Математика. 10 класс

Шифр	ФИО	Итого балл	Статус
MA0002206326	Саламатова Алиса Алексеевна	100	Победитель
MA0002681126	Ремизов Артём Георгиевич	100	Победитель
MA0002705326	Яковлев Егор Павлович	100	Победитель
MA0002792026	Винокурова Ксения Александровна	100	Победитель
MA0002340826	Молодцова Елизавета Сергеевна	92	Победитель
MA0002728326	Куприянов Константин Алексеевич	88	Победитель
MA0002385026	Чичканова Арина Михайловна	80	Победитель
MA0002626726	Войтенков Павел Сергеевич	80	Победитель
MA0002710726	Рогов Иван Юрьевич	80	Победитель
MA0003150326	Фаткуллин Альберт Ринатович	80	Победитель
MA0002054226	Филиппов Александр Андреевич	78	Победитель
MA0002121626	Токарев Тарас Игоревич	74	Победитель
MA0002309526	Кабанцова Анна Юрьевна	74	Победитель
MA0003223926	Виниченко Ярослав Павлович	74	Победитель
MA0002328726	Ноев Айсен Станиславович	72	Призёр II степени
MA0003013126	Родичкин Дмитрий Владимирович	72	Призёр II степени
MA0002744526	Чистяков Максим Михайлович	70	Призёр II степени
MA0003100426	Боров Глеб Максимович	70	Призёр II степени
MA0002808626	Кравченко Маргарита Игоревна	68	Призёр II степени
MA0002861326	Розова Татьяна Алексеевна	68	Призёр II степени
MA0002112726	Максакова Лилия Александровна	64	Призёр II степени
MA0002536026	Стародубец Максим Игоревич	64	Призёр II степени
MA0002156626	Лозовский Владислав Владимирович	62	Призёр II степени
MA0002359626	Винтер Ирина Андреевна	62	Призёр II степени
MA0002715826	Заломаев Сергей Максимович	62	Призёр II степени
MA0003265426	Пьянков Иван Алексеевич	62	Призёр II степени
MA0002070526	Котельников Александр Дмитриевич	60	Призёр II степени
MA0002268326	Никишин Александр Юрьевич	60	Призёр II степени
MA0003021926	Хаишбашян Александр Алексеевич	60	Призёр II степени
MA0003294526	Федотов Вячеслав Дмитриевич	60	Призёр II степени
MA0002121226	Силкина Екатерина Алексеевна	58	Призёр III степени
MA0002180826	Чернобровина Екатерина Александровна	58	Призёр III степени
MA0002696126	Томин Виктор Алексеевич	58	Призёр III степени
MA0002755826	Копьёв Антон Сергеевич	58	Призёр III степени
MA0002759226	Галиев Русан Альбертович	58	Призёр III степени
MA0003264426	Крук Радимир Дмитриевич	58	Призёр III степени
MA0002325826	Гришин Алексей Ильич	56	Призёр III степени
MA0002340226	Мещанова Алина Сергеевна	56	Призёр III степени
MA0002820126	Мухитова Азалия Ильгизаровна	56	Призёр III степени
MA0003183526	Попов Виктор Олегович	56	Призёр III степени
MA0002012426	Лихверова Екатерина Юрьевна	54	Призёр III степени

MA0002644826	Коробкин Егор Юрьевич	54	Призёр III степени
MA0002748826	Христофоров Константин Владимирович	54	Призёр III степени
MA0003055226	Старцева Светлана Геннадьевна	54	Призёр III степени
MA0002022326	Зуева Зарина Алексеевна	52	Призёр III степени
MA0002280326	Липецкий Николай Сергеевич	52	Призёр III степени
MA0002286226	Солдатов Никита Александрович	52	Призёр III степени
MA0003161726	Васильев Максим Алексеевич	52	Призёр III степени
MA0003213226	Нестеров Даниил Алексеевич	52	Призёр III степени
MA0002147726	Зуев Егор Денисович	50	Призёр III степени
MA0002173526	Гайсин Гаяз Фаритович	50	Призёр III степени
MA0002365326	Беляева Анна Алексеевна	50	Призёр III степени

*Сканы работ размещены по возрастанию шифра

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	2	0	1	2	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	6	12	8		54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

$\sin x \sin 3x = \frac{27}{64}$

$\frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \frac{27}{64}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{27}{32}$

$-2\cos^2 2x + \cos 2x + \frac{5}{32} = 0$

Пусть $\cancel{\cos 2x}$ $\cos 2x = a$.

$-2a^2 + a + \frac{5}{32} = 0$

$D = 1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{32} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

$a_1 = \frac{-1 - \frac{3}{2}}{-4} = \frac{5}{8}$

$a_2 = \frac{-1 + \frac{3}{2}}{-4} = -\frac{1}{8}$

обратная замена:

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{5}{8} \\ \cos 2x = -\frac{1}{8} \end{array}\right.$

$\cos x \cos 3x = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{\cos 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x}{2} =$

$= \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1$

$\cancel{\cos x \cos 3x = \frac{\frac{5}{8} + \frac{2 \cdot 25}{64} - 1}{2} =}$

$\cancel{\cos x \cos 3x = \frac{\frac{5}{8} + \frac{50}{64} - 1}{2} =}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 0 1 2 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\left[\begin{array}{l} \cos x\cos 3x = \dfrac{-\frac{1}{8}+\frac{2}{64}-1}{2} \\ \cos x\cos 3x = \dfrac{\frac{5}{8}+\frac{50}{64}-1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x\cos 3x = -\frac{35}{64} \\ \cos x\cos 3x = \frac{13}{64} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \cos x\cos 3x = -\frac{35}{64} \\ \cos x\cos 3x = \frac{13}{64} \end{array}\right.$.

~~N3~~

~~360°~~ ~~180~~ ~~22,5°~~ N4

$q^2p \equiv 1 \pmod{pr-1}$

$p^2r \equiv 1 \pmod{\cancel{pr-1}\ qr-1}$

$\cancel{p}\, r^2q \equiv 1 \pmod{pq-1}$

$\Rightarrow$ ~~pr-1~~ ~~$2p \vdots pr-1$~~

1) порядок числа q по модулю $pr-1$ делит $2p$

2) порядок числа p по модулю $qr-1$ делит $2r$

3) порядок числа r по модулю $pq-1$ делит $2q$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ – функция Эйлера для взаимно простых n и a

$\Rightarrow$ к 1) также делит $\varphi(pr-1)$

к 2) также делит $\varphi(qr-1)$

к 3) также делит $\varphi(pq-1)$

$\varphi(k) \leq k-1$

$\varphi(pr-1) \leq pr-2$

$\varphi(qr-1) \leq qr-2$

$\varphi(pq-1) \leq pq-2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 0 1 2 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Rightarrow$ ~~p~~ 1

$\Rightarrow q$ по модулю $pr-1 < 2p$

$2p > \varphi(pr-1) \geq$ порядок q
$2r > \varphi(qr-1) \geq$ порядок p
$2q > \varphi(qr-1) \geq$ порядок r

— невозможно при больших значениях p, q, r

$pr-2 \approx pr$, а $2p \ll pr$ при $r \gg 1$

аналогично для других выражений

$\Rightarrow$ доказано, что утверждение "ни q, ни p, ни r — не квадраты" невозможно $\Rightarrow$ есть хотя бы одно число являющееся точным квадратом.

ЧТД

N3

$\frac{360^\circ}{160} = 2{,}25^\circ$ — центральный угол между соседними вершинами

Шаги по вершинам для 18° и 81°:

$\frac{18^\circ}{2{,}25^\circ} = 8$ шагов (для угла при вершине треуг.)

$\frac{81^\circ}{2{,}25^\circ} = 36$ шагов (~~для угла при верш. треуг.~~ для равных углов при основании)

$\Rightarrow$ от вершины нельзя брать вершину в ± 8 шагах и ± 36 шагах.

Чтобы найти максимальное количество отмеченных вершин, нужно чтобы "запретные зоны" не пересекались

поскольку $160 \vdots 8$ и $160 \vdots 36$, можно использовать блочную схему отметки:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

разобьем 160 вершин на блоки по 72 – ~~мин~~ (НОК(18;36)) цикл повторения запретов минимальный

в каждом блоке по 72 можно отметить максимум 8 вершин

кол-во блоков $\frac{160}{72} \approx 2,22 \Rightarrow 2$ блока и остаток из 16 вершин

$2 \cdot 8 = 16$ вершин + 2 вершины из оставшихся 16 вершин

$16 + 2 = 18$ вершин можно отметить.

Ответ: 18 вершин.

№5

$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

$a^2 b + b^2 c + c^2 a = 3$

$$\cancel{\frac{\sqrt{a^6 + b^4 c^6}}{b} \geq \frac{b\sqrt{\frac{a^6}{b^2} + b^2 c^6}}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{a^6 + b^4 c^6}}{b} = \frac{b^2\sqrt{\frac{a^6}{b^4} + c^6}}{b} = b\sqrt{\frac{a^6}{b^4} + c^6}$$

$$\frac{\sqrt{b^6 + c^4 a^6}}{c} = \frac{c^2\sqrt{\frac{b^6}{c^4} + a^6}}{c} = c\sqrt{\frac{b^6}{c^4} + a^6}$$

$$\frac{\sqrt{c^6 + a^4 b^6}}{a} = \frac{a^2\sqrt{\frac{c^6}{a^4} + b^6}}{a} = a\sqrt{\frac{c^6}{a^4} + b^6}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^6 + b^4 c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4 a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4 b^6}}{a} =$$

$$= b\sqrt{\frac{a^6}{b^4} + c^6} + c\sqrt{\frac{b^6}{c^4} + a^6} + a\sqrt{\frac{c^6}{a^4} + b^6}$$

(выражение)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	2	0	1	2	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\boxed{b\sqrt{\frac{a^6}{b^4}+c^6} \geq b\left(\frac{a^3}{b^2}+c^3\right)}$$ — неравенство

(неравенство Коши...)

2

предположим $a=b=c$, тогда

$a^2a+a^2a+a^2a = 3a^2a = 3 \Rightarrow a = 1$

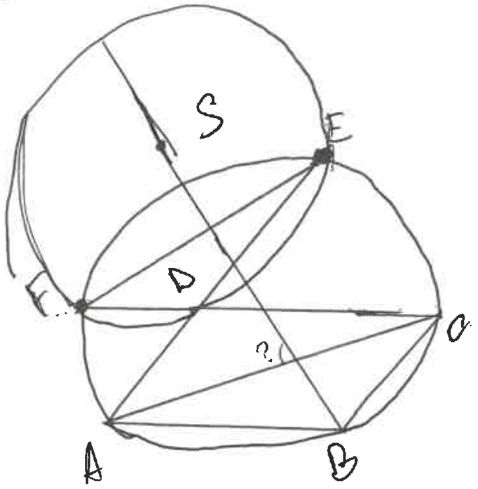
тогда при подстановке в выражение получим

$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}$ ~~наим~~ наименьшее возможное значение, иначе оно не соответствует неравенству

Ответ: $3\sqrt{2}$.

N 2



Дано: ABCD параллелограмм. $\angle BAC = 36°$; $\angle BCA = 16°$.
лучи AD и CD ∩ окр. описанн. около △ABC в т. E и т. F соотв.
S — центр описанн. около △FDE окр.
Найти: $\angle(AC; BS)$.

Решение:

1) $ABC = 180° - 36° - 16° = 128° = \angle ADC$ (углы в парал.)

$\Rightarrow \angle A = 180° - 128° = 52°$ (противол. углы в парал.) $= \angle C$

2) $\angle FDE = \angle ADC$ (верт.) $= 128°$

$\Rightarrow \smile FE = 256°$ (~~впис. угол~~ окр)

$\smile AF - \smile EC = 256° - 72° - 32° = 152°$ (на окр около △ABC)

$\smile FE = 256°$ (на окр около △FDE.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 2 0 2 2 3 2 6

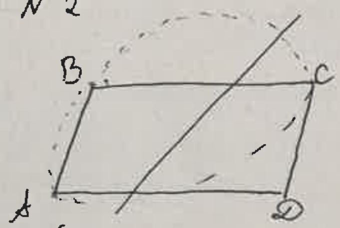
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	12	2	10		52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



№1

1) $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$;

$\sin x \cdot (3\sin x - 4\sin^3 x) = \frac{5}{16}$; $3\sin^2 x - 4\sin^4 x = \frac{5}{16}$

Пусть $t = \sin^2 x \Rightarrow$

$3t - 4t^2 = \frac{5}{16}$

$-4t^2 + 3t - \frac{5}{16} = 0 \,/\cdot 16$

$-64t^2 + 48t - 5 = 0$ $\quad D = 48^2 - 4\cdot 64\cdot 5 = 2304 - 1280 = 1024$

$t_{1,2} = \frac{-48 \pm 32}{128}$; $t_1 = \frac{80}{128} = \frac{5}{8}$; $t_2 = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$

2) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos x \cdot (4\cos^3 x - 3\cos x) = \cos^2 x(4\cos^2 x -$

$-3)$ т.к $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t \Rightarrow$

~~при $t = \frac{5}{8}$: $\cos x \cdot \cos 3x = 1 - \frac{5^2}{8^2}\cdot(4\cdot\frac{5^2}{8^2} - 3) = 1 -$~~

cos при $t = \frac{5}{8}$; $\cos^2 x = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{9}{64}\cdot(4\cdot\frac{3^2}{8^2} - 3) = \frac{9}{64}\left(\frac{4\cdot 9}{64} - 3\right) = \frac{36}{64} - \frac{72}{64} =$

$= -\frac{36}{64} = -\frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

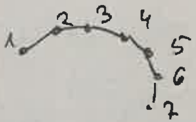
при $t=\frac{1}{8}$

$\cos^2 x = 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \Rightarrow \cos x\cdot\cos 3x = \frac{49}{64}\left(4\frac{49}{64}-3\right)=4\frac{28}{64}=$

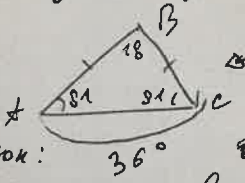
$=\frac{7}{16}$

Ответ: $\cos x\cos 3x = -\frac{9}{16}$; $\cos x \cos 3x = \frac{7}{16}$

№ 3



Пусть индексы углов будут $i; i+1; i+2 \ldots$



$\uparrow$ 80 углов

каждый уголок:

$\frac{360}{80}=4{,}5^\circ$

Треугольник с $\angle 81; \angle 81; \angle 18$; — равнобедренный

~~т.к.~~ Если описать окружность вокруг треугольника, то дуга противолеж. к $\angle 18^\circ$, будет равна $18\cdot 2 = 36^\circ \Rightarrow \frac{36}{4{,}8} = 8$ шагов, т.е.

искомый р/б $\triangle$ у которого основание проходит 8 шагов.

Пусть $\angle ABC = 18 \Rightarrow \angle BAC = 81 = \angle BCA \Rightarrow A$ и C будут либо на позиции $(i+4)$ или на $(i-4)$ от B

Вершины разбивают 80 угольник на 10 правильных многоугольников (т.к. $8\cdot 10 = 80$)

$\underbrace{k; k+8; k+16; \ldots; k+72}$

прогрессия, в которой взяв любые 3 вершины, мы получим $\triangle ABC$ (искомый)

~~8,16~~, Допустим возьмем: ~~Δ~~ $A=i$; $B=i+4$; $C=i+8$

1; 5; 9 $\Leftarrow$ заметим, что пары вершин всегда будут либо чет, либо нечет. $\Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	0	2	2	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

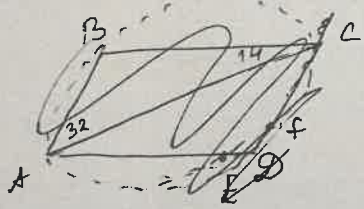
1	2	3	4	5	6	Σ

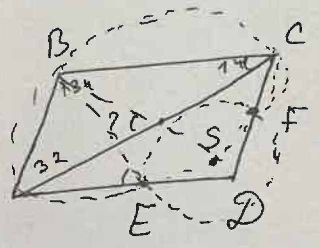
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Rightarrow \max \frac{80}{2} = 40$ отмеченных вершин

Ответ: 40

№ 2





Решение:

1) $\angle CBA = 180 - 32 - 14 = 134^\circ$

~~∠CDA = 180 − 134 = 46 (в.~~

2) $\left.\begin{matrix} BC \parallel AD \\ AB \parallel CD \end{matrix}\right\}$ по св-ву парал. $\Rightarrow AE \parallel BC \ (E \in AD)$

$\angle ACB = \angle AEB = 14^\circ$ (опир. на $\smile AB$)

$ABCE$ — впис. трапеция; $\angle AEC = 180 - 134 = 46^\circ$

3) $\triangle AEC$:

$EAC = BAC = 32^\circ$ (накрест. леж.)

$DC \cap$ окр. $= F$

$CD \parallel AB$; $\angle BAC = \angle BFC = 32^\circ$ ($\smile BC$)

$CF \parallel AB$

4) $\triangle BFC$: $\angle \cancel{BFC} = FCB = 134^\circ$; $FBC = 180 - 32 - 134 = 14^\circ$

~~5)~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА000202232 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a^2+b^2+c^2=3$

через неравенство о средних (Коши):

$$a^4+b^4 \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{2}$$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{2\cdot(c^2+4ab)} \quad \text{т.к } 2ab \leq a^2+b^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{c^2+4ab} \quad \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)\cdot(2c^2+2)}$$

т.к $\frac{x^2}{y} \geqslant 2x-y$; Пусть $x=a^2+b^2$; $y=c^2+2(a^2+b^2)$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+2(a^2+b^2)} \geqslant 2(a^2+b^2)-c^2+2(a^2+b^2) -$$

$$\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+2(a^2+b^2)} \geqslant -c^2; \quad \text{II нер-во: } \frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+2(a^2+b^2)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2)-\frac{c^2}{3}; \quad \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(a^2+b^2)-\frac{c^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{3}-\frac{c^2}{6} \leq \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}; \quad c \geqslant \frac{a^2+b^2}{3}-\frac{c^2}{6}$$

$$c \geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{6}+$$
$$+(a^2+b^2+c^2);$$

$c \geqslant \frac{3}{2} \Rightarrow$ min значение дости-гается при $a=b=c=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 2 0 2 2 3 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Подставим:

$$\frac{1+1}{1+4}+\frac{1+1}{1+4}+\frac{1+1}{1+4}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=\cancel{0{,}8}\ 1{,}2$$

Ответ: ~~0,8~~ 1,2

№ 4

$p, q, r \in$ натур. числа Д-ть: p, q или r – точн. квадрат

$$\left.\begin{aligned}
(q^2p-1) &\vdots (pr-1) \Rightarrow (q^2p-1)-p(qr-1)=p-1\\
(p^2r-1) &\vdots (qr-1) \Rightarrow (p^2r-1)-r(qp-1)=r-1\\
(r^2q-1) &\vdots (pq-1) \Rightarrow (r^2q-1)-q(pr-1)=q-1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&(p-1) \not< (pr-1) \Rightarrow\\ &(r-1)\\ &(q-1)\end{aligned}$$

т.к числа натур, т.е. >0

$\Rightarrow p-1=0$; аналогично $r-1=0$; $q-1=0$. т.к $1=1^2 \Rightarrow 1$ – это ~~полный~~ точный квадрат

т.е. либо p, либо r, либо $q = 1$ ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 5 | 4 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	20	6		78

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 1

Пусть искомое значение выражения равно A:

$A = \cos x \cos 3x$

Дано ур-е:

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$

1) Преобразование произведений в сумму:

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$

Применим эти ф-лы к данному и искомому выражениям, полагая $A = 3x$ и $B = x$:

Для данного ур-я:

$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(3x-x) - \cos(3x+x)) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$

Следовательно: $\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{5}{16}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

Для искомого выражения A: $A = \frac{1}{2}(\cos(3x-x) + \cos(3x+x)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$

2) Переход с одной переменной:

в ур-ии присутствуют аргумент $2x$ и $4x$. Выразим $\cos 4x$ через $\cos 2x$, используя ф-лу косинуса двойного угла: $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Подставим это выражение в ур-е: $\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = \frac{5}{8}$

$\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{5}{8}$.

$2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 + \frac{5}{8} = 0$

$2\cos^2 2x - \cos 2x - \frac{3}{8} = 0 \,|\cdot 8$

$16\cos^2 2x - 8\cos 2x - 3 = 0$

3) Решение кв. ур-я; Введем замену $t = \cos 2x$

т.к. область знач. кос. $[-1;1]$, то $|t| \leq 1$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-3) = 64 + 192 = 256$

1	2	3	4	5	6	Σ

$t_1 = \frac{8-16}{32} = -\frac{1}{4}$

$t_2 = \frac{8+16}{32} = \frac{3}{4}$

$|t| \le 1$ ~~уд.~~ значит возможны оба случая

4) Вычисление искомого знач. A:

1 случай:

$t = -\frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-1\right)$

$A = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{16}-1\right)$

$A = \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{8}\right) = -\frac{9}{16}$

2 случай:

$t = \frac{3}{4}$

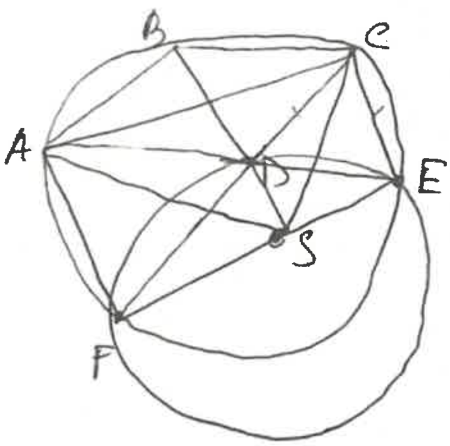
$A = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\right)$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{8}+\frac{9}{8}-\frac{8}{8}\right)$

$A = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{16}$

Ответ: $-\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$.

Задание 2.



Дано:
ABCD - пар-мм
$\angle BAC = 32°$
$\angle BCA = 14°$
AD и CD - лучи
$AD \cap$ окр. $= E$
$CD \cap$ окр $= F$
ABC и DEF - треуг.
т. S - центр окр-ти $\triangle DEF$

Найти:
$(\widehat{AC; BS})$ - ?

Решение:

1) Анализ циал. трапеций:

Рассмотрим четырехугол. ABCE, вписанный в окр-ть. Т.к. ABCD - пар-мм, то $AD \parallel BC \Rightarrow AE \parallel BC$ (т.к. E лежит на прямой AD). Вписанная трапеция ABCE является р/б, откуда: AB = CE. Т.к. в пар-мме AB = CD, получаем CD = CE. $\triangle$ CDE - р/б с вершиной C. Аналогично четырехугол. ABCF вписан в окр-ть. Т.к. $CD \parallel AB$, то $CF \parallel AB$. Трапеция ABCF р/б: BC = AF, т.к. BC = AD, получаем $AD = AF \Rightarrow \triangle ADF$ - р/б с вершиной A

2) Определение точки S. Точка S - центр описан. окр-ти (~~тр-угол~~)

1	2	3	4	5	6	Σ

$\triangle DEF$ (по усл). Значит S лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам DE и DF.

В р/б $\triangle CDE$ ($CD=CE$) серединный перпендикуляр к основанию DE совпадает с высотой, опущенной из вершины C. $\Rightarrow$

$\Rightarrow CS \perp AD$. В р/б $\triangle ADF$ $AD=AF$. Серединный перпендик. совпадает с высотой, опущенной из вершины A. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AS \perp DF \Rightarrow AS \perp CD$

F является ~~..~~ ортоцентром $\triangle ADF$

3) Т.к. ABCD – пар-мм

~~CS ⊥ AD и AD ∥ BC CS ⊥ BC~~

$CS \perp AD$ и $AD \parallel BC \Rightarrow CS \perp BC \Rightarrow$ угол $FSB = 90°$

$AS \perp CD$ и $CD \parallel AB \Rightarrow AS \perp AB \Rightarrow$ и $SAB = 90°$

$\angle SCB + \angle SAB = 180°$; четырехугол. ABCS вписан в окр-ть с диаметром BS

Найдем $\overset{\frown}{AC}$; BS вписан. ~~в четыр~~ четырехугол. ABCS.

Обозначим т. пересечения K, а искомый угол $\alpha = \angle AKB$

$\angle ABS = \angle ACF$. $\angle ACS = \angle SCB - \angle BCA = 90° - 14° = 76°$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABS = 76°$. $\angle BAK = \angle BAC = 32°$.

$\angle ABK = \angle ABS = 76°$. $\alpha = 180° - (32° + 76°) = 72°$.

Ответ: 72°

Задание 3.

Пусть вершины правильного 80-угольника пронумерованы числами 0, 1, ..., 79 по часовой стрелке. ∠ между соседними вершинами из центра окр-ти $= \frac{360°}{80} = 4{,}5°$. Величина впис. угла, опирающегося на дугу k делений, $= 2{,}25° \cdot k$

△ с углами 18°, 81°, 81° является р/б. Его углы опир. на дуги x, y, y. $2{,}25° \cdot x = 18° \Rightarrow x = 8$ делений.

Также $2{,}25° \cdot y = 81° \Rightarrow y = 36$ делений. Таким образом, три вершины i, j, k образуют запрещенный треугольник тогда и только тогда, когда кратчайшее расстояние

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

между ними и ат-ч
составляет 8, 36 и 36 делений.
2) Выберем подмножество
$S \subset \{0,1,\dots,79\}$. Условие отсутствие запрещенного $\triangle$ означает, что для любых $a, b \in S$ расстояние $|a-b|$ (mod 80) не может быть равно 8 или 36. Если $|a-b| \equiv 36$ (mod 80), то третья вершина c должна отстоять от a на 8 и от b 36 (или наоборот), чтобы замкнуть цикл. $8+36+36=80$. ~~Не должно быть~~ В наборе S не должно быть одновременно 3-х вершин вида $\{n, n+8, n+44\}$ (mod. 80) или $\{n, n+36, n+44\}$
3) Разобьем все 80 вершин на группы по остаткам от деления на 4. $G_r = \{r, r+4, r+8, \dots, r+76\}$ для $r \in \{0,1,2,3\}$ в каждой группе по 20 вершин. Расстояния 8 и 36 кратны 4, поэтому вершины из разных групп G_r не могут образовать запрещенный треугольник, значит мы не можем максимизировать кол-во вершин каждой группе независимо. Если мы возьмем в каждой из 4-х групп по $20/2 = 10$ вершин. Расстояние внутри групп ~~будут~~ кратны 8, что исключает разность 36 и 44.
Таким образом ни одна пара вершин не будет находиться на расстоянии 36, а значит, ни один запрещенный треугольник не будет собран.
Кол-во вершин $4 \cdot 10 = 40$.
Ответ: 40.
Задание №5.
Дано:
$a, b, c > 0$;
$a^2+b^2+c^2=3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 5 | 4 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Найти минимум:

$$S=\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

Решение

Т.к. выражение симметрично и условие симметрично естественно провести $a=b=c$. Из условия $3a^2=3 \Rightarrow a=1$

Тогда каждый дробный член равен $\frac{1+1}{1+4}=\frac{2}{5} \Rightarrow S=$

$=3\cdot\frac{2}{5}=\cancel{1{,}2}\ \frac{6}{5}$.

Докажем, что это минимум ~~$a^4+b^4\geq a^2b^2+(a^2-b^2)^2/2 \geq a^2b^2$~~ $a^4+b^4\geq a^2b^2+(a^2-b^2)^2/2\geq a^2b^2$

Кроме того $c^2+4ab\leq a^2+b^2+c^2+2ab=(a^2+b^2+2ab)+c^2=$

$=(a+b)^2+c^2$

При фиксированной $a^2+b^2+c^2$ выражение достигает минимума при равенстве переменных. Поскольку ф-я симметрична и однородна степени 2 минимум при фиксированной сумме квадратов достигается при $a=b=c$.

Ответ: $\frac{6}{5}$

Задание 4

Пусть для натуральных чисел p, q, r – выполнены условия:

1) $pr-1 \mid q^2p-1$

2) $qr-1 \mid p^2r-1$

3) $pq-1 \mid r^2q-1$

Преобразование условий делимости.

Рассмотрим первое условие. Т.к. q^2p-1 делится на $pr-1$ то и выражение $r(q^2p-1)$ должно делиться на $pr-1$

Заметим, что

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 5 | 4 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$r(\cancel{q^2p-1})=$

$r(q^2p-1)=q^2(pr)-r=q^2(pr-1)+q^2-r$

т.к. первое слагаемое $q^2(pr-1)$ делится на $pr-1$, то остаток (q^2-r) также должен делиться на $pr-1$ $\Rightarrow pr-1 \mid q^2-r$. Аналогично преобразую 2-ое и 3-ее условие.

$qr-1 \mid p^2-q$

$pq-1 \mid r^2-p$

Без потери общности положим $p\ge q\ge r\ge 1$

Если $r=1$, то $r=1^2$ – точный квадрат

ч.т.д.

Пусть $r>1$, рассмотрим случай $p=q=r$, тогда $p^2-1 \mid p^2-p$. Это возможно только если $p^2-p=0$ (что невозможно для натуральных $p>1$) или $\cancel{|p^2-p|}$ $|p^2-1|\le|p^2-p|$, что также сложно для $p>1$ $\Rightarrow$ числа не могут быть равны. Рассмотрим случай $p>q>r>1$ для того чтобы $pr-1$ делило q^2-r, необходимо, чтобы $q^2-r=0$ (т.к. делимое меньше делителя по модулю, оно может быть только 0).

$q^2-r=0 \Rightarrow r=q^2$. В этом случае r – точный квадрат

Если же мы предположим, что $q^2-r\ne 0$, то должны выполняться нер-ва, вытекающие из делимости. Однако, при $p\ge q\ge r>1$ и условием, что числа различны. Цепочка делимост $pr-1 \mid q^2-r$ $qr-1 \mid p^2-q$ и $pq-1 \mid r^2-p$ приводит к противоречию ~~порядок роста~~ величин (левая часть становится больше ~~по~~ правой по модулю, при этом правая часть не равна 0, лишь

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 5 | 4 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

в ограниченных случаев, которые все равно приводят к равенству одного из выражений 0)

Вывод: в любом из возможных случаев (~~либо r=1~~ либо $r=1$, либо $q^2-r=0$, либо аналогично для других перемнотых при ином упорядочении) получаем, что одно из чисел является квадратом другого или 1.

Ответ: Доказано, что как минимум одно из чисел p, q, r является точным квадратом.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	2	0	7	0	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	12	×	20		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$

$\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$, тогда

$\sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = \frac{5}{16}$

$(1-\cos^2 x)(4\cos^2 x - 1) = \frac{5}{16}$

$4\cos^2 x - 1 - 4\cos^4 x + \cos^2 x = \frac{5}{16}$

$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + \frac{21}{16} = 0$

Пусть $\cos^2 x = t$, тогда:

$4t^2 - 5t + \frac{21}{16} = 0$

$D = 25 - 4\cdot 4 \cdot \frac{21}{16} = 4$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8} \\ t_2 = \frac{5+2}{8} = \frac{7}{8} \end{array}\right.$, значит $\cos^2 x = \frac{3}{8}$ или $\cos^2 x = \frac{7}{8}$.

$\cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$, значит:

$\cos x \cdot \cos 3x = \cos^2 x(4\cos^2 x - 3)$

1) $\cos^2 x = \frac{3}{8}$: $\cos x \cdot \cos 3x = \frac{3}{8}(4\cdot\frac{3}{8} - 3) = \frac{3}{8}\cdot(-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{16}$

2) $\cos^2 x = \frac{7}{8}$: $\cos x \cdot \cos 3x = \frac{7}{8}\cdot(4\cdot\frac{7}{8} - 3) = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{16}$.

Ответ: $-\frac{9}{16}$ или $\frac{7}{16}$.

№5

$a^2+b^2+c^2 = 3\,(1)$ мин. знач. $\left(\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}\right)$ — ?

По нер-ву о средних: $\frac{x^4+y^4}{2} \geq x^2y^2$, тогда:

$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geq \frac{2a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{2a^2c^2}{b^2+4ac} =$

$= \frac{2a^2b^2}{3-a^2-b^2+4ab} + \frac{2b^2c^2}{3-b^2-c^2+4bc} + \frac{2a^2c^2}{3-a^2-c^2+4ac}$ (используя (1))

По нер-ву о средних: $2xy \leq x^2+y^2$, тогда:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 0 7 0 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение)

$$\frac{2a^2b^2}{3-a^2-b^2+4ab}+\frac{2b^2c^2}{3-b^2-c^2+4bc}+\frac{2a^2c^2}{3-a^2-c^2+4ac}\geq$$

$$\geq\frac{2a^2b^2}{3+a^2+b^2}+\frac{2b^2c^2}{3+b^2+c^2}+\frac{2a^2c^2}{3+a^2+c^2}=\frac{2a^2b^2}{6-c^2}+\frac{2b^2c^2}{6-a^2}+\frac{2a^2c^2}{6-b^2}$$ (используя (1)).

По нер-ву о средних: $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$, тогда

$$\frac{2a^2b^2}{6-c^2}+\frac{2b^2c^2}{6-a^2}+\frac{2a^2c^2}{6-b^2}\geq3\cdot\sqrt[3]{\frac{2a^2b^2\cdot2b^2c^2\cdot2\cdot a^2c^2}{(6-c^2)(6-a^2)(6-b^2)}}=$$

$$=6\cdot\sqrt[3]{\frac{a^4b^4c^4}{(6-c^2)(6-a^2)(6-b^2)}}$$

По нер-ву о средних: $\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}$, тогда

$$6\cdot\sqrt[3]{\frac{a^4b^4c^4}{(6-c^2)(6-a^2)(6-b^2)}}\geq$$

$$\geq6\cdot\frac{\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}{\frac{6+6+6-(a^2+b^2+c^2)}{3}}=\frac{6}{5}\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4}$$

Минимум равен $\frac{6}{5}$ и достигается при $a=b=c=1$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

№3

Пронумеруем вершины от 1 до 80. Треугольник с углами 18°, 81°, 81° разбивает окр. на 3 части, в которых содержится 7, 35, 35 вершин 80-тиугольника (оставшиеся 3 вершины – вершины треугольника, т.е. по совместительству вершины 80-тиугольника).

