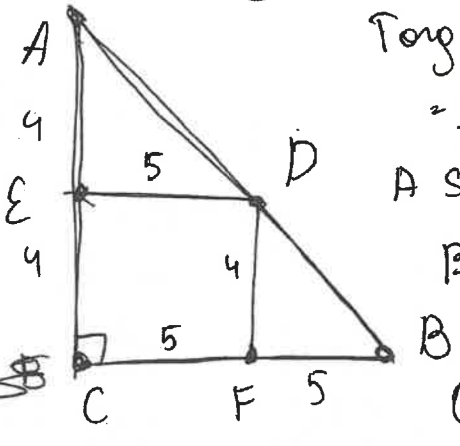
Очевидно, что если это выражение верно, то S_{ABC} не может быть < 40

иначе $(a-5)^2 < 0$, что невозможно для $a \in R$

Заметим, что 0 (т.е. $S = 40$) достигается при $a = 5$, соответственно $b = 4$

④ Проверим, что это действительно так:





Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40.$

А $S_{ADE} = S_{DBF} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$

Всё сходится, пример найден.

Ответ: 40

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	3	0	3	0	9	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Заметим, что max кол-во "троек" будет в сумме, где все числа - тройки, такая сумма состоит из

~~[illegible]~~ $2025:3=675$ слагаемых.

Т.к. 3 - max число, которое может встречаться в такой сумме чисел, мы никак не можем увеличить его кол-во ещё больше так, чтобы сумма $=2025$

675 "троек" и 0 "двоек" - это max разница.

Найдём момент, когда кол-во "двоек" и "троек" будет ≈ одинаково. Пусть это кол-во $=x$, тогда:

$2x+3x=2025$ $5x=2025$ $x=405$.

⇒ 405 "троек" и 405 "двоек" - это min разница.

Будем делать переходы между суммами, от max ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ кол-ва "троек" до следующего по кол-ву.

Заметим, что для такого перехода недостаточно убрать одну "тройку", мы не можем её заменить каким-то числом "двоек" так, чтобы сумма осталась неизменной.

Но мы можем убрать две "тройки" и заменить их 3 "двойками" без изменения ~~[illegible]~~ итоговой суммы $=2025$.

673 "тройки" и 3 "двойки".

⇒ Теперь следующие шаги будут аналогичными: −2 тройки +3 двойки.

Предыдущая сумма перед суммой, где разница между кол-вом "двоек" и "троек" min выглядела как

$405+2=407$ "троек" и $405-3=402$ "двойки".

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 9 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Нужно понять сколько шагов нужно сделать между суммой вида:

675 троек 0 двоек

407 троек 402 двойки включительно

Для этого достаточно посчитать кол-во нечётных чисел от 675 и 407 (ведь шагаем каждый раз по ~~шагам~~ 2) или кол-во чисел кратных 3 от 0 до 402 (ведь шагаем каждый раз по 3).

Таким образом это кол-во равно 402:3 = 134 и +1 = 135, тк в таком подсчёте не учитываем 0. Или 675-407=268 чисел всего 268:2=134, и +1=135 в таком подсчёте не учитываем 407.

⇒ Всего 134 шага и 135 сумм.

Ответ: 135

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 5 | 3 | 2 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
15	5	20	20	15		75

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4. $(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=\cancel{1}56x^2$

Поделим обе части на x^2

(при $x=0$: $(-4)\cdot(-4)\neq 0$)

$\left(3x-4-\frac{4}{x}\right)\left(3x-5-\frac{4}{x}\right)=\cancel{1}56$

$\exists\ 3x-\frac{4}{x}=t$

$(t-4)(t-5)=56$

$t^2-9t+20=56$

$t^2-9t-36=0$

$(t-12)(t+3)=0$.

Т.к. произведение множителей равно 0, то хотя бы один множитель равен 0

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} t=12 \\ t=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{4}{x}=12 \ |\cdot x\neq 0 \\ 3x-\frac{4}{x}=-3 \ |\cdot x\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-12x-4=0 \quad (1) \\ 3x^2+3x-4=0 \quad (2) \end{array}\right.$

(1): $3x^2-12x-4=0$

$x=\frac{12\pm\sqrt{144+48}}{6}=$

$=2\pm\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

(2): $3x^2+3x-4=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+48}}{6}=$

$=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{57}}{6}$

Ответ: $\left\{2\pm\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right); -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{57}}{6}\right\}$.

1. Найден случай, когда кол-во 2 равно кол-ву 5 (такое есть, т.к. $875⋮7$)

$875:7=125$

Т.е. в этом случае 125 пятерок, 125 двоек

Также, найден max кол-во 5

$875:5=1\overset{7}{\cancel{1}}5$ пятерок.

Т.к. 5 – нечетное кол-во ($5\not⋮2$), то любое нечетное кол-во 5 от 125 до $1\overset{7}{\cancel{1}}5$ – подходит ($\cancel{1}2\times 5:2$) 125 не подходит

Всего чисел от 125 до $1\overset{7}{\cancel{1}}5$ – $\overset{5}{\cancel{3}}1$, среди них нечетных – $\overset{2}{\cancel{3}}6$ (оба замыкающие – неч.)

Т.о. сумм, в которой больше 5 – $\underset{2}{\cancel{1}}6$

Ответ: $\overset{2}{\cancel{3}}6$.

3. Рассмотрим квадрат $n\times n$ (n – нечетное

1	3	1	3	1
4	2	4	2	4
1	3	1	3	1
	2	4	2	4
1	3	1	3	1

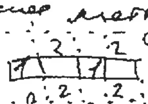
Обозначим клетки, как показано на рисунке (1 и 2 – нечетные, цифры отмечены так, что 1 и 1 не касаются, как и 2 и 2, только 1 и 2) (1 стартует с угла)

Подсчитаем кол-во таких клеток для квадрат 15×15

$2: \left(\frac{15-1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{15-1}{2}-1\right)=49$

$1: \left(\underset{\text{ряды}}{\cancel{15x}\ \frac{15-1}{2}+1}\right)\cdot\left(\underset{\text{строки}}{\frac{15-1}{2}+1}\right)=6\overset{4}{\cancel{4}}$

После того, как удалим верхнюю клетку 1 стало 63 $(64-1=63)$

Теперь рассмотрим 1×4 (4×1) , проставим вбок, по диагонали будет 2 значит по диагонали слуу будет 1, т.о. 1 или 2 в 1×4 – четное кол-во

А если 1 – 63, а 2 – 49, то закрыть их не удастся т.к. $63\not⋮2$; $49\not⋮2$

Таким образом, заполнить квадрат н/у 1×4 не получится

Ответ: не получится, нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | MA0003053226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5. 200 серых, 5 черных

Если каждый черный бельчонок знаком с половиной серых, то всего „знакомств" $5 \cdot \frac{200}{2} = 500$ знакомств

∃ n – кол-во с. бельчат, уд. условию и знакомы меньше чем с половиной черных бельчат

Тогда, (200 – n) – кол-во с. бел. не уд. условию

Тогда, кол-во знакомств n должно быть равно 2 (max кол-во, уд. условию), чтобы забрать больше кол-во знакомств на себя

А кол-во знакомств (200 – n) должно быть равно 5 (max), т.е. если они не входят в n бельчат, то должны забрать больше знакомств.

МСУ

$$2n + (200-n) \times 5 = 500$$

Пример:
166 с. – знакомы с 2 чер. 332
33 с. – знакомы с 5 чер. – 165
1 с. – знаком с 3 чер. – 3

$500 = 3n$
$n = 166,(6)$

Кол-во бельчат не может быть дробным

Округлим и подставим

~~332~~
$166 \times 2 + 34 \times 5 = 502$

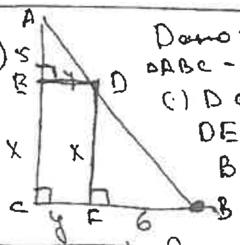
502 – больше чем надо, но мы можем „забрать знакомство" у 2 бельчат по одному, или у одного 2, в обоих случаях, кол-во бельчат, уд. условию не уменьшится

Таким образом, Наибольшее кол-во бельчат, знакомых меньше, чем с половиной черных равно 166

Ответ: 166

Есть оценка $n \le 166$, нет примера с конкретной реализацией

2.



Дано:
△ABC – п/у (∠C = 90°)
(.) D ∈ AB
DE ⊥ AC; DF ⊥ BC
BF = 6; AE = 5
min(S_{ABC}) – ?

Решение:
0) ∃ EC = x; CF = y
1) Найдем S ABC:

a) $S = \frac{(x+5)(y+6)}{2}$ ← S_{ABC} п/у △

б) $S = xy + \frac{6x}{2} + \frac{5 \cdot y}{2}$ ← S_{AED} п/у △; S_{DFB} – п/у △; S_{DECF} – п/у

2) Приравняем а) и б)

$$\frac{xy + 5y + 6x + 30}{2} = xy + 3x + 2{,}5y$$

$$15 = \frac{xy}{2} \Rightarrow xy = 30$$

3) Если $xy = 30$, то $y = \frac{30}{x}$

Подставим в а)

$$S = \frac{(x+5)(\frac{30}{x}+6)}{2} = \frac{30 + \frac{150}{x} + 6x + 30}{2} = \frac{75}{x} + 3x + 30$$

min = ?

4) ∃ $\frac{75}{x} + 3x + 3\cancel{0} = a$

$3x^2 + 3\cancel{0x} + 75 = ax$

$3x^2 + (\cancel{30} - a)x + 75 = 0$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 900}}{6}$$

$\frac{75}{x} + 3x + 30 = \cancel{a}\,30$

Нам нужно минимальное возможное значение a

Это мин S_{ABC}

$a_{min} = 30$ т.к. $a^2 \ge 900$

$x = 5$

$$x = \frac{30 \pm 0}{6} = 5$$

5) Если $x = 5$, то Если $S_{min} = \frac{75}{x} + 3x + 30$, то $S_{min} = 15 + 15 + 30 = 60$

Ответ: 60

?

Лист 2 из 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 5 | 5 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	—	20	—	20		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

пусть x_2 – кол-во двоек; x_3 – кол-во троек. Тогда получаем

$2025 = 2x_2 + 3x_3$

найдём минимально возможный x_3 который больше x_2:

пусть $x = x_2 = x_3$. Тогда:

$2025 = 2x + 3x = 5x \Rightarrow x = 405$

заметим, что x_3 должен быть нечётным, ведь иначе x_2 не может быть целым: нечетное число должно быть суммой двух четных – это неверно.

Значит нам подходит $x_3 = 407 \Rightarrow x_3 \geq 407$

найдём максимальное значение x_3:

$x_2 = 0$

$2025 = 3x_3 \Rightarrow x_3 = 675 \Rightarrow x_3 \leq 675$

Получается нам остаётся найти кол-во подходящих x_3:

$\frac{675 - 407}{2} + 1 = 135$

Ответ: 135

№3

покрасим прямоугольник в 4 цвета, ~~[illegible]~~ по диагоналям таким образом:

1	2	3	4	1	2	...
2	3	4	1	2	3	
3	4	1	2	3	4	
4	1	2	3	4	1	
1	2	3	4	1	2	
⋮						

и т.д.

заметим, что где бы мы не ставили полоски 1×4 (или 4×1), они будут лежать на клетках разных цветов (одинаковых не будет). посчитаем кол-во клеток каждого цвета:

первого: $1+5+9+9+5+1 = 30$

второго: $2+6+9+8+4 = 29$

третьего: $3+7+8+7+3 = 28$

четвертого: $4+8+9+6+2 = 29$

Всего $13 \times 9 - 1 = 116$ клеток, всё совпадает.

заметим, что кол-ва клеток разных цветов не совпадают. Это значит, что невозможно расставить полоски так, что бы закрыть все клетки. Что бы это было возможно, кол-ва таких клеток должно было совпадать.

Ответ: нет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA0003055826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Пусть b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 обозначим как чёрных белок, а $x_1, x_2, \dots, x_{300}$ за серых, $b_i = \{x_n, \dots, x_m\}$ – означает то, что чёрная белка i знакома с серыми белками $x_n, \dots, x_m$.

Приведём пример для первого случая (249 серых белок знакомы с менее чем половиной чёрных)

$b_1 = b_2 = \{x_1, \dots, x_{150}\}$ знаком с 150 белками

$b_3 = \{x_1, \dots, x_{51}, x_{151}, \dots, x_{249}\}$ (знаком с $51 + 249 + 1 - 151 = 150$)

$b_4 = \{x_1, \dots, x_{51}, x_{250}, \dots, x_{300}, x_{152}, \dots, x_{199}\}$ (знаком с $51 + 300 - 250 + 1 + 199 - 152 + 1 = 150$)

$b_5 = \{x_1, \dots, x_{51}, x_{200}, \dots, x_{\cancel{300}\,298}\}$ ($51 + \cancel{300}\,298 - 200 + 1 = 150$ – кол-во знакомств 5 чёрн. белки.)

каждый знаком с $\frac{300}{2} = 150$ серыми белками.

каждый знаком с $x_1, \dots, x_{51}$ и max 2 чёрных белочка знакомо с $x_{52}, \dots, x_{300}$

Докажем, что второй случай невозможен (251 серых белок знакомо с менее чем половиной чёрных).

Посчитаем кол-во знакомств с чёрными белками с одной стороны их должно быть:

$\frac{300}{2} \cdot 5 = 750$

с другой стороны остальные знакомы с меньше половины чёрных белок.

$(300 - 251)5 + 251 \cdot 2 = 747$ – максимум, может быть и меньше.

Получается, что $747 \geq 750$ – это неверно. Значит это невозможно сделать.

Ответ: ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	3	0	8	1	9	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1.

875.

Сначала найдём число, когда слагаемых „2" и „5" одинаковое количество, т.е. можно сгруппировать по „семёркам"

$875 : 7 = 125 \Rightarrow$ т.к. число 875 фиксированное, если пятёрок будет меньше 125, тогда их сумма < 625, значит сумма двоек $> 875 - 625 = 250$, а значит самих двоек $> \frac{250}{2} = 125$. Значит тогда слагаемых, равных 5, меньше слагаемых, равных 2.

Тогда в задаче спрашивается про суммы, где количество слагаемых, равных 5, строго больше других. Значит смотрим на числа ≥ 125 (тогда аналогично верхнему д-ву количество двоек меньше 125).

$875 : 5 = 175$, значит если пятёрок больше 175, то это $5x$ будет > 875, что не подходит.

Смотрим на > 125 и ≤ 175.

Пусть пятёрок x, тогда $875 - 5 \cdot x$ должно представляться в виде суммы двоек $\Rightarrow 875 - 5x \vdots 2 \Rightarrow 875 \underset{mod\,2}{\equiv} 1 \Rightarrow 5x \underset{mod\,2}{\equiv} 1$,

~~т.к.~~ $875 \underset{mod\,2}{\equiv} 5x$ (для кратности)

$$\left.\begin{aligned} 5x \underset{mod\,2}{\equiv} 1 \\ 5 \underset{mod\,2}{\equiv} 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \underset{mod\,2}{\equiv} 1 \Rightarrow x \text{ - нечётное, значит при любом}$$

нечётном x $875 - 5 \cdot x$ - можно представить в виде суммы „2".

Соединим условия для x

$$\left.\begin{aligned} 125 < x \leq 175 \\ x\text{ - нечётное} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{175 - 125}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

← кол-во чисел

↑ кол-во чётностей

Значит только 25 иксов подходят под: слагаемых „5" больше „2".

Ответ: 25 сумм.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 3 0 8 1 9 2 6

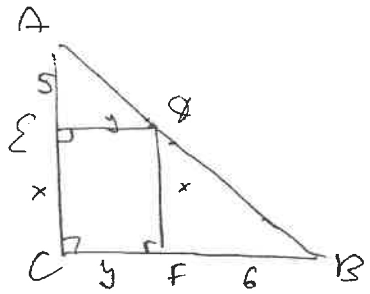
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2.



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг., $\angle C = 90°$

$DE \perp CA$, $DF \perp BC$

$AE = 5$, $BF = 6$.

Найти: наим. $S_{\triangle ABC}$

Решение:

$\left.\begin{array}{l}\angle C = 90° \\ DE \perp CA \Rightarrow \angle DEC = 90° \\ DF \perp BC \Rightarrow \angle DFC = 90°\end{array}\right\} \Rightarrow$ противол. углы равны $\Rightarrow CEDF$ - прямоуг. $\Rightarrow$ и равны $90°$

$\Rightarrow DE = CF$, $EC = DF$; $S_{CEDF} = CE \cdot CF = xy$

Пусть $DE = CF = y$, $EC = DF = x$

$DE \perp CA \Rightarrow \triangle AED$ - прямоуг., $\angle E = 90° \Rightarrow S_{AED} = \frac{1}{2} AE \cdot ED = \frac{5y}{2}$

$DF \perp BC \Rightarrow \triangle FDB$ - прямоуг., $\angle F = 90° \Rightarrow S_{FDB} = \frac{1}{2} DF \cdot FB = \frac{6x}{2} = 3x$

$\triangle ABC$ - прямоуг, $\angle C = 90° \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{(5+x)(6+y)}{2}$

$S_{\triangle ABC} = S_{CEDF} + S_{AED} + S_{FDB}$

$\frac{(5+x)(6+y)}{2} = xy + \frac{5y}{2} + 3x$

$(5+x)(6+y) = 2xy + 5y + 6x$

$30 + \cancel{6x} + \cancel{5y} + xy = 2xy + \cancel{5y} + \cancel{6x}$

$xy = 30 \Rightarrow x, y \neq 0 \Rightarrow y = \frac{30}{x}$

$S_{ABC} = \frac{(5+x)(6+y)}{2} = \frac{30 + 6x + 5y + \overset{=30}{xy}}{2} = 15 + 3x + 2,5y + 15 =$

$= 30 + 3x + 2,5y = 30 + 3x + \frac{2,5 \cdot 30}{x} = 30 + 3x + \frac{75}{x} = 30 + 3\left(x + \frac{25}{x}\right)$

$x + \frac{25}{x}$ $\Rightarrow x + \frac{25}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{25}{x}} = 2 \cdot \sqrt{25} = 10 \Rightarrow$

↗ полож. числа, т.к. x - длина CE

$\Rightarrow S_{ABC} = 30 + 3\left(x + \frac{25}{x}\right) \geq 30 + 3 \cdot 10 = 60$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	3	0	8	1	9	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (продолжение)

Когда достигается $S_{ABC}=60$ (min)

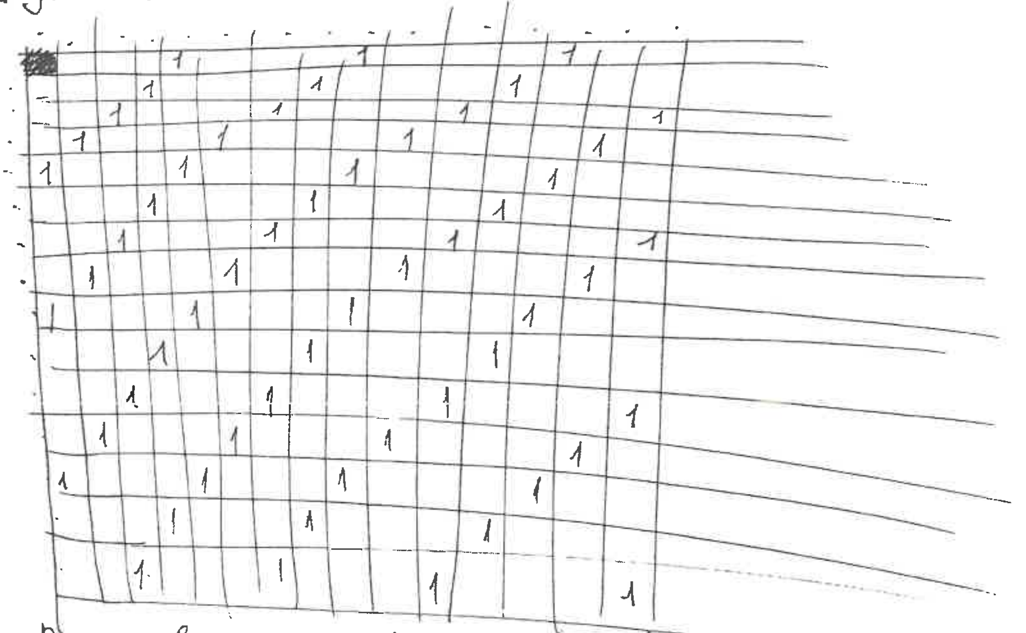
$x+\frac{25}{x}=10 \Rightarrow x=5$ т.к. $x>0$, т.к. длина отрезка $\Rightarrow y=\frac{60}{5}=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC=5+x=10$, $BC=y+6=12$. Такой треуг. существует, тогда $\triangle AOE = \triangle OBF$. Противоречий нет.

Ответ: min $S_{ABC}=60$.

N3

~~Даже~~ Если такое возможно, то прям. 1×4 всего $\frac{15\cdot15-1}{4}=\frac{224}{4}=56$.



Пусть вырезана верхний левый угол, ~~если~~ другой, то просто переворачиваем (можно) квадрат на сколько-то градусов, чтобы вырезанная клетка встала как в этом примере. Тогда подходит такая раскраска. Покрасим клетки в 1 цвет, как на рисунке, чтобы никакие подряд идущие четыре клетки по горизонтали или вертикали не были белыми, в то же время, чтобы в любых 4 подряд идущих клеток не было >1 закрашенной. То есть красим диагонали через три. Считаем кол-во „1“. Их 55. Тогда заметим из нашей раскраски что в любом прямоугольнике 1×4 или 4×1 одна и только одна закрашенная клетка. Значит всего прямоугольников 1×4 и 4×1 не более 55, чтобы они не залезали

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 3 D 8 1 9 Z 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

друг на друга. А чтобы полностью замостить этот квадрат, нужно 56 прямоугольников. Противоречие с 55, значит такое невозможно.

Ответ: нельзя.

№4.

$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2$

Пусть $3x^2-4x-4=t$

$(3x^2-4x-4)((3x^2-4x-4)-x)=56x^2$

$(3x^2-4x-4)^2-x(3x^2-4x-4)-56x^2=0$

$t^2-x\cdot t-56x^2=0$

$D=x^2-4(-56x^2)=x^2+224x^2=225x^2=(15x)^2$

$t=\frac{x\pm\sqrt{(15x)^2}}{2}$

$t=\frac{x\pm 15x}{2}$

$t_1=\frac{16x}{2}=8x$

$3x^2-4x-4=8x$

$3x^2-12x-4=0$

$D_1=36+12=48=16\cdot 3$

$x=\frac{6\pm 4\sqrt{3}}{3}$

$t_2=-\frac{14x}{2}=-7x$

$3x^2-4x-4=-7x$

$3x^2+3x-4=0$

$D=9+16\cdot 3=9+48=57$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$

Ответ: $\frac{6-4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{-3+\sqrt{57}}{6}$; $\frac{-3-\sqrt{57}}{6}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 3 0 8 1 9 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

200 серых; 5 чёрных

Оценка:

Раз каждый чёрный знаком с половиной серых, значит 1 ч → 100 серых ⇒ всего знакомств ч.и.с $= 5 \cdot 100 = 500$

наиб. кол-во серых знакомо меньше, чем с половиной чёрных ⇒

→ с 0 ч, с 1 ч или с 2 ч — таких ~~зверых~~ наиб. число требуется найти

~~Разделим 500 : 2 (max из нужного) =~~

Всего 200 б. · 2 (max из нужного) = 400 знак., что меньше нужного.

Тогда сделаем наиб. кол-во знакомств у наименьшего числа белок, т.е. 5 зн. у наим. числа белок.

т.е. $(500 - 400) : 3 = 100 : 3 = 33$ и (ост. 1). т.е. уже как

столько осталось до 5

минимум у 34 белок будет больше 2 знакомств, значит

33+1

больше, чем $200 - 34 = 166$ серых бельчат, подходящих под условие, не будет. Оценка ≤166.

Пример на 166:

Белки (серые): белки пронумерованы.

по 5 знак. | по 2 знак. | по 2 зн. | 1 зн. | 2 зн. | 1 зн. | 2 зн.

1 . . . 34 | 35 . . 50 . . 100 | 101 . . 133 | 134 | 135 150 . . 166 | 167 | 168 . . 200

знакомы с 1, 2, 3, 4, 5 = 34 белки

знакомы с 1 и 2 = $100 - 35 + 1 = 66$ белок

знак. с 5: $133 - 101 + 1 = 33$

знакомы с 3 = $166 - 101 + 1 = 66$

знакомы с 4 = $200 - 135 + 1 = 66$

знак. с 5: $200 - 168 + 1 = 33$

Итого:

① → с 1 по 100 = 100 бельчат

② → с 1 по 100 = 100 бельчат

③ → с 1 по 34 и с 101 по 166 = 100 б.

④ → с 1 по 34 и со 135 по 200 = 100 б.

⑤ → с 1 по 34 и со 101 по 133 и со 168 по 200 = 100 б.

Знакомств всего: $34 \cdot 5 + 66 \cdot 2 + 33 \cdot 2 + 1 + 32 \cdot 2 + 1 + 33 \cdot 2 =$
$= 34 \cdot 5 + 2 + 2(66 + 33 + 32 + 33) = 172 + 2 \cdot 164 = 172 + 328 = 500$ верно

Ответ: наибольшее число серых бельчат, знакомых с меньше половины чёрных, — ~~340~~ 166

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	3	0	8	4	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	15	20	20	18		93

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(1.) $875 = a \cdot 2 + b \cdot 5$
$b > a$

Т.к. $875 \vdots 5$ и $5b \vdots 5$, а уравнение содержит только целочисленные слагаемые, то $a \vdots 5$. Пусть $a = 5t$. Получим:

$$875 = 2 \cdot 5t + 5b \quad | :5$$

$$175 = 2t + b, \quad b > 5t$$

Заметим, ~~что~~ каждому значению $t \in [0; 87]$ будет соответствовать однозначное b. Из этих 88 вариантов выберем лишь те, в которых $b > 5t$

$b = 175 - 2t$, $\quad 175 - 2t > 5t$

$7t < 175$

$t < 25$

Значит, $t \in [0; 24]$, итого 25 вариантов.

Ответ 25.

(4) $(3x^2 - 4x - 4)(3x^2 - 5x - 4) = 56x^2$

При $x = 0$ получим:

$-4 \cdot (-4) = 0$ – неверно, $x = 0$ не является решением.