Тогда запретные вершины имеют вид: $\{x; x+8; x+44\}$ mod 80, т.е. нельзя выбрать все 3 вершины, максимум 2 из них. Заметим, что 8 и 44 делятся на 4, значит $x\underset{4}{\equiv}x+8\underset{4}{\equiv}x+44$.

1	2	3	4	5	6	Σ

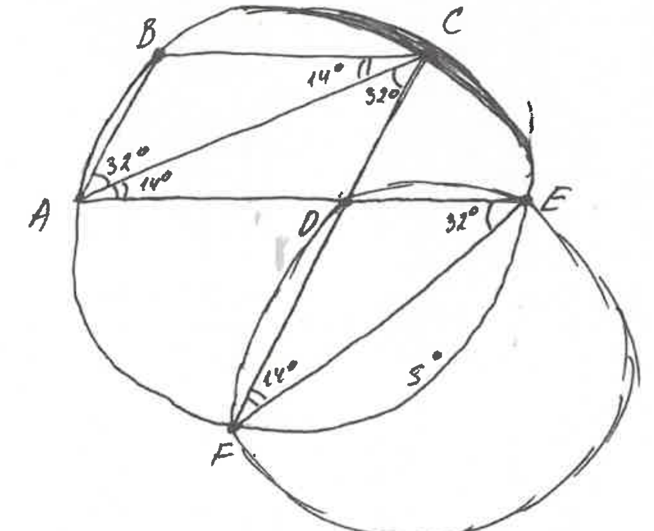
№3 (Продолжение).

Разобьём вершины на 4 группы по mod 4, в каждой группе пронумеруем вершины от 1 до 20, тогда запретные вершины имеют вид $\{y;\ y+2;\ y+11\}_{\text{mod } 20}$, т.е нельзя выбрать все 3 вершины, максимум 2 из них. Тогда из каждой группы можно выбрать максимум 11 вершин, ведь если их хотя бы 12, то точно будут 3 запретные вершины. Пример на 11: взять с 1 по 11. Так как группы независимы, то всего максимально можно выбрать $4 \cdot 11 = 44$ вершины.

Пример на 44: с 1 по 44 вершину.

Ответ: 44.

№2.



Решение: 1) $\angle ACD = \angle BAC = 32°$ (накрест лежащие при $AB \parallel CD$, ведь $ABCD$ − пар-м и секущей AC), аналогично $\angle CAD = \angle BCA = 14°$.
2) $\angle ACF = \angle AEF = 32°$ как вписанные и опир. на дугу AF, аналогично $\angle CAE = \angle CFE = 14°$. 3) Значит $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ по 2-ум углам, причём $AB \parallel DF$, $BC \parallel DE$, $AC \parallel FE$. 4) отсюда сер. пер. к AB, BC, AC соотв. $\parallel$-ны сер. пер. к DF, DE, FE.
5) В $\triangle ABC$: $\angle ABC = 180° - 14° - 32° = 134°$ $\Rightarrow$ $\angle FDE = 134°$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	1	1	2	7	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	20	12	6	10		64

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

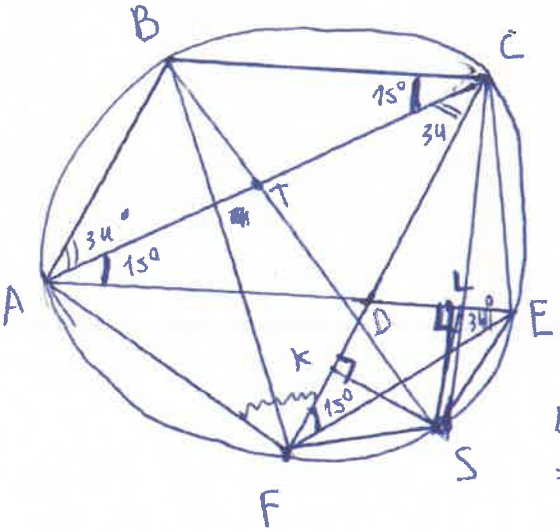
№ 2

Решение:

Во-первых заметим, что (.) S находится на описанной окружности $\triangle ABC$: ~~для этого~~ ~~рассмо~~ для $\triangle ABC$ можно записать:

$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA$ так как сумма углов в $\triangle ABC$ 180°

$\Rightarrow \angle ABC = 180° - 34° - 15° = 131°$



Так как ABCD – параллелограм, то $\angle ADC = \angle ABC = 131°$

$\angle FDE = \angle ADC$ (как вертикальные $\angle$)

так как (.) S это пересечение серединных перпендикуляров к FD и DE, (пусть ~~KS это~~ KS – сер. пер к FD, а SL – сер. пер к DE), то $\angle KDL + \angle KSL = 180°$ ($90° + 90° + \angle KDL + \angle KSL = 360°$ для KDLS)

$\angle KDL = \angle FDE$ ~~= 180°~~, тогда $\angle KSL = 180° - 131° = 49°$

$\angle ABC + \angle KSL = 131° + 49° = 180°$, значит S лежит на описанной окружности ABC

$\angle BCA = \angle CAD = 15°$ (паралелогр. ABCD, накрест леж $\angle$)

$\angle BAC = \angle ACD = 34°$ (параллелогр ABCD накрест леж $\angle$)

$\angle ACD = \angle AEF = 34°$ (опираются на дугу AF)

$\angle CAD = \angle CFE = 15°$ (опираются на дугу CE)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle AFC = \angle AEC = 49$ (опир на дугу AC)

~~$\angle AEC = \angle BAE = 49°$ опир на дугу~~

$\angle AFC = 180 - \angle ABC$ ($ABCF$ вписаний)

$FS = SE$ ($\triangle FSE$ - р/б) SE, FS - радиусы

$\angle FSE = 180° - \angle FCE$

$\angle FCE = \angle CFE - \angle DEF - \cancel{\ } \angle AEC + 180° = 82°$

$\angle FCE = 180° - 15° - 34° - 49° = 82°$

$\angle FSE = 180° - 82° = 98°$

$\angle SFE = \angle FES$ для FSE - р/б

$\Rightarrow \angle EFS = \dfrac{180° - 98°}{2} = 41° = \angle FES$

$\angle AES = 34° + 41° = 75°$

$\angle AES = \angle ABF$ (опир на дугу AF)

$\angle ABT = 180° - \angle BAT - \angle ABS = 180° - 34° - 75° = 71°$

(.) T - пересечение BS и AC

Ответ: $71°$

№ 4

p, q, r - натуральные числа

$p^2q + 1 \underset{qr+1}{\equiv} 0$ $\qquad qr + 1 \underset{qr+1}{\equiv} 0$

$p^2q + 1 \underset{qr+1}{\equiv} qr + 1$

$p^2 q \underset{qr+1}{\equiv} qr$

$p^2 \underset{qr+1}{\equiv} r \Rightarrow \dfrac{p^2}{qr+1} = \dfrac{r}{qr+1}, \quad \dfrac{p^2 - r}{qr+1} = 0, \quad p^2 = r$

~~так как~~ r, p - натуральные

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение №4

$p^2 = r$

r, p - натуральные

следовательно r - точный квадрат ч.т.д.

№1

$\sin x \sin 3x = \frac{11}{64}$

$\sin x \sin 3x = \frac{\cos(x-3x) - \cos(x+3x)}{2}$

$= \frac{\cos(-2x) - \cos 4x}{2} = \frac{11}{64}$

$\cos(-2x) = \cos 2x$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{11}{32}$

$\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{11}{32}$

Пусть $\cos 2x = t$, $t \in [-1; 1]$

тогда $t - 2t^2 + 1 = \frac{11}{32}$

$2t^2 - t - \frac{21}{32} = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{21}{32} = 1 + \frac{21}{4} = \frac{25}{4}$

$t_1 = \frac{1 + \frac{5}{2}}{4} = \frac{7}{8}$ $\qquad \cos 2x_1 = \frac{7}{8}$

$t_2 = \frac{1 - \frac{5}{2}}{4} = -\frac{3}{8}$ $\qquad \cos 2x_2 = -\frac{3}{8}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	2	1	1	2	7	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Продолжение №1:

$\cos x \cos 3x =$

$= \frac{1}{2}(\cos(x-3x) + \cos(x+3x)) = \frac{\cos(-2x)+\cos 4x}{2}$

$\frac{\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1}{2}$

1 случай $\cos 2x = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow \frac{\frac{7}{8} + 2\cdot\frac{49}{64} - 1}{2} = \frac{13}{128}$

2 случай $\cos 2x = -\frac{3}{8}$

$\Rightarrow \frac{-\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{9}{64} - 1}{2} = -\frac{35}{32}$

Ответ: $\frac{13}{128}$; $-1\frac{3}{32}$

№ 3

~~$\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = \frac{78\cdot 180}{80} = 178{,}8$~~

У нас 80 вершин соотносится с ~~180~~ 360°, тогда если мы впишем правильный 80-угольник в окружность то $\frac{80}{360} = \frac{2}{9}$, то есть 9 градусам окружности соответствует четыре вершины 80-угольника

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	2	1	1	2	7	2	6

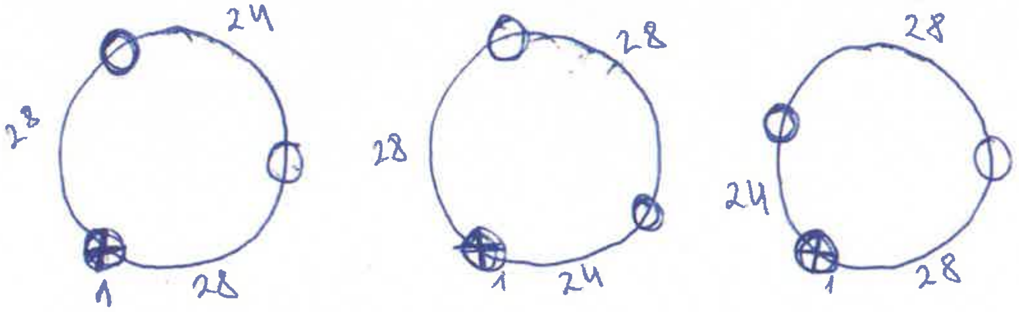
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

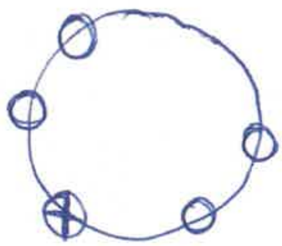
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

тогда, чтобы у нас не получился треугольник с углами 63°, 63°, 54° не должны быть отмечены точки разделяющие окружность на 126°, 126° и 108°, то есть ~~а~~ между вершинами 80-угольника не должно получится так, что будет 28, 28 и 24 ~~сто~~ стороны 80-угольника



Пусть ⊗ - мы отметили первой точкой, тогда нам будут запрещены точки О для нее, тогда на окружности можно максимум отметить $80 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 75$

Ответ: 75 вершин



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a+b+c=3$

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}$$

заметим, что нам дано симметричное для слагаемых выражение, тогда если мы докажем минимум для

$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}$ - то этот минимум будет также соблюдаться и для других слагаемых

попробуем сделать замену $x=a+b$, $y=ab$

~~тогда~~ ~~...~~ тогда $c=3-x$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=x(x^2-3y)$

$$\frac{x(x^2-3y)}{8y+9-9+6x-x^2}=\frac{x(x^2-3y)}{8y+6x-x^2}$$

заметим, что $-x^2+6x+8y$ парабола с ветвями вниз, значит свое максимальное значение она достигает в точке $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3$, но $x\neq 3$

в то время как x^3-3y - кубический многочлен

Попробуем взять производную:

$\Big((x(x^2-3y))' \cdot$ ~~...~~ $(8y+6x-x^2)$

$+(x(x^2-3y))(8y+6x-x^2)'\Big) : 2(8y+6x-x^2)$

Лист 6 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

M	A	0	0	0	2	1	1	2	7	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$(x(x^2-3y))'$

$= x'(x^2-3y) + x(x^2-3y)' =$

$= 3x^2 - 3x - 3y$

$(8y+6x-x^2)' \cancel{= 8+6x-x^2}$

видим, что производная это плохой путь, попробуем сделать оценку

$$\frac{x(x^2-3y)}{8y+6x-x^2} = \frac{x(x^2-3y)}{5y+6x-(x^2-3y)}$$ нужно сделать

знаменатель минимальным, а числитель максимальным, увидим, что x^2-3y повышая его значение мы только увеличиваем знаменатель и уменьшаем числитель

тогда x^2-3y должно быть минимальным, а $5y+6x$ максимальным, и x также max

$$\begin{cases} (a+b)^2 - 3ab - \cancel{max}\ min \\ 5(a+b)+6ab - max \\ \frac{a+b}{\cancel{x_1}} - min \end{cases}$$

тогда $a, b, c = 1$

и итоговое выражение будет $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$a^2 - ab + b^2 - min$

$5a+5b+6ab - max$

$a+b$ min

Ответ: $\frac{3}{8}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 1 2 1 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	16	X	2		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$

$\sin x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) = \frac{5}{16}$

$4\sin^4 x - 3\sin^2 x + \frac{5}{16} = 0$

$t = \sin^2 x$

$4t^2 - 3t + \frac{5}{16} = 0$

$D = 9 - 4\cdot 4\cdot \frac{5}{16} = 4$

$t = \frac{3 \pm \sqrt{4}}{8}$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{5}{8} \\ t = \frac{1}{8} \end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{5}{8} \\ \sin^2 x = \frac{1}{8} \end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{3}{8} \\ \cos^2 x = \frac{7}{8} \end{array}\right.$

$\cos x \cdot \cos 3x = \cos x\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x$

При $\cos^2 x = \frac{3}{8}$:

$\cos x \cdot \cos 3x = 4\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{8} = \frac{4\cdot 9}{64} - \frac{9}{8} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = -\frac{9}{16}$

При $\cos^2 x = \frac{7}{8}$:

$\cos x \cdot \cos 3x = 4\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2 - 3\cdot\frac{7}{8} = \frac{4\cdot 49}{64} - \frac{21}{8} = \frac{49}{16} - \frac{21}{8} = \frac{49}{16} - \frac{42}{16} = \frac{7}{16}$

Ответ: $\frac{7}{16}$ или $-\frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

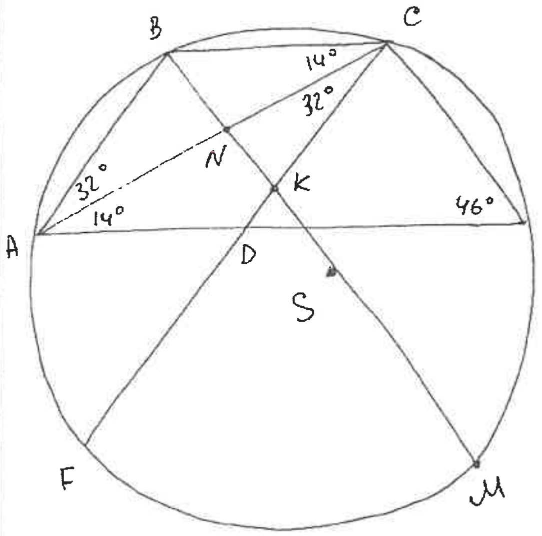
Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 1 2 1 2 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 2



$\cancel{\angle ACD = \angle BAC = 32^\circ}$

$\angle CAD = \angle BCA = 14^\circ$

~~ABCE – вписанная трапеция~~

~~(BC ∥ AE, AB ∦ CE)~~

$\Downarrow$

$\cancel{AB = CE,\ \angle BAE = \angle CEA = 32^\circ + 14^\circ = 46^\circ}$

Искомый угол $\angle BNA = \dfrac{\smile AB + \smile CM}{2}$

$\smile AB = \angle BCA \cdot 2 = 14^\circ \cdot 2 = 28^\circ$

$\smile CM = 180^\circ - \smile BC = 180^\circ - 2\angle BAC =$

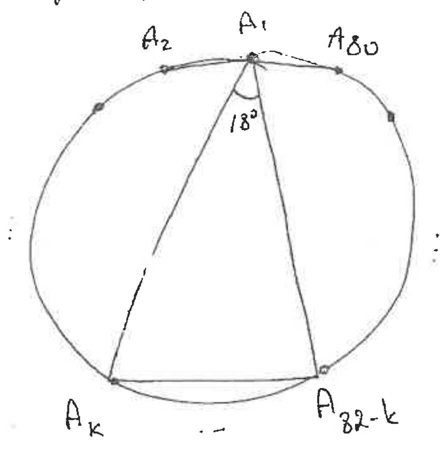
$= 180^\circ - 32^\circ \cdot 2 = 180^\circ - 64 = 116^\circ$

$\angle BNA = \dfrac{116^\circ + 28^\circ}{2} = 58^\circ + 14^\circ = 72^\circ$

Ответ: 72°

№ 3

Проверим, может ли такой треугольник образоваться



$\angle A_2A_1A_{80} = \dfrac{180^\circ \cdot 78}{80^\circ} = 175{,}5^\circ = \alpha$

$\angle A_2A_1A_k = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} \cdot (k-2) = \angle A_{80}A_1A_{82-k}$

$2 \cdot \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} \cdot (k-2) + 18^\circ = \alpha$

$(180^\circ - \alpha)(k-2) + 18^\circ = \alpha$

$180^\circ k - 360^\circ - k\alpha + 2\alpha + 18^\circ = \alpha$

$k(180^\circ - \alpha) = 342^\circ - \alpha$

$k = \dfrac{342^\circ - \alpha}{180^\circ - \alpha} = \dfrac{342^\circ - 175{,}5^\circ}{180^\circ - 175{,}5^\circ} = \dfrac{166{,}5^\circ}{4{,}5^\circ} = \dfrac{333}{\cancel{45}\,9} = 37$ – целое

Значит такой треугольник может получиться

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0002121226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (продолжение)

Вершина такого треугольника (при 18°) может быть в любой точке, тогда остальные 2 определяются автоматически ⇒ всего 80 треугольников.
Тогда поскольку каждая вершина 80-угольника может принадлежать трем треугольникам, а всего треугольников 80, как минимум 27 вершин должны быть не отмечены. Значит максимум можно отметить 53 ~~вер~~ вершины.
Ответ: 53

№5

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ac}\geq\frac{a^4+b^4}{c^2+(a+b)^2}+$$

$$+\frac{b^4+c^4}{a^2+(b+c)^2}+\frac{c^4+a^4}{b^2+(a+c)^2}=\frac{a^4+b^4}{3+2\underset{a}{\cancel{b}}c}+\frac{\overset{c}{\cancel{a}}{}^4+b^4}{3+2bc}+\frac{a^4+c^4}{3+2ac}\geq$$

$$\geq\frac{2(ab)^2}{3+2ab}+\frac{2(bc)^2}{3+2bc}+\frac{2(ac)^2}{3+2ac}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000212162 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	20	20	6		74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №1

Дано:

$\sin x \quad \sin 3x = \frac{5}{16}$

Решение:

1) $\sin 3x = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x$

$\sin x \cos x \cdot \sin 2x + \cos 2x \cdot \sin^2 x = \frac{5}{16} \Rightarrow \cos x \cdot \sin x \cdot \sin 2x = \frac{5}{16} - \cos 2x \cdot \sin^2 x$

2) $\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$

$k = \cos x \cos 3x = \cos^2 x \cos 2x - \sin x \cdot \cos x \sin 2x = \cos^2 x \cdot \cos 2x - \frac{5}{16} +$

$+ \cos 2x \cdot \sin^2 x = \cos 2x - \frac{5}{16}$

3)

$\sin x \cdot \cos x \cdot \sin 2x + \cos 2x \cdot \sin^2 x = \frac{5}{16}$

$2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \sin^2 x - \sin^4 x = \frac{5}{16}$

$3 \sin^2 x \,(1 - \sin^2 x) - \sin^4 x = \frac{5}{16}$

$\exists\ y = \sin^2 x \quad 1 > y > 0$

$-4y^2 + 3y - \frac{5}{16} = 0$

$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{16}}}{-4 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{4}}{8} = \frac{5}{8}, \frac{1}{8}$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{7}{8} \\ y = \frac{1}{8} \end{array}\right.$

4) $k = \cos 2x - \frac{5}{16} = 1 - 2\sin^2 x - \frac{5}{16}$

$\left[\begin{array}{l} k = \frac{11}{16} - 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{11 - 2 \cdot 2 \cdot 5}{16} = -\frac{9}{16} \\ k = \frac{11}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11 - 4}{16} = \frac{7}{16} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{7}{16}$ или $-\frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 6 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 3

Дано:

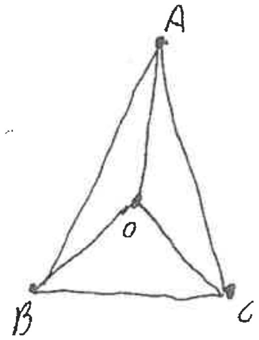
$N = 80$

$\varphi_1 = 18^\circ$

$\varphi_2 = 81^\circ$

Решение:

1) ∡ нужный ~~нам~~ Δ в 80-угольнике:



(·) O — центр многоугольника

· м/у (·)A и (·)B лежит n_1 точек

· $n_1 = \frac{\angle AOB}{360^\circ}\cdot 80 - 1 = \frac{180^\circ - \angle BAC}{360^\circ}\cdot 80 - 1 =$

$= \frac{180^\circ - \varphi_1}{360^\circ}\cdot 80 - 1 = \frac{18\cdot 9}{360}\cdot 80 - 1 = 35$

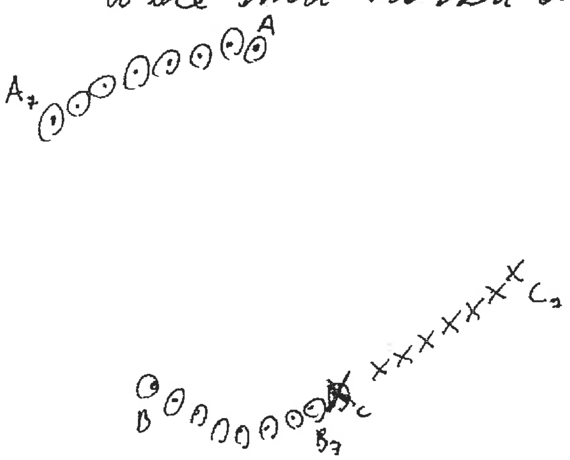
· м/у (·)B и (·)C лежит n_2 точек

· $n_2 = \frac{80 - n_1\cdot 2 - 3}{1} = 7$

2) Чтобы закрыть как можно больше точек воспользуемся алгоритмом:

· отметим (·)A и (·)B, а (·)C — не отмечаем

· в левую сторону от них отсчитываем n_2 точек и все эти точки отмечаем (все что слева от C — зачеркиваем (n_2 штук)



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | MA00021216 26 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №3 (продолжение)

3) После этого действия отмечаем от (·) A_7 еще n_2 точки, и отмечаем от (·) C_7 еще n_2, т.к. от (·) B_7 уже n_2 точки зачёркнуты

4) Затем отмечаем от (·) A_{14} ещё n_2 и зачёркиваем n_2 точки от (·) C_{14}

5) Повторим 3 и 4, пока $A_n \neq B$

$A_{36} = B$

6) Всего отмечено точек · от A до A_{35} $N_1 = 36$

это можно посчитать, как:

· от B до B_7 $N_2 = 8$

· от C_8 до C_{15} $N_3 = 8$

· от C_{15+7+2} до C_{31} $N_4 = 8$ ($= C_{24}$)

$\left(\dfrac{n_1+n_2+2}{(n_2+1)}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$ ← округляем до целого

$\dfrac{44}{8}\cdot\dfrac{1}{2} = 2,75 \approx 3$

$N_2+N_3+N_4 = 3\cdot(n_2+1) = 3\cdot 8 = 24$

~~Ответ~~ можно отметить $36+24=60$ точек

Казалось бы можно дать такой ответ, но нет.

7) Мы не учли, что точки C_8 до C_{15} образуют с A_n — треугольник.

вычтем 8 штук

Ответ: 52 точки

(проверка: $\dfrac{80}{3} = 26$ и (2 ост)

Δ-треугольников (без повтора)

Всего точек можно использовать $26\cdot 2 = 52$, верно)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 9 | МА00021216 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 4

1) $(q^2p-1) \vdots (pr-1)$

$(p^2r-1) \vdots (qr-1)$

$(r^2q-1) \vdots (pq-1)$

2) $\exists$ $p = q$ (и $q=r$, и $p=r$)

$q^2p-1 = p^3-1$

$pr-1 = p^2-1$

$p^3-1 \not\vdots\, p^2-1$ (при p - натуральном)

3) $\exists$ $p \geq q \geq r$

$q^2p-1 > pr-1$

$p^2r-1 > qr-1$

$r^2q-1 \geq pq-1$ - непонятно

$r^2 \geq p$ при $r<p$

$\exists$ $\frac{r^2q-1}{pq-1} = x > 0$ $\quad x \in \mathbb{N}$

$r^2q-1 = xpq-x$

$q = \frac{x-1}{xp-r^2} > 0$ и $\in \mathbb{N}$

$(r^2-xp)q = 1-x$

$0 \leq xp-r^2 \leq 1$

$xp \geq r^2$

$\underbrace{xp \geq p > r}_{xp \geq r^2}$ => $x<r$

Такое выполняется только при $x=1$

$r^2 = p$ => p - является квадратом

ч.т.д

Ответ: доказано.

1	2	3	4	5	6	Σ

Задача №5

$a^2+b^2+c^2=3$

$$k=\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}=$$

$$=\frac{a^6+4bca^4+b^4a^2+4b^5c+c^2b^4+4ab^5+c^6+4abc^4}{(c^2+4ab)(a^2+4bc)}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}=$$

$$=\frac{a^6+4bca(a^3+c^3)+4b^5(a+c)+c^6+b^4(a^2+c^2)}{(a^2c^2+4a^3b+4bc^3+16ab^2c)}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}=$$

$$=\frac{a^6b^2+4b^3ca(a^3+c^3)+4b^7(a+c)+c^6b^2+b^6(a^2+c^2)+4ca^7+16bc^2a^2(a^3+c^3)+}{a^2c^2b^2+4a^3b^3+4b^3c^3+16ab^4c+4a^3c^3+16a^4cb+}$$

$$\frac{+16b^5ca(a+c)+4c^7a+4cab^4(a^2+c^2)+a^2c^6+4a^3bc^4+4bc^7+16ab^2c^5+a^6c^2+4a^7b+}{+16bac^4+64a^2b^2c^2}$$

$$\frac{+4bc^3a^4+16a^5b^2c}{}=\frac{a^6(b^2+c^2)+b^6(a^2+c^2)+c^6(b^2+a^2)+4(b^7(a+c)+a^7(b+c)+}{4(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3)+16acb(a^3+b^3+c^3)+65a^2b^2c^2}$$

$$\underline{+c^7(a+c))+4b^3ca(a^3+c^3)+4c^3ba(a^3+b^3)+4a^3bc(b^3+c^3)+16bc^2a^2(a^3+c^3)+}$$

$$\underline{+16ab^2c^2(b^3+c^3)+16cb^2a^2(b^3+a^3)}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 1 2 1 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача № 5 (продолжение)

Мы получили выражение, которое не ~~~~ симметрично относительно a, b и c. То есть можно ~~~~ понять, что

k - max при a, b, c - max

⇓

a, b, c - max при

$a^2+b^2+c^2=3$

$a=b=c=1$

⇓

$$k=\frac{1^4+1^4}{1^2+4\cdot1^2}+\frac{1^4+1^4}{1^2+4\cdot1}+\frac{1+1}{1+4\cdot1}=\frac{2}{5}\cdot3=\frac{6}{5}$$

Ответ: 1,2

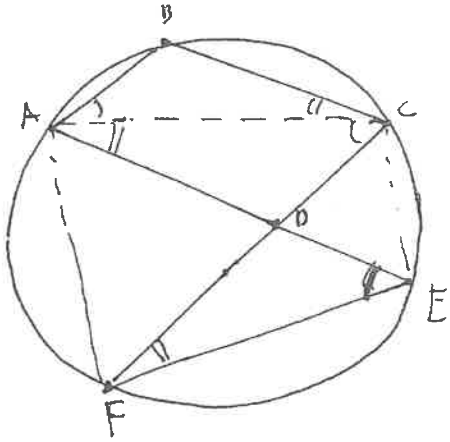
Задача № 2

Дано:

$\angle BAC=32^\circ$

$\angle BCA=14^\circ$

Решение:



$\angle AEE+\angle ACE=180^\circ$

$\angle CEF+\angle CAF=180^\circ$

$\triangle CEF$ - вписан в окружность

⇓

$CE \parallel AF$

⇓

$AC=FE$

⇓

$AD=DF$

$CD=ED$

⇓

$\triangle DEF=\triangle BAC$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA00021216 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

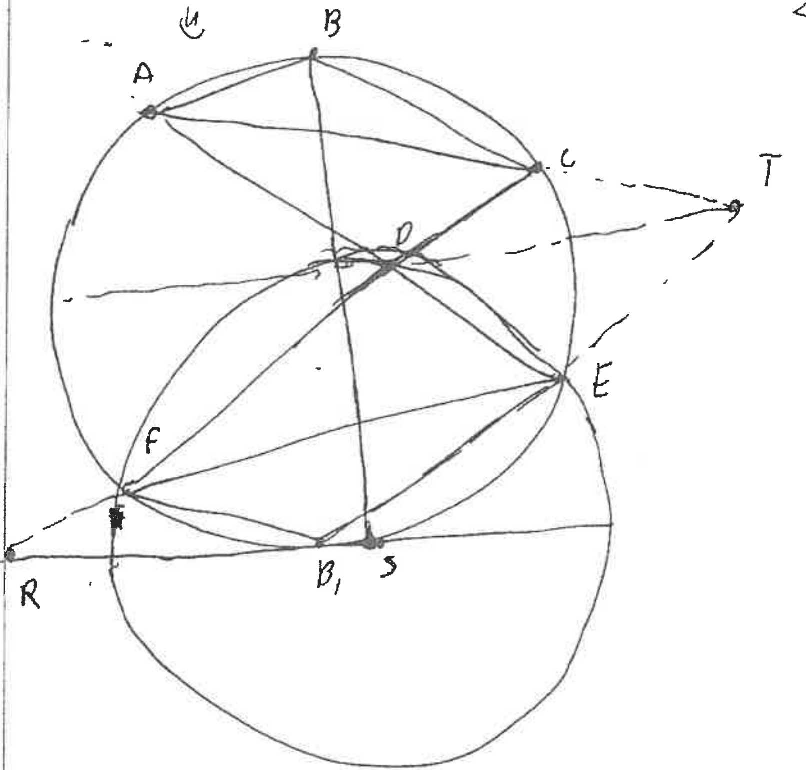
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №2 (продолжение)

Из этого следует, что можно поставить (.)B_1, такую что:

$\square DEB_1F = \square BADC$

$\Downarrow$



$\angle DTE = \angle ERB_1$

(.)$T = AC \cap FE$

(.)$R = B_1S \cap EF$

$\Downarrow$

$BS \perp DT$

$BS \perp B_1R$

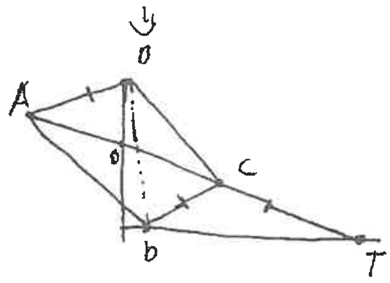
$FC \parallel B_1T$

$CT \parallel FB_1$

$\Downarrow$

$CT = FB_1 = DE = CD = AD$

$\Downarrow$



$CD = CT$

$\Downarrow$

$\angle CDT = \angle CTD$

$\angle CDT + \angle CTD + 32^\circ + 14^\circ = 180$

$\angle CDT = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 46^\circ) = 67^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BOA = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$

Ответ: 23°

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA0002197726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	2	8		50

Задание №1

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$ $\qquad \cos x \cos 3x = ?$

$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$ (по формуле преобразования)

по замене $\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{5}{16}$

пусть $a = \cos 2x$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2a^2 - 1$

$\frac{1}{2}(a - (2a^2 - 1)) = \frac{5}{16} \quad | \cdot 2$

$a - 2a^2 + 1 = \frac{5}{8}$

$-2a^2 + a + \frac{3}{8} = 0 \quad | \cdot 8$

$-16a^2 + 8a + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$16a^2 - 8a - 3 = 0$

$a_{1/2} = \frac{8 \pm 16}{32} = \frac{3}{4}$ или $-\frac{1}{4}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA00021947726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 4 продолжение

Если $a = \frac{3}{4}$:

$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$

$\cos 4x = \frac{2}{1} \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$

$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{16}$

Если же $a = -\frac{1}{4}$:

$\cos 4x = 2 \cdot \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$

$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right) = -\frac{9}{16}$

Ответ: $\frac{7}{16}$ или $-\frac{9}{16}$

Ответ: (52)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA0002144720

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание №3

(Наиб. кол-во вершин правильного 80-угольника, ... [illegible] ... не образ. Δ с ∠18°, 81°, 81°)

Решение

1. Сначала найдем центральные углы

(у вершины 18°) $\frac{360°}{80} = 4{,}5°$

2. Вписанный угол равен половине дуги, значит дуга $= 36°$

$\frac{36°}{4{,}5} = 8$ вершин

$i-4,\ i,\ i+4$

мы не можем выбрать вершин

А если ... [illegible] ... мы

разобьем 80 вершин на 4 группы (mod 4)

В каждой группе по 20 вершин можно взять

$\left[\frac{2}{3} \cdot 20\right] = 13$

Всего: $4 \cdot 13 = 52$ верш.