Тогда $x \neq 0$, разделим обе части уравнения на x^2:

$$\frac{3x^2 - 4x - 4}{x} \cdot \frac{3x^2 - 5x - 4}{x} = 56$$

$$\left(3x - 4 - \frac{4}{x}\right)\left(3x - 5 - \frac{4}{x}\right) = 56$$

$$3x - \frac{4}{x} = t$$

$$(t - 4)(t - 5) = 56$$

$$t^2 - 9t - 36 = 0$$

$$D = 81 + 144 = 225$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 15}{2} \quad t_1 = 12 \quad t_2 = -3$$

Лист ____ из ____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

M	A	0	0	0	3	0	8	4	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Обратная замена:

1) $3x-\frac{4}{x}=12$

$3x^2-12x-4=0$

$D=144+48=192$

$x_{12}=\frac{12\pm\sqrt{192}}{6}=2\pm\frac{4\sqrt{12}}{6}=2\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$

2) $3x-\frac{4}{x}=-3$

$3x^2+3x-4=0$

$D=9+48=57$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{57}}{6}$

Ответ: $2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $2-\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{57}}{6}$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{57}}{6}$

Лист ______ из ______

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 8 | 4 | 3 | 2 | 6 |

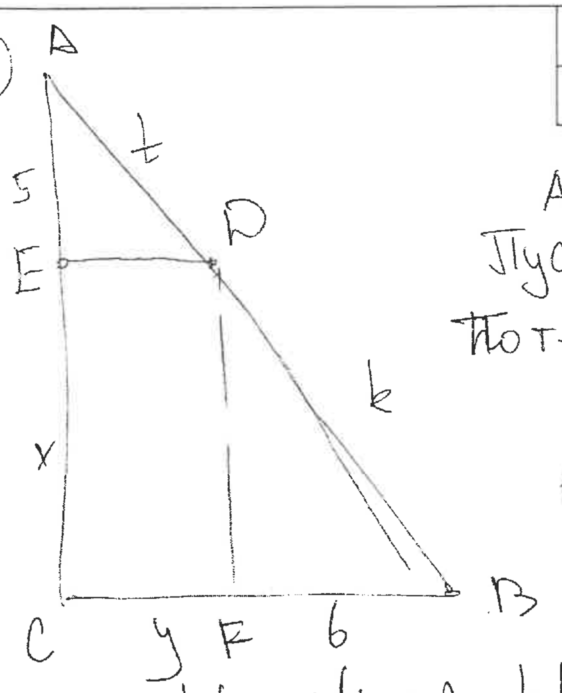
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2



$AD = t \quad DB = k$

Пусть $CE = x$; $CF = y$

По теор. Пифагора для $\triangle ABC$, $\triangle AED$, $\triangle FBD$

$$\begin{cases} (5+x)^2 + (6+y)^2 = (t+k)^2 & (*) \\ 5^2 + y^2 = t^2 & (**) \\ x^2 + 6^2 = k^2 & (***) \end{cases}$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(5+x)(6+y) = \frac{1}{2}(30+5+6x+xy)$

$(**) + (***)$: $5^2 + y^2 + 6^2 + x^2 = t^2 + k^2$

$(*)$: $5^2 + x^2 + 6^2 + y^2 + 10x + 12y = t^2 + k^2 + 2kt$

Тогда $10x + 12y = 2kt$

с другой стороны

$S_{ABC} = S_{AED} + S_{DFB} + S_{CEDF} = \frac{1}{2} \cdot 5y + \frac{1}{2} \cdot 6x + xy$

$= 2{,}5y + 3x + xy$

Получим:

$15 + \cancel{2{,}5y} + \cancel{3x} + \frac{1}{2}xy = \cancel{2{,}5y} + \cancel{3x} + xy$

$\frac{1}{2}xy = 15 \qquad xy = 30$

Значит $x = \frac{30}{y}$

Тогда

$S_{ABC} = 15 + 2{,}5y + \frac{90}{y} + 15 = 30 + 2{,}5y + \frac{90}{y} =$

$= \frac{2{,}5(y^2 + 12y + 36)}{y} = \frac{2{,}5(y+6)^2}{y}$

Лист ______ из ______

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 8 | 4 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$= 2{,}5\left(\frac{y^2}{y} + \frac{12y}{y} + \frac{36}{y}\right) =$

$= 2{,}5\left(y + 12 + \frac{36}{y}\right)$

$y + \frac{36}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{36}{y}} = 2 \cdot 6 = 12$

тогда наименьш. значение площади будет

$S_{ABC} = 2{,}5\left(y + \frac{36}{y} + 12\right) \geq 2{,}5(12+12) \geq 60$

Ответ: 60.

Пример?

Лист _____ из _____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

М	А	0	0	0	3	0	8	4	3	2	6

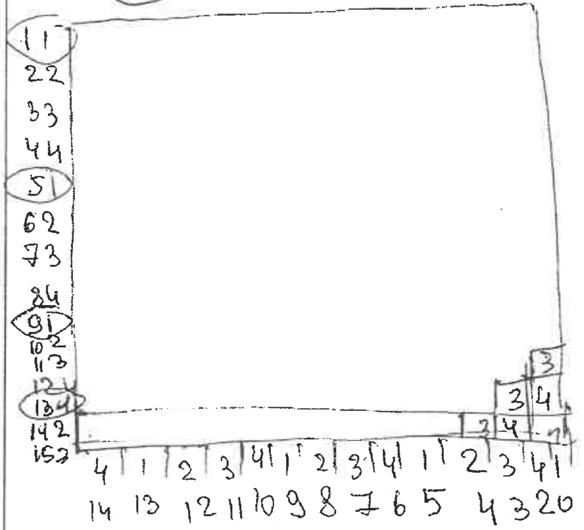
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3



номер цвета
его количество на диагонали.

1 2 3 4 1 2
2 3 4 1 2
3 4 1 2
4 1 2 и т.д.
1 2
2

Раскрасим доску в диагональную раскраску в 4 цвета. На рисунке указаны номера цветов, в которые закрашена диагонали и количество. Заметим, что любой прямоугольник 4×1 и 1×4 занимает ровно одну клетку каждого цвета, тогда всех цветов должно быть поровну, если замостить доску возможно. Тогда каждого цвета должно быть:

$$\frac{15^2-1}{4} = \frac{224}{4} = 56$$

Посчитаем кол-во цвета 1: $1+5+9+13+13+9+5+0=55 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ замостить нельзя

Ответ: нет

Лист _____ из _____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 8 | 4 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5

Будем рассматривать таблицу 5×200, где каждая строка соответствует черному бельчонку, а каждый столбец – серому. Тогда в каждой строке должно быть 100 единиц: единица будет означать знакомство.

Рассмотрим фрагмент таблицы 5×5 (на рисунке таких фрагмента два)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1		1			1		1		
2	1			1		1			1	
3		1		1			1		1	
4		1			1		1			1
5			1		1			1		1

Если заполнять всю таблицу таким образом, то каждый серый бельчонок будет знаком с двумя чёрными,

При этом у всех черных бельчат поровну знакомых серых, по $\frac{200}{5} \times 2 = 80$. В такой ситуации все серые бельчата знакомы менее чем с половиной черных. Нам нужно еще 20 единиц добавить в каждую строку, чтобы каждый черный бельчонок был знаком с половиной серых. Добавление единиц приведет к тому, что серые бельчата будут знакомы более чем с половиной черных, минимизируем количество таких серых бельчат. В каждом квадрате 5×5 каждому черному бельчонку можно добавить по 3 единицы, тогда в квадратов 5×5 заполним единицами полностью, тем самым добавив $15 \cdot 6 = 90$ новых знакомств суммарно (15 – количество свободных клеток в одном квадрате 5×5), а нужно добавить ещё 10, по 2 каждому черному бельчонку. При нашей схе~~схеме нужному черному бельчонку. При нашей схеме~~ме нужно заполнить единицами еще пустые клетки первых трех столбцов 7го квадрата

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № _____

M	A	0	0	0	3	0	8	4	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	~~б~~	1	б	
1	б	~~б~~	1	
~~б~~	1	~~б~~	1	~~б~~
~~б~~	1	~~б~~		1
б	1	1		1

и одну верхнюю клетку четвертого столбца. Таким образом, из 200 бельчат серого цвета менее чем с половиной черных бельчат (с двумя) знакомы окажутся.

$200 - 6 \cdot 5 - 4 = 200 - 34 = 166$ бельчат

Ответ: 166.

Не показано явно, почему нельзя добавить.

Лист _____ из _____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 9 | 4 | 6 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

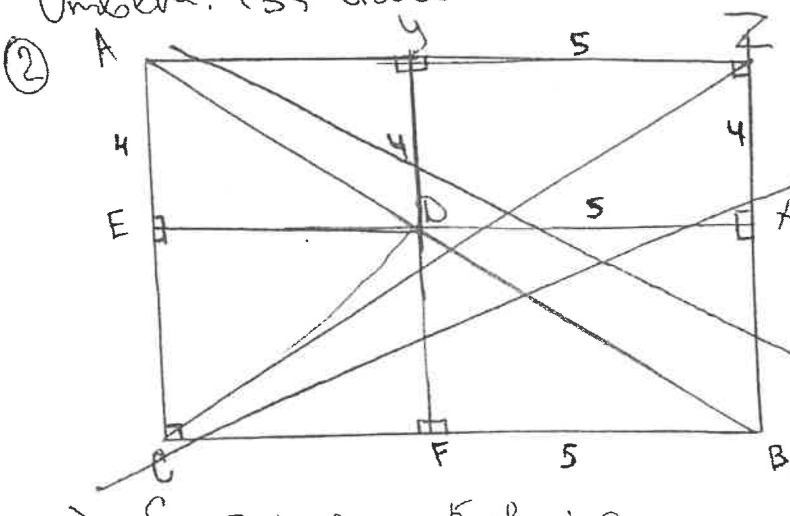
1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	20	15		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) $2025 : 3 = 675$ – столько троек может быть максимум – это и будет первым случаем, далее меняем 2 тройки на 3 двойки поскольку $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$. Обозначим как y – количество троек; x – количество двоек; ~~следует~~ у нас будет ~~получа~~ выполнятся условие до того момента пока количество двоек и троек станет равным, то $3x + 2x = 2025 \Rightarrow 5x = 2025 \Rightarrow x = 405 \Rightarrow$ будет ~~выполнятся~~ выполняться пока не станет 405 двоек и 405 троек (данный случай не учитывается); ~~тогда~~ общее количество способов будет: $\frac{675 - 405}{2} = \frac{270}{2} = 135$ способов

Ответ: 135 способов.

2)



~~1) Достроим прямоугольник FDBX (FD = XB, DX = FB)~~
~~2) Достроим прямоугольник AEDY (AE = YD, AY = ED)~~
~~3) Достроим прямоугольник ACBZ (AZ = CB, AC = ZB).~~
~~4) Тогда DX = FB = YZ = 5. также AE = YD = ZX = 4.~~
~~5)~~

1) $S = 5 \cdot 4 \cdot 2 = 5 \cdot 8 = 40$.

Ответ: 40.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 0 9 4 6 2 6

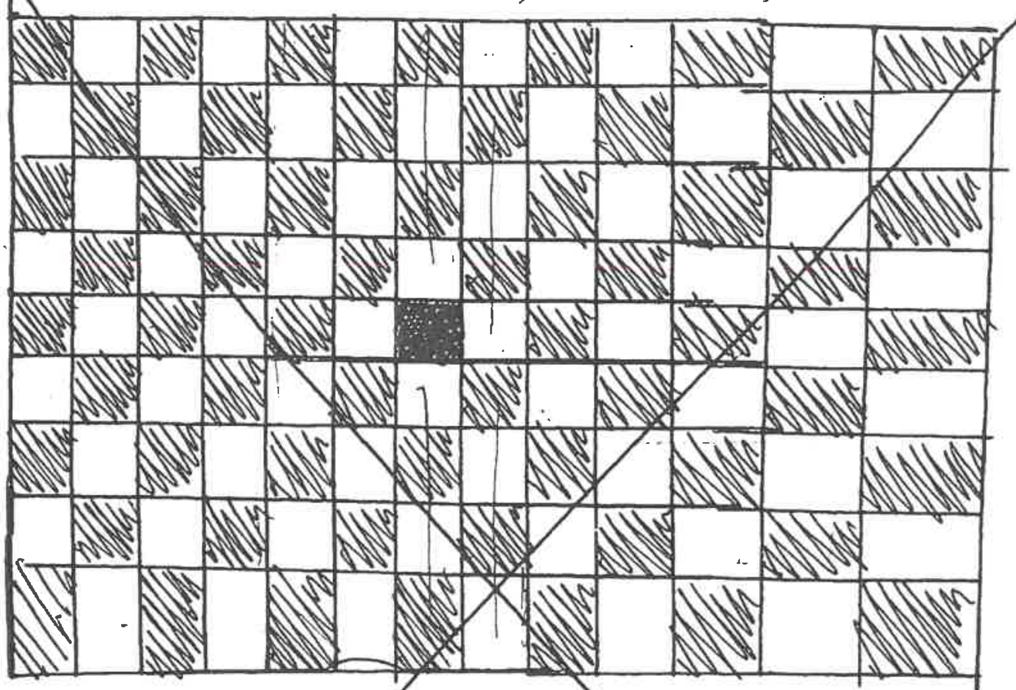
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3



1) Закрасим клетки данного прямоугольника в шахматную раскраску.

2) в одной полоске 1×4 или 4×1 содержится обязательно 2 черные и 2 белые клетки $\Rightarrow$ количество белых и черных должно быть равно обязательно.

3) На доске получим что у нас 59 черных и 57 белых клеток – противоречие $\Rightarrow$ нельзя

Ответ: нельзя.

5 Всего знакомых пар может быть $150\cdot5=750$

x - черные y - серые ; $xy=750$

пусть Z - число серых у которых знакомств меньше половины. ; тогда:

$750\le 2k+5(300-k)=1500-3k \Rightarrow 3k\le750 \Rightarrow k\le250$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	3	0	9	4	6	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$750 \geq 0\cdot k - 3(300k)\ 900 - 3k \Rightarrow 3k \geq 150$

$\Rightarrow k \geq 50$; тогда

$50 \leq k \leq 250 \Rightarrow$ максимальное значение -250

Нет примера и обоснования для 249

(4) Оек:

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$4x^4+16x^3-8x^2+24x+9=0 \mid : x^2$

$4x^2+16x-8+\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$.

$4x^2+\frac{9}{x^2}+16x+\frac{24}{x}-8=0$.

Пусть $t=2x+\frac{3}{x}$, тогда $t^2=4x^2+12+\frac{9}{x^2}$.

$(t^2-12)+8t-8=0$

$t^2+8t-20=0$

$t=2 \mid t=-10$

$2x+\frac{3}{x}=2$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-24=-20<0 \Rightarrow \varnothing$

$2x+\frac{3}{x}=-10$

$2x^2+10x+3=0$

$x_1=\frac{-10+\sqrt{76}}{4}=\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $x_2=\frac{-10-\sqrt{76}}{4}=\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

(3)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 9 | 4 | 6 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 Пронумеруем все клетки цифрами от 1 до 4 так, чтобы одинаковые цифры не стояли боком друг к другу. и ~~чтобы всех цифр было одинаковое количество~~.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2		4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

Тогда получаем, что цифр-3 меньше чем 2 и 4, а цифр-1 больше => такое невозможно => нельзя

Ответ: нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 0 9 7 3 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	3	20	20	20		83

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Пусть число 2025 представлено в виде суммы 2 и 3 каким-то образом, ясно, что если из этой суммы убрать 2 слагаемых, равных 3, и добавить 3 слагаемых, равных 2, то сумма останется прежней, ведь $-2\cdot3+3\cdot2=0$.

$2025=3\cdot675=3\cdot673+2\cdot3=3\cdot671+2\cdot6=\ldots=3\cdot(675-2n)+2\cdot3n$, где $(675-2n)$ – кол-во 3, $3n$ – кол-во 2. По условию:

$675-2n>3n$

$5n<675$

$n<135$, т.к. $n\geq0$ (кол-во слагаемых, равных 3 неотрицательно), то $n\in\{0,1,2,\ldots,133,134\}$ – всего 135 возможных значений n, т. е. 135 сумм.