Ответ: 52

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 6 MA00021447726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача №3

p, q, r, что $qr-1 \,\vdots\, pr-1$

$p^2r-1 \,\vdots\, qr-1$

$r^2q-1 \,\vdots\, pq-1$

Докажем, что p, q, r — нечётные [illegible]

~~[illegible] это противоречит [illegible]~~

Это возможно.

Лист 5 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 6

$a, b, c > 0$

$a^2+b^2+c^2=3$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

$x=a^2$, $y=b^2$ $\quad x^2+y^2 \geq \frac{x^2+y^2}{2}$

$$a^4+b^4 \geq (a^2+b^2)^2$$

$$S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{c^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}\right)$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $a=b=c$ при $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=b=c=1$

$$\frac{1^4+1^4}{1^2+4\cdot 1\cdot 1}+\frac{1^4+1^4}{1^2+4\cdot 1\cdot 1}+\frac{1^4+1^4}{1^2+4\cdot 1\cdot 1}=$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 1 5 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
2	8	12	20	10		52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5

Используем неравенство о средних:

$a^4+b^4 \geq 2\sqrt[2]{a^4b^4} = 2a^2b^2$

$b^4+c^4 \geq 2\sqrt[2]{b^4c^4} = 2b^2c^2$

$c^4+a^4 \geq 2\sqrt[2]{\cancel{b^4}\, a^4} = 2a^2b^2$

Имеем:

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ac} \geq \frac{2a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ac}$$

По неравенству КБШ для дробей:

$$\frac{2a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{2a^2b^2}{b^2+4ac} \geq \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2)}{a^2+b^2+c^2+4(ab+bc+ca)}$$

По неравенству о средних ~~$ab+bc+ca \leq 3\cdot\sqrt[2]{\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2}{3}}$~~ $a^2+b^2+c^2 \geq$

$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq 3 \Rightarrow abc \leq 1$

По неравенству о средних $a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2 \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4} \geq 3$

~~Заметим, что~~ По неравенству о средних $ab+bc+ac \leq \sqrt[3]{\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{3}}\cdot 3$

Заметим, что $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4)}{2}$

По неравенству о средних $a^4+b^4+c^4 \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4} \geq 3$

Значит $ab+bc+ac \leq \sqrt[3]{\frac{\frac{9-3}{2}}{3}}\cdot 3 = 3$

Имеем:

$$\frac{2a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{2a^2b^2}{b^2+4ac} \geq \frac{2\cdot 3}{3+4\cdot 3} = \frac{6}{15} = \frac{3}{5}$$

Равенство достигается при $a=b=c=1$.

Ответ: $\frac{3}{5}$

1	2	3	4	5	6	Σ

№1

Заметим, что

$q^2p-1 \underset{pr-1}{\equiv} q^2p-pr = p(q^2-r) \underset{pr-1}{\equiv} q^2-r$ (т.к. НОД$((pr-1), p)=1$)

Значит: $q^2-r \vdots (pr-1)$. Аналогично: $p^2-q \vdots (qr-1)$ и $(r^2-q) \vdots (pq-1)$.

Значит: $(q^2-r)(p^2-q)(r^2-q) \vdots (pr-1)(qr-1)(pq-1)$.

Если q^2-r; p^2-q и r^2-q не равны нулю, то $|(q^2-r)(p^2-q)(r^2-q)| \geq (pr-1)(qr-1)(pq-1)$. ~~Если p, q или r = 1, то один из них~~

Не умаляя общности пусть $q \geq p \geq r$. Тогда $|(q^2-r)(p^2-q)(r^2-q)| \leq$ $(qr-r)(pq-q)(pr-q)$

Если p, q или $r=1$, то т.к. $1=1^2$, требуемое верно.

Если p, q и $r \neq 1$, то $(pq-r)(qr-q)(pr-q) < (pr-1)(qr-1)(pq-1)$, что невозможно, т.к. $(pq-r)(qr-q)(pr-q) \geq (pr-1)(qr-1)(pq-1)$.

Значит q^2-r, p^2-q или r^2-q равны 0 и $p^2=q$ или $r^2=q$ или $r=q^2$ чтд

№3

Заметим, что хорда, являющаяся стороной данного 80-ти угольника имеет градусную меру $\frac{180^\circ}{80} = \frac{18}{8} = \frac{9^\circ}{4}$. Значит равнобедренный треугольник с углами 81°, 81° и 18° в вершинах может быть тогда ~~только если между двумя~~ и только тогда, когда между двумя из этих вершин A и B $\frac{81}{\frac{9}{4}} = 36$ сторон, между B и C — тоже 36 и между A и C — $\frac{18}{\frac{9}{4}} = 8$ сторон.

~~Разобьём вершины на тройки следующими образами.~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

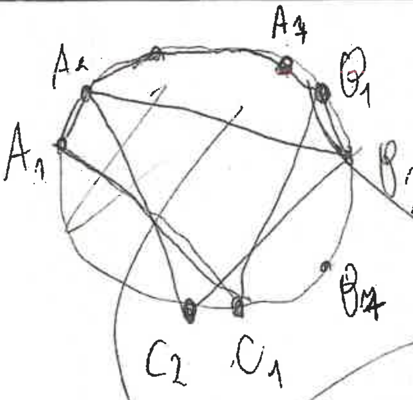
Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 1 5 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



~~Возьмём 2 вершины A_1 и B_1, между которыми 8 сторон. Отметим вершину C_1, такую что между A_1 и C_1 36 сторон. Далее ~~будем~~ поворачивать данный треугольник $A_1B_1C_1$ по часовой стрелке так, что A_2 будет вершиной соседней A_1. Проделаем данную операцию 6 раз.~~

~~Значит, кол-во способов выбрать данные равнобедренные треугольники – это количество чисел~~

Пронумеруем вершины от произвольной вершины A по часовой стрелке. Заметим, что все равнобедренные треугольники имеют вершины с номерами $a; a+8; a+44$ или ~~$a; a+44$~~ $a; a+36; a+44$, $a \in \mathbb{N}$.

~~Значит Всего всего способов выбрать равнобедренный треугольник – кол-во пар натуральных чисел ~~a~~ с разницей 44 от 1 до 180. – 180 – 44 = 136.~~

~~Всего способов выбрать 3 вершины – C_{80}^3. Кол-во~~

~~Ответ: $C_{80}^3 - 136$.~~

Значит если есть 2 вершины с номерами $a; a+44$, то между ними точно есть 2 неотмеченные вершины: ~~Значит, если~~ ~~Если все~~ ~~Тогда~~ $a+8$ и $a+36$. Значит между вершинами 1; 45 есть либо 2 неотмеченные либо одна из вершин 1; 45 не отмечена. Аналогично между ~~2; 46, 3; 47, ..., 36~~ 2 и 46; 3 и 47; ...; 36 и 80 есть 2 неотмеченных вершины. Таким образом неотмеченных вершин хотя бы 36, а отмеченных не более 44 (т.к. неотмеченная вершина может быть равна как $a+8$, так и $b+36$)

Пример на 44 отмеченные вершины – отметим вершины 1; 2; ...; 44.

Ответ: 44.

Лист 3 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

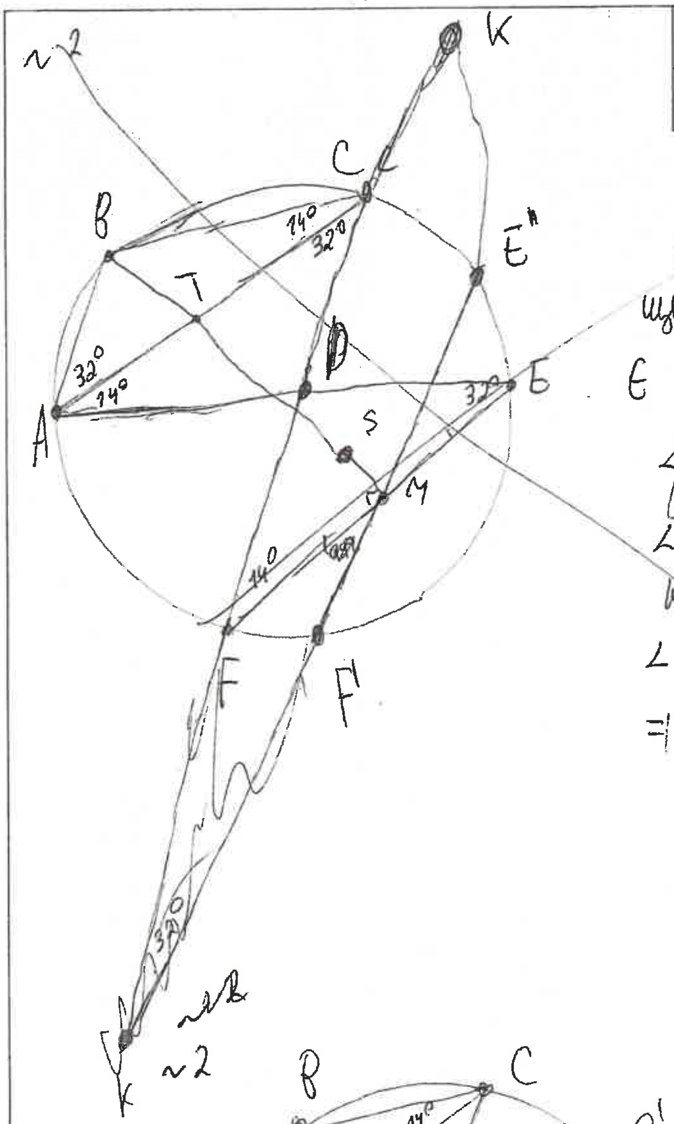
Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 1 5 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



~~Построим прямую $F'E' \parallel AC$, проходящую через M — середину FE, $F', E' \in (A, BC)$. Пусть $K = FC \cap F'E'$, $T = AC \cap BS$.~~

~~$\angle CKE = 32°$ $\angle KCA = \angle CAB = 32°$.~~

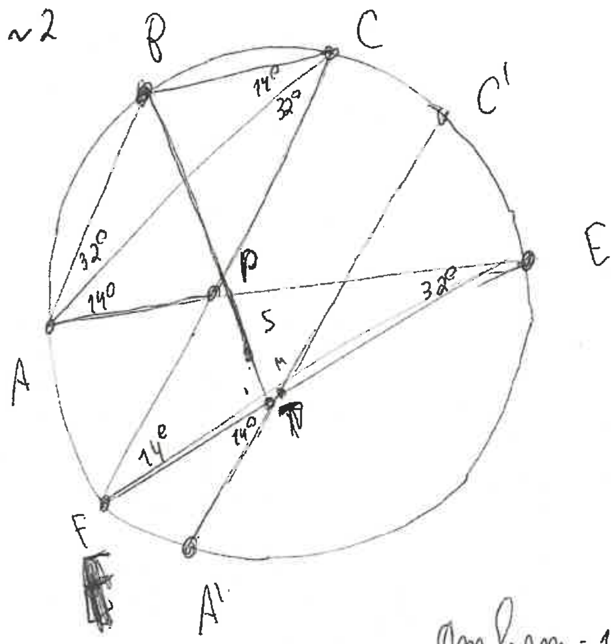
~~$\angle CFE = \angle EAC = 14°$ из вписанности.~~

~~$\angle KMF = 180° - 32° - (180° - 14°)$ (из $\triangle KFM$)~~

~~=~~

При повороте FE относительно M (середине FE) на $50°$ получим прямую $A'C' \parallel AC$

Угол между BS и FC равен $90° + 50° = 140°$.



Ответ: 140°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 1 5 6 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 Используем формулу синуса тройного угла $\sin 3x = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x = \frac{5}{16}$

Имеем $\sin x \cdot (3\sin^2 x - 4\sin^4 x) = \frac{5}{16}$.

Решив это уравнение 5-ой степени ~~найдём~~ найдём значения $\cos x$ и получим, что $\cos x \cdot \cos 3x = \frac{5}{16}$.

Ответ: $\frac{5}{16}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 7 | 3 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	12	—	10		50

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\sin x \sin 3x = \frac{11}{64}$

$\cos x \cos 3x - ?$

Решим уравнение:

$\sin x \sin(2x+x) = \frac{11}{64}$

$\sin x(\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x) = \frac{11}{64}$

$\sin x(2\sin x \cos x \cdot \cos x + \sin(\cos^2 x - \sin^2 x)) = \frac{11}{64}$

$\sin x(2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = \frac{11}{64}$

$\sin x(2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = \frac{11}{64}$

$\sin x(3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = \frac{11}{64}$

$\sin x(3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x) = \frac{11}{64}$

$\sin x(3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x) = \frac{11}{64}$

$3\sin^2 x - \cancel{12}\, 4\sin^4 x = \frac{11}{64}$

$-4\sin^4 x + 3\sin^2 x - \frac{11}{64} = 0$

Сделаем замену $\sin^2 x = t$, причем $t > 0$

$-4t^2 + 3t - \frac{11}{64} = 0$

$D = 9 - 4\cdot(-4)\cdot\left(-\frac{11}{64}\right) = 9 - \cancel{16}\,\frac{11}{\cancel{64}_4} = 9 - \frac{11}{4} = \frac{36-11}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \frac{5}{2}}{-8}$; ~~$t_1 = -3 - \frac{5}{}$~~;

$t_1 = \frac{-3 - \frac{5}{2}}{-8} = -\frac{11}{2} : (-8) = \frac{11}{16}$

$t_2 = \frac{-3 + \frac{5}{2}}{-8} = -\frac{1}{2} : (-8) = \frac{1}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 7 | 3 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Первый случай

$t=\frac{11}{16} \Rightarrow \quad \sin^2 x=\frac{11}{16} \Rightarrow 1-\cos^2 x=\frac{11}{16} \Rightarrow$

$\cos^2 x = 1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{5}{16}} = \cancel{\frac{\sqrt{5}}{4}}$

$\cos^2 x - \frac{5}{16}=0 \quad \cos x=\frac{\sqrt{5}}{4}; \cos x=-\frac{\sqrt{5}}{4}$

Найдем $\cos 3x$ при $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{4}$

1) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x-$
$2\sin x\cos x\sin x=\cos^3 x-\sin^2 x\cdot\cos x-2\sin^2\cos x=$
$\cos^3 x-3(1-\cos^2 x)\cos x=\cos^3 x-3\cos x+3\cos^3 x=4\cos^3 x-3\cos x=$
$4\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^3-3\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{5\sqrt{5}}{16}-\frac{3\sqrt{5}}{4}=-\frac{7\sqrt{5}}{16}$

2) Найдем $\cos 3x$ при $x=-\frac{\sqrt{5}}{4}$

$4\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^3+\frac{3\sqrt{5}}{4}=4\cdot\left(-\frac{5\sqrt{5}}{64}\right)+\frac{3\sqrt{5}}{4}=\frac{-5\sqrt{5}}{16}+\frac{3\sqrt{5}}{4}=$
$\frac{7\sqrt{5}}{16} \Rightarrow$

при $t=\frac{11}{16}$

$\cos x\cos 3x=\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\left(-\frac{7\sqrt{5}}{16}\right)=\frac{-35}{64}.$

$\cos x\cos 3x=-\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\left(\frac{7\sqrt{5}}{16}\right)=\frac{-35}{64} \Rightarrow \cos x\cos 3x=-\frac{35}{64}$ при $t=\frac{11}{16}$.

2) Второй случай $t=\frac{1}{16} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{1}{16} \Rightarrow \cos^2 x=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16} \Rightarrow$

$\cos x=\frac{\sqrt{15}}{4}; \quad \cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}.$

1) при $\cos x=\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos 3x=4\cdot\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^3-3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{15\sqrt{15}}{16}-\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$

2) при $\cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos 3x=4\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=-\frac{15\sqrt{15}}{16}+\frac{3\sqrt{15}}{4}=$
$-\frac{3\sqrt{15}}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 2 1 7 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{45}{64}$. при $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{-3\sqrt{15}}{16} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{45}{64}$ ~~при~~ при $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{64} \Rightarrow$

$\cos x \cos 3x = -\frac{35}{64}$; $\cos x \cos 3x = \frac{45}{64}$

Ответ: $-\frac{35}{64}$; $\frac{45}{64}$;

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 7 | 3 | 5 | 2 | 6 |

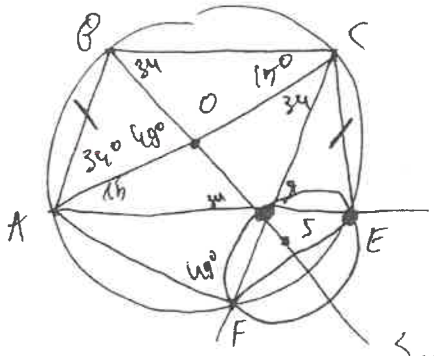
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.



$\angle BCA = 15^0$

$\angle BAC = 34^0 \Rightarrow \angle ABC = 180^0 - 15^0 - 34^0 =$

$180^0 - 49^0 = 131^0 \Rightarrow \angle ADC = 131^0$

Соединим EC и AF, заметим, что $ABCE$ – р/б трапеция, т.к $BC \parallel AE \Rightarrow$

$AB = CE$ и $\angle BAE = \angle CEA = 49^0$

Заметим, что $\triangle ADC \sim \triangle FDE$, т.к

$\angle ADC = \angle FDE$, $\angle ACF = \angle AEF$; $\Rightarrow \triangle FDE \sim \triangle ABC$, т.к $\triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow$ Т.к $\triangle FDE \sim \triangle ADC \Rightarrow$ и они имеют общую точку $D \Rightarrow$ центры описанных окружностей лежат на одной прямой $\Rightarrow$, но. т.к $\triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow$ их центры тоже лежат на одной прямой $\Rightarrow$ центры описанных окружностей т-ов

FDE и ABC – лежат на одной прямой и проходят через точку $D \Rightarrow BS$ – продолжение $BD \Rightarrow$.

Пусть $AC \cap BS = т. O \Rightarrow \angle BOA = 180 - 34^0 - \angle BA\ OBA =$

$146 - (131^0 - 34^0) = 146 - 97^0 = 49^0$

Ответ: 49^0

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	1	7	3	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

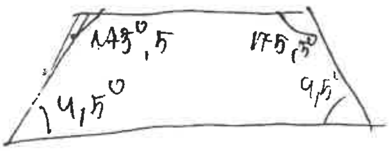
№3

Рассмотрим меньший угол из обр. Δ.

~~180(n-2~~

$\frac{180(n-2)}{n}$, если $n = 80 \Rightarrow 175,5^\circ$

Если трапеции



Т.к два нужных нам угла равны => расстояние до от ~~той~~ ~~части~~ от 3 вершин одинаково, т.е будем продолжать строить р/б Δ и заметим, что количество сторон от угла прямо пропорционально углам треугольника, то есть утверждаем, что $63 = 2,25 \cdot n$

$n = 28$, т.е от угла $= 54^\circ$ отходит на 28 сторон вправо и влево столько же $\Rightarrow 28 \cdot 2 = 56$

Ответ: ~~58~~ 56

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	1	7	3	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5) $\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}=$

$\frac{a^3+b^3}{8ab+(3-c)(3+c)}+\frac{b^3+c^3}{8bc+(3-a)(3+a)}+\frac{c^3+a^3}{8ca+(3-b)(3+b)}\neq$

Из условия $3-c=a+b$
$3-a=b+c \Rightarrow$
$3-b=a+c$

$\frac{a^3+b^3}{8ab+(a+b)(3+c)}+\frac{b^3+c^3}{8bc+(b+c)(3+a)}+\frac{c^3+a^3}{8ac+(a+c)(3+b)}\neq$

т.к из условия следует, что

$3-c=a+b$, $3-a=b+c$, $3-b=a+c$ $\Rightarrow$ $6-c=a+b+3$, $6-a=b+c+3$, $6-b=a+c+3$ $\Rightarrow$ ~~$3a-3+a=6-c-b$~~ ~~$3+c=$~~

$3+c=6-a-b$
$3+a=6-b-c \Rightarrow$
$3+b=6-a-c$

$\frac{a^3+b^3}{8ab+(a+b)(6-a-b)}+\frac{b^3+c^3}{8bc+(b+c)(6-b-c)}+\frac{a^3+c^3}{8ac+(a+c)(6-a-c)}=$

$\frac{a^3+b^3}{6ab+6a+6b-a^2-b^2}+\frac{b^3+c^3}{6bc+6b+6c-b^2-c^2}+\frac{a^3+c^3}{\cancel{8ac}\ 6ac+6a+6c-a^2-c^2}\neq$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского

$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, где x, y – это $a^2, b^2, c^2 \Rightarrow$

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$, $\frac{a^2+c^2}{2}\geq ac$, $\frac{b^2+c^2}{2}\geq bc$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 2 1 7 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Чтобы дроби были минимальными, нужно чтобы знаменатели были максимальные $\Rightarrow$

$ab=\frac{a^2+b^2}{2}$, $ac=\frac{a^2+c^2}{2}$, $bc=\frac{b^2+c^2}{2}\Rightarrow$

$$\frac{a^3+b^3}{6ab+6a+6b-2ab}+\frac{b^3+c^3}{6bc+6b+6c-2bc}+\frac{a^3+c^3}{6ac+6a+6c-2ac}=$$

$$\frac{a^3+b^3}{4ab+6a+6b}+\frac{b^3+c^3}{4bc+6b+6c}+\frac{a^3+c^3}{4ac+6a+6c}=$$

$$\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{4ab+6a+6b}+\frac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{4bc+6b+6c}+\frac{(a+c)(a^2-ac+c^2)}{4ac+6a+6c}$$

Рассмотрим вторые дроби, чтобы дробь была минимальной нужно чтобы числитель был минимальный $\Rightarrow$

a^2-ab+b^2, a^2-ac+c^2, b^2-bc+c^2 - ~~максимальные~~ минимальные. $\Rightarrow$ по неравенству Коши

$\frac{a^2+b^2}{2}=ab$; $\frac{a^2+c^2}{2}=ac$; $\frac{b^2+c^2}{2}=bc\Rightarrow$

$$\frac{(a+b)\left(a^2-\frac{a^2+b^2}{2}+b^2\right)}{4ab+6a+6b}+\frac{(b+c)\left(b^2-\frac{b^2+c^2}{2}+c^2\right)}{4bc+6b+6c}+\frac{(a+c)\left(a^2-\frac{a^2+c^2}{2}+c^2\right)}{4ac+6a+6c}$$

$$\frac{(a+b)\cancel{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)}ab}{4ab+6a+6b}+\frac{(b+c)bc}{4bc+6b+6c}+\frac{(a+c)ac}{4ac+6a+6c}\Rightarrow$$

Вновь воспользуемся Неравенством Коши для $a,b,c\Rightarrow$

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$; $\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$; $\frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 2 1 7 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\frac{2\sqrt{ab}\cdot ab}{4ab+6\sqrt{ab}}+\frac{2\sqrt{bc}\,bc}{4bc+6\sqrt{bc}}+\frac{2\sqrt{ac}\,ac}{4ac+\cancel{6ac+6}\,6\sqrt{ac}}=$$

$$\frac{2ab}{4\sqrt{ab}+6}+\frac{2bc}{4\sqrt{bc}+6}+\frac{2ac}{4\sqrt{ac}+6}=\frac{ab}{2\sqrt{ab}+3}+\frac{\cancel{2}\,bc}{2\sqrt{bc}+3}+\frac{ac}{2\sqrt{ac}+3}=$$

$$\frac{ab}{a+b+3}+\frac{bc}{b+c+3}+\frac{ac}{a+c+3}=\frac{ab}{6-c}+\frac{bc}{6-a}+\frac{ac}{6-b}$$

Как ~~в~~ мы видим, если ~~буда~~ будем увеличивать a, b, c то мы уменьшаем знаменатель $\Rightarrow a, b, c = 1$ — это минимальное

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

Ответ: $\frac{3}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	1	8	0	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	0	12	10	20		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$

используем формулы произведения тригонометрических неравенств:

$\sin x \sin 3x = \frac{(\cos 2x - \cos 4x)}{2} = \frac{5}{16}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

$\cos 4x = 2(\cos 2x)^2 - 1$

подставим

$\cos 2x - 2(\cos 2x)^2 + 1 = \frac{5}{8}$

$-2(\cos 2x)^2 + \cos 2x + 1 = \frac{5}{8} \mid \cdot(-8)$

$16(\cos 2x)^2 - 8\cos 2x - 8 = -5$

$16(\cos 2x)^2 - 8\cos 2x - 3 = 0$

пусть $t = \cos 2x$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$\cancel{t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+}}{}}$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3}{4} \\ t_2 = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{3}{4} \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\cos x \cos 3x = \frac{(\cos 2x + \cos 4x)}{2} = \frac{(\cos 2x + 2(\cos 2x)^2 - 1)}{2}$

при $\cos 2x = \frac{3}{4}$

$\cos x \cos 3x = \frac{7}{16}$

при $\cos 2x = -\frac{1}{4}$

$\cos x \cos 3x = \frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 1 8 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\overset{0}{№3}$

$\frac{360^\circ}{80^\circ} = 4{,}5^\circ$ – 1 угол 80-угольн.

Δ им. ∠∠ 18°, 81° и 81°

пусть вокруг. Δ опис. окр. ⇒ ∠18° опирается на дугу 36°, ∠81° – ~~[illegible]~~ на дугу 162°.

т.к. 1 угол у нас равен $4{,}5^\circ$, то за 8 шагов мы можем выразить дугу 36° ($36 : 4{,}5 = 8$). Таким же способом находим дугу 162° за 270 шагов.

Теперь обозначим все вершины от 1 до 79 и составим наборы вершин $\{a; b; c\}$, где

$$b \equiv a + 36 \pmod{80}$$
$$c \equiv a - 36 \pmod{80}$$
$$|b - c| = 8 \pmod{80}$$

$\Rightarrow (a+36) - (a-36) = 72 \equiv -8 \pmod{80}$

так что $|b-c| \equiv 8$ ~~а~~ $\{a; a+36; a-36\} \pmod{80}$, где разность между крайними вершинами равна ±8 по модулю 80. В множестве S вершин не может быть такой „равнобедренной" тройки с шагом ±36 от центральной. Имеем граф на 80 вершин, который бьётся на ~~[illegible]~~ тройки $\{a; a+36; a-36\}$ ~~[illegible]~~, где $a \in 80$. Для любого a не могут принадлежать S оба элемента $a+36$ и $a-36$. последовательность $a, a+36, a+72 \Rightarrow a+108 \equiv a+28 \Rightarrow$ образуются циклы ~~а~~ $80/4 = 20$.

Лист 2 из ~~4~~5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	2	1	8	0	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

выражение симметрично

$\Rightarrow$ найдём выражение вида $a=b=c$; $S=\frac{6}{5}$

$$a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2}$$

достигается при $a^2=b^2$

$$ab \leq \frac{(a^2+b^2)}{2} \Rightarrow 4ab \leq 2(a^2+b^2)$$

равенство достигается при $a=b$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{\frac{(a^2+b^2)^2}{2}}{c^2+2(a^2+b^2)}$$

обозначим $x=a^2+b^2$

$\Rightarrow c=3-x$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{\frac{x^2}{2}}{3-x+2x}$$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{x^2}{2(3+x)}$$

аналогично $y=b^2+c^2$

$z=c^2+a^2$

$$\Rightarrow S \geq \frac{x^2}{2(3+x)}+\frac{y^2}{2(3+y)}+\frac{z^2}{2(3+z)}$$

рассмотрим ф-цию $f(t)=t^{\frac{2}{3}}+t$ на интерв. $(0;3)$

данная ф-ция выпукла вниз $\Rightarrow$ ~~по теор. Йенс~~

по теор. Йенсена $\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

$x+y+z=2(a^2+b^2+c^2)=6$

$\Rightarrow f(x)+f(y)+f(z) \geq 3\cdot\frac{4}{5} \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}=\frac{6}{5} \Rightarrow$ значение достигается при $a=b=c$ и $S \geq \frac{6}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 1 8 0 8 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

т.к. $pr \equiv 1 \pmod{pr-1}$

$\Rightarrow p \equiv \frac{1}{r} \pmod{pr-1}$

подставим в $q^2p \Rightarrow q^2p \equiv \frac{q^2}{r} \pmod{pr-1}$

по усл. $q^2p \equiv 1 \pmod{pr-1} \Rightarrow \frac{q^2}{r} \equiv 1 \pmod{pr-1}$

$q^2 \equiv r \pmod{pr-1}$

$r = q^2 + k(pr-1)$, где k – цел. числ. $k \geq 0$

1) если $k=0$

$r = q^2$

2) если $k \geq 1$

$r \geq q^2 + pr - 1$

при $p \geq 2$ и $r \geq 1$

$\Rightarrow pr-1 > r \Rightarrow$ не уд. усл.

Если каждое из 3-х условий выполняется, то из каждого усл. следует, что одно из них точный квадрат.

ч.т.д.

№3 (продолжение) В каждом цикле длины 20 мы находим такие ~~звена~~ вершины, чтобы между ними не было шагов ± 36 два ~~звена~~ элемента x и y связаны ребром, и нельзя выбрать 2 соседних элемента. Значит для $20: 20:2=10$. У нас 4 цикла по 10 вершин $\Rightarrow 4 \cdot 10 = 40$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	1	8	0	8	2	6

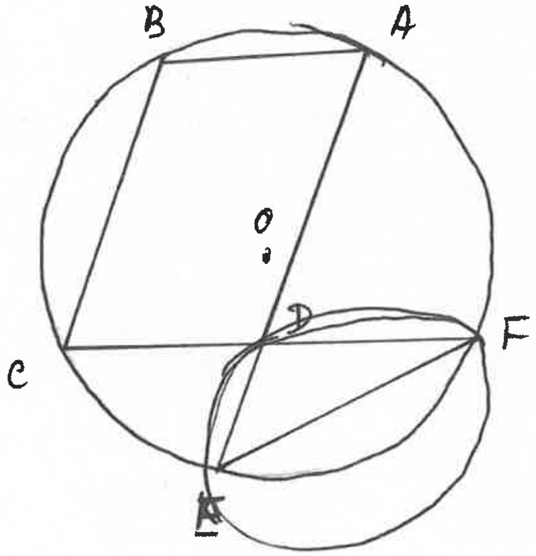
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 6 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

задание №1

используем формулу произведения:

$\sin x \sin 3x = (1/2)[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)]$

по условию:

$(1/2)(\cos 2x - \cos 4x) = 5/16 \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 5/8$

Обозначим $t = \cos 2x$ тогда $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2t^2 - 1$

Подставим:

$t - (2t^2 - 1) = 5/8$

$t - 2t^2 + 1 = 5/8$

$-2t^2 + t + 3/8 = 0$

Умножим на 8:

$-16t^2 + 8t + 3 = 0$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

Решение:

$t = (8 \pm \sqrt{(64+192)})/32 = (8 \pm 16)/32$

Отсюда: $t_1 = 3/4$, $t_2 = -1/4$

Теперь найдем $\cos x \cos 3x$

Используем формулу

$\cos x \cos 3x = (1/2)[\cos(x-3x) + \cos(x+3x)] =$

$= (1/2)(\cos 2x + \cos 4x)$

А $\cos 4x = 2t^2 - 1$ значит $\cos x \cos 3x =$

$= (1/2)(t + 2t^2 - 1)$

1. при $t = 3/4$

$\cos x \cos 3x = (1/2)(3/4 + 2 \cdot 9/16 - 1) =$

$= 7/16$

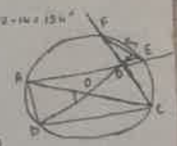
2. при $t = -1/4$

$\cos x \cos 3x = (1/2)(-1/4 + 2 \cdot 1/16 - 1) =$

$= -9/16$

Ответ: $\cos x \cos 3x = 7/16$ или $-9/16$

задание №2.



1. ∠ABC в треугольнике ABC: ABC = 180 − BAC − BCA = 180 − 32 − 14 = 134°

2. т.к. ABCD - параллелограмм то AD∥BC значит тогда ∠BAE = ∠ между BA и BC, то есть равен ∠ABC

∠BAE - вписанный в окружность (ABC), он стягивает дугу BE и значит меньшая дуга BE равна 360 − 2·134 = 92°

3 Аналогично.

CD∥AB значит CF∥AD тогда ∠BCF = ∠ между BC и BA то есть тоже 134°. Следовательно меньшая дуга тоже 92° отсюда следует, что хорды BE и BF равны

4 Если BE = BF, то точка B лежит на серединном перпендикуляре к отрезку EF

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA00022063 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~задание №6.~~

~~Обозначим~~

$\cancel{E = \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}}$

~~при $a, b, c > 0$ и $a^2+b^2+c^2=3$~~

~~Для любых x, y верно: $x^4+y^4 \geq (x^2+y^2)^{\frac{2}{2}}$~~

4\. Центр окружности ΔABC (обозначим его O) тоже лежит на единичном перпендикуляре к EF, потому что $OE = OF$

значит прямая BO и есть серед. перпендикуляр к EF

точка S - центр опис. окружности треугольника DEF, значит

есть S тоже лежит на серединном перпендикуляре к EF

Следовательно B, O, S лежат на одной прямой то есть

BS - это та же прямая что и BO

Значит $\angle$ между AC и BS = $\angle$ между AC и BO

5 Найдем $\angle$ между AC и BO

Центр $\angle AOB$ равен $2 \cdot \angle ACB = 2 \cdot 14 = 28°$

Центр $\angle BOC$ равен $2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot 32 = 64°$

тогда центр. $\angle AOC$ (меньший) равен $28 + 64 = 92°$

пусть M - середина хорды AC. ~~[illegible]~~

тогда $OM \perp AC$ и делит $\angle AO$ пополам

Значит $\angle AOM = 46°$

$\angle BOM = AOM - AOB = 46 - 28 = 18°$

т.к. $OM \perp AC$, то $\angle$ между BO и AC равен $90 - \angle BOM = 72°$

Ответ: 72 градуса

задание №4 (продолжение)

невозможно при $p, q, r \geq 2$

Противоречие. Значит наше [illegible] неверно, и хотя бы одно из равенств $q^2 = r$ или $p^2 = q$ или $r^2 = p$ выполняется

Ответ: итак, хотя бы одно из p, q, r - точный квадрат

Вариант № 4 М А 0 0 0 2 2 0 6 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ!! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке сверху

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

задание № 3.