Ответ: 135 сумм.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

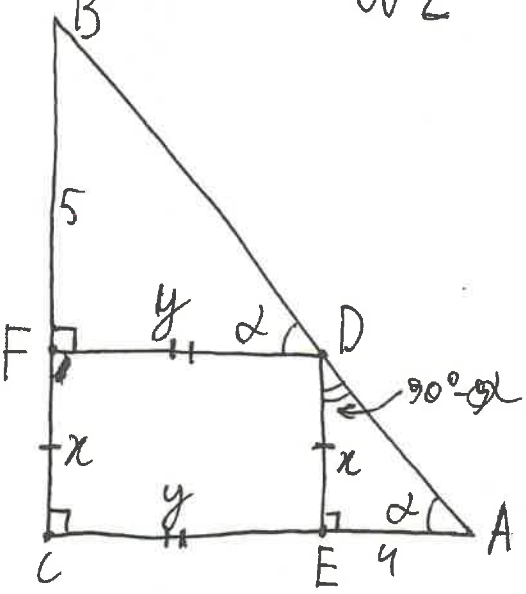
Вариант № 1 MA00030973 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Дано: ΔABC, $\angle C=90^\circ$, $D\in AB$, $DE\perp CA$, $DE\cap CA=E$, $DF\perp CB$, $DF\cap CB=F$, $AE=4$, $BF=5$

Найти: $S_{min}(ABC)=?$

Решение:

① ~~Поскольку $DF \parallel AC$ как стороны прямоугольника,~~

① Пусть $DE=FC=x$, $DF=CE=y$. ~~Тогда~~

② $\Delta FBD \sim \Delta EDA$ (по 2-м углам):

1) $\angle BFD=\angle DEA=90^\circ$ (по усл).

2) $\angle BDF=\angle DAE$ (как соотв. при $FD\parallel AC$ и секущей AB),

тогда $\frac{BF}{DE}=\frac{DF}{AE}$ $\frac{5}{x}=\frac{y}{4}$ $xy=20$, т.е. $S(CFDE)=20$,

также $y=\frac{20}{x}$

③ $S(ABC)=S(BFD)+S(DEA)+S(CFDE)=\frac{1}{2}\cdot5\cdot y+\frac{1}{2}\cdot4\cdot x+20=$

$=\frac{50}{x}+2x+20=2\cdot\left(\frac{x^2+25}{x}\right)+20$ ед²

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 3 0 9 7 3 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение задачи №2

(4) Докажем, что наименьшая площадь достигается, если CFDE – квадрат, т.е. $x=y$:

$x=y \quad x=\frac{20}{x} \quad x^2=20 \quad x=2\sqrt{5}$ —

~~Пусть~~ С'

$S(ABC)=20+2\cdot\left(\frac{(2\sqrt{5})^2+25}{2\sqrt{5}}\right)=20+2\cdot\frac{20+25}{2\sqrt{5}}=20+\frac{45}{\sqrt{5}}=20+9\sqrt{5}$ ед²

Пусть CFDE – не квадрат, тогда $x=2\sqrt{5}+K$, где K – какое-то положительное число (случай, если $K<0$ аналогичен)

$S'(ABC)=20+2\cdot\frac{(2\sqrt{5}+K)^2+25}{2\sqrt{5}+K}=20+\frac{40+8\sqrt{5}K+2K^2+50}{2\sqrt{5}+K}=$

$=20+9\sqrt{5}\cdot\frac{2K^2+8\sqrt{5}K+90}{(2\sqrt{5}+K)\cdot 9\sqrt{5}}=20+9\sqrt{5}\cdot\underbrace{\frac{2K^2+8\sqrt{5}+90}{90+9\sqrt{5}K}}_{>1}$, то

$S'(ABC)>S(ABC)$.

Ответ: $S_{min}(ABC)=20+9\sqrt{5}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 9 | 7 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Пусть $t=2x^2+3x+3$:

$t\cdot(t+2x)=35x^2$

$t^2+2x\cdot t-35x^2=0$ — кв. отн-но t

$D=(2x)^2-4\cdot1\cdot(-35x^2)=4x^2+140x^2=144x^2$

$t=\frac{-2x\pm\sqrt{144x^2}}{2}$

$t=\frac{-2x\pm12x}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t=-7x \\ t=5x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x^2+3x+3=-7x \\ 2x^2+3x+3=5x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x^2+10x+3=0 \quad D=10^2-4\cdot2\cdot3=76 \\ 2x^2-2x+3=0 \quad D=(-2)^2-4\cdot3\cdot2<0 \end{array}\right.$

$x=\frac{-10\pm\sqrt{76}}{4}$

$x=\frac{-10\pm2\sqrt{19}}{4}$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $x=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00030973 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	0	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

1 – 38 шт

2 – 37 шт

3 – 36 шт

4 – 37 шт.

Раскрасим прямоугольник как показано на рисунке, тогда любая полоска 1×4 или 4×1 будет закрывать по одной клетке каждого цвета, а т.к. клеток разных цветов не равное количество (3 цвета меньше), то заполнить прямоугольник нельзя.

Ответ: нет, нельзя.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 0 9 7 3 2 6

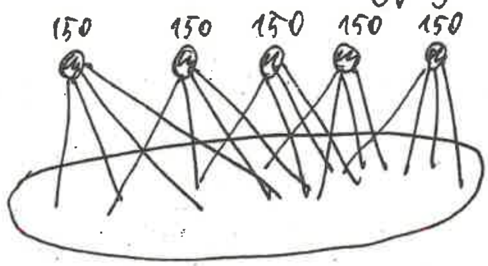
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5



Построим граф знакомств — будем соединять двух бельчат ребром, если они знакомы.

Тогда всего проведено $5\cdot\frac{300}{2}=5\cdot150=750$ рёбер.

Пример для 249:

Пусть 249 серых бельчат знакомы с 2-мя чёрными, 3 серых бельчонка — с 4-мя чёрными, 48 серых — с 5-ю чёрными, тогда $249\cdot2+3\cdot4+48\cdot5=750$.

Док-во для 251:

Максимум эти 251 бельчонок могут образовывать $251\cdot2=502$ ребра, тогда оставшиеся 49 должны образовать $750-502=248$ рёбер, но тогда каждый должен быть знаком хотя бы с $\frac{248}{49}$ чёрными бельчатами по принципу Дирихле, а поскольку $\frac{248}{49}>\frac{245}{49}=5$, то такого быть не может.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 5 | 6 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	–	10	20	15		65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 $2025 = 2n + 3k$; $n, k \in N$ (*)

2025 – нечет, тогда k – нечет

$2025 : (2+3) = 405 = k_1$ – слагаемых при равном количестве n и k ($n = k$)

Нужно: $k > n$

Очевидно, что одному k сопоставляется один n, если это возможно (в силу чет/нечет)

$2025 : 3 = 675 = k_{max}$ ($n = 0$)

Итак: $405 < k \leq 675$ ① и $k \vdots 2$ ②

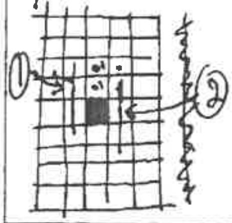
① получаем: $675 - 405 = 270$ – значения для k с учётом усл ①

② с учётом усл. ② и ① : $270 : 2 = 135$ – значений k, а значит и сумм, удовлетворяющих условию.

В силу (*) $f(n; k)$ – возрастает на области, заданной в условии, значит повторяющихся пар нет

Ответ: 135

№3 Крайние части можно расположить (~~по~~ части по 4×9), но „середина“ не заполнится, как ни расположить полоску, покажем рисунком:



опять же, верхнюю и нижнюю части можно заполнить, но тогда останется 2 клетки, которые невозможно соединить полосой 1×9 или 4×1.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 5 | 6 | 2 | 6 |

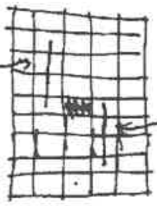
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

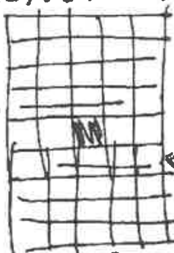
~~Кро~~ (Продолжение задачи №~~2~~ 3)

попробовав ① и ② заполнить так же не получится: для ①: снизу придётся замостить 4-мя горизонт. линиями, сверху – 2-мя – тогда образуются кл (4×1), их невозможно будет замостить, т.к. с "." сверху клетки уже заняты; аналогично для ② в силу симметрии. попробуем замостить ~~все горизонт~~ так:



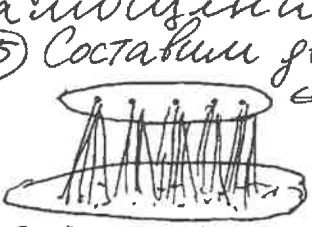
для ③ нужно будет заполнить одним из 2 способов, но так же 3 клетки над центральной не смогут быть заполнены; так же и с ④

Посмотрим на возможные горизонт. расположения:



оказывается невозможно заполнить граничащие с центр. кл. клетки или крайние нижние (и для ⑤, и для ⑥); положения ⑦ и ⑧ сдвинутые на клетку также оказываются невозможными для замощения.

№5 Составим двудольный граф.



← чёрные бельчата (чб)

← серые бельчата (сб) ① ⇐ 300:2

кратность одн вершины чб равна 150, их 5 ⇒ рёбер: 5·150 = 750; меньше половины чб: 0;1;2 – возможные случаи;

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | м а 0 0 р 3 1 0 5 6 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

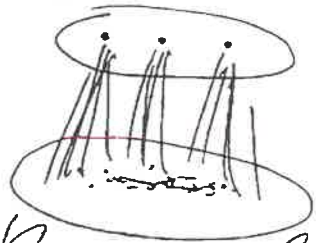
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(Продолжение задачи №5)

Составим граф, соотносящий случаи и сб.



Пример для 249?

Количество рёбер не должно превосходить количество рёбер 1 графа (≤ 750);

Очевидно, что $249 \cdot 3 < 750 = 250 \cdot 3$, а $251 \cdot 3 > 750 = 250 \cdot 3$

№4 $(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3) = 35x^2$ ч. ~~д~~т. Д

Замена: $\{2x^2+4x+3=t\}$:

$(t-x)(t+x) = t^2 - x^2 = 35x^2$

$t^2 = 36x^2$; $t = \pm 6x$

Случай 1: $t = 6x$: $2x^2+4x+3=6x$

$2x^2-2x+3=0$: Д < 0; $x_2 \notin R$ ($x_{1,2} \in C$)

Случай 2: $t=-6x$; $2x^2+4x+3=-6x$

$2x^2+10x+3=0$

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{-10 \pm \sqrt{76}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}$

$x_1 = \frac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $x_2 = \frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

№5 При нулевых перпендикулярах:

$S = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Ответ: 10

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	15	20	20		83

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

Т.к число 2025 нечет, то 3 минимум 1шт, а максимально 3: 2025:3=675шт.

1) Найдем кол-во сумм 2 и 3, т.е получим равное количество 2 и 3.

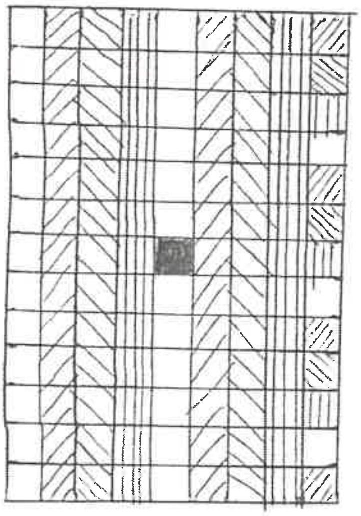
2025:(2+3)=405 => при равном кол-ве 2 и 3, их будет по 405.

2) Заметим, чтобы увеличить количество 3 нужно убрать 2 на то количество, чтобы ~~количество~~ сумма убранных 2 была :3. Значит, чтобы найти количество способов в которых 3 > 2, нужно ~~кол-во 2~~ 405:3= =135 способов.

3) Получаем, что кол-во способов в которых 3>2 равно 135.

Ответ: 135.

N3.



1) Закрасим пр/уг в 4 разных вида , , , , а вырезанную клетку обозначим

2) Посчитаем кол-во клеток каждого вида

- 13+12+3=28

- 13·2+4=30

- 13·2+3=29

- 13·2+3=29.

3) Для того чтобы разместить пр/уг, необходимо, чтобы он состоял из клеток каждого вида, но клеток -28, а клеток -30 => мы сможем ~~составить~~ разместить 28 пр/уг 1×4 или 4×1 и останется -2, -1, -1, т.е мы не сможем заполнить прямоугольник (вырезанной клеткой. Ответ: нельзя

Пр-к закрывает или 4 или 1 клетку данного цвета. А справа еще разнообразнее

Вариант № 1 М А 0 0 0 3 1 1 2 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

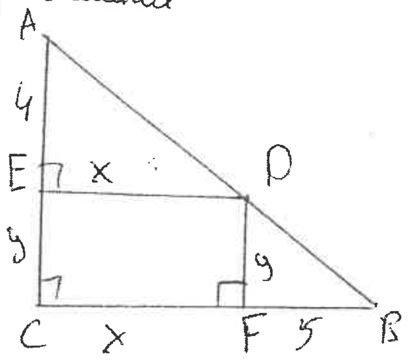
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.

Дано:
$\triangle ABC$ - прям
$\angle C = 90^\circ$
$D \in AB$
$DE \perp CA$
$DF \perp CB$
$AE = 4$
$BF = 5$

Найти: наим $S_{\triangle ABC}$

Решение



1) Пусть $CF = x$, а $EC = y$.
Т.к. $EDFC$ - прям (все $\angle = 90^\circ$), то $ED = CF = x$, $EC = DF = y$.

2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(4+y)(5+x)$.

3) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} + S_{EDFC} + S_{\triangle DBF} = \frac{1}{2}\cdot 4x + \frac{1}{2}\cdot 5y + xy$

4) $S_{\triangle ABC} = \frac{(4+y)(5+x)}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{5y}{2} + xy$

$\frac{20+4x+5y+xy}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{5y}{2} + xy \quad / \cdot 2$

$20 + \cancel{4x} + \cancel{5y} + xy = \cancel{4x} + \cancel{5y} + 2xy$

$xy = 20$

5) Рассмотрим случаи при которых x, y - целые числа и $xy = 20$:

I) 1 и 20

II) 2 и 10

III) 4 и 5

Не обяз. целые!

Заметим, что $S_{\triangle ABC}$ зависит от длин сторон, т.е чтобы получить наим S, нужно получить наим стороны, т.е $x+y$ должны быть наим. значения. Это 4 и 5 (III случай)

I. $x = 4, y = 5$ II. $x = 5, y = 4$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9 = \frac{81}{2}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8 = \frac{80}{2}$.