Нумерация вершин 0, 1, ..., 79

Центральный угол между соседними $360/80 = 4{,}5°$

треугольник 18°, 81°, 81° вписан в окружность значит соответствующие центральные углы к его сторонам 36°, 162°, 162° (вдвое больше)

В „шагах" по вершине АМ это $36/4{,}5 = 8$ и $162/4{,}5 = 36$

Значит запрещены тройки вершин, где попарные кратчайшие расстояния по кругу равны 8, 36, 36. Если взять две вершины t и $t+8$, то ед. 3 вершина на расстоянии 36 от обеих это $t+44$ (по модулю 80) Итак запрещенная тройка $\{t, t+8, t+44\}$

Замечание: 8 и 44 делятся на 4, поэтому в любой запрещенной тройке все вершины имеют один и тот же остаток mod 4. Значит задача распадается на 4 независимых класса по остаткам mod 4, в каждом по 20 вершин

Внутри одного класса перенумеруем вершины как $k = 0, \ldots, 19$ (реальная вершина $= r + 4k$)

Тогда +8 соответствует +2, а +44 соответствует +11, и запрещенные тройки имеют вид $\{k; k+2, k+11\}$ по модулю 20.

В одном классе таких троек 20 (по одному на каждое k) Чтобы не было запрещенной тройки среди отмеченных, в каждой тройке должна быть хотя бы одна неотмеченная вершина. Каждая вершина входит ровно в 3 такие тройки (как $k, k+2, k+11$) значит t неотмеченных вершин перекрывает максимум $3t$ троек. Нужно перекрыть 20 троек, значит $3t \geq 20$ то есть $t \geq 7 \Rightarrow$ отмеченных не больше $20 - 7 = 13$, а всего не больше $4 \cdot 13 = 52$

Ответ 52.

задание № 4

Дано:

1. $pr-1 \mid pq^2-1$
2. $qr-1 \mid p^2r-1$
3. $pq-1 \mid r^2q-1$

1. из 1) (mod $pr-1$) домножив на r $pq^2r \equiv r \pmod{pr-1}$. т.к. $pr \equiv 1 \pmod{pr-1}$, то $pq^2r \equiv q^2 \pmod{pr-1}$

Значит $q^2 \equiv r \pmod{pr-1}$ то есть $pr-1 \mid q^2-r$ (A)

Аналогично: $qr-1 \mid (p^2-q)$ (B) $pq-1 \mid (r^2-p)$ (C)

2 Если $q^2 = r$ или $p^2 = q$ или $r^2 = p$ — сразу есть квадр. Иначе все разности в (A) (B) (C) ненулевые. Также если $p=1$ или $q=1$ или $r=1$ — квадрат по этому считаем $p, q, r \geq 2$

3 Покажем что разности положительные

из (A). $pr-1$ делит (q^2-r). Если бы $q^2-r<0$, то $0 < r - q^2 < r < pr-1$ (т.к. $p \geq 2$) но иногда $pr-1$ не может делить $r-q^2$ Противоречие. Значит $q^2-r>0$ Аналогично. $p^2-q>0$ и $r^2-p>0$

4 Тогда, поскольку это положительные кратности. $q^2-r \geq pr-1 \Rightarrow q^2+1 \geq r(p+1)$

$p^2-q \geq qr-1 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $r^2-p \geq pq-1 \geq r^2+1 \geq p(q+1)$

$p^2+1 \geq q(r+1)$

Перемножим $(p^2+1)(q^2+1)(r^2+1) \geq pqr(p+1)(q+1)(r+1)$.

Но для любого $x \geq 1$ верно: $x^2+1 \leq x(x+1)$

перемножая для p, q, r получаем $(p^2+1)(q^2+1)(r^2+1) \leq pqr(p+1)(q+1)(r+1)$

6 Из выше сказанного следует: Тогда в нерав. $x^2+1 \leq x(x+1)$ должно быть равенство для каждого из p, q, r, то есть $p=q=r$, что

задание № 5

Обозначим: $F = \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$ при $a, b, c > 0$ и $a^2+b^2+c^2=3$

Для любых x, y верно: $x^4+y^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$

Значит:

$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2(c^2+4ab)}$ и аналогично для остальных пар

Поэтому $F \geq 1/2 \cdot \left[\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab} + \frac{(b^2+c^2)^2}{a^2+4bc} + \frac{(c^2+a^2)^2}{b^2+4ca}\right]$

2 Применим неравенство Коши (в форме Энгеля)

где $x_1 = a^2+b^2$, $d_1 = c^2+4ab$

$x_2 = b^2+c^2$, $d_2 = a^2+4bc$

$x_3 = c^2+a^2$, $d_3 = b^2+4ca$

Тогда $F \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{((a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2))^2}{(c^2+4ab)+(a^2+4bc)+(b^2+4ca)}$

Считаем суммы:

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)(c^2+a^2) = 6$

$(c^2+4ab)+(a^2+4bc)+(b^2+4ca) = 3+4S$

где $S = ab+bc+ca$

Значит: $F \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{3+4S} = \frac{18}{3+4S}$

3. ~~Оценим~~ Оценим S сверху $S \leq 3$

Тогда $3+4S \leq 3+12 = 15$, и поэтому $F \leq \frac{6}{5}$

4 Равенство достигается при $a=b=c$

Тогда $F = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

Ответ: наименьшее знач. $\frac{6}{5}$, достигается $a=b=c=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 6 | 8 | 3 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	—	20	—		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

Дано: $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$ Найти: $\cos x \cdot \cos 3x$.

1) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

~~cos(α~~

Тогда $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(3x-x) - \cos(3x+x)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \cancel{\frac{5}{16}}\ \cancel{\frac{10}{16}} = \cancel{\frac{5}{8}}\ \frac{5}{16}$

2) $\cos 2x - \cos 4x = \frac{10}{16}$

$\boxed{\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos(3x-x) + \cos(3x+x)) =$

$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$.

3.) $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

Пусть $t = \cos 2x$

$\cos 4x = 2t^2 - 1$.

Подставим:

$t - (2t^2 - 1) = \frac{5}{8}$.

$t - 2t^2 + 1 = \frac{5}{8}$.

$2t^2 - t - \frac{3}{8} = 0$

$D = 4$.

$t = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$ $t = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$.

Оба корня подходят.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 6 | 8 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.) $\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

$\cos 4x = \cos 2x - \frac{5}{8}$

$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2x - \frac{5}{8}) = \frac{1}{2}(2\cos 2x - \frac{5}{8}) = \cancel{\cos 2x - \frac{5}{16}}.$

$\cos 2x - \frac{5}{16}$

Если $t = \frac{3}{4}$, то искомые значение:

$\frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{12}{16} - \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$.

Если $t = -\frac{1}{4}$, то

$-\frac{1}{4} - \frac{5}{16} = -\frac{4}{16} - \frac{5}{16} = -\frac{9}{16}$.

Ответ: $-\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$.

№4.

Дано: p, q, r – натуральные числа

$q^2p - 1 \vdots pr - 1$; $p^2r - 1 \vdots qr - 1$; $r^2q - 1 \vdots pq - 1$.

Док-ть: хотя бы одно из чисел p, q, r – полный квадрат.

Док-во:

1.) Если $a \vdots b$, то $ak \vdots b$.

Рассмотрим условие $pr - 1 \mid q^2p - 1$

Домножим делимое на r.

$r(q^2p - 1) = q^2pr - r$.

Лист 1 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 6 | 8 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Заметим, что

$q^2(pr-1+1)-r =$

$= q^2(pr-1) + q^2 - r$

Значит $pr-1 \mid q^2-r$.

Аналогично другим условиям:

$pr-1 \mid q^2-r$

$qr-1 \mid p^2-q$

$pq-1 \mid r^2-p$

2.) От обратного: пусть ни одно из чисел p, q, r не является точным квадратом.

$q^2-r \neq 0, p^2-q \neq 0, r^2-p \neq 0$.

Пусть $p \geq q$, $q \geq r$.

3.) Рассмотрим условие, что $pq-1 \mid r^2-p$

Т.к. $r^2-p \neq 0$, то возможно 2 случая:

1. $r^2-p<0$.

$r^2<p$.

Тогда делитель $pq-1$ небольше модуля делимого $(p-r^2)$

$pq-1 \leq p-r^2 < p \Rightarrow pq \leq p \mid :p \ (p>0)$

$q \leq 1$, тогда $q=1$, но $1^2=1$ — противоречие.

2. $r^2-p>0$

$r^2>p$.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

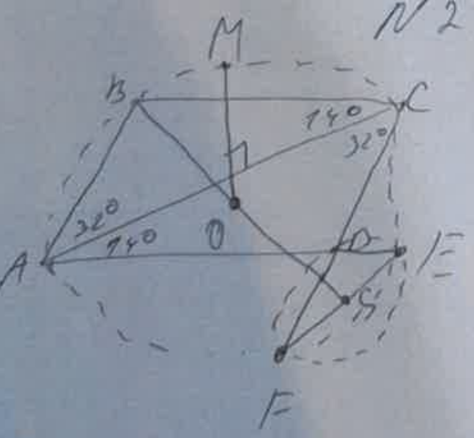
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$p(q+1) \le r^2+1$.
Заменим p на r для оценки:
$r(q+1) \le r^2+1$
$q+1 \le r+\frac{1}{r}$.
Т.к. $r \ge 2$, то $\frac{1}{r}<1$.
$q+1<r$
$\boxed{q<r}$

4.) Рассмотрим условие $pr-1 \mid q^2-r$. $q^2-r \ne 0$
Если $q^2-r<0$, то $pr-1 \le r-q^2<r \Rightarrow p=1$ – противоречие
Если $q^2-r>0$, то $r^2-1 \le q^2-r$
$r^2+r-1 \le q^2 \Rightarrow r \ge 2 \Rightarrow q>r$.

5.) $q<r$ (шаг 3), $q>r$ (шаг 4) – противоречие
Значит, хотя бы одно из чисел p, q, r – точный квадрат

№2



Дано: ABCD – параллелограмм
$\angle BAC = 32°$,
$\angle BCA = 14°$.
w_1 – окр, описанная около $\triangle ABC$ O – её центр
$w_1 \cap CD = F$, $w_1 \cap AD = E$.
w_2 – окр, описанная около $\triangle DEF$ S – её центр.

Найти: $\angle(AC; BS)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 6 | 8 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Решение:

1.) $\angle ABC = 180° - 32° - 14° = 134°$

$\cup BC = 2\cdot 32° = 64°$

$\cup AB = 2\cdot 14° = 28°$

$\cup ABC = 64° + 28° = 92°$

2.) $AD \parallel BC \Rightarrow \angle CAD = \angle BCA = 14°$ (накрест. леж.)

$\cup CE = 2\cdot 14 = 28°$

$AB \parallel CD \Rightarrow \angle BAC = \angle ACF = 32°$.

$\cup AF = 2\cdot 32° = 64°$

3.) ~~$\cup BE = \cup BCE = 92°, \cup BF =$~~

$\cup BCE = 92°$; $\angle BAF = 92° \Rightarrow B$ - середина $\cup FBE$

OB - серединный перпендикуляр к $FE \Rightarrow$

$\Rightarrow B, O, S$ лежат на одной прямой.

BS - сер. пер. к EF

$\angle(AC; BS) = \angle(AC; OB)$

4.) Пусть M - середина $\cup AC$. $\cup AM = \cup MC = 46°$

$\angle BOM = 46° - 28° = 18°$

$OM \perp AC \Rightarrow \angle(AC; OB) = 90° - \angle BOM$

$\angle(AC; OB) = 90° - 18° = 72°$.

$\angle(AC; BS) = 72°$.

Ответ: $72°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 2 8 0 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	—	12	—	20		52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. $\sin x \cdot \sin 3x = \sin 3x \cdot \sin x = \frac{\cos(3x-x) - \cos(3x+x)}{2} =$

$= \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \frac{\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1}{2}$

$\frac{\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{5}{8}$

Пусть $\cos 2x = t$, $t \in [-1; 1]$.

$t - 2t^2 + 1 = \frac{5}{8} \quad |\cdot(-1)$

$2t^2 - t - 1 + \frac{5}{8} = 0$

$2t^2 - t - \frac{3}{8} = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = 4$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{1}{4} \\ t_2 = \frac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\frac{1}{4} \\ \cos 2x = \frac{3}{4} \end{array}\right.$

$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 3x \cdot \cos x = \frac{\cos(3x-x) + \cos(3x+x)}{2} =$

$= \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1}{2}$

Подставляем

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{-\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} - 1}{2} = \frac{-2 + 1 - 8}{8 \cdot 2} = -\frac{9}{16}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{9}{16} - 1}{2} = \frac{6 + 9 - 8}{8 \cdot 2} = \frac{7}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	2	8	0	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

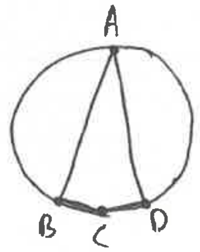
1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Ответ: $-\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$

3 Так как 80-угольник правильный, около него можно описать окружность. Также так как 80 : 2, каждой вершине многоугольника будет соответствовать вершина, симметричная относительно центра описанной окружности. ~~А~~ И каждый угол 80-угольника будет равен $\frac{180\cdot(80-2)}{80} = \frac{180\cdot 78}{80} = 175{,}5°$

Рассмотрим окружность и точки A, B, C и D, лежащие на ней, где A симметрична C относительно центра окружности, а B и D — соседние вершины C. (A, B, C, D — вершины правильного 80-угольника)



$\angle BCD = 175{,}5° \Rightarrow \smile BAD = 175{,}5°\cdot 2 = 351°$ (по св впис углa) $\Rightarrow \smile BCD = 360° - 351° = 9° \Rightarrow \angle BAD = 4{,}5°$

А угол треугольника будет равен 18°, если он будет опираться на дугу в 36°, т. е. необходимо, чтобы ~~точка~~ вершина B переместилась на 3 вершины и точка D аналогично.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

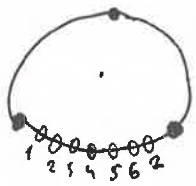
Вариант № 1 | Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ): МА00022803 26

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Т.е. нельзя, чтобы одновременно были ~~зачеркн~~ отмечены вершины, как на рисунке ниже



Т.е. чтоб максимизировать ~~1 сторон~~ отметки 39 вершин, лежащих в одной полуплоскости, относительно произвольного диаметра, 2 вершины, являющиеся концами диаметра и $+\frac{7}{2}$, но при округлении в меньшую сторону + 3 вершины, которые были всего и отмечены $\Rightarrow$ максимальное $39+2+3=44$

Ответ: 44.

2 Ответ: 30°.

5 $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$

Рассмотрим $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}$:

$\sim(a^4+b^4)$ и $\sim\frac{1}{c^2+4ab}$ $\Rightarrow$ при a^4+b^4 min значение min, а при c^2+4ab max, тоже min.

Из неравенства Коши:

$a^4+b^4 \geq \cancel{2a}\ 2a^2b^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	2	8	0	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Аналогично:

$b^4+c^4 \geq 2b^2c^2$ и $c^4+a^4 \geq 2a^2c^2$

$$\frac{2a^2b^2}{c^2+4ab}+\frac{2b^2c^2}{a^2+4bc}+\frac{2a^2c^2}{b^2+4ac}$$

Рассмотрим

$a^2+b^2+c^2=3$

$a=\sqrt{3-b^2-c^2}$

$b=\sqrt{3-a^2-c^2}$

$c=\sqrt{3-b^2-a^2}$

Подставляя, получаем, что при $a=b=c$ значение

$\min \Rightarrow a=1,\ b=1,\ c=1.$

$\min=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=1{,}2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	2	8	6	2	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
12	20	–	–	20		52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$ $\quad \cos x \cdot \cos 3x = ?$

$\sin 3x \cdot \sin x = \frac{\cos(3x-x) - \cos(3x+x)}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$; $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{5}{8}$; $2\cos^2 2x - \cos 2x - \frac{3}{8} = 0 \mid \cdot 8$

$16\cos^2 2x - 8\cos 2x - 3 = 0$. Пусть $\cos 2x = t$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = 64 + 192 = 256 = 16^2$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{8+16}{32} = \frac{3}{4}, \\ t_2 = \frac{8-16}{32} = -\frac{1}{4}. \end{array} \right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{3}{4}, \ (1) \\ \cos 2x = -\frac{1}{4}. \ (2) \end{array} \right.$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\cos(3x-x) + \cos(3x+x)}{2} = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2}$; $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

(1) $\cos 2x = \frac{3}{4}$:

$\cos 4x = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$; $\boxed{\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{2} = \frac{7}{16}.}$

(2) $\cos 2x = -\frac{1}{4}$:

$\cos 4x = 2 \cdot \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$; $\boxed{\cos x \cdot \cos 3x = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{7}{8}}{2} = -\frac{9}{16}}$

не подходит, т.к. $\sin x \cdot \sin 3x > 0$ (и попрактически получится отрицательное). Значит, единственный ответ: $\frac{7}{16}$.

Ответ: $\frac{7}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 2 8 6 2 2 6

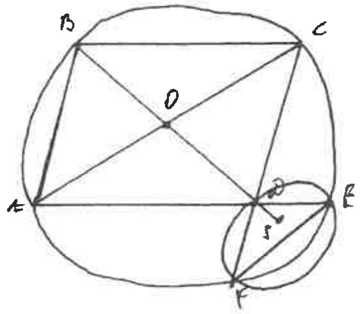
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



$\angle BAC = 32^\circ$

$\angle BCA = 14^\circ$

$\angle(AC; BS) - ?$

$\angle ABC = 180^\circ - (32^\circ + 14^\circ) = 134 \Leftrightarrow \cup ADC = 2 \cdot 134 = 268^\circ$, $\cup AC = 92^\circ$

$\cup AB = 2\angle BCA = 2 \cdot 14^\circ = 28^\circ$.

$\cup CE = \cup AB = 28^\circ \Leftrightarrow \cup EB = \cup BC + \cup CE = 264^\circ + 28^\circ = 292^\circ$

$\cup AF = \cup BC = 264^\circ \Leftrightarrow \cup FB = \cup AF + \cup AB = 64^\circ + 28^\circ = 92^\circ$

Т.к. $\cup EB = \cup FB$, то т. B лежит на серединном перпендик. к хорде EF. Центры окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ также лежат на перпендик. $\Leftrightarrow$
$\Rightarrow$ т. B, O, S — лежат на одной прямой. $\Leftrightarrow \angle(AC; BS) = \angle(AC; OB)$

$\angle OAC = \frac{180^\circ - 92^\circ}{2} = 44^\circ$

$\angle AOD = \cup AB = 28^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle(AC; OB)$ — равен внешнему углу $\triangle$, образованного пересечением AC и OB.

$\angle(AC; OB) = 44^\circ + 28^\circ = 72^\circ$.

Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000228б226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ac} \qquad a^2+b^2+c^2=3; \quad a^2+b^2=3-c^2$$

Оценю числитель и знаменатель каждой дроби:

Числ: $a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{4}$

Знам: $2ab \leq a^2+b^2 \Rightarrow 4ab \leq 2(a^2+b^2)$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2}{c^2+2(a^2+b^2)} = \frac{(a^2+b^2)^2}{2(c^2+2a^2+2b^2)}; \quad \frac{(3-c^2)^2}{2(c^2+2(3-c^2))} = \frac{(3-c^2)^2}{2(6-c^2)}$$

Пусть $6-c^2=x \Rightarrow 3-c^2=x-3$

$x_a=6-a^2$

$x_b=6-b^2 \quad x_a+x_b+x_c=\sum x = 18-(a^2+b^2+c^2) = 15.$

$x_c=6-c^2$

$f(x)=\frac{(x-3)^2}{2x}=\frac{x^2-6x+9}{2x}=\frac{x}{2}-3+\frac{9}{2x};$

S – сумма.

$$S \geq \sum\left(\frac{x_a}{2}-3+\frac{9}{2x_a}\right)=\frac{1}{2}\sum x-9+\frac{9}{2}\sum\frac{1}{x}=\frac{15}{2}-9+\frac{9}{2}\sum\frac{1}{x}$$

Из следствия из неравенства Коши-Буняковского, о сумме обратных величин.

$$\sum\frac{1}{x} \geq \frac{9}{\sum x}; \quad S \geq -1{,}5+\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{15}=-1{,}5+2{,}7=\underline{1{,}2}.$$

Равенство при $a=b=c=1$.

Ответ: 1,2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	3	0	9	5	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
6	20	20	8	20		74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{3}{16}$

$-2\cos^2 2x + \cos 2x + 1 = \frac{3}{8}$

$16\cos^2 2x - 8\cos 2x - 5 = 0$

$\cos 2x = \frac{8 \pm \sqrt{64+320}}{32} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{4}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{7 \pm 2\sqrt{6}}{16} + \frac{1 \pm \sqrt{6}}{4} - 1\right) = \frac{1 \pm 4\sqrt{6}}{16}$

Ответ: $\frac{1 \pm 4\sqrt{6}}{16}$

4. $q \le p \le r$ без ограничения общности

$q^2 p - 1 \vdots pr - 1$

$\Downarrow$

$q^2 p - pr \vdots pr - 1 \qquad q^2 - r \vdots pr - 1$

$q^2 \le pr \qquad -r \le -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^2 - r \le pr - 1 \Rightarrow q^2 - r = pr - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = p = r = 1$, не подходит по условию

$\Rightarrow q^2 - r = 0 \Rightarrow r$ - точный квадрат

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА000230952 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

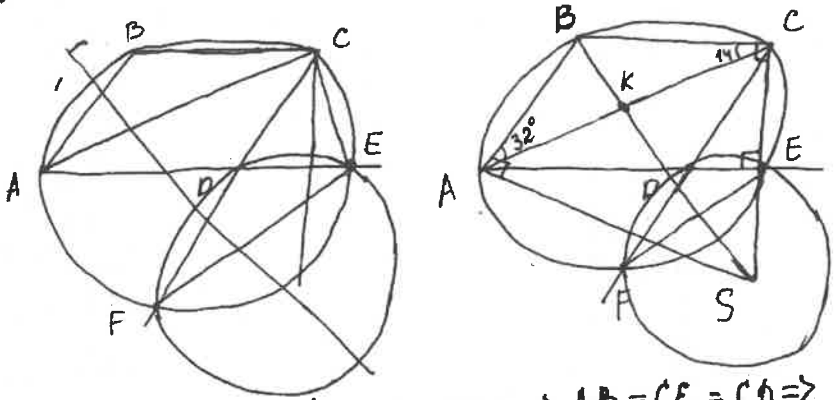
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Углы 18° и 81° соответствуют дугам в 8 и 36 промежутков между точками. Т.к. $((8,36),80)=4$, то задача равносильна задаче на 20угольнике, с умножением ответа на 4.

Пронумеруем точки от 0 до 19. Нельзя брать тройки $(x, x+9, x+18)$, если все номера берутся по модулю умножим все номера на $9^{-1} \pmod{20}$ значит нельзя брать точки $(x, x+1, x+2) \Rightarrow$ максимум 13 (0, 1, 3, 4 и т.д.) $\Rightarrow$ всего $13 \cdot 4 = 52$

Ответ: 52

2.



$ABCE$ - трапеция, причем вписанная $\Rightarrow AB = CE = CD \Rightarrow$ CE сер. пер. к DE, как и $S \Rightarrow CS \perp DE$, $CS \perp BC$, аналогично $AS \perp AB \Rightarrow S$ - диаг. противоположн. т-ка т-ке B.

$K = AC \cap BS$. $\angle AKB = \angle ACB + \angle CAS = 14^\circ + (90^\circ - 32^\circ) = 72^\circ$

Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 2 3 0 9 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5. При $a=b=c=1$

$a^2+b^2+c^2=3$ достигается значение $\frac{6}{5}$

Заметим, что $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2$

$c^2+4ab \leq c^2+2a^2+2b^2=3+a^2+b^2$

$\Rightarrow \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2+b^2)^2}{3+a^2+b^2}$

$a^2+b^2=x$, $a^2+c^2=y$, $b^2+c^2=z$

Итого имеем: $x+y+z=6$

Исходное уравнение: $\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{3+x}+\frac{y^2}{3+y}+\frac{z^2}{3+z}\right)$

$f(x)=\frac{x^2}{3+x}$

$f'(x)=\frac{2x}{3+x}-\frac{x^2}{(3+x)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$

$f''(x)=\frac{2x+6}{(x+3)^2}-\frac{2(x^2+6x)}{(x+3)^3}=\frac{2x^3+6x+6x+18-2x^2-12x}{(x+3)^2}=$

$=\frac{18}{(x+3)^3} \geqslant 0$, при $x>0$

$\Rightarrow$ можно применить неравенство Йенсена

$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{3+x}+\frac{y^2}{3+y}+\frac{z^2}{3+z}\right) \geqslant \frac{3}{2} f\left(\frac{6}{3}\right)=\frac{3}{2} f(2)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	3	2	5	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	8	12	—	20		56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$

По триг. формуле: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Тогда

$\sin^2 x(3 - 4\sin^2 x) = \frac{5}{16} \quad | \cdot 16$

$64\sin^4 x - 48\sin^2 x + 15 = 0$ — биквадратное уравнение

Решим относительно $\sin^2 x$:

$D_1 = 24^2 - 64 \cdot 5 = 576 - 320 = 256 = 16^2$

$\sin^2 x = \frac{24 \pm 16}{64} = \left[\begin{array}{ll} \frac{5}{8} & (1) \\ \frac{1}{8} & (2) \end{array}\right.$

По осн. тр. тождеству:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

(1) $\cos^2 x = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$

$\cos x \cdot \cos 3x = (4\cos^3 x - 3\cos x) \cdot \cos x = \cos^2 x(4\cos^2 x - 3) =$

$= \frac{39}{64}\left(4 \cdot \frac{39}{64} - 3\right) = \frac{39}{64} \cdot \left(\frac{39 - 48}{16}\right) = \frac{39 \cdot (-9)}{64 \cdot 16}$

$= -\frac{351}{1024}$

(2) $\cos^2 x = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \cos^2 x(4\cos^2 x - 3) = \frac{63}{64}\left(\frac{63}{16} - \frac{48}{16}\right) =$

$= \frac{63}{64}\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{945}{1024}$

Ответ: ~~$\sin x \cdot \sin 3x \in$~~ $\cos x \cdot \cos 3x \in \left\{-\frac{351}{1024}; \frac{945}{1024}\right\}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	2	3	2	5	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3

Рассмотрим прав. 80-угольник:

~~Угол~~ $\alpha = \frac{180° \cdot (80-2)}{80}$ (из формулы суммы углов фигуры, с учетом равн. углов)

$\alpha = \frac{18 \cdot 78}{8} = \frac{9 \cdot 39}{2} = \frac{351°}{2}$

На описанной окружности — вершины прав. многоуг. делят ее на равные доли (св. пр. мн.), а значит и каждый угол k-угольника (правильного) — равночие $\frac{k-2}{k} \cdot \frac{360°}{2}$ — т.е. $k-2$ равными долями по $\frac{180°}{k}$. Значит, чтобы 3 вершины прав. 80-угольника образов. угол β — $\beta = \alpha \cdot \frac{k_i}{(k-2)}$ где $k_i \in N$

Тогда $\beta = 81°$:

$81° = \frac{351°}{2} \cdot \frac{k_i}{78}$

$9^2 = \frac{9 \cdot 39 \cdot k_i}{2 \cdot 2 \cdot 39} \Rightarrow \underline{k_i = 36}$

Тогда $\beta = 18°$ для k_j:

$18° = \frac{351°}{2} \cdot \frac{k_j}{78}$

$2 \cdot 9 = \frac{9 \cdot 39 \cdot k_j}{2 \cdot 2 \cdot 39} \Rightarrow k_j = 8$

Если мы уберем все т., с которыми получался бы $\beta = 81°$, что ~~[illegible]~~ гарант. не получ. искомый треуг.

$k_i > k_j \Rightarrow$ если убрать ~~для~~ k_i, убер. меньше точек.

Если убирать минимально — получится повт. через $2k_i$ точек:

$1 - k_i$ — образ. менее k_i промеж. - остав.

$k_i+1 - 2k_i$ — если их не убрать, получ. иск. угол с т. из $1-k_i$ - убр.

~~2~~ 1 цикл — 1 по 72 точки. — останутся 36 точек

(~~[illegible]~~ по 80 не может быть точек. т.к. они обр. угол. Итого 36 точек всего, если не допус. $\beta = 81°$

Лист 2 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 2 | 5 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

$8 \cdot 10$ т.к. мы потеряли 8 точек из-за остатка ~~от~~ 80 на 42

Тогда $k_i=8$ — здесь оптимальный цикл с периодом 16

$80 = 16 \cdot 5$ — ровно 5 циклов — значит $5 \cdot 8 = 40$ точек останется

рассмотрим последний и первый цикл.

С 43 по 80 не ставим точки, а значит между 42 и 1 дуга в 4 отрезков дуги — т.е. условие сохранено

$40 > 36$ — значит и $k_i=8$ — оптимален здесь.

Если добавить любую точку, то образуется угол 43°, а значит будет р/б треугольник, удовл. условию.

По этому ответ: 40 точек.

№5.

$$S = \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

a^4+b^4: по биному Ньютона: $a^4+b^4 = (a-b)^4 + 2(3a^2b^2 - 2(a^2+b^2)) =$

$= (a^2+b^2-2ab)^2 + 2(3a^2b^2 - 2(a^2+b^2)) =$

Пусть $ab = x$: $c^2+4ab = c^2+4x$ $\quad = (3-c^2-2ab)^2 + 6a^2b^2 - 6 + c^2$

$$9 + c^4 - 6c^2 + 4x^2 - 4x(3-c^2) + 6x^2 - 6 + c^2$$

$$c^4 - 4x(-c^2) = c^2(c^2+4x)$$

$$9 - 6c^2 + 4x^2 - 12x + 6x^2 - 6 = -6(c^2+4x) + 12x + 9 + 4x^2 + 6x^2 - 6$$

$$10x^2 + 12x + 3$$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} = c^2 - 6 + \frac{12ab + 3 + 10a^2b^2}{c^2+4ab}$$

По аналог. с другими слагаемыми: $S = 3 - 18 + \frac{12ab+3+10a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{12bc+3+10b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{12ca+3+10c^2a^2}{b^2+4ca}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	2	3	2	5	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5

$$S = -15 + \frac{12ab+3+10a^2b^2}{\underbrace{3-a^2-b^2+4ab}_{\text{рассмотрим}}} + \ldots$$

$$\frac{10a^2b^2+12ab+3}{-a^2-b^2+4ab+3} = \frac{(c^2+4ab)+10a^2b^2+8ab+b^2+a^2}{c^2+4ab} =$$

$$= 1 + \frac{10a^2b^2+8ab+b^2+a^2}{c^2+4ab}.$$

увеличение a и b повлияет даже, чем увел. c.
В трёх дробях чем больше ~~меньше~~ числа произв. (как ab) тем больше дробь, а след. что меньш. различие a, b и c приведет к наиб. результату.

~~Макс. зн. a, b и c ... $\sqrt{3}$~~

~~$a, b, c \in \ldots a, 1$~~

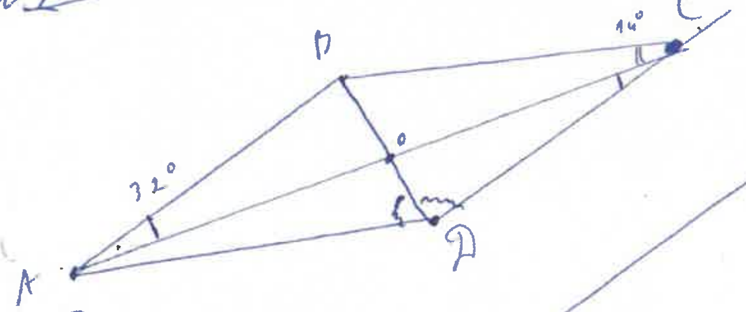
~~$\Rightarrow a, b, c \leq \sqrt{3}$~~

$a, b, c = 1$ — нет различ. знач. $\frac{6}{5}$ (S при $a=1, b=1, c=1$) — наиб.