$\frac{80}{2} < \frac{81}{2} \Rightarrow$ Наим S_{ABC} ~~нрав~~ $= \frac{80}{2} = 40$.

Ответ: 40

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	3	1	1	2	0	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=$

$=35x^2$

Пусть $2x^2+3x+3=t$, тогда:

$t(t+2x)=35x^2$

$t^2+2xt-35x^2=0$

$D=4x^2+4\cdot35x^2=4x^2+140x^2=144x^2$

$t_1=\frac{-2x-12x}{2}=-7x$ $\qquad t_2=\frac{-2x+12x}{2}=5x$

I) $2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-4\cdot2\cdot3=100-24=76$

$x_1=\frac{-10-2\sqrt{19}}{4}=\frac{-2(5+\sqrt{19})}{4}=-\frac{5+\sqrt{19}}{\cancel{4}2}$

$x_2=\frac{-10+2\sqrt{19}}{4}=\frac{-2(5-\sqrt{19})}{4}=-\frac{5-\sqrt{19}}{2}$

II) $2x^2+3x+3=5x$

$2x^2-2x+3=0.$

$D=4-4\cdot2\cdot3=4-24=-20<0\Rightarrow x\in\varnothing$

Ответ: $x_1=-\frac{5+\sqrt{19}}{2}$; $x_2=-\frac{5-\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

1) Пусть a - сер бельчата, когда a_0 - 0 чёрн, a_1 - 1 чёрн, a_2 - 2 чёрн, a_3 - 3 чёрн, a_4 - 4 чёрн, a_5 - 5 чёрн. (число рядом с a обозначает кол-во чёрных бельчат которых знают серые)

2). Пусть x серых бельчат знают от 0 до 2 чёрн, т.е. $x = a_0 + a_1 + a_2$, тогда $a_3 + a_4 + a_5 = 300 - x$.

Рассмотрим случай, когда серые бельчата знакомы с макс кол-вом чёрных, это 2 и 5. Всего чёрные бельчата знают $5 \cdot 150 = 750$ серых. Составим уравнение

$2x + 5(300 - x) = 750$

$2x + 1500 - 5x = 750$

$-3x = -750$

$x = 250$ - это максимальное количество серых бельчат, которые знакомы меньше, чем с половиной чёрных бельчат $\Rightarrow$ 251 - невозможно.

3) Приведём пример когда 249 бельчат знакомы меньше, чем с половиной чёрных бельчат. Когда x серых бельчат знакомы с 2 чёрными, 3 бельчонка с 4 чёрными и $297 - x$ бельчонков с 5 чёрными. Получаем:

$2x + 3 \cdot 4 + 5(297 - x) = 750$

$2x + 12 + 1485 - 5x = 750$

$-3x = -747$

$x = 249$, данное кол-во серых бельчат возможно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА000321932б

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	18	20	–	20		78

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№1

давайте рассмотрим, сколько максимум 3 может быть в этой сумме: 1120 не делится на 3, даёт остаток 1, ~~тогда зачем~~ тогда вычтем из него 5, 1115 также не делится, вычтем ещё: 1110 делится на 3, значит можем расписать его как сумму 370-и троек. Таким образом у нас 370 троек и 2 пятёрки в сумме max. Это максимальное кол-во троек, тогда начнём их уменьшать и увеличивать кол-во пятёрок. Чтобы число 1120 сохранялось, единственный способ увеличивать кол-во пятёрок это менять 5 ~~шт~~ троек на 3 пятёрки (поменять 10 троек на 6 пятёрок это тоже самое, только 2 раза), тогда начнём это делать и будем получать все разные расстановки троек, до момента пок кол-во пятёрок не станет больше кол-ва троек!

3:	5:
370	2
365	5
360	8

~~Так как за 1 операция мы убираем~~

3:	5:
370	2
365	5
...	

$140 = 140$, от 370 до 140 $\frac{370-140}{5} = \frac{230}{5} = 46$ операций $\Rightarrow 47$ варианта, но $140 = 140$ нам не подходит, значит подходящих нам сумм – 46 Ответ: 46.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | MA000321926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

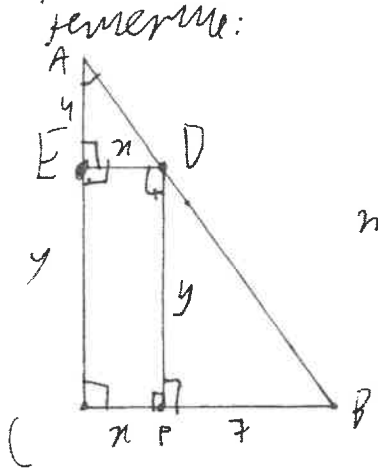
№2

Дано:

ABC – прямоугольный Δ, $\angle C = 90°$, $D \in AB$, AB – гипот., $E \in AC$, $F \in CB$, $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, $AE = 4$, $BF = 7$

$\boxed{S_{ABC\,min} = ?}$

Решение:



1.) $\angle C = 90°$, $\angle CED = 90°$, $\angle CFD = 90°$ => $CEDF$ – прямоугольник.

2.) обозначим ED за x, а EC за y, тогда по св-ву прямоугольника $DF = EC = y$, $ED = CF = x$.

3.) $\Delta AED \sim \Delta ACB$, т.к. $\angle A$ общий, $ED \parallel CB$ (т.к. при секущей EC одностор. углы DEC и ECB в сумме $= 90° + 90° = 180°$)

4.) 3 => $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{BC}$ (св-во подобных) $\frac{4}{x} = \frac{4+y}{x+7}$

по св-ву пропорции $\cancel{4x} + 28 = \cancel{4x} + xy$ => $\boxed{xy = 28}$

5.) $S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{(4+y)(x+7)}{2} = \frac{4x + 28 + xy + 7y}{2} = 2x + 28 + 3{,}5y$,

$28 = const$, значит нужно найти $\min(2x + 3{,}5y)$. Так как $xy = 28$, при нахождении x однозначно задаётся y, причём $y = \frac{28}{x}$, подставим: $2x + 3{,}5 \cdot \frac{28}{x}$ – это зависит только от x, значит зададим функцию $f(x) = 2x + \frac{98}{x}$ её минимальное значение и будет минимальным значение $2x + 3{,}5y$, а если мы к ней добавим 28, то это будет значение S_{ABC}:

$f(x) = 2x + \frac{98}{x} + 28 = S_{ABC}$, определим графически, построив график этой функции

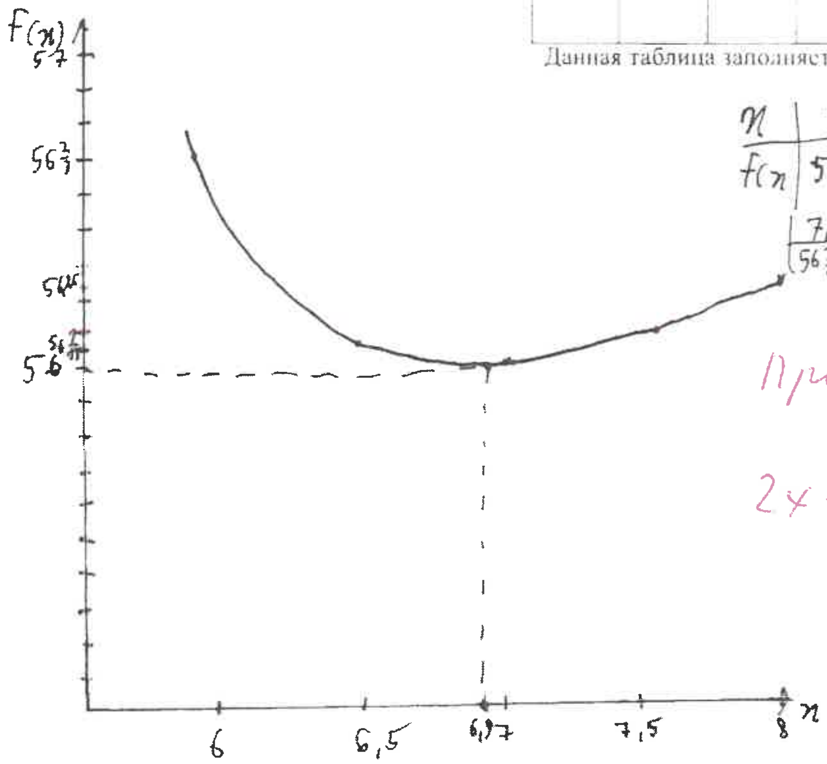
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 М Н 0 0 0 3 2 1 9 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



x	6	7	8	6,5	7,5
$f(x)$	$56\frac{2}{3}$	56	58,25	$56\frac{1}{15}$	$56\frac{1}{11}$

Прове... исп-т нер-во:

$2x + \frac{98}{x} \leq 2\sqrt{2x \cdot \frac{98}{x}} = 2\sqrt{4 \cdot 49} = 28$

$f(6,9) = 2 \cdot 6,9 + \frac{98}{6,9} + 28 = 13,8 + \frac{980}{69} + 28 = 41,8 + 14\frac{14}{69} =$

$= 55\frac{8}{10} + \frac{14}{69} = 55 + \frac{552}{690} + \frac{140}{690} = 55 + \frac{692}{690} = 56\frac{1}{345}$ тоже больше 56 $\Rightarrow$ вершина лежит примерно на 7 $\Rightarrow$ $\boxed{S_{min} = 56}$

Ответ: 56.

№3

вырезанная

3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1
4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2
1	4	3			4	3	2	1	4	3
2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4
3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1
4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2
1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3
2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4
3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1
4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2
1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3

разукрасим доску в 4 цвета начиная с правого верхнего угла и по диагоналям идем к левому нижнему углу. посчитаем 1, их 29 всего клеток 120 (т.к. 11×11=121 а 1 вырезали) при этом в каждом прямоугольнике 1×4 или 4×1 должны присутствовать все 4 цвета, прямоугольников 30, первого цвета 29, значит их не хватит, значит нельзя. $\frac{120}{4} \to$ 30, ответ: нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА0003219326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

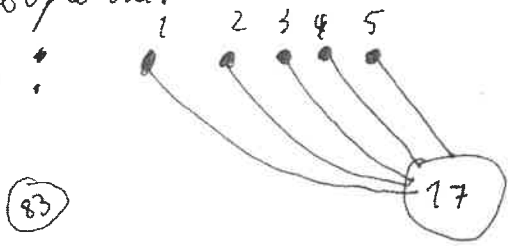
№5

1	2	3	4	5	6	Σ

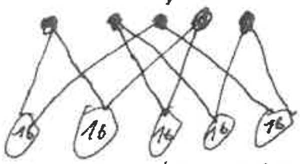
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Оценка пусть может быть больше 83, тогда из них выходит не больше 84·2 = 168 рёбер (где рёбра – знакомства, а вершины – белки); а из оставшихся не больше 16·5 = 80 рёбер, то есть всего не больше 168+80 = 248 рёбер, а из чёрных выходит 5·50 = 250 рёбер. 248 < 250 => противоречие.

Пример ~~на~~ 83:



~~пусть 5~~ Каждому из чёрных нужно ещё по 33 знакомых, а осталось белкам (серым) 83, каждый из которых знаком не больше чем с двумя. Давайте ~~соед~~ обозначим чёрных за 1, 2, 3, 4, 5. И соединим 1 из 83 только с первым, второго из 83 со 2 и 3, и третьего из 83 с 4 и 5. тогда среди 83 у нас останется 80 ещё ни ~~с~~ с кем не знакомых, а чёрным каждому нужны по 32 знакомых. Давайте разделим 80 на 5 групп по 16 и покажем как чёрные каждый могут познакомиться с ещё 32:



таким образом каждый серый из 83 имеет 2-х или 1 знакомого (тот самый первый), а каждый чёрный имеет ровно 50 знакомых. Ответ: 83

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА00032249 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	5	20	20	15		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 1

$3+5=8$ - пара чисел

$1120 : 8 = 140$ пар

НОК$(3,5) = 15$

⇓

Чтобы заменить „5" на „3" в этих парах необходимо исключить 3 „5" и добавить 5 „3", т.е. чтобы убрать „5" надо брать по 3 пары чисел (тройки)

Например:

возьмем 3 пары

$(5+5+5)+(3+3+3) = 24$

исключим „5", получим:

$(3+3+3+3+3)+(3+3+3) = 24$

~~Таких~~ Теперь мы можем узнать сколько возможно набрать таких троек

$140 : 3 = 46$ (2 ост)

$$\begin{array}{r} 140 \\ -12 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \text{ ост} \end{array}$$

~~Это~~ Отсюда следует, что существует 46 различных сумм, в которых ~~боль~~ больше слагаемых, равных 3м.

Ответ: 46 ~~сум~~ сумм

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА 000 3224926

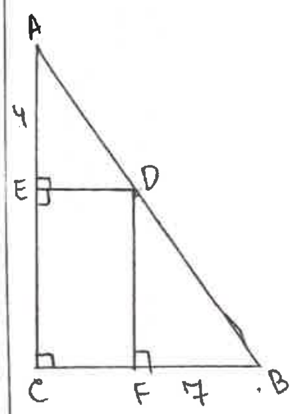
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №2



Найти S_{ABC} наим.-?

1) $S_\Delta = \frac{1}{2} AC \cdot BC$

2) $\Delta CAB \sim \Delta EAD$ (по 2м углам)
$\angle C = \angle AED = 90°$ (Δ прямоуг. по усл.)
$\angle A$ – общий
$\Delta CAB \sim \Delta FDB$ (по 2м. углам)
$\angle C = \angle DFB = 90°$ (Δ прямоуг по усл)
$\angle B$ – общий

$\Rightarrow \Delta EAD \sim \Delta FDB$ (по св-ву транзитивности)

3) $\frac{EA}{FD} = \frac{AD}{DB} = \frac{ED}{FB}$ (по св-ву подобных Δ) (п. 2)

$\frac{4}{FD} = \frac{AD}{DB} = \frac{ED}{7}$ (по усл)

$\frac{4}{FD} = \frac{ED}{7}$

$28 = FD \cdot ED$

4) $S_{CEDF} = ED \cdot DF = 28$ (п. 3)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 4 | 9 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №4

$$(x^2+2x+4)(x^2-7x+4)=10x^2$$

$$x^4-7x^3+4x^2+2x^3-14x^2+8x+4x^2-28x+16-10x^2=0$$

$$x^4-5x^3-16x^2-20x+16=0$$

$$x^4-8x^3+3x^3+4x^2-24x^2+4x^2+12x-32x+16=0$$

$$x^4-8x^3+4x^2+3x^3-24x^2+12x+4x^2-32x+16=0$$

$$x^2(x^2-8x+4)+3x(x^2-8x+4)+4(x^2-8x+4)=0$$

$$(x^2-8x+4)(x^2+3x+4)=0 \quad \left[\begin{array}{l} x^2-8x+4=0 \\ x^2+3x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=4+2\sqrt{3} \\ x=4-2\sqrt{3} \end{array}\right. \\ \left[x\in\varnothing\right. \end{array}\right.$$

$$x^2-8x+4=0$$

$$D=64-16=48=6\cdot 8=(4\sqrt{3})^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{8+4\sqrt{3}}{2}=2\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right)=4+2\sqrt{3} \\ x=\frac{8-4\sqrt{3}}{2}=2\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\right)=4-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\{4-2\sqrt{3};\,4+2\sqrt{3}\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	2	2	4	9	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 5

Если каждый черный бельчонок знает половину серых, то количество знакомств:

$5 \cdot (100/2) = 250$

x – серых бельчат

y – черных бельчат

Для того, чтобы увеличить x до максимума, нужно увеличить до max y (5 бельчат) и x (до 2х бельчат)

кол-во возможных знакомств для x (0, 1, 2)

Можно составить неравенство и вычислить x:

$2x + 5(100-x) \geq 250$

$2x + 500 - 5x \geq 250$

$-3x \geq -250$

$x \leq \frac{250}{3}$

$x \leq 83\frac{1}{3} \Rightarrow x_{\text{макс. удовл. усл.}} = 83$

Есть оценка, нет примера реализации.

Ответ: 83 бельчонка

Вариант № 3 | МА000322Ч926

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $ED \cdot DF = EC \cdot CF = 28$

(ECDF – прямоугольник)

6) $S_{\text{наиш.}\,ABC} = 2\left(\frac{1}{2} \cdot EC \cdot CF + \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BF\right) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 28 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4\right)$

$\frac{1}{2}(AE \cdot ED + DF \cdot FB)$

$S_{\text{наиш.}\,ABC} = 2 \cdot 28 = 56$

Ответ: 56

Пример много заход частично на 2б

Задача №3

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

1	2	3	4

Пронумеруем клетки таблицы таким образом, чтобы из любых 4х можно было составить прямоугольник, в котором присутствуют все 4 цифры

30 „1" 30 „2" 31 „3" 30 „4"

Всего могло быть $11 \cdot 11 \,|\, 4 = 30$ ост. 1.

Но, исключая „3" из таблицы автоматически теряем одну пару без учета „3", т.к. 1, 2, 3, 4 будут находиться в 2 разных частях таблицы

Пример:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	2	2	4	9	2	6

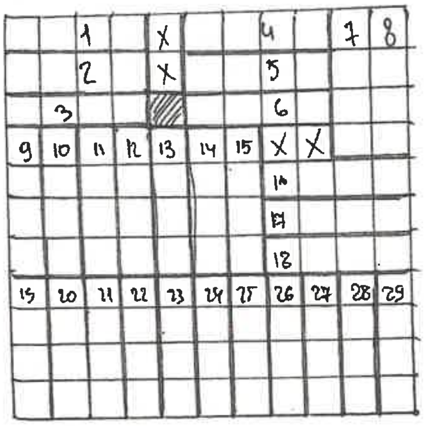
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано [illegible] стороны листа в рамке справа

№3 (пример)



29 прямоугольников, 4 лишних клетки

Ответ: нельзя

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000325226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	5	20	15		68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

По условию $2025 = 2n + 3m$

$m > n$

2025 кратно 3, значит наш первый случай будет при $m = 675$. Для того, чтобы получить в сумме 2025 нужно именно ... кол-во слагаемых, кратное 3. При 673 тройках нам понадобится 3 двойки. Уменьшая каждый раз кол-во троек на 2, мы прибавляем к кол-во новых двойки. Найдем ~~кол-во таких уменьшений~~ кол-во таких уменьшений, при котором кол-во троек будет больше или равно кол-ву двоек: $675 - 2n \le 0 + 3n$

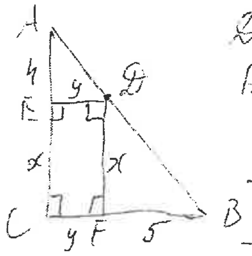
$675 - 5n \le 0$

$5(135 - n) \le 0$

$n \ge 135$

То есть не считая первого случая, 135 уменьшение не будет засчитываться. Его макс, считая первый случай, будет $135 + 1 = 136$. Всего таких сумм будет 136.

Ответ: 135.



№ 2. △ABC – прямоугольный

$D \in AB$ $AE = 4$ $EB = 5$

~~ED и DF – ...~~

$ED \perp AC$

$DF \perp CB$

$S_{прям} = ?$

$\angle DEC = 90^\circ$
$\angle ECF = 90^\circ$
$\angle CFD = 90^\circ$ $\Rightarrow \angle EDF = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ DECF – прямоугольник или квадрат.

Пусть $EC = x$ и $ED = y$

$ED = CF = y$ $EC = DF = x$

$S = \frac{1}{2}ab$

$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2}(4+x)(5+y) = \frac{1}{2}(20 + 4y + 5x + xy) = 10 + 2y + 2,5x + 0,5xy \\ S_{ABC} = \frac{1}{2}(4y + \frac{1}{2}5x + xy = 2y + 2,5x + xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 + 2y + 2,5x + 0,5xy = S_{ABC} \mid \cdot(-1) \\ 2y + 2,5x + xy = S_{ABC} \end{cases} \quad \begin{cases} -10 - 2y - 2,5x - 0,5xy = -S_{ABC} \\ 2y + 2,5x + xy = S_{ABC} \end{cases}$$

$0,5xy - 10 = 0$

$xy = 20$

$$\begin{cases} xy = 20 \\ 2y + 2,5x + 20 = S_{ABC} \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 20 \\ 2y + 2,5x = \min \end{cases}$$ при $y = 5$ и $x = 4$, $2y + 2,5x = 20$

?

$S_{max} = 20 + 20 = 40$

Ответ: 40

5б. пример.
3б. – подобие.

Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00032522 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

Каждый чёрный бельчонок знаком с наименьшей суммой бельчат. Всего знакомых $5 \cdot 150 = 750$ бельчат. Так как ~~уже~~ в лесу всего 5 чёрных бельчат, значит их наибольшее будет 2, то есть 249 ~~белых~~ серых бельчат знакомы только с 1 или 2 или 0 чёрными бельчатами. Обозначим серых бельчат, знакомых с ними 2 чёрными бельчатами, за A, а серых бельчат знакомых с большим кол-вом чёрных бельчат за B. Максимальное кол-во знакомств с A, ~~...~~ при 249, равно $249 \cdot 2 = 498$ и сумма ~~из~~ их знакомств и знакомств с B $(300-249=51)$, равно 750.

Нужен еще пример реализации

~~448~~ $51 \cdot 5 = 255$

$498 + 255 > 750$

Так, как их ~~сумма больше~~ максимальная сумма знакомств больше или равна знакомствам чёрных, то такое кол-во A может быть.

$248 \cdot 2 + 1 + 49 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 496 + 1 + 245 + 8 = 750$

При $A = 251$, $251 \cdot 2 = 502$, $B = 49$, $49 \cdot 5 = 245$

$502 + 245 = 747$

$747 < 750$.

Так, как максимально возможное кол-во знакомств при $A = 251$, меньше знакомых с чёрными бельчатами, то оно не может получиться. Поэтому A может равняться 249, но не может равняться 251.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA000325 2226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$13\cdot 9=117$

$117-1=116$

116 кратно 4. Значит в сумме площади полосок могут уместиться. Вырезаем центральную клетку. ~~Но~~ Возьмём верхнюю и нижнюю стороны за 9, а боковые за 13. Значит от центральной клетки к боковым будет по 4 клетки и к верхней и нижней по 6 клеток. Сначала посмотрим можно ли заполнить полосками ~~данный разделённые~~ по прямоугольника 4×6. Не считая горизонтальные и вертикальные клетки от центра. Их заполнить можно, но если разделить прямоугольник на 2 части, не считая горизонтальные клетки от центра. Получится прямоугольник 9×6, который заполнить не получится такими полосками, а клетки горизонтальные от центра получится, но поэтому заполнить прямоугольник 13×9 без центральной клетки не получится.

Ответ: нельзя

№4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

Пусть $2x^2+3x+3=t$, тогда:

$t(t+2x)=35x^2$

$t^2+2tx-35x^2=0$

$D=4x^2+140x^2=144x^2$

$t=\frac{-2x\pm 12x}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t_1=5x \\ t_2=-7x \end{array}\right.$

при $t_1=5x$

$2x^2+3x+3=5x$

$2x^2-2x+3=0$

$D=4-24=-20<0$

$\varnothing$

при $t_2=-7x$

$2x^2+3x+3=-7x$

$2x^2+10x+3=0$

$D=100-24=76$

$x=\frac{-10\pm\sqrt{76}}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-5+\sqrt{19}}{2} \\ x_2=\frac{-5-\sqrt{19}}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

M	A	0	0	0	3	2	6	5	2	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	1	20		61

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. Пусть x - кол-во 3 y-5. тогда надо найти кол-во решений этой системы

$\begin{cases} 3x+5y=1120 \\ x>y \end{cases} \Rightarrow$ очев $x \vdots 5$ $x=5n>y$

$5n>3k+2$

$15n+5y=1120/5$ $3n+y=224 \Rightarrow y \underset{3}{\equiv} 2$ $y=3k+2$

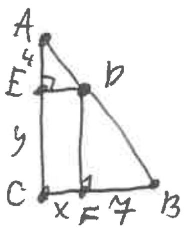
$3n+3k+2=224$ $3n+3k=222$ $n+k=74$

$\begin{cases} n+k=74 \\ 5n \geqslant 3k+3 \end{cases}$ $n \geqslant \frac{3k+3}{5}$ $\frac{3k+3}{k}+k \leq 74 \Rightarrow k \leq 45 \Rightarrow$

решений 46 т.к. любой $k \leq 45$ подходит, а x и y однозначно определяются по k и n.

Ответ: 46.

2.



(мы проводим ∥ из D)

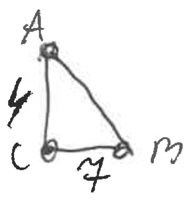
Очевидно, что E и F ∈ AC и CB соотв.

Пусть CF = x CE = y $S_{ABC} = \frac{(x+7)\cdot(4+y)}{2} =$

$\frac{4x+xy+28+7y}{2}$ т.к. $x,y \geq 0$, то $S_{ABC} \geqslant \frac{28}{2}$

При $x=y=0$ нет треугольника

Пример на 14



из-за точку D мы берем A или B.

P.S. Или я что-то не понял или задача какая-то странная, что всего может.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 3 2 6 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 ~~Введем Изучаем~~

~~сорян~~ Введем граф где бельчата верш ребро если зн.(нас интересует только с ⟶ ч)

Пусть у нас k вершин, у которых ст. ≤ 2, тогда у нас $100-k$ верш. ст ≥ 3 (черных не считаем), тогда.

$2k+5(100-k) \geq 250$ (т.к. у k макс ст 2, а у остальных ≤ 5, всего ребер 250.) отсюда

$k \leq \frac{250}{3} \Rightarrow k \leq 83$. Пример $k=83$.

Кол-во верш / ст.

1−1, 17−5, 82−2. Удалим 17 вершин ст 5, 4 | ст 1

тогда ст. черных = 33, и 1 черный ст 32

33 33 33 33 32, теперь надо показать, что можно убирать за 82 хода у двух по 1, так, чтобы у всех в конце 0.

очев можем сделать

32 32 32 32 32

потом (имеется ввиду не за ход) процесс

31 31 31 31 32

потом

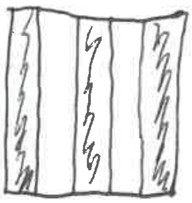
30 31 31 31 31

потом

30 30 30 30 30

т.е. мы научились из всех чет. делать все чет − 2. => так. мы можем сделать все нуж.

№3.



Покрасим так, тогда от и кл. будет черной. всего черный кл: 65 а белых 55 без отм. но 4·1 покрывает так.

6	4
0	4
2	2
4	0

=> т.е. четность сохраняется => ~~вырезать~~ вырезать невозможно.