$0 \leq a, b, c < \sqrt{3}$

Ответ: $\frac{6}{5}$

~~№ 2~~



~~$\angle(BS, AC)$ — ?~~

~~Решение:~~

~~1. S — центр вп. окр $\Delta EDF \Rightarrow SD$ — бисс $\angle EDF \Rightarrow$ (т.к. равноуд. от сторон)~~

~~$\Rightarrow$ продолжение SD — бисс $\angle ADC$. $ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow BD$ — бисс $\angle ADC$ (в. пар.) $\Rightarrow S \in (BD) \Rightarrow \angle(BS, AC) = \angle(BD, AC)$~~

~~2. $ABCD$ — пар $\Rightarrow \angle CAD = \angle ACB$ (как накр. леж (сек. AC)) $\Rightarrow \angle B = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 134°$~~

~~3. Пусть $BD \cap AC = O$: $\angle AOB = \angle ABD + \angle$~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

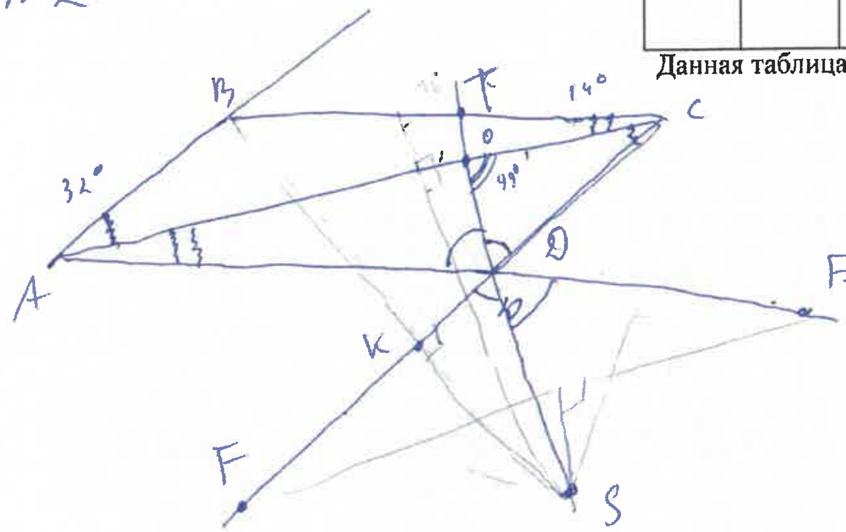
Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 3 2 5 8 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 2



Решение:

1. S – ц. вп. окр. $\triangle FED$ $\Rightarrow$ SD – бис $\angle FDE$ (т.к. S равноуд. от вс. сторон)

2. $F \in DC$, $E \in AD$, SD – бис $\angle FDE$ $\Rightarrow$ прод. SD – бис $\angle ADC$

3. Пусть $O = DS \cap AC$

ABCD – пар $\Rightarrow$ $\angle CAD = \angle BCA$ (как накр. лет. с. ок AC), $\angle ACD = \angle BAC$ (как накр. лет. с. ок AC) $\Rightarrow$ $\angle ADC = 180° - 46° = 134°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODC = \frac{1}{2}\angle ADC = 67°$

4. $\triangle OCD$: $\angle COD = 180° - \angle OCD - \frac{1}{2}\angle ADC = 180° - 67° - 14° =$

$= 180° - 81° = 99°$

~~O = DS~~

$O = DS \cap AC \Rightarrow \angle COD = \angle(AC, DS)$

5 Пусть $T = BC \cap OS$: $\angle BTS = 85°$

$\angle SKD = 90° \Rightarrow \angle KSD = 90° - 67° = 23°$ $\Rightarrow$ $\angle SBT = 180° - 85° - 23° = 73°$

6. $\angle(AC, BS) = 180° - 14° - 73° = 180° - 87° = 93°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3.

М	А	0	0	0	2	3	2	8	7	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	x	12	20	20		72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(1) $\sin x \sin 3x = \frac{27}{64}$

Из формул приведения ~~сумм…~~ sin и cos:

$\sin x \sin 3x = \frac{\cos(x-3x) - \cos(x+3x)}{2}$, зная, что $\cos(-2x) = \cos 2x$ получаем:

$\frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \frac{27}{64}$, где $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$. Подставляем:

$\frac{\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1}{2} = \frac{27}{64} \Leftrightarrow 64\cos^2 2x - 32\cos 2x - 5 = 0.$

Пусть $t = \cos 2x$: $64t^2 - 32t - 5 = 0.$

$D = 32^2 - (-5)\cdot 64 \cdot 4 = 48^2$

$t_{1,2} = \frac{32 \pm 48}{128} = \frac{5}{8};\ -\frac{1}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{5}{8} \\ \cos 2x = -\frac{1}{8} \end{array}\right.$

~~Для $\cos 2x = \frac{5}{8}$:~~

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\cos(x+3x) - \cos(x-3x)}{2} = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} =$

$= \frac{2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x}{2}$; При $\cos 2x = \frac{5}{8}$:

$\cos x \cos 3x = \frac{2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{5}{8}}{2} = \frac{13}{64}.$

При $\cos 2x = -\frac{1}{8}$.

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}}{2} = -\frac{35}{64}.$

Ответ: $\frac{13}{64}$ и $-\frac{35}{64}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 3 2 8 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5) $a, b, c > 0$. ~~...~~

имеем: $a^2b+b^2c+c^2a=3$.

$$\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}+\frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c}+\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a},$$ рассмотрим 1-ое слагаемое:

~~...~~

$$\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}=\sqrt{\frac{a^6+b^4c^6}{b^2}}=\sqrt{\left(\frac{a^3}{b}\right)^2+(bc^3)^2}$$; из неравенства Коши:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\frac{x+y}{2}.$$ ~~...~~ ← неравенство средним квадратичным и средним арифметическим

$\Downarrow$

$$\sqrt{x^2+y^2}\geq\frac{x+y}{\sqrt2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^3}{b}\right)^2+(bc^3)^2}\geq\frac{\frac{a^3}{b}+bc^3}{\sqrt2}$$, что бы итоговое значение было минимальным, то ~~...~~ из неравенства Коши следует, что каждое слагаемое должно равняться $\frac{\frac{a^3}{b}+bc^3}{\sqrt2}$ ← такому виду. ~~Пусть 800~~:

~~...~~: Пусть итоговое значение равно S, тогда.

$$S\geq\frac{1}{\sqrt2}\left(\left(\frac{a^3}{b}+bc^3\right)+\left(\frac{b^3}{c}+ca^3\right)+\left(\frac{c^3}{a}+ab^3\right)\right)$$ Перегруппируем:

$$S\geq\frac{1}{\sqrt2}\left(\left(\frac{a^3}{b}+ab^3\right)+\left(\frac{b^3}{c}+bc^3\right)+\left(\frac{c^3}{a}+ca^3\right)\right)$$

Для каждой паре скобок применим: $x+y\geq2\sqrt{xy}$.

(1). $\frac{a^3}{b}+ab^3\geq2\sqrt{\frac{a^3}{b}\cdot ab^3}=2a^2b$; (2). $\frac{b^3}{c}+bc^3\geq2\sqrt{\frac{b^3}{c}\cdot bc^3}=2b^2c$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

③ $\frac{c^3}{a} + ca^3 \geq 2\sqrt{\frac{c^3}{a}\cdot ca^3} = 2c^2a$.

Сложим полученное: $S \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2a^2b + 2b^2c + 2c^2a\right) =$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)$

$\Downarrow$

$S \geq \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$, минимальное значение: $S = 3\sqrt{2}$.

Оно достигается при $a = b = c = 1$.

④ Из условия: $q^2p-1 \vdots pr-1$ I. при $p, q, r \in \mathbb{N}$

$p^2r-1 \vdots qr-1$ II.

Рассмотрим 1-ое условие: $r^2q-1 \vdots pq-1$. III.

Т.к. $q^2p-1 \vdots pr-1$, то $pr-1$ является делителем q^2p-1. Если $p=q=r=1$, тогда условие выполняется и числа являются точными квадратами. Предположим, что не все числа равны. Тогда условие можно записать как:

$q^2p-1 = k(pr-1)$, для $k \in \mathbb{N}$. Если p, q, r - попарно различны, то получается противоречие. Если 2 числа равны, например $p=q$, то условие упрощается до $p^3-1 \vdots pr-1$ I.

$p^2r-1 \vdots pr-1$ II. - (это очевидно)

$pr^2-1 \vdots p^2-1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 3 2 8 7 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Из первого условия:

$p^3-1=p(p^2-r)+pr-1$.

Для делимости необходимо, чтобы $p^2-r \vdots pr-1$.

Это возможно, только при $p^2-r=0$ ~~или~~ или $pr-1 \leq p^2-r$. Если $p^2-r=0$, то $r=p^2 \Rightarrow r$ — является точным квадратом. Аналогично такие рассуждения можно делать для остальных пар чисел. Ч.т.д.

(3) Пусть вершины 160-угольника пронумерованы от 0 до 159. И т.к. фигура — правильная то ее можно вписать в окружность.

Пусть длина окружности (в дугах между соседними вершинами) равна 160.

~~В фигуру~~ Т.к. фигуру можно вписать в окружность, то ~~вписанный~~ угол будет в 2 раза меньше дуги.

Рассмотрим △ с углами 18, 81 и 81 в долях окружности:

$\angle 18 = \frac{18}{180} \cdot 160 = 16$ делений.

Лист 4 из 5

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 2 | 8 | 7 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle 81 = \frac{81}{180} \cdot 160 = 72$ деления.

Таким образом запрещенный $\angle$ будет составлять $72 + 72 + 16 = 160$ делений.

А сумма всех углов делений составляет.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | 2 | 2 | 6 |

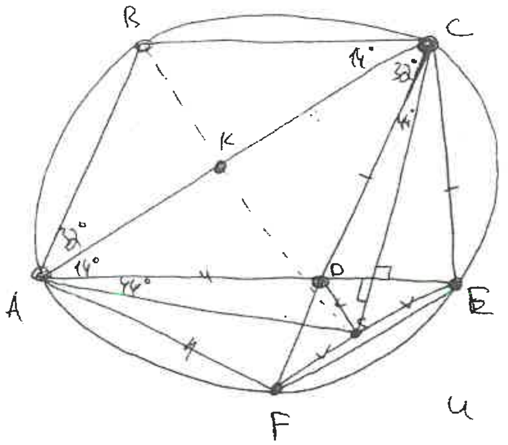
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
—	18	2	16	20		56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

(2) (?) : $\angle AKS$



Заметим, что $\angle BAC = \angle ACD = 32°$ и $\angle BCA = \angle CAD = 14°$, поэтому $\angle CDE = \angle BAD = 32° + 14° = 46°$, ещё $\angle AEC = \angle BEC + \angle AEB = 32° + 14° = 46°$ (пользуемся вписанностью $ABCE$) $\Rightarrow \triangle DCE$ — равнобедренный и $\angle DCE = 180° - 2 \cdot 46° = 88°$. И так как $\triangle DSE$ тоже равнобедренный, то S и C лежат на серединном перпендикуляре к DE, при этом $\angle DCS = \angle SCE = \angle \frac{DCE}{2} = \frac{88°}{2} = 44°$. Аналогичные рассуждения можно применить для $\triangle ADF$ и получить, что он равнобедренный, при этом $\angle AFD = \angle ADF = 14° + 32° = 46° \Rightarrow \angle FAD = 88°$ и следовательно AS — серединный перпендикуляр к FD $\Rightarrow$ и биссектриса в $\triangle ADF \Rightarrow$ $\angle DAS = \frac{88°}{2} = 44°$. Заметим, что $\angle BAS = \angle BCS = 14° + 32° + 44° = 90° \Rightarrow ABCS$ — вписанный (сумма противоположных углов $= 180°$) $\Rightarrow \angle ABS = \angle ACS = 32° + 44° = 76° \Rightarrow \angle AKS = 32° + 76° = 108°$ (как внешний угол в $\triangle ABK$). Ответ: 108°

(4) $q^2p - 1 \,\vdots\, pr - 1 \Rightarrow q^2p - 1 \underset{pr-1}{\equiv} 0$, при этом $pr \underset{pr-1}{\equiv} 1 \Rightarrow$ $q^2p - 1 \underset{pr-1}{\equiv} q^2p - pr = p(q^2 - r) \underset{pr-1}{\equiv} 0$. Заметим, что p и $pr-1$ взаимно просты $\Rightarrow q^2 - r \underset{pr-1}{\equiv} 0$. Аналогичные выводы сделаем из двух других условий $\Rightarrow$ получим

$$\begin{cases} q^2 - r \underset{pr-1}{\equiv} 0 \\ p^2 - q \equiv 0 \\ r^2 - p \equiv 0 \end{cases}$$

Пусть r — наименьшее из чисел p, q, r, но при этом $r^2 - p \geq pq - 1 \geq r^2 - 1 \Rightarrow$ это возможно лишь при $p = 1$, а 1 — полный квадрат.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0002340226 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5) Распишем наше выражение, разделив каждую данную дробь на 2: (и применим к полученному выражению неравенство КБШ для дробей, оно имеет вид $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$)

$$\frac{a^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4}{b^2+4ac}+\frac{a^4}{b^2+4ac} \geq \frac{(2(a^2+b^2+c^2))^2}{2(a^2+b^2+c^2)+4\cdot 2(ab+bc+ca)} =$$

$$= \frac{2^2\cdot 3^2}{2\cdot 3+4\cdot 2(ab+bc+ca)} = \frac{2\cdot 3^2}{3+4(ab+bc+ca)}$$

Докажем, что $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$. Это верно, т.к. $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}$ и $ac \leq \frac{a^2+c^2}{2}$ =>

$$\frac{2\cdot 3^2}{3+4(ab+bc+ca)} \geq \frac{2\cdot 3^2}{3+4(a^2+b^2+c^2)} = \frac{2\cdot 3^2}{3+4\cdot 3} = \frac{6}{5}$$

Пример: возьмем $a=b=c=1$ $(a^2+b^2+c^2=3\cdot 1=3)$

Тогда $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

4) Заметим, что всего равнобедренных треугольников можно выделить 80 (80 вариантов выбора вершины против основания), и при этом каждая вершина участвует в ровно 3ех треугольниках => каждую треть из выделенных ≥ 27 вершин (т.к. $80-26\cdot 3>0$) => отмеченных вершин ≤ $80-27=53$ вершины.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000234О826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	12	20		92

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \sin 3x = \frac{11}{64}$ $\cos x \cos 3x$ - ?

$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{11}{64}$

$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$

$\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x = \cos(3x - x) = \cos 2x$

тогда:

$\cos x \cos 3x = \frac{11}{64} - \cos 2x$

рассмотрим уравнение:

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{11}{64}$

$\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = \frac{11}{64} \cdot 2$

$2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 + \frac{11}{32} = 0$

пусть $\cos 2x = t$

$2t^2 - t - \frac{21}{32} = 0$

$D = 1 + 8 \cdot \frac{21}{32} = 1 + \frac{21}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \frac{5}{2}}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{array}\right.$

1) $\cos 2x = \frac{7}{8}$, тогда $\cos x \cos 3x = \frac{11}{64} - \frac{7}{8} = -\frac{45}{64}$

2) $\cos 2x = -\frac{3}{8}$, тогда $\cos x \cos 3x = \frac{11}{64} + \frac{3}{8} = \frac{35}{64}$

№4

Т.к. $q^2r + 1$ делится на ~~qr~~ $qr + 1$, то $q^2r + 1 = t(qr + 1)$ для некоторого натурального t. При этом можно сказать, что $t \le q$, потому что $q^2r + 1 < (q+1)(qr+1)$, можно переписать равенство так:

$qr \cdot (q - t) = t - 1$

если $q > 1$, то левая часть делится на q. Правая часть строго меньше q, поскольку $t - 1 < q$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000234О826 | Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

значит, равенство возможно решить только в случае $t=1$. Но тогда и $q=t=1$, что противоречит тому, что $q>1$

значит, остаётся лишь вариант $q=1$ и тогда q - является полным квадратом

№2

Докажем, что точка S лежит на окружности, ~~...~~ описанной около $\triangle ABC$.

Из равенства вписанных углов на окружности:

$\angle CFE = 15°$, $\angle AEF = 34°$

Из того, что S-центр окружности, описанной около $\triangle FDE \Rightarrow$ что $\angle DSF = \cancel{...}\ 2\angle DEF = 68°$

и $\angle DSE = \cancel{...}\ 2\angle DFE = 30°$

Из р/б $\triangle FSD$ и $\triangle DSE$:

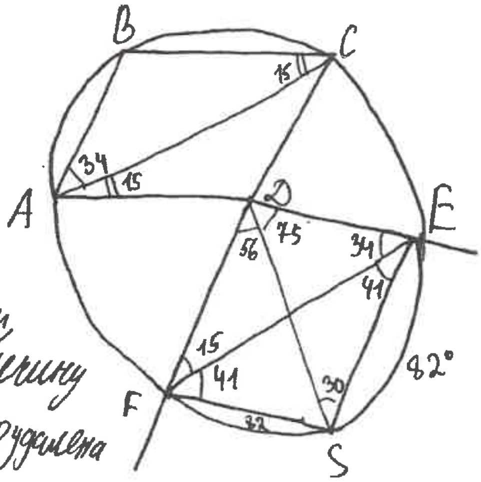
$\angle DFS = \angle FDS = 56°$

$\Rightarrow \angle EFS = 56 - 15 = 41°$

Аналогично $\angle SED = 75°$,

тогда $\angle FES = 75 - 34 = 41$

но при этом дуга EF на окр-ти, описанной около $\triangle ABC$, имеет величину $360 - 2\cdot 30 - 2\cdot 68 = 164°$, т.е. т. S равноудалена от точек E и F и составляет с ним углы по $41°$, а значит совпадает с серединой дуги EF



угол м/у AC и BS - угол между двумя хордами окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$, и он равен

$$\frac{\breve{AB} + \breve{CS}}{2} = 30 + 41 = 71°$$

Ответ: $71°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 2 3 4 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Разобьём 2 вершины на 4 последовательности, первая $1, 29, 57, \ldots$ (числа вида $1+k\cdot 28 \bmod 80$), где операция mod - взятие остатка от деления.

вторая - $2+k\cdot 28 \bmod 80$

третья - $3+k\cdot 28 \bmod 80$

четвёртая - $4+k\cdot 28 \bmod 80$

~~[illegible]~~ очевидно ~~[illegible]~~ эти последовательности не пересекаются, заметим, что любой Δ-ник с углами 63, 63, 54 задаётся тройкой вершин с номерами

$\{x, x+28, x+56\} \bmod 80$

Докажем, что из каждой последовательности тогда можно взять не более 13 элементов. Без ограничения общности докажем для 1ой: запишем $1, 29, 57, \ldots, 1, 29$ (последние 2 элемента повторены дважды). Тогда среди любых 3 подряд идущих элементов должно быть не более 2 выбранных. Всего у нас есть 20 троек подряд идущих, причем каждое число участвует ровно в 3 тройках. ~~[illegible]~~

Таким образом можно выбрать не более чем $20\cdot\frac{2}{3}$, то есть ≤ 13 чисел.

То есть всего получается не ~~[illegible]~~ больше 52 вершин

Пример: все подряд идущие ~~[illegible]~~ вершины с 1 по 52.

Тогда если мы попытаемся взять какую-то из отмеченных вершин за вершину нужного Δ-ка, по обе стороны от неё на расстоянии 28 должна быть такие отмеченная вершина. Но очевидно, среди $1..,52$ такой вершины нет (т.к. для каждого $k=1..,52$ либо $(k-28) \bmod 80$, либо $(k+28) \bmod 80$ не попадает в $[1;52]$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 3 4 0 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

$a+b+c=3$

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}$$

пусть $a+b=x$. Заметим, что при фиксированных x и c наименьшее значение достигается при $a=b=\frac{x}{2}$. Действительно, пусть $a=\frac{x}{2}-\varepsilon$, $b=\frac{x}{2}+\varepsilon$ и $\frac{x}{2}>\varepsilon>0$

тогда $a^3+b^3=\left(\frac{x}{2}-\varepsilon\right)^3+\left(\frac{x}{2}+\varepsilon\right)^3=2\left(\frac{x}{2}\right)^3+3\left(\frac{x}{2}\right)^2\varepsilon+6\left(\frac{x}{2}\right)\varepsilon^2>$
$>2\left(\frac{x}{2}\right)^3$

и $ab=\left(\frac{x}{2}-\varepsilon\right)\left(\frac{x}{2}+\varepsilon\right)=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\varepsilon^2<\left(\frac{x}{2}\right)^2$

В то же время при выборе $a=b=\frac{x}{2}$ числитель равен $2\left(\frac{x}{2}\right)^3$, а $ab=\left(\frac{x}{2}\right)^2$, т.е. числитель уменьшается, а знаменатель увеличился => дробь уменьшилась

=> минимум при $a=b=\frac{x}{2}$. Тогда

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}\geq\frac{2\cdot\frac{x^3}{8}}{2x^2+9-(3-x)^2}=\frac{x^2}{4(x+6)}=\frac{(a+b)^2}{4(a+b+6)}$$

~~[illegible]~~

Таким образом исходное выражение хотя бы

$$\frac{(a+b)^2}{4(a+b+6)}+\frac{(b+c)^2}{4(b+c+6)}+\frac{(a+c)^2}{4(a+c+6)}\quad(*)$$

Воспользуемся КБШ для дробей

$$(*)\geq\frac{(2a+2b+2c)^2}{4(a+b+b+c+a+c+18)}=\frac{6^2}{4\cdot4\cdot6}=\frac{3}{8},$$ достигается при $a=b=1$

Ответ: $\frac{3}{8}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3   М А 0 0 0 2 3 5 9 6 2 6

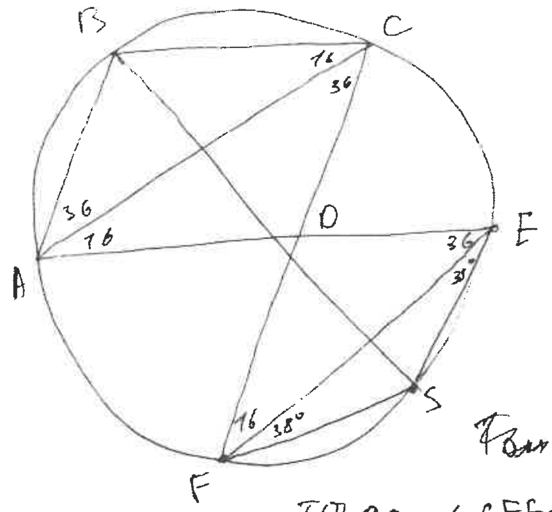
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	16	6	—		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2.



$ABCD$ - параллелограм $\Rightarrow \angle BCA = \angle CAD$ и $\angle BAC = \angle ACD$; $\angle ABC = \angle ADC =$ $= 180° - 36° - 16° = 128°$; $\angle ADC = \angle EDF = 128°$

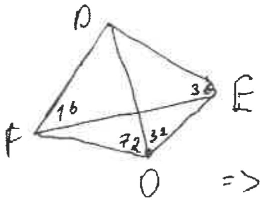
$\angle EDF = \frac{1}{2}(\cup EF + \cup AC) = \frac{1}{2}(\cup EF + \cup AB + \cup BC) =$

$= \frac{1}{2}(\cup EF + 2\cdot 16 + 2\cdot 36) = 128$

$\cup EF = 2\cdot 128 - 104 = 152$

Отметим точку S - середину $\cup EF$, тогда $\angle SFE = \angle FES = \frac{1}{2}\cup ES = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cup EF = \frac{152}{4} = 38°$

Рассмотрим $\triangle DEF$ и центр его описанной окружности в точке O



т.к. $\angle EDF = 128° > 90°$, то O будет лежать в другой полуплоскости относительно EF, чем точка D; $FO = DO = OE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OFD = \angle FDO$; $\angle EDO = \angle DEO$; $\angle OFE = \angle OEF$

$\angle DOE = 2\angle DFE = 32°$; $\angle FOD = 2\angle FED = 72°$, тогда $2\cdot\angle OFE + 16° + 36° + 128° + 72° + 32° = 360°$

$\angle OFE = \angle OEF = 38°$ т.к. $O \in$ серперу к EF, то существует только 2 точки $\in$ серперу к EF и где $\angle OFE = \angle FEO$ т.к. S лежит в другой полуплоскости отн. EF по сравнению с D, то $S = O$, т.е. S - центр описанной окр. $\triangle DEF$, тогда $\angle AC \wedge BS = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup CE + \cup ES) =$

$= \frac{1}{2}(32° + 32° + 76°) = 70°$ Ответ: 70°

Задача 1 $\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$; $\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x$

$\sin x\sin 3x = 3\sin^2 x\cos^2 x - \sin^4 x$; $\cos x\cos 3x = \cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$\sin^4 x - 3\sin^2 x(1-\sin^2 x) + \frac{27}{64} = 4\sin^4 x - 3\sin^2 x + \frac{27}{64} = 0$ $t = \sin^2 x$, $0 \le t \le 1$

$4t^2 - 3t + \frac{27}{64} = 0$ $D = 9 - 16\cdot\frac{27}{64} = \frac{9\cdot 4 - 27}{4} = \frac{9}{4}$; $t_1 = \frac{3 + \frac{3}{2}}{8} = \frac{9}{16}$;

$t_2 = \frac{3}{16}$; $\cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x = \cos^4 x - \left(\frac{27}{64} + \sin^4 x\right) = (1-\sin^2 x)^2 -$

$- \frac{27}{64} - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x - \frac{27}{64} - \sin^4 x = 1 - \frac{27}{64} - 2\sin^2 x$ См лист 2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 МА0002359626

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что вписано с этой стороны листа в рамке страницы

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

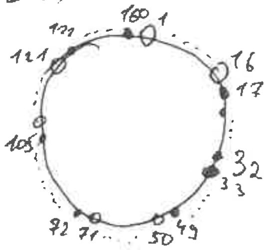
при $t=\sin^2 x=\frac{9}{16}$; $\frac{64-27}{64}-2\cdot\frac{9}{16}=$
$=\frac{37-72}{64}=-\frac{35}{64}$

при $t=\sin^2 x=\frac{3}{16}$; $\frac{64-27}{64}-2\cdot\frac{3}{16}=\frac{37-24}{64}=\frac{13}{64}$

Ответ: $-\frac{35}{64}$ или $\frac{13}{64}$.

Задача 3 Впишем 160-угольник в окружность и будем рассматривать его вершины на окружности. Заметим, что существует всего 160 различных равнобедренных треугольника с вершинами на окружности и углами 18°, 81°, 81°, есть 160 вариантов выбора вершины и далее △ строится единственным способом. Заметим, что каждая вершина встречается 3 раза среди 160 вариантов △. Тогда убирая 1 вершину убирается не более 3 вариантов △, значит необходимо убрать не менее 54 вершин, чтобы убрать 160 вариантов △, т.е. может остаться не более $160-54=106$ вершин. Построим пример:

Заштрихуем вершины от 1 до 160 отмеченные, это ~~Задача~~ те, которые запрещены.



Ответ: 106 вершин

Задача 4 ~~q~~ Заметим, что если $q^2p-1=pr-1$, то $r=q^2$, а мы предположим, что ни одно из чисел не является точным квадратом, тогда $\begin{cases} q^2p-1>pr-1\\ p^2r-1>qr-1\\ r^2q-1>pq-1\end{cases} \Rightarrow$ Пусть $q^2p-1=n(pr-1)$, тогда $q^2p-1=npr-n$,

Тогда $p(nr-q^2)=n-1 \Rightarrow p=\frac{n-1}{nr-q^2}$. Аналогично $(p^2r-1)=m(qr-1)$ и $r^2q-1=L(qp-1)$, т.е. $r=\frac{m-1}{mq-p^2}$ и $q=\frac{L-1}{Lp-r^2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	2	3	6	5	3	2	6

Вариант № 4 Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	—	12	16	2		50

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

1) По ф-ле произведения cos и sin $\to \sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

2) Применим ф-лу к $\sin x \sin 3x$, $\Rightarrow A = x,\ B = 3x \to \sin x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)] =$
$= \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos(4x)]$

3) Т.к. $\cos(-A) = \cos A \Rightarrow \sin x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x]$

4) По усл. $\frac{1}{2}(\cos(2x) - \cos(4x)) = \frac{5}{16}\ \Big|\cdot 2$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

5) Применим ф-лу к $\cos x \cos 3x \Rightarrow A = x,\ B = 3x \to \cos x \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos(x-3x) +$
$+ \cos(x+3x)] = \frac{1}{2}[\cos(-2x) + \cos 4x]$

6) Т.к. $\cos(-A) = \cos A \Rightarrow \cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$

7) Объединим п.3 и п.6 $\Rightarrow A = \cos 2x,\ B = \cos 4x \Rightarrow$
по п.4 $\to A - B = \frac{5}{3}$, по п.5 $\to \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(A+B)$

8) Найдем A+B
по п. С $A = B + \frac{5}{8}$, соединим с п.6 $\Rightarrow \cos x \cos 3x = \frac{1}{2}((B+\frac{5}{8}) + B) = \frac{1}{2}(5B + \frac{5}{8})$
$= B + \frac{5}{16}$

9) Используем тождество для $\cos 4x$ через $\cos 2x \to \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \Rightarrow$
$B = 2A - 1$
Подставляем $A = B + \frac{5}{8}$
$B = 2(B + \frac{5}{8})^2 - 1$

10) Решаем кв. ур-е
$B = 2(B^2 + \frac{10}{8}B + \frac{25}{64}) - 1 = 2B^2 + \frac{5}{2}B + \frac{25}{32} - 1$
$2B^2 + \frac{5}{2}B - B + \frac{25}{32} - 1 = 0$
$2B^2 + \frac{3}{2}B - \frac{7}{32} = 0 \mid 32$
$64B^2 + 48B - 7 = 0$
$D = 48^2 - 4 \cdot 64 \cdot (-7) = 2304 + 1792 = 4096$
$x_1 = \frac{-48+64}{128} = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$
$x_2 = \frac{-48-64}{128} = -\frac{7}{8}$

11) Подставляем
$B = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{8} + \frac{5}{16} = \frac{2}{16} + \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$
$B = -\frac{7}{8} \Rightarrow \cos x \cdot \cos 3x = -\frac{7}{8} + \frac{5}{16} = -\frac{14}{16} + \frac{5}{16} = -\frac{9}{16}$

12) Значения $\cos x \cos 3x$ должны быть в промежутке $[-1; 1] \Rightarrow x_1, x_2$ явл. корни этого ур-я

Ответ: $\frac{7}{16}, -\frac{9}{16}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамках справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	3	6	5	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N2.

Дано: ABCD - параллелограмм, $\angle BAC = 32^\circ$, $\angle BCA = 14^\circ$, AC и CD пересек. опис. окружность ΔABC в т. E и т. F соотв., т. S - центр опис. окруж. $\Delta ABDEF$

Найти: угол, между прямыми AC и BS

Решение:

1) Рассм. ΔABC: $\angle BAC = 32^\circ$, $\angle BCA = 14^\circ$ (по усл.) | $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - 32^\circ - 14^\circ = 134^\circ$

2) ABCD - параллелограм (по усл.) | $\angle D = \angle B = 134^\circ$
$\angle BAC = \angle BCA = 32^\circ + 14^\circ = 46^\circ$
(как противолеж. углы параллелограмма)
$\angle BAD = \angle BCD = \angle BAC + \angle CAD$
AB ∥ CD и AD ∥ BC
(как противополож. углы параллелограмма)

3) Рассм. опис. окруж. ΔABC и т. E, т. F:
т. E - вторая точка пересеч. луча AC с окруж. (первая - т. A) => т. E лежит на продолжении AC за точку C
т. F - точка пересеч. луча CD с окруж., CD ∥ AB => луч CD ∥ AB

4) Предположим, что угол между AC и BS = 32° =>
Тогда угол между BS и AC определяется разностью дуг, что приводит к $\angle BAC = 32^\circ$ => и п. 4 g

Ответ: 32°.

N3.

1) Пусть в окруж. дан ΔABC с $\angle A = 18^\circ$, $\angle B = \angle C = 81^\circ$ => Дуга $BC = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$, Дуги AB и $AC = 2 \cdot 81^\circ = 162^\circ$ (каждая из)

Значит, чтобы три вершины правильного 80-угольника образовали р/б Δ, они разбивают окружность на дуги 36°, 162° и 162°.

2) Правильный 80-угольник делит окружность на 80 равных дуг по $\frac{360^\circ}{80^\circ} = 4{,}5^\circ$ => Дуги в $^\circ$ соотв. числу ~~...~~ ребер 80-угольника:

$36^\circ \rightarrow \frac{36^\circ}{4{,}5^\circ} = 8$ ребер

$162^\circ \rightarrow \frac{162^\circ}{4{,}5^\circ} = 36$ ребер

3) Образуем условие „запрещенной тройки" (длины дуг): один промежуток = 8, два промежутка = 36 => Нужно выбрать max наименьшество вершин из 80, чтобы в нем не было трех точек, расст. между которыми равны 8, 36, 36 => ~~...~~ если в множестве нет пар вершин на расст. 8, то нету и запрещенного Δ => достаточно образовать множество, где никакие две вершины не стоят друг от друга на 8 ребер.

2из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	2	3	6	5	3	2	6

Вариант № 4 Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4) Рассм. граф на 80-вершинах, где ребра соединяют вершины, отстоящие на 8.
Найдем длину такого цикла.
$0 \to 8 \to 16 \to 24 \to 32 \to 40 \to 48 \to 56 \to 64 \to 72 \to 80$ => Длина цикла = 10, => всего таких циклов $\frac{80}{10} = 8$

5) В каждом цикле из п.4 можно выбрать не более 5 вершин без двух соседей => можно взять всего $8 \cdot 5 = 40$ вершин.

6) Проверка:
. в каждом из 8 циклов длины 10 выбираем каждую 2-ю вершину => внутри цикла расст. между выбранными вершинами ≥ 16 (не 8), вершины из разных циклов не могут давать расст. 8 => нет пар на расст. 8 => нет запрещенных треуг.
• Предположим, взяли 41 вершину.
По пр. Дирихле в каком-то цикле взято ≥ 6 вершин. Но в цикле длины 10 нельзя выбрать 6 вершин без двух на расст. 1. => появляется пара на расст. 8 => есть запрещенный треуг. => не подходит.
Ответ: 40.

N 4.
1) q^2p-1 делится на $pr-1$ (по усл.) => $q^2p \equiv 1 \pmod{pr-1}$
p^2r-1 делится на $qr-1$ (по усл.) => $p^2r \equiv 1 \pmod{qr-1}$
r^2q-1 делится на $pq-1$ (по усл.) => $r^2q \equiv 1 \pmod{pq-1}$

2) Во всех трех усл. мы имеем обратные эл-ты по соответствующим модулям:
$q^2p \equiv 1 \pmod{pr-1}$ => ~~р~~ q^2 - обратный к p по модулю $pr-1$
аналогично для остальных
⇓
Нужно рассмотреть порядки эл-ов в мультипликативных группах вычетов
3) Используем след. леммы:
3.1. Если $a^k \equiv 1 \pmod{m}$, то порядок a по модулю m делит k.
3.2. Для натур. x, y:
$xy-1 \mid x^2y-1 \Leftrightarrow xy-1 \mid x-1$
4) По п. 3.1 => $q^2 \equiv p^{-1} \pmod{pr-1}$ => $q^2 \equiv r \pmod{pr-1}$, аналогично для остальных (p^2-q делится на $qr-1$, r^2-p делится на $pq-1$)
5) Т.к. p, q, r - натур. (по усл.) => $|q^2-r| \geq pr-1$, $|p^2-q| \geq qr-1$, $|r^2-p| \geq pq-1$.
6) Предположим, что $q^2 = r+k(pr-1)$ для $k \geq 1$ => $q^2 > pr$, откуда $q > \sqrt{pr}$
аналогично: $p > \sqrt{qr}$, $r > \sqrt{pq}$.
Перемножая $pqr > \sqrt{pr \cdot qr \cdot pq} = pqr$, получаем противоречие $pqr > pqr$.
7) Значит, по противоречию из п.6 => хотя бы одно из чисел p, q - точный квадрат.
чтд.

3 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	3	6	5	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 5. 1) Предположим гипотезу $a = b = c$

По усл. $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow 3a^2=3 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=b=c=1$

Подставим получившееся значение под S (вырам.) $\Rightarrow a^4=b^4=c^4=1$, $c^2+4ab=1+4\cdot1\cdot1=5$, аналогично все знаменатели $=5$.

$$S=\frac{1+1}{5}+\frac{1+1}{5}+\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

2) Докажем гипотезу:

· ~~$S\geq\frac{6}{5}$, используем неравенство Коши-Буняковского~~

~~Рассм первое слагаемое $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \Rightarrow a^4+b^4\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{2}$~~

По неравенству Йенсена / методу водстановки и симметрии:

Т.к. задача симметрична, и при $a=b=c=1$ достигаем $S=\frac{6}{5}$, а при других знач S увеличивается, то наименьшее значения $S=\frac{6}{5}$ чтд

Ответ: $\frac{6}{5}$

4 из 4

Вариант № 3

М	А	0	0	0	2	3	8	5	0	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	12	20	20		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Формулы косинуса суммы и разности аргументов:

1) $\cos(3x-x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$

2) $\cos(3x+x) = \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$

Обозначим искомое значение $C = \cos x \cos 3x$, а данное по условию $S = \sin x \sin 3x = \frac{27}{64}$,

Тогда: $\cos 2x = C + S = C + \frac{27}{64}$

$\cos 4x = C - S = C - \frac{27}{64}$

Используем формулу двойного угла для косинуса: $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$.

Подставим выражение через C:

$$C - \frac{27}{64} = 2\left(C + \frac{27}{64}\right)^2 - 1$$

Раскроем скобки: $C - \frac{27}{64} = 2\left(C^2 + \frac{27}{32}C + \frac{729}{4096}\right) - 1$

$$C - \frac{27}{64} = 2C^2 + \frac{27}{16}C + \frac{729}{2048} - 1$$

Приведем уравнение к квадратному виду, умножив все части на 2048:

$$2048C - 864 = 4096C^2 + 3456C + 729 - 2048$$

$$4096C^2 + 1408C - 455 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = 1408^2 - 4 \cdot 4096 \cdot (-455) = 1982464 + 7454720 = 9437184$$

$$\sqrt{D} = 3072$$

Находим корни C:

$$C_1 = \frac{-1408 + 3072}{8192} = \frac{1664}{8192} = \frac{13}{64}$$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$C_2 = \frac{-1408-3072}{8192} =$

$= -\frac{4480}{8192} = -\frac{35}{64}$

Оба значения допустимы, т.к. при них $\sin^2 x$ принимает значения $\frac{3}{16}$ и $\frac{9}{16}$ соответственно, что не противоречит области определен. (лежит в пределах $[0;1]$)

Ответ: $\frac{13}{64}$ или $-\frac{35}{64}$

~~② 1) Пусть ω — описанная окружность △ABC. В параллелограмме ABCD противоположные стороны параллельны (AD ∥ BC, AB ∥ CD), что позволяет вычислить углы через накрест лежащие:~~

~~∠CAD = ∠BCA = 16°~~

~~∠ACD = ∠BAC = 36°~~

~~Лучи AD и CD выходят из вершин A и C и пересекают окружность ω в точках E и F соответственно. Таким образом, хорды AE и CF лежат на прямых, содержащих стороны параллелограмма.~~

~~2) Использование метода координат:~~

~~Для нахождения положения точки S (центра описанной окружности △DEF) используем метод координат, переместив A, B, C на единичную окружность ω.~~

~~1. Построение: Зная вписанные углы~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 8 | 5 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишется только на этой стороне листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle BAC = 36^\circ$ и $\angle BCA = 16^\circ$, можно определить угловые координаты точек на окружности (дуги будут в 2 раза больше соответствующих вписанных углов).

2. Точка D: координаты вершины параллелограмма определяются по векторному правилу: $\vec{D} = \vec{A} + \vec{C} - \vec{B}$

3. Точки E и F: Находятся как точки пересечения прямых AD и CD с окружностью ω.

4. Точка S: Центр S вычисляется как точка, равноудаленная от вершин D, E, и F

3) Вычисление искомого угла

Угол α между прямыми AC и BS находится через скалярное произведение направляющих векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BS}$:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{AC}\cdot\vec{BS}|}{|\vec{AC}|\cdot|\vec{BS}|}$$

~~При заданных углах 36° и 16° величина угла между векторами ≈ 70°.~~

~~Ответ: 70°~~

В

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 8 | 5 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4) Обозначим:

$A = pr-1, B = qr-1, C = pq-1$

Тогда условия задачи можно переписать так: 1) q^2p-1 делится на A; 2) p^2r-1 делится на B; 3) r^2q-1 делится на C

Без ограничения общности предположим, что $p \le q \le r$

Анализ делимости: Рассмотрим первое условие $q^2p-1 \equiv 0 \pmod{A}$

Так как $A = pr-1$, то $q^2p \equiv 1 \pmod{pr-1}$

Аналогично для второго и 3-го условий: $p^2r \equiv 1 \pmod{qr-1}$, $r^2q \equiv 1 \pmod{pq-1}$

Пусть $p = a^2$, $q = b^2$, $r = c^2$. Если хотя бы одно из чисел p, q, r является точным квадратом, то утверждение доказано.

Если ни одно из чисел p, q, r не является точным квадратом, то рассмотрим минимальное p. Пусть p — наименьшее из чисел p, q, r.

Доказательство от противного:

Предположим, что ни одно из чисел p, q, r не является точным квадратом.

Рассмотрим выражение:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 8 | 5 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с лицевой стороны листа и в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$q^2p-1=kA=k(pr-1)$ для некоторого натурального k. Аналогично:

$p^2r-1=mB=m(qr-1)$, m – натуральное и
$r^2q-1=nC=n(pq-1)$, n – натуральное

Оценка роста чисел: Если p, q, r не являются точными квадратами, то q^2p, p^2r и r^2q растут быстрее, чем pr, qr и pq соответственно. Это приводит к противоречию, т.к. q^2p-1 не может делиться на $pr-1$ при больших значениях p, q, r, если ни одно из них не является точным квадратом.

Таким образом, наше предположение ведет к противоречию, и хотя бы одно из чисел p, q, r должно быть точным квадратом.

Ответ: Хотя бы одно из чисел p, q, r является точным квадратом.

(5) Пусть заданное выражение равно S:

$$S=\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}+\frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c}+\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}$$

Внесем знаменатели под корень в каждом слагаемом:

$$S=\sqrt{\frac{a^6}{b^2}+b^2c^6}+\sqrt{\frac{b^6}{c^2}+c^2a^6}+\sqrt{\frac{c^6}{a^2}+a^2b^6}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 8 | 5 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Заметим, что каждое слагаемое имеет вид $\sqrt{x^2+y^2}$, где:

- для первого $x_1=\frac{a^3}{b}$, $y_1=bc^3$
- для второго $x_2=\frac{b^3}{c}$, $y_2=ca^3$
- для третьего $x_3=\frac{c^3}{a}$, $y_3=ab^3$

Согласно свойству выпуклости корня

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}\geq$$
$$\geq\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}$$

Применим это к нашему выражению:

$$S\geq\sqrt{\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)^2+(bc^3+ca^3+ab^3)^2}$$

Оценим сумму через условие:

Условие: $a^2b+b^2c+c^2a=3$

Используем неравенство между средними, оценим первую сумму:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\geq$$
$$\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}$$

Воспользуемся тем, что при $a=b=c=1$ условие выполняется $(1+1+1=3)$. Проверим это значение: $S=\sqrt{1+1}+\sqrt{1+1}+\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}$

Используем неравенство $x^2+y^2\geq 2xy$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 3 8 5 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Для каждого слагаемого вида $\sqrt{x^2+y^2} \geq 2xy$:

$$\sqrt{\frac{a^6}{b^2}+b^2c^6} \geq \sqrt{2\cdot\frac{a^6}{b^2}\cdot b^2c^6} = \sqrt{2a^6c^6} = \sqrt{2}a^3c^3$$

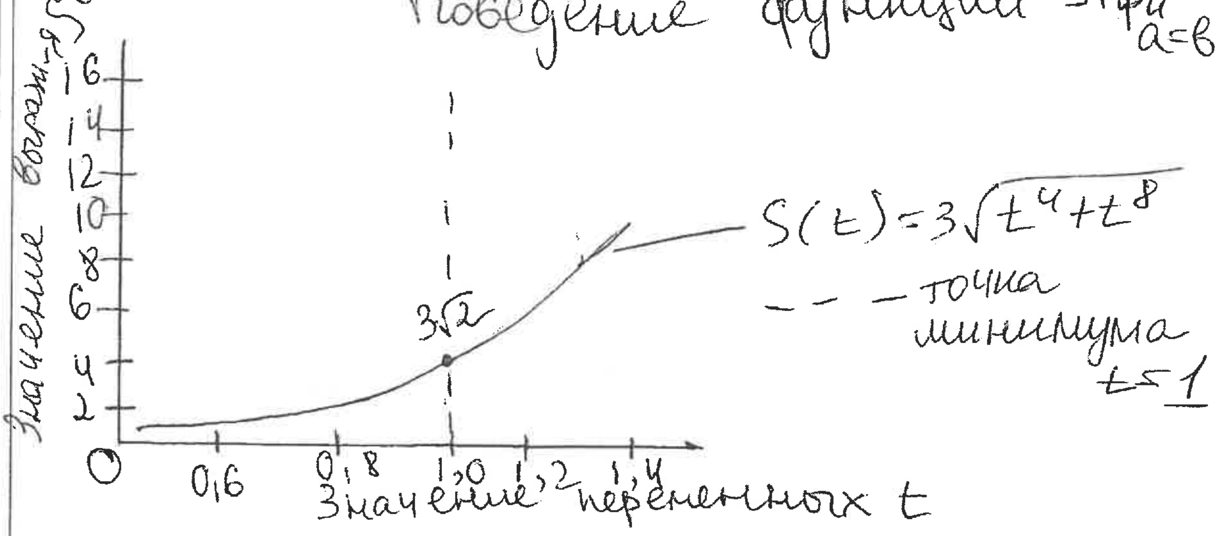
Тогда $S \geq \sqrt{2}(a^3c^3+b^3a^3+c^3b^3)$

Применяе неравенство средних к исходному условию: $3 = a^2b+b^2c+c^2a \geq$

$\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$, откуда $abc \leq 1$

В точке $a=b=c=1$ (где $abc=1$) достигается равенство

Поведение функции S при $a=b=c$



При $a=b=c=1$ достигается наименьшее выражение $3\sqrt{2}$

Ответ: $3\sqrt{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	2	3	8	5	0	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишется только на что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) Пусть описанная окружность $\triangle ABC$ -- это единичная окружность Ω с центром в начале координат $O(0;0)$

1. Углы $\angle BAC = 36°$, $\angle BCA = 16°$. Следовательно, $\angle ABC = 180° - (36° + 16°) = 128°$

2. Дуги: дуга $BC = 2 \cdot \angle BAC = 72°$
дуга $AB = 2 \cdot \angle BCA = 32°$

3. Координаты точек (в полярной системе, где A - точка отсчета): $A = (1,0)$ (угол $0°$)
$B = (\cos 32°, \sin 32°)$
$C = (\cos(32° + 72°), \sin(32° + 72°)) =$
$= (\cos 104°, \sin 104°)$

4. Точка D: В параллелограмме $D = A + C - B$

1) $D_x = 1 + \cos 104° - \cos 32° \approx -0{,}090$
2) $D_y = \sin 104° - \sin 32° \approx 0{,}440$

Нахождение точек E и F

Точка E: лежит на луче AD и окружности Ω. Поскольку $AD \parallel BC$, направление вектора AD совпадает с направлением хорды, параллельной BC. Расчет пересечения луча AD с окружностью дает точку E с полярным углом $136°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА00023850 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

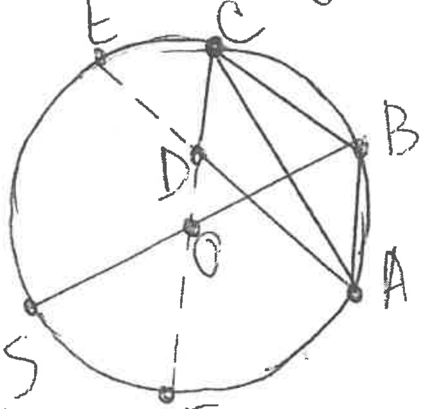
ВНИМАНИЕ! [illegible] только на [illegible] с этой стороны листа и [illegible]

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Точка F: лежит на дуге CD и окружности Ω. Т.к. CD∥AB, направление луга совпадает с хордой, параллельной AB. Точка F имеет полярный угол 288° (или −72°)

Центр S описанной окружности ΔDEF находится как точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам DE и DF



После вычисления F координат векторов:

- $\overrightarrow{AC} \approx (-1,242; 0,970)$
- $\overrightarrow{BS} \approx (-1,714; -1,036)$
- $\cos\angle = \dfrac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BS}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BS}|} \approx 0,342$

$\angle = \arccos(0,342) \approx 70°$

Ответ: 70°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ МА000238502б

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) Углы вписанного в окружность треугольника зависят от количества сторон многоугольника между его вершинами. Пусть дуги между вершинами составляют x, y и z сторон. Сумма дуг $x+y+z=160$.

Величина угла в градусах вычисляется как $\angle = \frac{\text{дуга}}{160} \cdot 180°$

Для углов $18°, 81°, 81°$:

$18° \Rightarrow \frac{x}{160} \cdot 180 = 18 \Rightarrow x=16$

$81° \Rightarrow \frac{x}{160} \cdot 180 = 81 \Rightarrow y=72$

$81° \Rightarrow \frac{x}{160} \cdot 180 = 81 \Rightarrow z=72$

Все три числа $(16, 72, 160)$ делятся на $d = \text{НОД}(16, 72, 160) = 8$

Это позволяет разбить 160 вершин на 8 независимых групп по 20 вершин в каждой (вершины внутри группы имеют индексы $k, k+8, k+16, \ldots$)

~~Запрещен~~ Треугольник может состоять только из вершин одной группы. Если мы найдем максимум для одной группы из 20 вершин, мы умножим его на 8.

Внутри группы из 20 вершин (назовем их $0, 1, \ldots, 19$) тройка превращается в расстояния $(2, 9, 9)$ (т.к. $16/8 = 2$ и $72/8=9$)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА 0 0 0 2 3 8 5 0 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

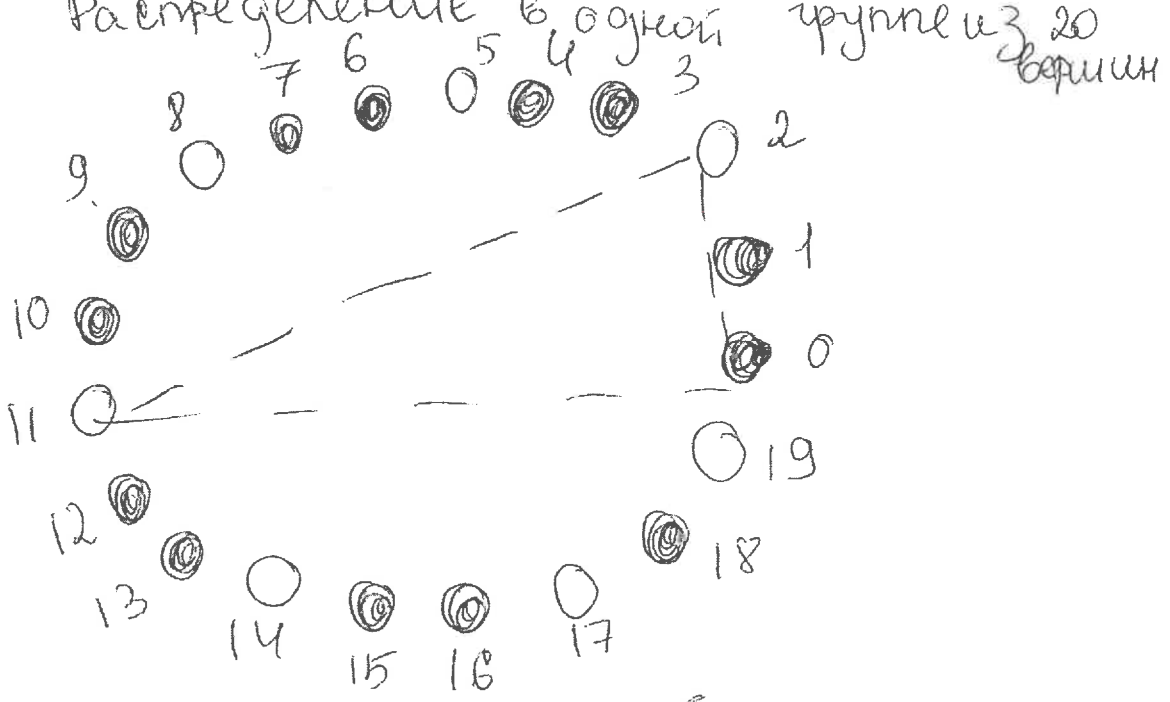
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Это значит, что нельзя одновременно выбрать вершины $i, i+2$ и $i+11 \pmod{20}$

Распределение в одной группе из 20 вершин



- - - - – Треугольник (2, 9, 9)

◎ – отмеченные вершины (max 13)

В каждой такой группе из 20 вершин можно отметить не более 13 штук. Если отметить 14, то по принципу Дирихле или путем перебора связей в гиперграфе обязательно возникает запрещенная тройка

Общее кол-во отмеченных вершин:

$N \le 8$ (групп) $\times$ 13 (вершин в группе) ≤ 104

Ответ: 104

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 3 | 6 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	—	8	16		64

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 1

$A = \cos x \cdot \cos 3x$

$2 \cdot A = 2 \cdot \cos x \cdot \cos 3x = \cos 2x + \cos 4x$

$2 \cdot \sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{8} = \cos 2x - \cos 4x$

получим уравнение.

$\cos 2x - 2 \cdot \cos^2 2x + 1 = \frac{5}{8}$

$\cos 2x = \frac{3}{4}; \cos 2x - \frac{1}{4}$

$2 \cdot A + \frac{5}{8} = 2 \cdot \cos 2x$

$A = \cos 2x - \frac{5}{16}$

$A_1 = \frac{7}{16}$

$A_2 = -\frac{9}{16}$

Ответ: $\frac{7}{16}; -\frac{9}{16}$

Задание 5

по неравенству о средних имеем

$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{2 \cdot c^2 + 8 \cdot a \cdot b}$

$\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} \geqslant \frac{(b^2+c^2)^2}{2a^2+8bc}$

$\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geqslant \frac{(c^2+a^2)^2}{2b^2+8ca}$

Применяя неравенство КБШ для дробей, получим

$\frac{(a^2+b^2)^2}{2c^2+8ab} + \frac{(b^2+c^2)^2}{2a^2+8bc} + \frac{(c^2+a^2)^2}{2b^2+8ca} \geqslant$

Лист 1 из ~~16~~ 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 3 | 6 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$\geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^2+2b^2+2c^2+8\cdot(a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c)} \geq$$

$$\geq \frac{36}{6+8\cdot(a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c)}$$

Известно, что $a^2+b^2+c^2=3 \geq a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c$

Тогда: $\geq \frac{36}{6+24}=\frac{6}{5}$

Равенство достигается при $a=b=c=1$

Ответ: $\frac{6}{5}$; при $a=b=c=1$

Задание 4:

Из условия имеем $rq^2p-r \vdots pr-1 \Longleftrightarrow q^2\cdot(pr-1)+$ $+q^2-r \vdots pr-1 \Longleftrightarrow q^2-r \vdots pr-1$ аналогично $p^2-q \vdots$ $\vdots qr-1$; $r^2-p \vdots pq-1$ если $q^2-r=0$ или $p^2-q=0$ или $r^2-p=0$, то доказали $|q^2-r| \geq pr-1$; $|p^2-q| \geq qr-1$; $|r^2-p| \geq pq-1$ предположим $p \geq q \geq p$ тогда $pq-1 \geq r^2-1$ от сюда или $r^2 \geq p, r^2-p \geq r^2-1, q \leq 1$, или $r^2<p, pq-1 \leq p-r^2, pq-p+r^2 \leq 1, p(q-1)+r^2 \leq 1$

Т.к. $p,q,r \geq 1$, то возможно только равенство $p=1$ или $q=1$ или $r=1$, полный квадрат

Ответ: ч.т.д

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 5 | 3 | 6 | 0 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2

Из параллелограмма:
$\angle D = \angle B = 180° - 32° - 14° = 134°$ по свойству описанной окружности $\triangle FDE$ $\angle ESF = 2 \cdot (180° - 134°) = 92°$ по свойству центрального угла $AD \parallel BC$, $AECB$ - трапеция параллельные прямые высекают на окружности равные дуги значит $AECB$ равнобедренная трапеция $\overset{\frown}{AB} = 28°$, $\overset{\frown}{CB} = 64°$, $\overset{\frown}{CE} = 28°$, $\overset{\frown}{FA} = 64°$, т.к. $BC = AF$ ~~а в~~ $AB = CE$.

$\overset{\frown}{FE} = 360° - 56° - 128° = 176°$, $\angle FCE = 88°$, т.к. $88° + 92° = 180°$, то S ~~прина~~ принадлежит описанной окружности $\triangle ACB$

$SFCE$ - вписанный тогда S - середина ~~а~~ $\overset{\frown}{FE}$,

$\overset{\frown}{SF} = 88°$

~~Гео~~ $\angle(BS; AC) = \frac{1}{2} \cdot (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{SC}) = \frac{1}{2} \cdot (28° + 116°) = 72°$

Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 2 | 6 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	20	20		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Нам дано $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$. Воспользуемся формулами для произведения sin и cos:

1) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

2) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

Применим 1-ю формулу к $\sin x \sin 3x$: $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 4x]$. Т.к. $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos(-2x) = \cos 2x \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x] \Rightarrow \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x] = \frac{5}{16} \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$. Теперь найдем чему равен $\cos x \cos 3x$: $\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos(-2x) + \cos 4x]$. ~~Обозначим cos 2x~~ Т.к. $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos(-2x) = \cos 2x \Rightarrow \cos x \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos 4x]$. Обозначим $\cos 2x = a$, $\cos 4x = b$, тогда $a - b = \frac{5}{8}$, а нужно найти $(a+b)\cdot\frac{1}{2}$. Воспользуемся формулой двойного угла: $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \Rightarrow b = 2a^2 - 1$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a - b = \frac{5}{8} \\ b = 2a^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2a^2 + 1 = \frac{5}{8} \\ b = 2a^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - a - 0{,}375 = 0 & (1) \\ b = 2a^2 - 1 & (2) \end{cases}$$

(1) $2a^2 - a - 0{,}375 \mid \cdot 8$

$16a^2 - 8a - 3 = 0$

$D = 256$

$a_1 = \frac{8+16}{32} = \frac{3}{4}$

$a_2 = \frac{8-16}{32} = -\frac{1}{4}$

(2) $b_1 = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$

$b_2 = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -0{,}875$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 М Л 0 0 0 2 6 2 6 4 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Найдем $(a+b)\cdot\frac{1}{2}$ $(\cos x \cos 3x)$:

$\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$

$\left(-\frac{1}{4}-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{9}{16}$

Ответ: $-\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$

№5

Заметим, что выражение абсолютно симметрично относительно a, b, c, это значит, что если мы переставим буквы местами выражение не изменится. Обозначим минимум выражения за S. По Коши $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow a^4+b^4\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{2}$, аналогично для остальных пар. Тогда $S\geq\frac{1}{2}\left[\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab}+\frac{(b^2+c^2)^2}{a^2+4bc}+\frac{(c^2+a^2)^2}{b^2+4ac}\right]$. Применим неравенство Коши к сумме дробей:

$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\frac{x_3^2}{y_3}\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{y_1+y_2+y_3}$, тогда $S\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)]^2}{(c^2+4ab)+(a^2+4bc)+(b^2+4ac)}$.

Заметим, что сверху мы получим $2(a^2+b^2+c^2)=2\cdot3=6$. В знаменателе получим $a^2+b^2+c^2+4(ab+bc+ca)=3+4(ab+bc+ac)$, значит $S\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{6^2}{3+4(ab+bc+ca)}=\frac{18}{3+4(ab+bc+ca)}$. Оценим $ab+bc+ca$ сверху, напишем сумму квадратов: $a-b^2+b-c^2+c-a^2\geq0$ т.к сумма квадратов ≥0. Раскроем это выражение, получим

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА000262626726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=3$, тогда
$3+4(ab+bc+ca)\leq 3+4\cdot 3=15 \Rightarrow S\geq \frac{6}{5}$. Заметим, что при
$a=b=c=1$ условие $a^2+b^2+c^2=3$ выполнено и $S=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=1{,}2$

Ответ: 1,2

№4

Натуральные p, q, r таковы, что:
$pr-1 \mid pq^2-1$
$qr-1 \mid p^2r-1$
$pq-1 \mid r^2q-1$

Если какое-то из чисел равно 1, то есть точный k, поэтому, дальше считаем $p, q, r\geq 2$
Раз $pr-1 \mid pq^2-1 \Rightarrow$ существует натуральное k, что $pq^2-1=k(pr-1)$. Посмотрим, остатки при делении на p: число pq^2-1 при дел на p даёт ост $p-1$, правая часть: $k(pr-1)=kpr-k$. kpr делится на p, значит остаток правой части при делении на p это $p-$остаток k. Чтобы обе части были равны остатки должны совпасть, значит остаток у k при делении на p равен 1, то есть $k=1+pt$ для некоторого $t\geq 0$. Если $t=0$, то $k=1 \Rightarrow pq^2-1=pr-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow q^2=r$, то есть r точный квадрат, если $t\geq 1$, то $k\geq p+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow pq^2-1=k(pr-1)\geq (p+1)(pr-1)$.
$pq^2-1\geq p(p+1)r-(p+1) \Rightarrow pq^2+p\geq p(p+1)r \Rightarrow q^2+1\geq r(p+1)$.
Точно также из 2-х других делимостей получаем:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА000262676426

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверьте только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$p^2+1 \geq q(r+1)$

$r^2+1 \geq p(q+1)$

Предположим, что для любого $x \geq 2$ верно $x^2+1 < x(x+1)$. Значит при $p, q, r \geq 2$.

$(p^2+1)(q^2+1)(r^2+1) < pqr(p+1)(q+1)(r+1)$, что противоречит тому выражению, которое мы получили перемножением ранее. Противоречие значит, что предположение не верно, обязательно, хотя бы в 1 месте получится $r=q^2$, $p^2=q$, $p=r^2$, либо одно из чисел будет 1.

Ч.Т.Д.

№3

В правильном 80-угольнике все вершины лежат на 1-й окружн. ~~все вершины лежат~~ и натуральный угол между соседними вершинами равен: $\frac{360^\circ}{80} = 4{,}5^\circ$. В △ углы 18° 81° 81°, значит дуги напротив них равны 36°, 162°, 162°. Переведём дуги в число шагов к вершинам 80-угольника:

$36^\circ \to 8$ шагов

$162^\circ \to 36$ шагов

Итак, запрещённый △ получается тогда и только тогда, когда три вершины идут по кругу с шагами 8, 36, 36. Число 8 и 36 делятся на 4, то есть в запрещённой тройке все 3 вершины будут иметь один и тот же класс:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA0002626726

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1: {0, 4, 8, ..., 76}
2: {1, 5, 9, ..., 77}
3: {2, 6, 10, ..., 78}
4: {3, 7, 11, ..., 79}

Отсюда следует, задачу можно решить отдельно в каждом классе, из 20-ти вершин, а потом сложить. Пусть максимум в одном классе X, тогда всего 4X. Возьмём один класс из 20-ти вершин, перенумеруем их по кругу как 0, 1, 2 ... 19, это просто каждая 4-я вершина 80-тиугольника. В исходном 80-тиугольнике шаги были 8 и 36 ~~в~~ внутри класса шаг уменьшается в 4 раза

$8 \to 2$
$36 \to 9$ } Запрещённая тройка в 20-тиугольнике выглядит так: три вершины идущие по кругу с промежутками 2, 9, 9, то есть если есть вершина i, то запрещённая тройка {i; i+2; i+11}. Теперь задача свелась к тому, чтобы на круге из 20-ти точек выбрать максимум точек так, чтобы не было тройки i, i+2, i+11. Рассмотрим пары во множестве разностей в 2, опасность появляется, только тогда, когда во множестве ~~разн~~ есть пара (i; i+2), тогда мы должны убедиться, что i+11 не взято;

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА0002626776

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

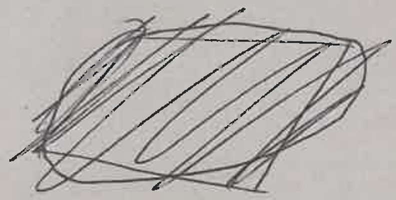
1	2	3	4	5	6	Σ

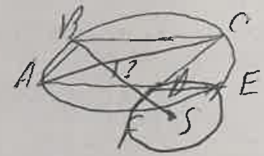
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

0, 2 => запрещена 11
1, 3 => запрещена 12
2, 4 => запрещена 13
...
17, 19 => запрещена 8
Составим множество вершин, где для всех i не будет запрещённых. $S = \{0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16\}$ - всего 13 вершин => $X = 13 \Rightarrow 4X = 52$
Ответ: 52

№3





По теореме о сумме < в Δ: $\angle ABC = 180 - 32 - 14 = 134$
По св парал.: $AB \parallel CD$, $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$
~~$\angle ABD = 180$~~ - ABCD вопис в окр => $\angle ABC + \angle ADC = 180$, $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	6	4	4	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
8	6	20	20	—		54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. $\sin x \cdot \sin 3x = \dfrac{\cos(3x-x)-\cos(3x+x)}{2} = \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{2}$

$\dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \dfrac{5}{16} \Leftrightarrow \cos 2x - \cos 4x = \dfrac{5}{8}$

Пусть $b = \cos 2x$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2b^2 - 1$

$b - (2b^2 - 1) = \dfrac{5}{8}$

$-2b^2 + b + 1 = \dfrac{5}{8}$

$-2b^2 + b + \dfrac{3}{8} = 0 \quad | \cdot (-8)$

$16b^2 - 8b - 3 = 0$

$D = 64 + 192 = 256 = 16^2$

$b_{1,2} = \dfrac{8 \pm 16}{32}$

$b_1 = \dfrac{3}{4}$

$b_2 = -\dfrac{1}{4}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \dfrac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \dfrac{b + 2b^2 - 1}{2}$

1. Случ. $b = \dfrac{3}{4}$, тогда $\cos 4x = 2b^2 - 1 = 2 \cdot \dfrac{9}{16} - 1 = \dfrac{1}{8}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8} : 2 = \dfrac{7}{16}$

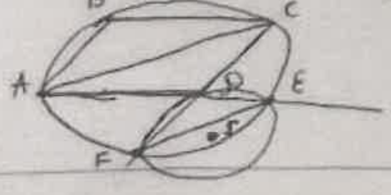
2. Случ. $b = -\dfrac{1}{4}$, тогда $\cos 4x = 2b^2 - 1 = \dfrac{2}{16} - 1 = -\dfrac{7}{8}$

$\cos x \cdot \cos 3x = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{8} : 2 = -\dfrac{9}{16}$

$\cos x \cdot \cos 3x \in \left[-\dfrac{9}{16}; \dfrac{7}{16}\right]$

Ответ: $\left[-\dfrac{9}{16}; \dfrac{7}{16}\right]$

№2.



Решение: Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle ABC = 180 - \alpha - \gamma$

$AE \cdot AD = AB \cdot AC$

$CF \cdot CD = BC \cdot CA$ ↓

Вариант № 4 | M A 0 0 0 2 6 4 4 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

в паралл. $ABCD$: $AB = CD$, $BC = AD$, Тогда из вышеперечисленного $\Rightarrow$ $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow$ точки E и F получились из точек A и C $\Rightarrow$ гомотетия точки-центра $D \Rightarrow EF \parallel AC$. Аналогично, используя степень точки B по секущей BA, BD и BE, BF получаем равное отношение из кот. $\Rightarrow$, что $DF \parallel AB$ и $DE \parallel BC$, значит $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ - подобны при взаимн. соотв. $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow D$, $E \leftrightarrow C$ ~~значит.~~ ~~$\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ - подобны~~ Центры опис окр. подобн $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ (обозн. центр первой через O, второй - S соотв.) Так же связаны той же гомотетией, поэтому лучи BO и BS симметр. относ биссектр. $\angle$ при вершине B этих подобн. $\triangle$-ов. Отсюда $(\widehat{AC, BS}) = \frac{1}{2} \cdot (\angle ABC - \angle ACB) + \angle = 54$

Ответ: 54.