Лист ____ из ____

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 3 2 6 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4. Раскроем скобки

$x^4-7x^3+4x^2+2x^3-14x^2+8x+4x^2-28x+16=10x^2$

$P(x)$

$x^4-5x^3-16x^2-20x+16=0$

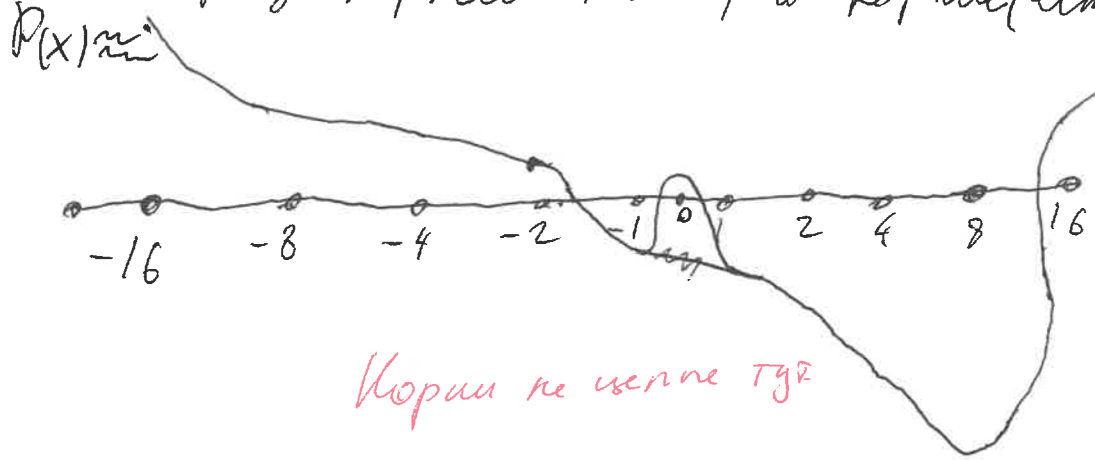
Пусть у нас есть рац. корни $x_1=\frac{p}{q}$ по безу для целых коэф $16 \vdots p$ и $1 \vdots q$, то есть может быть

$x_1=\pm1; \pm2; \pm4; \pm8; \pm16)$

x_1	1	-1	2	2	4	-4	8	-8	16	-16			0	
$P(x_1)$	-24	26	-112	48	-384	416	-80	478	30 6 6	+8	2	2 6	16	

т.е. рац. корней нет, но корни (есть хотя бы 3)

$P(x)$



Корни не целые ТУТ

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 7 | 4 | 0 | 2 | 6 |

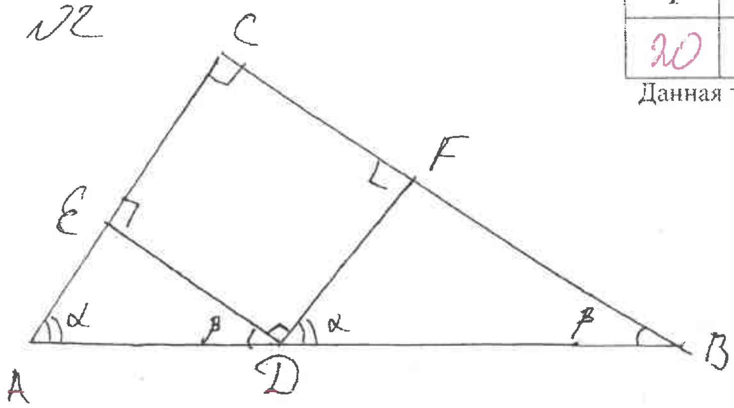
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	10	20	–	15		65

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



$AE=4$; $BF=5$ — по условию.

Пусть $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$, то $\angle\alpha+\angle\beta=90^\circ$ — по теор о сумме углов прямоугол. треугол. ACB.

$\angle AED=90^\circ$, т.к. $CA\perp ED$ — по условию. В $\triangle AED$ ~~угол~~ $\angle A=\alpha$; $\angle E=90^\circ$, значит $\angle EDA=\beta$ по теор о сумме углов треугол. $180^\circ-90^\circ-\alpha=90^\circ-\alpha=\beta$.

$\angle DFB=90^\circ$, т.к. $DF\perp CB$ по услов. В $\triangle DFB$ $\angle F=90^\circ$; $\angle B=\beta$ значит $\angle FDB=\alpha$ по теор о сумме углов в треугол. $90-\beta=\alpha$

$\triangle AED\sim\triangle DFB$ по трём углам. Пусть коэф подобия равен K тогда: $FD=AE\cdot K$; $ED=\frac{FB}{K}$, т.е. $FD=4K$; $ED=\frac{5}{K}$

4-х угол $CEDF$ — прямоугольник, т.к. $\angle C=\angle E=\angle F=90^\circ$ из решения и $\angle C=90^\circ$ по услов. $\angle ADB=180^\circ$ — развёрнутый $\angle ADB=\angle ADE+\angle EDF+\angle FDB=\angle EDF+\angle\alpha+\angle\beta=\angle EDF+90^\circ$ а значит $\angle EDF=\angle ADB-90^\circ=180^\circ-90^\circ=90^\circ\Rightarrow CEDF$ — прямоуг.

$ED=CF=\frac{5}{K}$ и $DF=CE=4K$ — следовательно.

$S_{ABC}=\frac{AC\cdot CB}{2}$ т.к. $\triangle ABC$ — прямоуг. по услов.

~~S_{ABC}~~ $=$ $AC=AE+EC=4+4K=4(K+1)$ и $CB=BF+FC=5+\frac{5}{K}=5(\frac{1}{K}+1)$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{4(K+1)\cdot 5(\frac{1}{K}+1)}{2}=10(K+\frac{1}{K}+1)$ 2 т.к. K — коэф подобия

$K+\frac{1}{K}+1=2$

то $K>0$ значит $K+\frac{1}{K}$ будет принимать мин. значение

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000327 4026

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

при $k=1$. Д-во?

когда $k+\frac{1}{n}$ принимает минимальное значения, тогда $10\cdot(k+\frac{1}{n}+1)$ примет мин. значение.

значит $S_{ABC}=10(1+\frac{1}{1}+1)=10\cdot 3=30$ — минимальная площадь этого треугольника.

Ответ: 30

Пример реализации?

№1

Пусть $2025=2x+3y$, где $x,y\in \mathbb{Z}$ и $x\geq 0$; $y\geq 0$. Тогда x — кол-во слагаемых равных двум, а y — кол-во слагаемых равных 3.

В случае, когда $x=y$, то $x=y=\frac{2025}{2+3}=405$.

Значит, что в суммах где $y>x$ и $y>405$

В случае когда $x=0$, то $y=\frac{2025}{3}=675$ — максимальное значение которое может принять y, при $x<y$.

Имеем: $405<y\leq 675$ — когда $x<y$.

Кол-во троек всегда должно быть нечётное кол-во.

т.е. $y\not\vdots\, 2$, т.к. если $y\,\vdots\, 2$, то $2x+3y\,\vdots\, 2$, а $2x+3y=2025$ и $2025\not\vdots\, 2$ из этого следует, что $3y\not\vdots\, 2\Rightarrow y\not\vdots\, 2$. ~~так~~

$2x$ — всегда чётное.

Значит всего кол-во знач. которое может принять y будет: $\frac{675-405}{2}=135$. — делим на 2 — т.к исключаем значения y в которых чётное.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0003274026 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

значит всего сумм где слагаемых равных 3 больше будет 135.

Ответ: 135.

№3

Закрасим прямоугольник в 4 цвета (обозначим цифрами 1; 2; 3; 4).

Крестиком (X) - обозначим центр, который вырезан.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	X	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

При подсчёте клеток ~~было~~ закрашенных в ~~4~~ цвет №1 имеем 30 клеток
клеток цвета №2 всего 29
клеток цвета №3 всего 28
клеток цвета №4 всего 29

~~На~~ каждый прямоугольник ~~д~~ 4×1 или 1×4 ~~надо~~ покрывает 4 клетки, каждая разных цветов. Т.е чтобы покрыть большой прямоуг (13×9) требуется одинаковое кол-во клеток всех 4-х цветов. А у нас их не равное кол-во, следовательно покрыть этот прямоуг. прямоугольниками 4×1 и 1×4 - нельзя.

Ответ: нельзя.

Дополнение: ~~Эт~~ при этой раскраске в 4 цвета мы можем разместить прямоугол 4×1 или 1×4 в любое место (в рамках ~~в~~ самой фигуры 13×9 без центра), а значит используя такую раскраску не является частным случаем

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 2 7 4 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

Представим нашу задачу в виде графа, где бельчата - это вершины графа, а если серый бельчонок знаком с чёрным, то между ними (вершинами) проведём ребро.

Тогда т.к. чёрные бельчата знакомы только с серыми и серые знакомы только с чёрными, то сумма степеней вершин (чёрных бельчат) будет равна сумме степеней вершин серых бельчат. И эта сумма равна $150 \cdot 5 = 750$ т. у каждой чёрной белки степень вершины равна 150 т.к. по условию она знакома со 150 серыми белками.

I. Рассмотрим случай, когда 251 серая белка знает меньше половины чёрных. То 49 белок (серых других) знает от 3 до 5 чёрных белок.

Если каждая из 251 серой белки знающих меньше половины чёрных будет знать по 2 чёрных белок, то сумма степеней вершин этих белок равно: $251 \cdot 2 = 502$

$750 - 502 = 248$ - кол-во знакомств 49 серых бельчат с чёрными. Но каждая серая белка может знать максимум 5 чёрных следовательно: $49 \cdot 5 = 245$ - ~~кол~~ максимальное кол-во рёбер между 49 серыми белками знающих больше половины чёрных каждая.

Значит такого быть не может.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 7 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 7 | 4 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Случ. II Случай когда есть 249 белок (т.е. 249 вершин серых белок)~~

Если например белки серые знали бы не 2 чёрные а меньше, то 249 других серых белок ~~приходилось~~ бы ~~знать уже больше~~ ~~вершин~~ по ~~вершин графа~~ сумма степеней вершин графа (которыми они обозначены) должна бы возрастать, но максимум сумма вершин этих белок всё так же была бы меньше чем надо для сохранения условия задачи. (где каждая чёрная знает 150 серых).

II Когда 249 белок серых знают меньше половины ~~...~~ чёрных и 51 серая белка знает больше половины. Тогда ~~сумма степеней вершин серых белок~~ если каждая из 249 серых белок будет знать по 2 белки чёрных, то рёбер из этих вершин будет: 249·2= ~~...~~ 498

Для серых белок которых 51 знающих больше половины чёрных сумма степеней вершин будет равна 750 − 498 = 252.

Если среди этих 51 серой белки 49 из них знают по 5 чёрных белок и 1 серая знает 3 чёрных, и 1 серая знает 4 чёрных, то сумма степеней вершин графа ~~равна~~ ~~...~~ (серых белок) равно:

252 + 498 = 750 − равна сумме степеней вершин

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	3	2	7	1	0	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

чёрных белок.
Следовательно такого случая мог быть.

Примера нет

Лист 6 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA0003292126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
10	8	20	20	18		86

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Если 2 и 3 поровну,

то $\frac{2025}{3+2} = 405$ – будет каждого слагаемого

Чтобы сократить сумму, ~~три~~ можно заменить две 3 на три 2 т.к. $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$.

$\frac{405}{3} = 135$ раз можно заменить три 2 на две 3.

Выбираем любое число раз для каждого случае, значит $C_{135}^{1} = 135$

Ответ: 135.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA000329 2126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.

Применим раскраску в 4 цвета:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2		4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	4	4	1	2	3	4	1

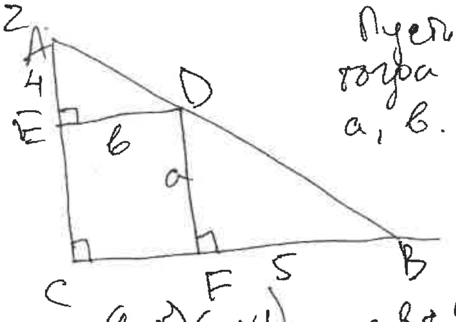
Заметим, что в любой полоске 4x1 или 1x4 должны быть клетки каждого цвета по 1 разу.
Посчитаем кол-во клеток каждого цвета:

30 – 1
29 – 2
28 – 3
29 – 4

Таким образом, кол-во клеток каждого цвета не равно, а значит не получится разбить прямоугольник на такие полоски.
Получится 28 полных наборов и останутся 2 единицы, и по 1 четверке и двойке.

Ответ: невозможно.

№2



Пусть $DF = a$, а $DE = b$, тогда $EDFC$ – прямоуг со сторонами a, b.

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$ – 1 способ

$S_{ABC} = S_{EDFC} + S_{AED} + S_{DFB}$ – 2 способ

$1: S = \frac{(b+5)(a+4)}{2} = \frac{ab + 4b + 5a + 20}{2}$

$2: S = ab + \frac{4b}{2} + \frac{5a}{2} = \frac{2ab + 4b + 5a}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA000329212 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

S упрощение:

$$\frac{ab+4b+5a+20}{2}=\frac{2ab+4b+5a}{2} \quad |\cdot 2$$

$$ab+4b+5a+20=2ab+4b+5a$$

$$20=ab.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=20 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow S=20+2+50=72 \\ \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow S=20+12,5+8=40,5 \\ \begin{cases} a=1 \\ b=20 \end{cases} \Rightarrow S=2,5+20+40=62,5 \\ \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow S=10+20+10=40 \end{array}\right.$$

Лист 3 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA000329 2126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$4x^4+6x^3+6x^2+10x^3+15x^2+15x+6x^2+9x+9=35x^2$

$4x^4+(6x^3+10x^3)+(6x^2+15x^2+6x^2-35x^2)+(15x+9x)+9=0$

$4x^4+16x^3-8x^2+24x+9=0$

$4x^4+(20x^3-4x^3)+(6x^2+6x^2-20x^2)+(-6x+30x)+9=0$

$2x^2(2x^2-2x+3)+10x(2x^2-2x+3)+3(2x^2-2x+3)=0$

$(2x^2+10x+3)(2x^2-2x+3)=0$

$\left[\begin{array}{l} 2x^2+10x+3=0 \ (1) \\ 2x^2-2x+3=0 \ (2) \end{array}\right.$

(1) $D_1=25-6=19$

$x_1=\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$

$x_2=\dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}$

(2) $D_1=4-6=-2<0$

$\Rightarrow$ нет корней.

Ответ: $\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$; $\dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00329 2126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

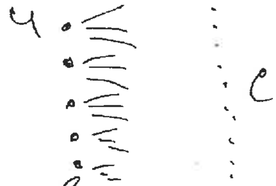
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

Каждый из 5 черных знаком с $\frac{300}{2} = 150$ серыми.



Пусть бельчата — вершины графа, знакомства — ребра.

Тогда $5 \cdot 150 = 750$ ребер должно быть в графе.

~~Пусть 251 бельчонок (серый) знаком с 3-мя черными, ведь это минимальное число больше половины. Тогда оставшиеся 49 знакомы мин. с 1 черным. Тогда ребер $251 \cdot 3 + 49 = 802$ — минимальное кол-во, это уже больше допустимого кол-ва.~~

Пусть 251 ~~бел~~ серый знаком с 2 мя ч.и. это макс меньше половины. Тогда

$251 \cdot 2 + 49 \cdot \underset{\text{макс}}{5} = 747$ — чего не хватает,

а $249 \cdot 2 + 51 \cdot 5 = 753$ — хватает.

Приведем пример, когда 249 знакомы с < половины.

$249 \cdot 2 + 48 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 240 + 498 + 12 = 750$.

$\Rightarrow$ с 251 — невозможно

с 249 — возможно.

А где в примере видно, что каждый черный знаком с половиной серых?

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 3 2 9 3 5 2 6

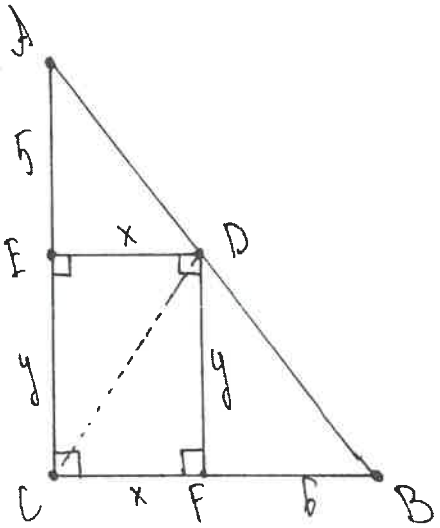
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	1		81

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2.



Пусть $DE = x$; $DF = y$.

Очевидно, что $EDFC$ – прямоугольник, тогда $EC = DF$; $CF = ED$.

$DE \parallel BC$, тогда по т. Фалеса

(1) $\frac{5}{y} = \frac{AD}{BD}$.

$DF \parallel AC$, по теореме Фалеса $\frac{6}{x} = \frac{BD}{AD}$ (2).

Из (1) и (2) получаем что $\frac{5}{y} = \frac{x}{6}$ откуда $xy = 30$.

$$S_{CDB} = \frac{y(x+6)}{2} = \frac{xy+6y}{2} = \frac{xy}{2} + 3y = 15+3y$$

$$S_{ADC} = \frac{x(y+5)}{2} = \frac{xy+5x}{2} = \frac{xy}{2} + 2,5x = 15+2,5x$$

Заметим, что $S_{ABC} = S_{CDB} + S_{ADC} = 30 + 3y + 2,5x$

По нер-ву о средних для $3y$ и $2,5x$:

$$\frac{3y+2,5x}{2} \geq \sqrt[2]{3 \cdot 2,5xy} = \sqrt[2]{7,5 \cdot 30} = 15$$

Откуда $3y + 2,5x \geq 30$

Значит $S_{ABC} \geq 30+30 = 60$ Ответ: 60

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 9 | 3 | 5 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача ~~№~~ 1

Пусть всего x слагаемых „2" и y слагаемых „5"

Тогда $875 = 2x + 5y$, ~~откуда $x \vdots 5$~~ $y > x$

$2x = 875 - 5y = 5(175 - y)$, откуда $x \vdots 5$.

Значит подходят x вида $5k$.

Очевидно, что ~~чем~~ чем больше x ~~мы~~ мы берём тем меньше y.

Заметим, что при $x = 125$: $5y = 875 - 2 \cdot 125 = 675 \Rightarrow y = 125$, тогда при x ~~≥~~ ~~130~~ 125 $y \le x$ (до этого $y > x$, при $x = 120$ $5y = 875 - 2 \cdot 120 = 635 \Rightarrow y = 127$)

Значит подходят все ~~[illegible]~~ $x \in \{0; 5; 10 \dots 120;\}$. Итого всего 25 значений x. Значит таких сумм 25.

Ответ: 25

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 3 2 9 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4.

$$(3x^2-4x-4)(3x^2-5x-4)=56x^2;$$

$$9x^4-27x^3-4x^2+36x+16=56x^2;$$

$$9x^4-27x^3-60x^2+36x+16=0.$$

Заметим что $9x^4-27x^3-60x^2+36x+16=$

$$=\underbrace{(3x^2+3x-4)}_{(1)}\underbrace{(3x^2-12x-4)}_{(2)}$$

Откуда либо $(1)=0$ либо $(2)=0$.

1.) Пусть $(1)=0$: $3x^2+3x-4=0$

$$D=9-4\cdot3\cdot(-4)=57$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$$

2.) Пусть $(2)=0$: $3x^2-12x-4=0$

$$D=144-4\cdot3\cdot(-4)=196$$

$$x'_{1,2}=\frac{12\pm8\sqrt{3}}{6}$$

Ответ: $x\in\left\{\frac{-3+\sqrt{57}}{6};\ \frac{-3-\sqrt{57}}{6};\ \frac{12+8\sqrt{3}}{6};\ \frac{12-8\sqrt{3}}{6}\right\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	3	2	9	3	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
5	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
6	2	2	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
7	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
8	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
9	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
10	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
11	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
12	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
13	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
14	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
15	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

~~Применим раскраску~~

Раскрасим квадрат в 4 цвета как показано на рисунке. Нетрудно заметить что каждый прямоугольник 4×1 содержит в себе 4 клетки разных цветов. Тогда всего $\frac{225-1}{4} = 56$ клеток каждого цвета.

Всего клеток каждого цвета:

„1" 56 клеток

„2" 56 клеток

„3" 57 клеток

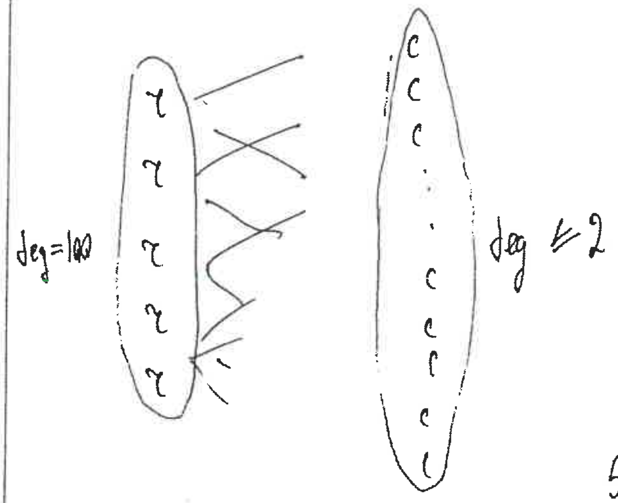
„4" 56 клеток

Вырежем клетку цвета „1". Тогда клеток каждого цвета 1; 2; 3; 4 будет 55; 56; 57; 56 соответственно, а должно быть 56 каждого цвета, противоречие.

Понятно что нам без разницы какую из угловых клеток вырезать, ведь если вырезать клетку цвета „3", то можно просто аналогично перекрасить доску, угловые клетки цвета „3" мы перекрасим в др. цвет „1", далее аналогично применим диагональную раскраску в 4 цвета.

1	2	3	4	5	6	Σ

Задача 5



Каждый бельчонок чёрный знаком с $\frac{200}{2} = 100$ серыми бельчатами. Если представить их граф знакомств, то такой граф будет двудольным, всего 5 чёрных бельчат, от каждого идёт 100 знакомств, значит всего $5 \cdot 100 = 500$ знакомств между бельчатами.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 3 2 9 3 9 2 6 |

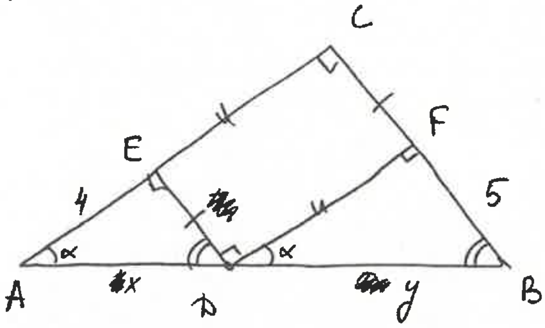
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	19	10		69

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2.



1) ECFD-прямоугольник (т.к. $\angle E = \angle C = \angle F = 90^\circ \Rightarrow \angle D = 90^\circ$)

2) $\triangle AED \sim \triangle DFB$ по 2 углам: т.к. $\triangle ABC$ - п/у, то пусть $\angle A = \alpha \Rightarrow \angle B = 90 - \alpha$, т.к. $\triangle AED$ и $\triangle DFB$ - п/у, то $\angle EDA$ и $\angle FDB$ равны $90^\circ - \alpha$ и α соотв. 3) Из подобия $\triangle AED$ и $\triangle DFB \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{5}{4}$. Пусть $AD = 4x$, а $DB = 5x$. По т. Пифагора $ED = 4\sqrt{x^2-1}$; $DF = 5\sqrt{x^2-1}$. 4) $\triangle ACB \sim \triangle AED$ по 2 равн. углам $\Rightarrow \frac{CF+FB}{ED} = \frac{AB}{AD} = \frac{9}{4}$. Т.к. ECFD - прямоуг. то $ED = CF$ и $EC = DF \Rightarrow 16\sqrt{x^2-1} + 20 = 9\sqrt{x^2-1} \cdot 4$

$$16\sqrt{x^2-1} + 20 = 36\sqrt{x^2-1}$$

$$20\sqrt{x^2-1} = 20 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} = 1$$

$$x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

−

5) $S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{(4+5\sqrt{x^2-1})(5+4\sqrt{x^2-1})}{2}$. Т.к. $\sqrt{x^2-1} = 1$, то

$$S_{ABC} = \frac{(4+5)(5+4)}{2} = \frac{81}{2} = 40{,}5$$

Ответ: 40,5

3) Пусть $AD = x$, $DB = y$. Тогда по т. Пифагора $ED = \sqrt{x^2-16}$, $DF = \sqrt{y^2-25}$. Из подобия $\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{y}{x}$

$$5x = y\sqrt{x^2-16} \Rightarrow y = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 9 | 3 | 9 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2. продолжение

Тогда $DF = \frac{20}{\sqrt{x^2-16}}$

$$S_{ABC} = S_{ECFD} + S_{AED} + S_{DFB} = \frac{AC \cdot CB}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{x^2-16} \cdot \frac{20}{\sqrt{x^2-16}} + 2\sqrt{x^2-16} + \frac{50}{\sqrt{x^2-16}} = 20 + 2\sqrt{x^2-16} + \frac{50}{\sqrt{x^2-16}} =$$

$$= \cancel{4+x^2} \; \frac{\left(4+\frac{20}{\sqrt{x^2-16}}\right)\left(5+\sqrt{x^2-16}\right)}{2} = \frac{20\sqrt{x^2-16}+2x^2+18}{\sqrt{x^2-16}}$$

$$\cancel{\frac{20\sqrt{x^2-16}+2x^2-32+50}{\sqrt{x^2-16}}}$$

Площадь будет наименьшей при максимально возможном $\sqrt{x^2-16}$ и минимально возможном $20\sqrt{x^2-16}+2x^2+18$, при этом $x \geq 4$

N3

~~Раскраско~~ Закрасим доску в 4 цвета ~~шахматной раскраской.~~ ~~Тогда во клеток цвета вреза одного цвета будет на 1 больше другого. Клетки Однако центральная клетка будет цвета большего количества клеток и при её вырезании клеток двух цветов будет одинаковое количество.~~ В таком случае в каждом прямоугольнике 1×4 (4×1) будет по 1 клетка ~~по~~ каждого цвета. Однако в исходном прямоугольнике (~~без выре~~ все клетки присутствуют) одного цвета на 1 больше других. И при вырезании

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	3	2	9	3	9	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

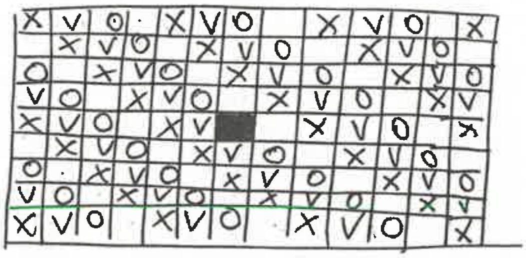
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N3. продолжение

центральной клетки получится такая раскраска:



Видно, что клеток X – 30, V – 29, O – 28, пустых клеток – 29. Значит замостить данный прямоугольник полосками 1×4 (4×1) невозможно.

Ответ: невозможно.

N1

Т.к. число 2025 нечетное, то в сумме есть хотя бы одна тройка. Рассмотрим число 2025−3=2022. Его можно представить в виде суммы 1011 двойки. Каждые три двойки можно заменить двумя ~~двойками~~ тройками. Всего можно сделать $\frac{1011}{3}=337$ таких замен. В случае максимального кол-ва замен число 2025 будет состоять из 675 троек и 0 двоек. Производя такие замены, можно узнать, что сумм, в которых больше слагаемых, равных 3 — ~~99~~ ~~96~~ 135, т.к. ~~Ответ: 89~~ максимальное кол-во троек – 675, при 405 тройках, столько же и 2 (кол-во сумм можно вычислить по формуле $n = \frac{x_n - x_1 + d}{d}$, где n – кол-во сумм или кол-во произвед. замен, $x_n = 675$, $x_1 = 407$ (min кол-во троек, при котором двоек < троек), $d=2$ (т.к. мы заменяем две тройки) ~~на 2 двойки~~

Ответ: 135

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 9 | 3 | 9 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5

Пусть число серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной чёрных бельчат, может равняться 251. Тогда серых бельчат, знакомых с 3, 4 или 5 черными бельчатами равно 49. Однако с 3 и более черными бельчатами могут быть знакомы минимум 50 серых бельчат (например, если первый бельчонок знаком с 1-150 серыми бельчатами, 2-ой — 150-300, 3-ий — 25-175, то, 4-ый тоже знаком с 150 серыми бельчатами, минимум 50 бельчат знакомы с 3 черными) => 251 не может быть, не меньше.
Если число серых бельчат, знакомых ~~больше~~, чем с половиной черных бельчат, равно 249, то 51 бельчонок знаком не меньше, чем с половиной черных бельчат, что удовлетворяет условию и с 3 и более черными бельчатами могут быть знакомы минимум 50 серых бельчат, чтд.

Примера для 249 нет даже в вычислениях, а надо расписывать кто с кем дружит, чтобы показать, что это возможно

N4

$(2x^2+3x+3)(2x^2+5x+3)=35x^2$

$(2x+3)(x+1)(2x^2+5x+3-2x)=35x^2$

$(2x+3)(x+1)((2x+3)(x+1)-2x)=35x^2$

$(2x+3)^2(x+1)^2-2x(2x+3)(x+1)-35x^2=0$

~~Пусть (2x+3~~ $(2x+3)^2(x+1)^2-2x(2x+3)(x+1)+x^2-36x^2=0$

$((2x+3)(x+1)-x)^2-36x^2=0$

$((2x+3)(x+1)-x-6x)((2x+3)(x+1)-x+6x)=0$

$(2x^2+5x+3-7x)(2x^2+5x+3+5x)=0$

$(2x^2-2x+3)(2x^2+10x+3)=0$

1) $D=4-4\cdot2\cdot3<0 \Rightarrow$ ок 24

2) $D=100-4\cdot2\cdot3=100-76=24$ 76

$x=\frac{-10\pm2\sqrt6}{4}=\frac{-5\pm\sqrt6}{4}$

Ответ: ~~…~~ $\frac{-5\pm\sqrt6}{4}$