4. Заметим, что $pr-1, qr-1, pq-1 > 0$, если $p=1$, то из $q \cdot r - 1 \mid (p^2 r - 1) = r - 1$, получаем, $qr - 1 \leq r - 1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow p \cdot q - 1 = 0$, невозможно, аналогично $q \neq 1$ и $r \neq 1$, значит $p, q, r \geq 2$. Из $pr-1 \mid pq^2 - 1$ имеем $pq^2 \equiv 1 \pmod{pr-1}$, умнож. на r и использ. $pr \equiv 1 \pmod{pr-1}$, получ $q^2 \equiv r \pmod{pr-1}$, то есть $q^2 - r = a \cdot (pr-1)$, где $a \in \mathbb{Z}$, аналог.: $p^2 - q = b(qr-1)$; $r^2 - p = c(p \cdot q)$, где $b, c \in \mathbb{Z}$ т.к. $p, q, r \geq 2$, то $pr - 1 > r$, $qr - 1 > q$, $p \cdot q - 1 > p$. Поэтому $a \leq 1 \Rightarrow q^2 = r + a(pr-1) \leq r - (pr-1) < 0$, невозможно, значит $a \geq 0$, аналогично $b \geq 0$ и $c \geq 0$

Если $a = 0$, то $r = q^2$ - квадрат, если $b = 0$, то $q = p^2$ - квадрат, если $c = 0$, то $p = r^2$ - квадр.

Иначе $a, b, c \geq 1$, тогда $\begin{cases} q^2 + 1 \geq r(p+1) \\ p^2 + 1 \geq q(r+1) \\ r^2 + 1 \geq p(q+1) \end{cases}$ перемножим: $(q^2+1)(p^2+1)(r^2+1) \geq r(p+1) \cdot q(r+1) \cdot p(q+1)$ (*)

Когда $x \geq 2$ верно: $x^2 + 1 < x^2 + x = x(x+1)$, значит $(q^2+1)(p^2+1)(r^2+1) \leq pqr(p+1)(r+1)(q+1)$, что противореч (*)

$\Rightarrow a, b, c \not\geq 1$ и хотя бы из $a, b, c = 0$, то есть хотя бы одно из чисел p, q, r - точный квадрат ЧТД.

3

$(2\cos^2 - \sin^2 x)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 4 | 4 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

9. Обознач. вершины нашего многоугольника числами $(0, 1, \ldots, 79)$ по кругу. Шаг центрального $\angle = \frac{810}{180} = 4{,}5$

Для вписа Δ с угл. $18°, 81°, 81°$, против. леж. дуги $= 36°, 162°, 162°$. Значит между верш. основ центр $\angle = 36°$, то есть $\frac{36}{4{,}5} = 8$ шагов, а от верш. при $18°$ до кажд. в основ $\frac{162}{4{,}5} = 36$ шагов $\Rightarrow$ запрещено конфигуриров эквивалента: существ x, что отмеч. одноврем $x-36, x, x+36$.

Рассматр. граф: он разбит на 80 верш. и на 4 цикла, длин 20. Причем запрещ. тройки целиком леж. внутри цикла. В 1 таком цикле отмечено M вершин и не отмечено $Z = 20 - M$ верш., между 2-мя ~~подряд~~ соседн. не отмеч. может стоять ≤ 2 отмеч. (иначе 3 подряд), знач. $M \leq 2 \cdot Z$, то есть $20 - Z \leq 2 \cdot Z$ $\Rightarrow Z \geq \frac{20}{3} \approx 7 \Rightarrow M \leq 13$. Итак, в кажд. из 4-х циклов можно отметить ≤ 13 верш., знач. всего $\leq 4 \cdot 13 = 52$

Построение на 13 в цикле:

11011011011011011010 (20 позиц.) в нём нет ~~3~~ троек подряд $\Rightarrow$ в 80-ти угольнике нет троек $x-36, x, x+36$, сделаем ~~[illegible]~~ независимо в каждом из 4-х циклов

Ответ: 52.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 | 1 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

1) $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$

$\cos x \cos 3x$

$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(x-3x) - \cos(x+3x))$

$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{5}{16}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = \frac{5}{8}$

$\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{5}{8}$

$/ t = \cos 2x /$

$t - 2t^2 + 1 = \frac{5}{8}$

$2t^2 - t - \frac{3}{8} = 0$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = 256$

$\sqrt{D} = 16$

$t_{1,2} = \frac{8 \pm 16}{32}$ $t_1 = \frac{3}{4}$ $t_2 = -\frac{1}{4}$

$\cos 2x = \frac{3}{4}$

$\cos 2x = -\frac{1}{4}$

2) $/ A = \cos x \cos 3x /$

$A = \frac{1}{2}(\cos(x-3x) + \cos 4x)$

$A = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$

$\cos 4x = 2t^2 - 1$

$A = \frac{1}{2}(t + 2t^2 - 1) = t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}(t + t - \frac{5}{8}) = \frac{1}{2}(2t - \frac{5}{8}) = t - \frac{5}{16}$

1. $t = \frac{3}{4}$

$A = \frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$

2. $t = -\frac{1}{4}$

$A = -\frac{1}{4} - \frac{5}{16} = -\frac{9}{16}$

Ответ: $-\frac{9}{16}; \frac{7}{16}$

Лист 1 из 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 | 1 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

S_2

Дано:

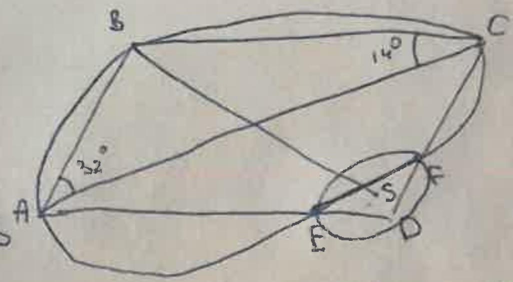
$\angle BAC = 32^\circ$

$\angle BCA = 14^\circ$

ABCD – п-мм

Найти:

угол между AC и BS



Решение:

1) ∃ ω – окр опис ABC

$\angle ABC = 180 - 46 = 134^\circ$ (Σ углов в Δ)

$\angle BAC = 32^\circ \Rightarrow \cup BC = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ$

$\angle BCA = 14^\circ \Rightarrow \cup AB = 2 \cdot 14^\circ = 28^\circ$

1. (·) E

ABCD – п-мм ⇒ BC ∥ AD

AE ∥ BC

$\cup AB = \cup EC$

$AB = 28^\circ \Rightarrow EC = 28^\circ$

(·) F

AB ∥ CD

AB ∥ CF $\cup BC = 64^\circ \Rightarrow \cup AF = 64^\circ$

$\cup AF = \cup BC$

2) ∃ Δ BEF

BE стяг $\cup BCE$

$\cup BCE = 92^\circ$

BF = стяг BAF

$BAF = 92^\circ$

BE = BF

3) (·) B равно удалена от концов отрезка EF ⇒ B лежит на серед. ⊥ к EF

(·) S центр окр ΔDEF

SE = SF ⇒ (·) S также лежит на серед ⊥ к EF ⇒ BS ⊥ EF

$\cup AF = 64^\circ$

$\cup CE = 28^\circ$

/угол между AC и EF = α/

$\alpha = \frac{\cup AF + \cup CE}{2} = \frac{92^\circ}{2} = 46^\circ$

~~BS⊥EF~~

~~если BS ⊥ EF, то ∠ между BS и AC~~

~~φ~~ ∃ φ – искомый угол

EF составляет с прямой AC $\angle 46^\circ$

BS ⊥ EF

Если SS ⊥ EF, то ∠ между BS и AC

~~φ~~ ... что $\varphi = (46 - 28) + 90^\circ = 72^\circ$

φ

Ответ: ~~...~~ 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 2 6 8 1 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

можно разбить все вершины на 4 группы

1. верши $\{0;4;8;\dots;76\}$
2. верши $\{1;5;9\dots;77\}$
3. верши $\{2;6;10;\dots;78\}$
4. верши $\{3;7;11;\dots;79\}$

Δ с шагом 8;36 может сущ. только в одной группе $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы можем решить задачу для одной группы

а результат умнож. на 4.

нам надо расставить 1 в круге так чтобы небыло „11"

нам нужно максимизировать шаблон „110"

$20 = 3\cdot 6+2$

мы можем поместить 6 блоков 110 это займет 18 мест

и даст 12 вершин

$N = N_0+N_1 = 20$ $\quad 20-k \le 2k \Rightarrow 3k \geq 20 \Rightarrow k \geq 6{,}66$

$N_1 = 2N_0$ $\quad k = 7$

тогда макс число 1: $20-7=13$

110 110 110 110 110 110 10:

в 1 группе может быть 13 верши $\Rightarrow 4\cdot 13=52$

Ответ: 52.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 | 1 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$q^2p - 1 \overset{pr-1}{\equiv} 0$

$q^2p \overset{pr-1}{\equiv} 1$

$pr \overset{pr-1}{\equiv} 1$

$q^2(pr) \overset{pr-1}{\equiv} r$

заменим pr на 1

$q^2 \cdot 1 \overset{pr-1}{\equiv} r \Rightarrow q^2 \overset{pr-1}{\equiv} r$

$q^2 - r \vdots pr-1$

1. $pr-1 \mid q^2 - r$
2. $qr-1 \mid p^2 - q$
3. $pq-1 \mid r^2 - p$

$\exists$ ни одно число не явл. квадр. $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ 1. $q^2 - r \neq 0$

$p^2 - q \neq 0$

$r^2 - p \neq 0$

1. $|q^2 - r| \geqslant pr-1$
2. $|p^2 - q| \geqslant qr-1$
3. $|r^2 - p| \geqslant pq-1$

$\exists\ p \geqslant q \geqslant q$

т.к p и $q > r \Rightarrow$ делит. $pq-1$ - самый большой

$pq-1 \mid r^2 - p$

$|r^2 - p| \geqslant pq-1$

1) $r^2 - p > 0 \Rightarrow r^2 - p \geqslant pq-1$

$r^2 + 1 \geqslant pq + p = p(q+1)$

$r^2 + 1 \geqslant p(q+1) \geqslant r^2 + r$

$r^2 + 1 \geqslant r^2 + r \Rightarrow 1 \geqslant r$

r - N число $\Rightarrow r = 1$

$r = 1$, то $1^2 - p = 1 - p$

$pq - 1 \mid 1 - p$

т.к $p \geqslant 1$, то $|1 - p| = p - 1$

$p - 1 \geqslant pq - 1 \Rightarrow p \geqslant pq \Rightarrow 1 \geqslant p$

$q = 1$ ан-но $p = 1$

$p = q = r = 1$

$1^2 = 1 \Rightarrow \varnothing$

2) $p - r^2 > 0$

$p - r^2 \geqslant pq - 1$

$p + 1 \geqslant pq + r^2$

$p - pq \geqslant r^2 - 1$

$p(1 - q) \geqslant r^2 - 1$

если $q = 1$ то $0 \geqslant r^2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ случай где $(1, 1, 1)$

$q \geqslant 2$ то $1 - q$ - отр число

т.к $p > 0$ левая ч $p(1-q)$ отр.

$r^2 - 1 \geqslant 0$ (т.к $r \geqslant 1$) $+ \geqslant - \Rightarrow$

$\Rightarrow \varnothing$

Итог:

хотя бы 1 из разностей $= 0$

например $r^2 - p = 0$ то

$p = r^2 \Rightarrow p$ - точный кв.

ч.т.д.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

S - итоговая сумма

$$S \geq \frac{\left(\sqrt{a^4+b^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{c^4+a^4}\right)^2}{\sum (c^2+4ab)}$$

$$\sum \frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab} \geq \frac{\left(\sum (a^2+b^2)\right)^2}{\sum (c^2+4ab)}$$

№1

числ.

$\sum (a^2+b^2) = (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2) = 2(a^2+b^2+c^2) = 6$

$6^2 = 36$

Z - знаменатель

$Z = (c^2+4ab)+(a^2+4bc)+(b^2+4ac) = (a^2+b^2+c^2)+4(ab+ac+bc)$

$Z = 3+4(ab+bc+ac)$

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

$3 \geq ab+bc+ac$

$ab+bc+ac \leq 3$

$Z \leq 3+4\cdot 3 = 15$

$ab+bc+ac = 3$ - max

$Z = 3+4(ab+bc+ac)$

$Z \leq 15$

$S \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{36}{3+4(ab+bc+ac)}$

(-) min $(a=b=c=1)$ знам 15 $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{36}{15} = 1{,}2$

$S = \frac{1}{2}\,\frac{(2(a^2+b^2+c^2))^2}{15} = \frac{1}{2}\,\frac{(2\cdot 3)^2}{15} = \frac{1}{2}\cdot\frac{36}{15} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 9 | 6 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

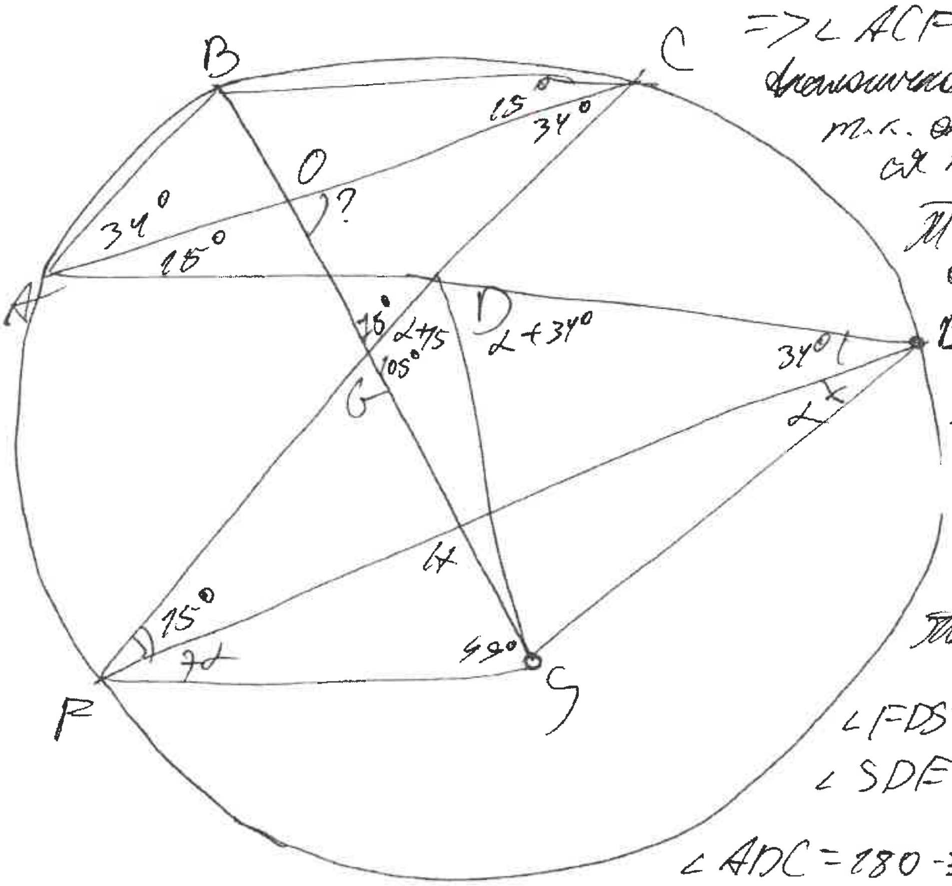
1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	6	–		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$BS \cap AC = O$

$\angle GOC - ?$

№ 2



$\angle ACF$, $\angle AEF$ ~~опир~~ опир на одну дугу =>

$=> \angle ACF = \angle AEF = 34°$

Аналогично $\angle CAE = \angle CFE$, т.к. они опираются на дугу CE

Т.к. S – центр опис окр $\triangle EFD$, то $SD = FS = ES$

Пусть $\angle EFS = \alpha$

$FS = ES = SD =>$

$=> \triangle FSD$, DSE, $\triangle FSE$ равнобедр

Тогда $\angle FES = \alpha$,

$\angle FDS = \alpha + 15°$

$\angle SDE = \alpha + 34°$

$\angle ADC = 180 - 34 - 15 = 131°$

$\angle ADC = \angle FDE$ как верт

Тогда $\angle FDC = 131 = \angle FDS + \angle SDE = 2\alpha + 49°$

Значит $\alpha = \frac{131 - 49}{2} = 41°$

$\angle FSB = \angle FCB = 34 + 15 = 49°$, т.к. они опираются на дугу FB.

Пусть $SB \cap FB = H$, тогда $FHS = 180 - 41 - 49 = 90°$

~~Итог~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00026961 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 продолжение

Пусть $BS \cap FC = G$.

$\angle FHG = 180 - 90° - 90°$

~~Тогда~~ $\angle SGC = 90 + 15 = 105°$, ~~как~~ внешний

$\angle BGC = 180 - 105 = 75°$, ~~как с~~

$\uparrow$ $\angle SGC$

~~Тогда~~ искомый угол $GOC = 180 - 34 - 75 =$

$= 71°$

Ответ: $71°$

№4

Рассмотрим $q^2r+1 \vdots qr+1$, ~~пусть тогда~~

$\frac{q^2r+1}{qr+1}$ – целое, распишем $\frac{q^2r+q+1-q}{qr+1} =$

$= \frac{q(qr+1)}{qr+1} + \frac{1-q}{qr+1} = q + \frac{1-q}{qr+1}$; q – натураль-

ное, а ~~эт~~ сумма q и $\frac{1-q}{qr+1}$ – целое число $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1-q}{qr+1}$ – целое.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА0002696126 | Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№4 продолжение

Т.к. r – нат, то $q^{r+1} \geq q+1$, а $q-1$, всегда по модулю меньше, чем $q+1$, т.к. $q \in N$

Тогда $\frac{1-q}{q^{r+1}}$ целое только при числителе равном нулю, т.е. $1-q=0$; $q=1$, а 1 – это квадрат. ЧТД

№3

Впишем нашу фигуру в окружность (равносторонняя => возможно). Из каждой вершины фигуры ~~проведем~~ отрезок в центр окружности. У нас получится 80 ~~то~~ углов, их суммa 360°, т.к. они все равны. Значит каждый угол будет по $\frac{360}{8} = 4,5°$.

К каждому из углов треугольников, которые мы ~~будем~~ образовывать, есть центральный угол, ~~вдвое~~ больший, чем угол треугольника.

~~Тогда~~ для треугольника должно быть три центральных угла: 126; 126; 108, которые будут состоять из маленьких углов по 4,5°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА0002696126
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

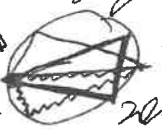
№3 продолжение

Тогда в двух из центральных углов будет по $\frac{126}{4,5}=28$ уголков, а в одном $\frac{108}{4,5}=26$ уголков.

А каждый уголок опирается на одну грань многоугольника, значит для построения такого треугольника нужны три точки, между которыми 28, 28 и 26 граней.

Тогда ~~максимальное~~ расстояние между двумя точками, ~~при котором~~ нельзя образовать такой треугольник

Всего можно образовать ~~три по~~ 80 различных треугольников с такими углами. Потому что его вершина, угол которой равен 54° может быть в 80 точках, а ~~остальные вершины~~ для каждой из этих восьмидесяти вершинах другие две вершины треугольника можно расставить только одним способом.

Если мы отметим все 80 точек, то у нас будет 80 таких треугольников. ~~Убирая одну т.~~ Не отмечая одну точку, мы исключаем 3 таких треугол . Значит, ~~чтобы~~ исключить все 80 треугольников, нам надо не отметить $\frac{80}{3}$ до целого ≈ 27

Лист 4 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 9 | 6 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 3 продолжение

Значит мы можем ~~закрасить~~ отметить 53 точки

Ответ: 53

№ 1

Распишем через синус и косинус суммы:

$\sin x \sin 3x = \sin x(\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x) =$

$= \sin x(\sin x \cos x + \sin x \cos x)\cos x + \sin x(\cos x \cos x - \sin x \sin x) =$

$= \sin x(2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) =$

$= \sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x) = (1-\cos^2 x)(4\cos^2 x - 1) =$

$= -4\cos^4 x + 4\cos^2 x + \cos^2 x - 1 = \frac{11}{64} \quad | \cdot(-1)$

$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1 + \frac{11}{64} = 0 \quad | \cdot 64$

$\cos^2 x = t;\ t \geq 0$

$16^2 t^2 - 5 \cdot 64 t + 75 = 0$

$k = -5 \cdot 32$

$D_1 = 100 \cdot 16^2 - 16^2 \cdot 75 = (5 \cdot 16)^2$

$t_1 = \frac{5 \cdot 2 \cdot 16 + 5 \cdot 16}{16^2} = \frac{15}{16}$

$t_2 = \frac{5 \cdot 2 \cdot 16 - 5 \cdot 16}{16^2} = \frac{5}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 9 | 6 | 1 | 2 | 0 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1 продолжение

Тогда $\cos x = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos x = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Преобразуем $\cos x \cos 3x = \cos x(\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x) =$

$= \cos x(\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x(\sin x \cos x + \sin x \cos x)) =$

$= \cos x(\cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x) =$

$= \cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = \cos^2 x(4\cos^2 x - 3) \neq$

$3(1-\cos^2 x)$

Подставим

$\frac{15}{16}\left(\frac{15}{4} - 3^{\backslash 4}\right) = \frac{15 \cdot 3}{16 \cdot 4} = \frac{45}{64}$

$\frac{5}{16}\left(\frac{5}{4} - 3^{\backslash 4}\right) = -\frac{5 \cdot 7}{16 \cdot 4} = -\frac{35}{64}$

Ответ: $\frac{45}{64}$; $-\frac{35}{64}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 0 | 5 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \cos 3x = \frac{11}{64}$ $\cos x \cos 3x$ -?

Используем формулу преобразования произведения в сумму: $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos(2x) - \cos 4x)$

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{11}{64}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{11}{32}$

Пусть $t = \cos 2x \Rightarrow \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2t^2 - 1$

$t - (2t^2 - 1) = \frac{11}{32} \Rightarrow t - 2t^2 + 1 = \frac{11}{32}$ $|32$

$32t - 64t^2 + 32 = 11$

$64t^2 - 32t - 21 = 0$

$D = (-32)^2 - 4 \cdot 64 \cdot (-21) = 6400 = 80^2$

$t = \frac{32 \pm 80}{128}$; $t_1 = \frac{112}{128} = \frac{7}{8}$

$t_2 = \frac{32 - 80}{128} = \frac{-48}{128} = -\frac{3}{8}$

~~Теперь найдём $\cos x \cos 3x$ ...~~

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(t + 2t^2 - 1)$

1. При $t = \frac{7}{8}$ $\frac{1}{2}(t + 2t^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{28 + 49 - 32}{32}\right) = \frac{45}{64}$

2. При $t = -\frac{3}{8}$: $\frac{1}{2}(t + 2t^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{32} - 1\right) = -\frac{35}{64}$

Ответ $\frac{45}{64}$ или $-\frac{35}{64}$

№3

В правильном 80-угольнике центральный угол между между соседними вершинами равен $\frac{360}{80} = 4{,}5°$. Треугольник с углами $63°; 63°; 54°$ имеет соответствующие дуги $126; 126; 108$

В ед. сторон это.

$\frac{126}{4{,}5} = 28$ $\frac{126}{4{,}5} = 28$ $\frac{108}{4{,}5} = 24$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | MA0002705326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (Продолжение)

Значит, три вершины образуют треугольник только когда при движении по окружности расстояния между ними (в кол-ве сторон) равны 28, 28 и 24 в некотором порядке.

Числа 28 и 24 $\underset{4}{\equiv} 0$ (сравнимы с 0 по модулю 4) => если вершина имеет номер a (от 0 до 79), то все вершины тройки имеют одинаковый остаток при делении на 4:

$a+28 \underset{4}{\equiv} a$; $a+24 \underset{4}{\equiv} a$.

Значит, все искомые тройки лежат в одном из четырех классов по ост. $r = 0,1,2,3$ в каждом ровно 20 верш.:

Сведем задачу к 20-угол.

Внутри класса перенумеруем ~~точки~~ вершины числами от 0 до 19, где k соответствует вершине $r+4k$ исходного 80-угол.

=> расстояние в 28 шагов исходного переходит в $\frac{28}{4} = 7$ в новой нумерации, и $\frac{24}{4} = 6$. Значит тройка верш. в классе образует Δ, когда в циклическом порядке на 20 точках разности между ~~точками~~ вершинами равны 7, 7, 6 (в некотором порядке) => Тройка имеет вид

$\{i, i+7, i+14\}$,
$\{i, i+7, i+13\}$ или
$\{i, i+6, i+13\}$ по mod 20.

Требуется найти наибольшее подмножество вершин 20-угольника, не содержащих трех ~~подряд~~ идущих. Для окружности из n точек max размер такого множества равен $\left[\frac{2n}{3}\right]$, где $[\ ]$ - целая часть

Док-ва что $\frac{2n}{3}$ - максимальное

Сделаем оценку сверху: Разобьем окружность на n троек последовательных точек, сдвигаясь на одну точку каждый раз. Каждая тройка содержит не более двух выбранных точек. Суммируя по всем тройкам, получим, что сумма числа выбранных точек

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (Продолжение 2)

по всем тройкам $\geq 2n$, но каждая выбранная точка входит ровно в три тройки (т.к. она я-я член трех последовательных троек: где она первая, вторая и третья). Таким образом, если m - общее число выбранных точек, то сумма по тройкам равна $3m \Rightarrow 3m \leq 2n$, откуда $m \leq \frac{2n}{3}$, но т.к. m - целое, то $m \leq \left[\frac{2n}{3}\right]$

Итого max размер множества $\left[\frac{2n}{3}\right]$. При $n=20$, получаем $\left[\frac{40}{3}\right]=13$. Пример, достигающий значения: возьмем все числа от 0 до 19, кроме кратных 3, т.е. с ост. 1 и 2 по mod 3 $\{1,2,4,5 \ldots 19\}$. Любая тройка последовательных чисел содержит число, кратное 3, которое не выбрано. В циклическом порядке тройка 19, 0, 1 содержит 0 (который не выбран) и т.д. Таким образом, условие выполнено, и 13 можно выбрать.

Пример для 80-угол.: в каждом из четырех классов (по ост $r=0,1,2,3$) выберем вершины, соответствующие указанному после перенумерации. Например, для ост r возьмем вершины с номерами $r+4k$, где k пробегает значение множества $\{1,2,4 \ldots 19\}$. Тогда никакие три отмеченные вершины не образуют правильный Δ т.к. в каждом классе нет трех последовательных после перенумерации, а разные классы не могут дать такой Δ из-за разности остатков. Всего отмечено $4 \cdot 13 = 52$ вершины.

Ответ: 52.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА0002705326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 $p, q, r \in N$

$$\begin{cases} p^2q+1 \vdots qr+1 \\ q^2r+1 \vdots qr+1 \quad (2) \\ q^2r+1 \vdots pq+1 \end{cases}$$

Рассмотрим (2) условие: $q^2r+1 = q(qr+1) - q + 1 =$

$= q(qr+1) - q + 1 = \underbrace{q(qr+1)}_{\text{делится на } qr+1\text{-цел}} - (q-1)$ $\Rightarrow qr+1 \vdots q-1$ $(*)$

константа

Числа $p, q, r \in N$, поэтому $qr+1 \geq q+1$ (при $r \geq 1$), сравним $qr+1$ и $q-1$

1) Если $q \geq 2$, то $qr+1 \geq q+1 > q-1 \geq 1$, $\Rightarrow$ положительное число $qr+1$ не может делить меньшее положительное число $q-1$ (т.к делитель должен быть не больше делимого, если только делимое не равно нулю).

Но $q-1>0$ и $q \geq 2$, поэтому равенство $qr+1 \leq q-1$ - невозможно!! . Значит, условие $(*)$ невыполнимо при $q \geq 2$.

2) Остается единственный вариант $q-1=0 \Rightarrow q=1$. При $q=1$ условие $(*)$ превращается в $r+1 \vdots 0$, что верно для любого натурального r

Таким образом, из второго условия необходимо следует, что $q=1$, число 1 я-я точным квадратом ■

№5

$a+b+c=3$, $c = 3-a-b$

$$\min \frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} + \frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2} + \frac{c^3+a^3}{8ca+9-b}.$$

~~Пусть~~ Преобразуем первое слагаемое

Пусть $s = a+b$, $p = ab$, $a^3+b^3 = s(s^2-3p)$

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} = \frac{a^3+b^3}{8ab+9-(3-a-b)^2} = \frac{a^3+b^3}{8ab+6(a+b)-(a+b)^2} =$$

$$= \frac{s(s^2-3p)}{8p+6s-s^2}.$$

Оценим знаменатель, и p через s используя нер-во средних, получаем $\underset{p}{ab} \leq \frac{(\overset{s}{a+b})^2}{4}$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение).

$8p+6s-s^2 \leq 8\cdot\frac{s^2}{4}+6s-s^2 = 2s^2+6s-s^2 = s^2+6s = s(s+6)$

(т.к это знам., то дробь уменьшается)

И оцени числитель $s(s^2-3p)$: до замены это был a^3+b^3

Для любых положительных a и b, справедливо $a^3+b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}$.

Док-ва: $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) \leq a^3+b^3+3\cdot\frac{(a+b)^2}{4}\cdot(a+b) = a^3+b^3+\frac{3}{4}(a+b)^3$

Отсюда $a^3+b^3 \geq (a+b)^3-\frac{3}{4}(a+b)^3 = \frac{1}{4}(a+b)^3$. нер-во о средних.

Оцени числитель снизу $s(s^2-3p) \geq \frac{s^3}{4}$. : $\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} \geq \frac{\frac{s^3}{4}}{s(s+6)} = \frac{s^2}{4(s+6)}$

P.S: Использовав оценки что числитель не меньше $\frac{s^3}{4}$, а знаменатель не больше $s(s+6)$ => отношение не меньше, чем $\frac{\frac{s^3}{4}}{s(s+6)}$ - верно, т.к при увеличении знам дробь уменьшается, а мы взяли знам. побольше, но чтобы получить нижнюю оценку, мы должны брать знам больше, а числитель меньше.

Аналогичные оценки для двух других слагаемых делаем:

$S \geq \frac{(a+b)^2}{4(a+b+6)}+\frac{(b+c)^2}{4(b+c+6)}+\frac{(c+a)^2}{4(c+a+6)}$

Пусть $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$. Тогда $x,y,z>0$, $x+y+z=2(a+b+c)=6$

Рассмотрим вспом. функцию $f(t)=\frac{t^2}{4(t+6)}$ на промежутке $(0;+\infty)$

$f'(t) = \frac{t(t+12)}{4(t+6)^2}$

$f''(t) = \frac{18}{(t+6)^3} > 0$ - Значит функция выпуклая, по неравенству Йенсена при фиксированной сумме $x+y+z=6$ сумма минимальна при $x=y=z$, то есть min при $x=y=z=2$.

По неравенству Йенсена $\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = f(2) = \frac{1}{8}$.

$S \geq 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Как и писал выше равенство в неравенстве достигается при $x=y=z=2$ => $a+b=b+c=c+a=2$ => $a=b=c=1$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 2 7 0 5 3 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5 (продолжение 2)

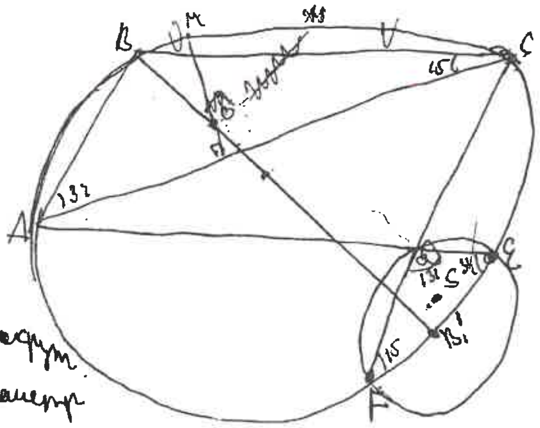
3. $\frac{1^3+1^3}{8\cdot 1\cdot 1+9\cdot 1^2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

Ответ: $\frac{3}{8}$

№2

$\angle BAC=34°$

$\angle BCA=15°$



$\angle ABC=180-34-15=131°$

Пусть O – центр, описанной окружн. около $\triangle ABC$. Проведем диаметр BB' (B' – диаметрально противоположная B).

Тогда $\angle BAB'=90$ и $\angle BCB'=90$ т.к опираются на диаметр. $\Rightarrow AB'\perp AB$, $CB'\perp BC$.

В ▱ABCD: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Rightarrow AB'\perp CD$, значит в $\triangle ACD$ прямые AB' и CB' я-я высотами: значит их пересечения B' есть ортоцентр $\triangle ACD$

$\angle BAD=180-\angle ABC=49$ т.к в ▱ сумма углов у стороны 180°.

$\angle BAE=\angle BAD$ т.к AD проходит через E; $\overset{\frown}{BE}=98°$, значит центральные углы $\angle BOE=\angle BOF=98$ (меньшие дуги).

Заметим что $S=B'$ (совпадают). Рассмотрим векторы с началом в O.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, т.к ABCD ▱ $\Rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}$ т.к B' диаметрально противоположна B. $B'D=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB'}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}|$ $=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|$.

Длина сумм. ~~к~~ радусов зависит от угла между ним. $\angle AOC$ (меньший) равен дуге AC содержащей B. $\angle ABC=131\Rightarrow \overset{\frown}{AC}$ (не содержащая B) $=262°$, а содержащая $=98°$, поэтому $\angle AOC=98°\Rightarrow |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=2R\cdot\cos\frac{98}{2}$ $=2R\cos 49°$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 0 | 5 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (Продолжение)

$B'E = |\overline{OE} - \overline{OB'}| = |\overline{OE} + \overline{OB}|$

Угол между $\overline{OB}$ и $\overline{OE}$ равен $\angle BOE = 98^\circ$ (док. выше) $\Rightarrow |\overline{OE} + \overline{OB}| = 2R\cos\frac{98}{2} = 2R\cos 49^\circ$.

И аналогично для $B'F$, $B'F = |\overline{OF} + \overline{OB}| = 2R\cos 49^\circ$.

Таким образом, $B'D = B'E = B'F \Rightarrow B'$ – центр описанной окружности $\triangle DEF$ т.е. $S = B'$

Угол между AC и BS, прямая BS совпадает с прямой BB' проходящей через угол между радиусом OB и хордой AC. Для нахождения угла используем св-ство что, радиус проведенный к середине хорды, $\perp$ этой хорде. Тогда $OM \perp AC$, а центральный угол $\angle AOM = 49^\circ$. Причем $\angle AOB = 2\angle ACB = 30 \Rightarrow$ угол между OB и OM равен $49^\circ - 30^\circ = 19^\circ$. Т.к. $OM \perp AC$, угол между OB и AC равен $90 - 19^\circ = 71^\circ$

Ответ: 71°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 0 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	0	20	20	20		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

Дано: $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$

Найти: $\cos x \cdot \cos 3x$ — ?

Решение: 1) Воспользуюсь формулой произведения:

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(3x-x) - \cos(3x+x)) = \frac{5}{16}$

$\frac{1}{2}(\cos(2x) - \cos 4x) = \frac{5}{16}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

Пусть $\cos 2x = t$, => по формуле косинуса двойного угла

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2t^2 - 1$ =>

=> $\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

$t - 2t^2 + 1 = \frac{5}{8} \quad | \cdot 8$

$8t - 16t^2 + 8 = 5$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = 64 + 192 = 256$

$t = \frac{8 \pm 16}{32}$

$t_1 = \frac{3}{4}, \quad t_2 = -\frac{1}{4}$

По формуле произведения косинусов

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos(3x-x) + \cos(3x+x)) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$

2 случая:

1) $\cos 2x = \frac{3}{4}$ => $\cos 4x$ (по формуле двойного угла) $\cos 4x = \cos^2 2x - 1 = 2 \cdot (\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$ => $\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{7}{16}$

2) $\cos 2x = -\frac{1}{4}$ => $\cos 4x = \cos^2 2x - 1$ по формуле двойного угла $\cos 4x = 2 \cdot (-\frac{1}{4})^2 - 1 = -\frac{7}{8}$ => $\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4} - \frac{7}{8}) = -\frac{9}{16}$

Ответ: 2 ответа или $\cos x \cdot \cos 3x = \frac{7}{16}$ или $\cos x \cdot \cos 3x = -\frac{9}{16}$

обе возможности реализуются

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | MA0002710725

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 4

Дано: $q^2p-1 \vdots pr-1$, $p^2r-1 \vdots qr-1$

$r^2q-1 \vdots pq-1$

Док-ть: p, q, r какое-то полный квадрат

Т.к. $q^2p-1 \vdots pr-1 \Rightarrow pq^2-1=(pr-1)\cdot x$, где x – целое, $x \geq 0$

$pq^2 = x(pr-1)+1$, рассмотрим равенство по mod p

$pq^2 \equiv 0 \pmod p$

$x(pr-1)+1 \equiv 1-x \pmod p \Rightarrow x \equiv 1 \pmod p \Rightarrow x=pk+1$, $k \geq 0$, k-целое

подставим x в исходное $pq^2-1=(pr-1)(pk+1)$

аналогично из других делимостей: $rp^2-1=(qr-1)(rl+1)$, l, целое ≥ 0

$qr^2-1=(qm+1)(pq-1)$, m – целое ≥ 0

в $pq^2-1=(pr-1)(pk+1)$

Если $k=0$, подставим: $\Rightarrow$

$\Rightarrow pq^2-1=(pr-1)$

$r=q^2 \Rightarrow r$ – полный квадрат

аналогично если $l=0$, то $q=p^2$ – полный квадрат

если $m=0$, $p=r^2$ – полный квадрат

Докажем, что одновременно k, l, m не могут быть строго больше 0, докажем что $p, q, r \geq 2$, (предположим противное: Пусть $q=1$, тогда $q^2p-1 \vdots pr-1 \Rightarrow p-1 \vdots pr-1 \Rightarrow pr-1 \leq p-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow pr \leq p \Rightarrow r=1 \Rightarrow qr-1=0$ – противоречие т.к. это делитель из условия

$pq^2-1=(pk+1)(pr-1)$, предположим, что $k \geq 1$, то $pq^2-1 \geq (p+1)(pr-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow pq^2 \geq p^2r+pr-p$, т.к. $r \geq 2$, то $pq^2 > p^2r \Rightarrow q^2 > pr$

аналогично: $p^2 > qr$

$r^2 > pq$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ перемножим 3 этих неравенства получаем $(pqr)^2 > (pqr)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ либо кто-то из $k, l, m = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ либо кто-то из r, p, q – полный квадрат

ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 | 0 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Дано: $a^2+b^2+c^2=3$ №5

Найти min:

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

Обозначим $X=\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$

по неравенству о средних: $a^4+b^4\geq\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2$, $b^4+c^4\geq\frac{1}{2}(b^2+c^2)^2$

$a^4+c^4\geq\frac{1}{2}(a^2+c^2)^2$, значит $X\geq\frac{1}{2}\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab}+\frac{(b^2+c^2)^2}{a^2+4bc}+\frac{(a^2+c^2)^2}{b^2+4ca}\right)$

по КБШ: $\left(\sum \frac{x_i^2}{y_i}\right)\left(\sum y_i\right)\geq\left(\sum x_i\right)^2$

применен к $x_1=a^2+b^2$, $x_2=b^2+c^2$, $x_3=c^2+a^2$, y =>

$y_1=c^2+4ab$, $y_2=a^2+4bc$, $y_3=b^2+4ac$

$$\Rightarrow X\geq\frac{1}{2}\left(\frac{((a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2))^2}{c^2+4ab+a^2+4bc+b^2+4ac}\right)$$

т.к из условия $a^2+b^2+c^2=3$, то $X\geq\frac{1}{2}\left(\frac{6^2}{3+4y}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{6^2}{3+4y}\right)=\frac{18}{3+4y}$, где $y=ab+bc+ac$, оценим y: т.к.

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$

то $2(a^2+b^2+c^2)-2y\geq 0\Rightarrow y\leq a^2+b^2+c^2$

$y\leq 3\Rightarrow$

$\Rightarrow 3+4y\leq 15$

$X\geq\frac{18}{3+4y}\geq\frac{18}{15}$ $X\geq\frac{6}{5}$, пример: $a=b=c=1$

$1^2+1^2+1^2=3$ и

$X=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$,

то есть оценка достигается

Ответ: минимальное значение $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}=$

$=\frac{6}{5}$ – Ответ

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА000271 0726 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

В правильном 80-угольнике шаг между соседними вершинами по дуге равен $\frac{360°}{80} = 4{,}5°$, если треугольник имеет углы $18°, 81°, 81°$, то соответствующие дуги равны $36°, 162°, 162°$. В шагах по 80-угольнику это $\frac{36°}{4{,}5°} = 8$, $\frac{162°}{4{,}5°} = 36$. Значит запрещена любая тройка вершин в которой по окружности расстояния равны: 8, 36, 36, если вершины пронумеровать числами от 0 до 79, то запрещена любая тройка вида: $(i, i+8, i+44) \bmod 80$. Значит в любой запрещённой тройке все 3 вершины имеют один и тот же остаток по mod 4. То есть задача распадается на 4 независимые части: $X_r = \{r, r+4, r+8, \dots, r+76\}$, $r = 0, 1, 2, 3$

в каждом X_r ровно 20 вершин и запрещённые тройки лежат целиком внутри одного X_r => если в каждом X_r можно выбрать не более m вершин, то всего можно выбрать не больше 4m вершин. Зафиксируем конкретное X_r, любую вершину из X_r запишем как $r + 4k$, где k от 0 до 19, тогда запрещённая тройка $(i, i+8, i+44)$ превращается в тройку $(k, k+2, k+11) \bmod 20$, тогда в классе X_r мы выбираем подмножество $\{0, 1, \dots, 19\}$ без тройки вида $(k, k+2, k+11)$, пусть максимум размера такого множества = L, докажем что $L \leq 13$, Пусть A такое допустимое множество, а B его дополнение, в A нет тройки вида $(k, k+2, k+11)$ <=> для любого k хотя бы один из $k, k+2, k+11$ лежит в B <=> для любого k $k \in B$ либо $k \in B-2$ либо $k \in B-11$, где B−2, например сдвиг всех элементов множества B на 2 влево по циклу, значит $\{0, 1, \dots 19\}$ равно $B \cup B-2 \cup B-11$. Т.к. $|B| = |B-2| = |B-11|$, а $|\{0, 1 \dots 19\}|$ равно 20 и $|\{0, 1 \dots 19\}|$ будет $\leq |B| + |B-2| + |B-11|$, то $|B|$ хотя бы 7 => $|A| \leq 13$ => $L \leq 13$, выберем $A = \{0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16\}$ $B = \{4, 5, 11, 12, 17, 18, 19\}$, перебором можно проверить что действительно для любого числа k, хотя бы одно из чисел $(k, k+2, k+11)_{\bmod 20}$ попадёт в B, то есть

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 | 0 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

$d = 13$

то есть $d = 13$

Итого в каждом из четырёх классов можно отметить ~~все~~ максимум 13 вершин, значит всего их $\leq 4 \cdot 13 =$

$= 52$, Ответ: 52

№2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 5 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	12	6	16		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Дано:

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{27}{64}$

$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\cos a{-}b - \cos(a+b))$

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos a+b + \cos(a-b))$

$\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{27}{64} \quad |\cdot 2$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{27}{32}$

$t = \cos 2x$

$2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x + \frac{27}{32} = 0$

$2t^2 - t - \frac{5}{32} = 0 \qquad D = 1 + \frac{2\cdot 4\cdot 5}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$t = \frac{1 \pm 3/2}{4} = \frac{2 \pm 3}{8} \quad \Rightarrow$ или $\cos 2x = -\frac{1}{8}$

$\cos 2x = \frac{5}{8}$

$\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{2} = ?$

$\frac{\cos 2x}{2} + \cos^2 2x - \frac{1}{2} = ?$

$\frac{5}{16} + \frac{25}{64} - \frac{1}{2} = \frac{13}{64}$ или $-\frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{2} = -\frac{27}{64}$

$\cos x \cos 3x - \sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x$

$\frac{13}{64} - \frac{27}{64} = -\frac{14}{64} \qquad 2\cos^2 2x - 1 = \frac{225}{64} - 1 = \frac{18}{64}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	2	7	1	5	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle = 90^\circ$ заметим, что

$R \cdot \sin 20^\circ = b \cdot \cos 36^\circ$

$R \cdot \sin 16^\circ = a \cdot \cos 36^\circ$

$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 16^\circ} = \frac{b}{a}$ $\quad a = b \cdot \frac{\sin 16^\circ}{\sin 20^\circ} \Rightarrow a \neq b \Rightarrow$ угол $\neq 90^\circ$

$$b\left(1 + \frac{\sin 16^\circ}{\sin 20^\circ}\right) \stackrel{?}{=} \frac{2R\sin 36^\circ}{\cos^2 36^\circ}$$

$$2\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} \stackrel{?}{=} \sin 20^\circ + \sin 16^\circ$$

Ответ: $\cos x \cos 3x = \frac{13}{64}$ или $\cos x \cos 3x = -\frac{27}{64}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 5 | 8 | 2 | 6 |

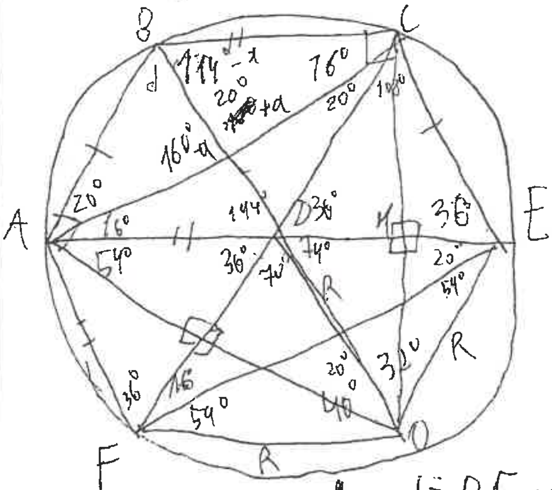
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишите только на одной стороне листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 2



$b \cdot \cos 36 = R \sin 26$

$a \cdot \cos 36 = R \sin 16$

$a \neq b$

Решение: ~~в~~ $\triangle EDF$ прямоуг. т.к. $\angle ADC = \angle FDE$ как вертикал $\angle ADF = 180° - \angle BAE = 144°$

$\Rightarrow$ уг. D. $\triangle EDF$ вне $\triangle$ $\Rightarrow$ заметим что $AE \parallel BC$

$\Rightarrow ABCE$ впис. в окр. $\Rightarrow ABCE$ – равнобок. трапец.

$\Rightarrow DC = CE = AB \Rightarrow \triangle CDE$ – равнобедр. ~~так~~ $\triangle DOE$ равнобедр.

т.к. $OD = OE$ как R в ~~тр.~~ равнобедр. $\triangle$ выс. явл. мед. и бис-сой $\Rightarrow CH_1$ и OH_2 – H_1 и H_2 совпад. $\Rightarrow \angle CHO = 180°$

$\Rightarrow CO$ – прям. $\angle COH = 36° \Rightarrow$ ~~$\angle BCO$~~ $\angle BCH = \angle BCD + 90° - 36° = 90°$

$\Rightarrow$ ~~$\triangle BCO$~~ $\triangle$.

$\angle DFE$ – впис. $\angle DOE$ – центр. $\Rightarrow \angle DOE = 32°$

аналог. $\angle DOF = 40°$ $AD = b$ $AB = a$

Замет. что $(R + (b \sin 36°))^2 + a^2 = b^2 + (R + a \sin 36°)^2$

$2R \sin 36°(b - a) + (b-a)(b+a)(\sin^2 36° - 1) = 0$ $a \neq b$

$(b-a)(2R \sin 36° + (b+a)(\sin^2 36° - 1)) = 0$ или $b = a$

или $2R \sin 36° = (b+a)\cos^2 36°$ $2R \frac{\sin 36°}{\cos^2 36°} = a + b$ т.к. ~~a~~

если $b = a$, то мы получ. 2 равнобедр. $\triangle$ с одинак. осн. $\Rightarrow$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М А 0 0 0 2 7 1 5 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

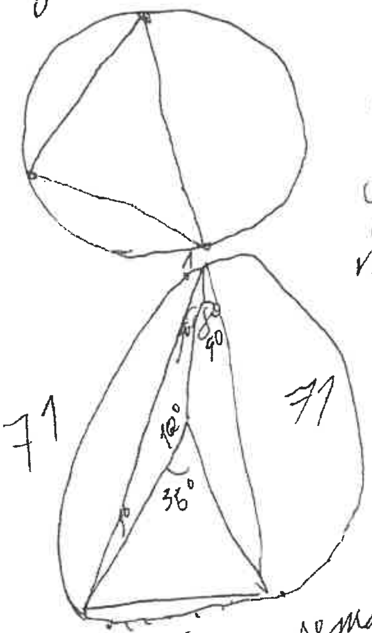
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3

прав. 160уг. ~~Вписан в окружн~~

Чтобы образ. равнобедр $\triangle$ с $\angle 18°$ нужно чтобы центр. $\angle$ опир. на основ. был равен $36°$ то есть $\frac{1}{10} \cdot 360°$

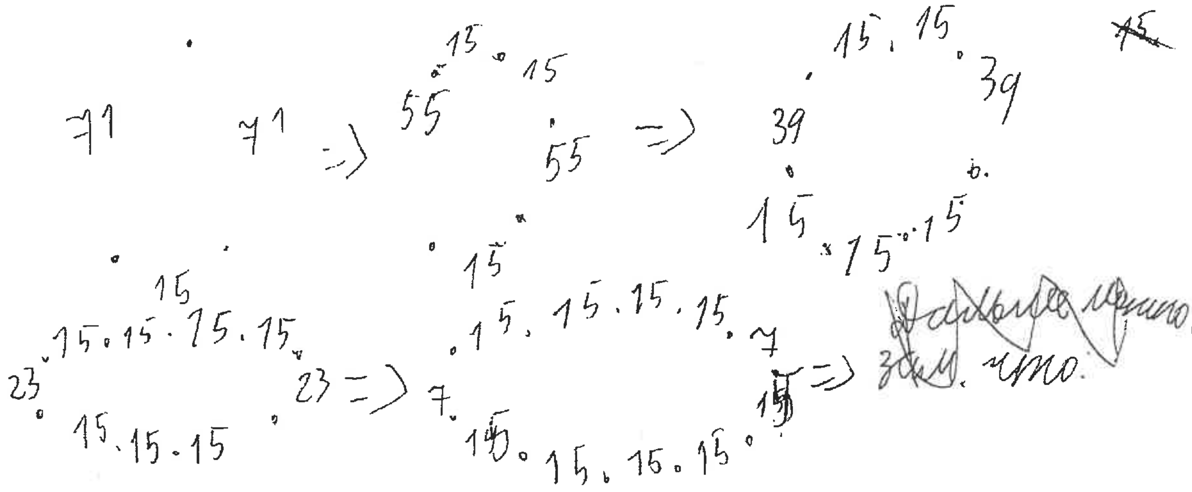
$\Rightarrow$ замет. что все 3 верш. $\triangle$ леж. на окр. $\Rightarrow \angle 18°$ опир. на дугу $36°$ т.к. он впис. на эту же ~~дугу~~ окр. $\Rightarrow$ на эту дугу опир. центр. $\angle = 36°$ $\Rightarrow$ он также равнобедр по град. $\Rightarrow$ в $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$ $\quad \frac{1}{10} \cdot 160 = 16°$



1 5 точ. лежд. нами

$\frac{162°}{360°} = \frac{81}{180°} = \frac{9}{20}$ $\quad \frac{9}{20} \cdot 160 = 72$ точ.

Мы мож. закр. $72+16=88$ точ подряд. если мы попат. покр. ещё точек > 88 то попадём на.



~~Дальше нужно.~~ $\Rightarrow$ зам. что

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

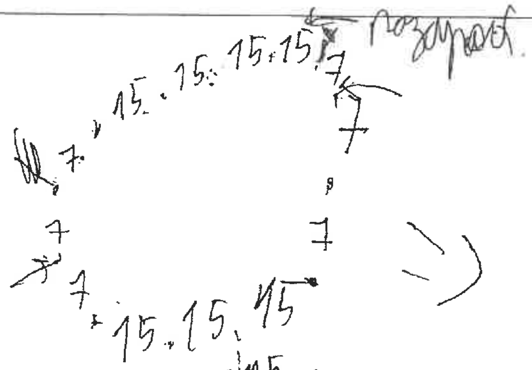
Вариант №3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 5 | 8 | 2 | 6 |

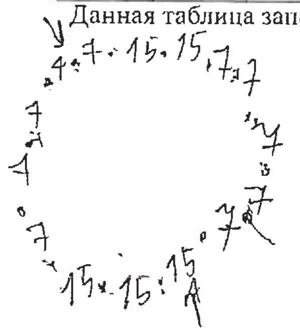
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

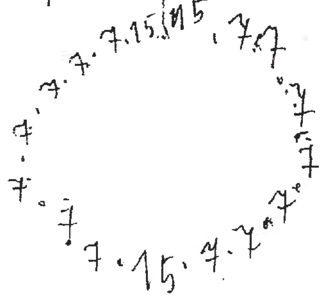
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)







=> дальше раздробить невозможно (возможно, но нет ситуаций, которых есть => мы нашли опт Δ фигуру при которой нельзя постав. точки так, чтобы получ. равнобедр. Δ. Это min т.к. мы дробили треуг. только в случ. когда находили ситуацию не подх. усл. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ вычеркн. < нельзя больше вычеркн.

=> $7\cdot7\cdot2+15\cdot3=49\cdot2+45=143$

Ответ: $\max = 143$ точки

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 5 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 4

пусть $p\le q\le r$

$q^2p-1\underset{pr-1}{\equiv}0 \Rightarrow q^2p-pr\underset{pr-1}{\equiv}0$ ~~$p(q^2-pr-$~~

$p(q^2-r)\underset{pr-1}{\equiv}0$ $q^2p-1\equiv p^2r-p$ $p(q^2-r+1)\underset{pr-1}{\equiv}1$

$q^2p-1\underset{pr-1}{\equiv}pr-1$ ~~$p(q^2-1$~~ $p(q^2-r)+p\underset{pr-1}{\equiv}1$

$\Rightarrow p\underset{pr-1}{\equiv}1 \Rightarrow q^2(p)-1\equiv q^2-1\underset{pr-1}{\equiv}0$

$q^2\underset{pr-1}{\equiv}1$ $\Rightarrow$ или $q\underset{pr-1}{\equiv}1$ ~~или $q\underset{pr}{\equiv}q$~~

$q^2-1\underset{pr-1}{\equiv}pr-1$ $q^2-r\underset{pr-1}{\equiv}0$ $1\underset{pr-1}{\equiv}r$ $r\underset{pr-1}{\equiv}1$

$p-1\underset{pr-1}{\equiv}pr-1$ $p(1-r)\underset{pr-1}{\equiv}0$

$p^2r-1\underset{pr-1}{\equiv}0$ $p\underset{pr-1}{\equiv}1 \Rightarrow p^2\underset{pr-1}{\equiv}1$ $p^2r-1\underset{pr-1}{\equiv}p^2r-r$

$p^2r(p-1)\underset{pr-1}{\equiv}0$

$r=(pr-1)\cdot a+1$ $p=(pr-1)\cdot b+1$

$p^2r-1\underset{qr-1}{\equiv}qr-1$ $r(p^2-q)\underset{qr-1}{\equiv}0$ $p^2r-1\underset{qr-1}{\equiv}q^2r-r$

$p^2r-1\underset{qr-1}{\equiv}0$ $p^2r\underset{qr-1}{\equiv}1$ ~~$p^2r-rq-1\equiv$~~ $r\underset{qr-1}{\equiv}1$ $q\underset{qr-1}{\equiv}1$ $q^2\underset{qr-1}{\equiv}1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | MA0002715826

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Придерживаться только то, что написано с этой стороны листа в рамках страницы

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Rightarrow$:

$r = prc - c + 1$ $\quad r(pc-1) = c-1$ $\quad r = \frac{c-1}{pc-1}$

$q \equiv 1 \pmod{pq-1}$ $\quad q^2 \equiv 1 \pmod{pq-1}$ $\quad q^2 p \equiv p \pmod{pq-1}$

$r^2 q - pq) \equiv 0 \pmod{pq-1}$ $\quad q(r^2 - p) \equiv 0 \pmod{pq-1}$

$r^2 \equiv p \pmod{pq-1}$ $\quad r^2 \equiv 1 \pmod{pq-1}$ $\quad p \equiv 1 \pmod{pq-1}$

$q^2 p - 1 \equiv 0 \pmod{pq-1}$ $\quad q^2 p - 1 \equiv pq' \pmod{pq-1}$

$p = (pr-1)\cdot a + 1$ $\quad p = (pq-1)a' + 1$

$(pr-1)a = (pq-1)a'$

$p(ra - qa') = a - a'$

$p = \frac{a - a'}{ra - qa'}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 5 | 8 | 1 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

задача 5

$a^2b+b^2c+c^2a=3$

$3a^2b+3b^2c+3c^2a=9=(a^2b+b^2c+c^2a)^2$

$3a^2b+3b^2c+3c^2b=a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+2a^2b^3c+2a^3bc^2+2ab^2c^3$

$a^2b(a^2b-1)+b^2c(b^2c-1)+c^2b(c^2b-1)=2(a^2b(b^2c-1)+b^2c(c^2a-1)+c^2a(a^2b-1))$

$(b^2c-1)(b^2c-2a^2b)=(b^2c-1)(3b^2c-6+2c^2a)$

$2a^2b=6-2b^2c-2c^2a$

$a^2b(\cancel{2a^2b}-a^2b)+b^2c(2-b^2c)+c^2a(2-c^2a)=a^2b(1-2b^2c)+\dots$

$a^2b(a^2b-2b^2c)$

$3\le c^3+c^3+c^3$

$1\le c^3$

c-min 1

~~$a^2b+b^2c+c^2b=a^2b(2b^2c-9)+1-2b^2c)$~~

$a\le b\le c$

$a^2\le b^2$

$a^2b\le b^3\le c^3$

$\cancel{2a^2}$

$a(ab+c^2)=3-b^2c$

$\frac{a^6+b^4c^6}{b^2}+\frac{b^6+c^4a^6}{c^2}+\frac{c^6+a^4b^6}{a^2}+2\left(\frac{\sqrt{a^6c^6+a^4b^{10}c^6+a^{10}b^6+b^4c^{10}}}{a\,b}\right.$

$a^6\left(\frac{1+b^2c^2}{b^2}\right)+b^6\left(\frac{1}{c^2}+a^2\right)+c^6\left(\frac{1}{a^2}+b^2\right)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 1 | 5 | 8 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задача 5

$a^2 \le b^2 \quad c \ge 1$

$b^3 \le c^3 \quad \therefore \quad 3a^3 \le 3 \quad a^3 \le 1 \quad a \le 1$

$a^6 \le c^6 \quad c^6 \le c^{10}$ $\quad \max a = 1$

$a^6 + b^4c^6 \le c^6 + c^{10} \quad \sqrt{a^6+b^4c^6} \le c^3\sqrt{1+c^4}$ $\quad \min c = 1$

$\Rightarrow$ знач $\le c^3\sqrt{1+c^4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{3}{a}$ числ $\le$ ~~тем~~ знач.

$\frac{1}{c} \le 1 \quad \sqrt{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right.$

$\Rightarrow$ ~~mi~~

$b \le c \quad \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c} \quad \frac{3c^3\sqrt{1+c^4}}{a}$ min при min c при max a

$\Rightarrow 3\sqrt{2}$ — min знач.

ответ: min знач. выр $= 3\sqrt{2}$

~~$3a^3 \le 3$~~ $a \le 1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 2 4 2 8 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	16	20		88

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Задание 1.

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$

Имеем $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $\cos 2x = t \Rightarrow t - (2t^2 - 1) = \frac{5}{8}$

$2t^2 - t - \frac{3}{8} = 0 \mid \cdot 8$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = 64 + 4 \cdot 3 \cdot 16 = 256$ $\qquad \sqrt{256} = 16 = \sqrt{D}$

$t_{1,2} = \frac{8 \pm 16}{32} = \frac{3}{4}; -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{3}{4} \quad (1) \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \quad (2) \end{array} \right.$

[redacted]

1) $\cos 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 4x = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$

2) $\cos 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 4x = 2 \cdot \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$

[redacted]

$\Rightarrow \cos x \cos 3x = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	2	7	2	8	3	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1) Задание 1, продолжение.

1) случай: $\cos x \cos 3x =$

$$= \frac{\frac{1}{8} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{16}$$

2) случай: $\cos x \cos 3x = \dfrac{-\frac{7}{8} - \frac{1}{4}}{2} = -\dfrac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 2 4 2 8 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3) Задание №3.

Имеем правильный 80-угольник, где угол центральный

$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \frac{360^\circ}{80} = 4{,}5$

Возьмём k, m, n - количество сторон между вершинами на окружности $\Rightarrow k+m+n = 80$ и $4{,}5k = 36^\circ$, $4{,}5m = 162$, $4{,}5n = 162$

$\Rightarrow k = \frac{36}{4{,}5} = 8$

$m = n = \frac{162}{4{,}5} = 36$

$\Rightarrow$ в $\forall$ треугольнике вершины расположены так, что по окружности между ними идут дуги 8, 36, 36 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Нумеруем вершины 0, 1 ... 79 по порядку $\Rightarrow$ будет треугольник множеств: $\underbrace{\{v;\ v+8;\ v+44\}}$ mod 80

Заметим 8 и 44 кратны 4 $\Rightarrow$ все 3 числа с одинаковым остатком при делении на 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во вершин $\frac{80}{4} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{i;\ i+2;\ i+11\}$ поделили на 4

11 нечётно $\Rightarrow$ в тройке 2 числа одинаковой чётности и одно противоположно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \max = 10 \Rightarrow$ и т.к. мы делили на 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \cdot 4 = 40$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA0002428376

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) Задание №4.

$p \in N \qquad \dfrac{q^2p-1}{pr-1} = k;$

$q \in N \qquad p^2r-1 \,\vdots\, qr-1$

$r \in N \qquad r^2q-1 \,\vdots\, pq-1$

$$\frac{q^2p-1}{pr-1} = k \qquad k \in N$$

$q^2p-1 = kpr-k$

$p(q^2-kr) = 1-k$; При $k=1 \Rightarrow p(q^2-r)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^2 = r$ – точный квадрат.

$k \ne 1 \Rightarrow$ из $p(q^2-kr) = 1-k \Rightarrow$ из $p \,\vdots\, (1-k)$

Пусть $k = 1+mp \quad m \in N$

$q^2p-1 = (1+mp)(pr-1) = pr-1+mp(pr-1)$

$q^2p-1 = pr-1+mp^2r-mp$

$q^2p = pr+mp^2r-mp$

$q^2p = p(r+mpr-m)$

$q^2 = r+mpr-m = r+m(pr-1)$

Если 1) $m=0 \Rightarrow q^2=r$

2) $m>0 \Rightarrow q^2 = r+m(pr-1) > r$

3) $m<0 \Rightarrow q^2 = r-|m|(pr-1) < r$

При $m>0 \Rightarrow q^2 > r$ и $q^2 = r+m(pr-1) \geq r+(pr-1) \geq$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 2 7 2 8 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4) Задание 14, продолжение.

$\geq pr+r-1$

$q^2-r=m(pr-1)\geq pr-1 \Rightarrow$ [redacted] $\Rightarrow q^2\geq pr+p-1$

Заметим, $\frac{pr-1}{q^2p-1} \sim \frac{pr-1}{q^2-r}$

$q^2p-1\equiv q^2-r \pmod{pr-1} \Rightarrow q^2=r+m(pr-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow q^2\equiv r \pmod{pr-1}$

При $m>0$ $q^2-r=m(pr-1)\geq pr-1\Rightarrow$

$\Rightarrow p\geq 2;\ r\geq 2$ $q^2-r\geq pr-1\Rightarrow q^2\geq pr+r-1>$

$>pr$

$q>\sqrt{pr}\Rightarrow r=\frac{q^2+m}{mp+1}$ т.к. $r\in\mathbb{Z}$

$mp+1 \vdots q^2+m\Rightarrow$

$\Rightarrow mp+1 \vdots q^2+m-m(mp+1)=q^2-m^2p-m$ – противоречие

Лист 5 из 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА00024728326
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5) Задание №5.

$a^2+b^2+c^2=3$

$$S=\frac{a^4+b^4}{c^4+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

$a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \Rightarrow$ Пусть $x=a^2$; $y=b^2$; $z=c^2 \Rightarrow x+y+z=3$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}\sum \frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab}$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{(x+y)^2}{z+4\sqrt{xy}}+\frac{(y+z)^2}{x+4\sqrt{yz}}+\frac{(z+x)^2}{y+4\sqrt{zx}}\right)$$

Оценим $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow z+4\sqrt{xy} \leq z+2(x+y)=$

$= z+2(3-z) = 6-z \Rightarrow$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{(x+y)^2}{6-z}+\frac{(y+z)^2}{6-x}+\frac{(z+x)^2}{6-y}\right)$$

$6-z=3+x+y$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{(x+y)^2}{3+x+y}+\frac{(y+z)^2}{3+y+z}+\frac{z+x^2}{3+z+x}\right)$$

$p=x+y \quad q=y+z \quad r=z+x \Rightarrow p+q+r=2(x+y+z)=$

$=6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{3+p}+\frac{q^2}{3+q}+\frac{r^2}{3+r}\right)$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА000247 28326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

5) Задание №5, продолжение.

$$f(t) = \frac{t^2}{3+t} \quad t>0$$

$$f'(t) = \frac{2t(3+t)-t^2}{(3+t)^2} = \frac{6t+t^2}{(3+t)^2} > 0 \quad \forall t>0$$

$$f''(t) = \frac{18}{(3+t)^3} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(p)+f(q)+f(r)}{3} \geqslant f\left(\frac{p+q+r}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p=q=r=2 \Rightarrow f(2) = \frac{4}{5}$$

$$S \geqslant \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \geqslant \frac{6}{5}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M A 0 0 0 2 7 2 8 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2) Задание №2.

$\angle BAC = 32^\circ$

$\angle BCA = 14^\circ$

Решение:

$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 134^\circ =$

$= \angle D \Rightarrow \angle FDE = 134^\circ$

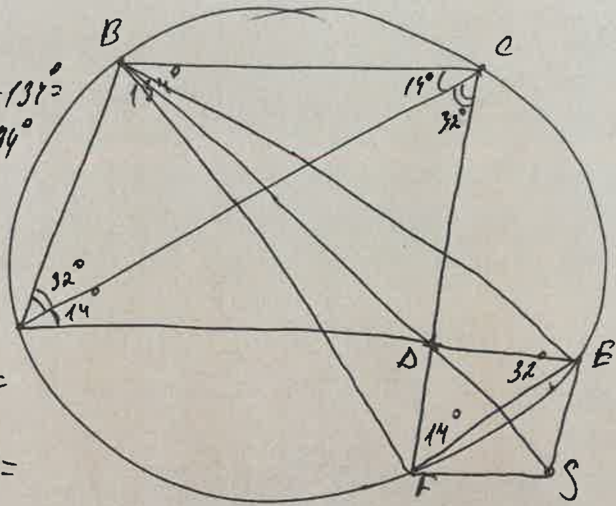
По подобию:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

(по 3 углам)

$\smile CE = 28^\circ$

$\smile AF = 64^\circ$



1) $\smile BE = \smile BC + \smile CE =$

$= 64^\circ + 28^\circ = 92^\circ$

2) $\smile BF = \smile AB + \smile AF =$

$= 28^\circ + 64^\circ = 92^\circ$

3) $BF = BE$ т.к отсекают равные дуги

$\smile FE = 360^\circ - \smile BF - \smile BE = 360^\circ - 92^\circ - 92^\circ = 176^\circ$

Т.к S - центр окружности $DEF \Rightarrow FE$ $SF = SE = R \Rightarrow$

$\Rightarrow SB \perp FE \Rightarrow BS$ - серединный перпендикуляр

$\angle FEA = 32^\circ$; $\Rightarrow \angle$ между EF и $AC \Rightarrow 32^\circ - 14^\circ = 18^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ угол между AC и $BS = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 4 | 4 | 5 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

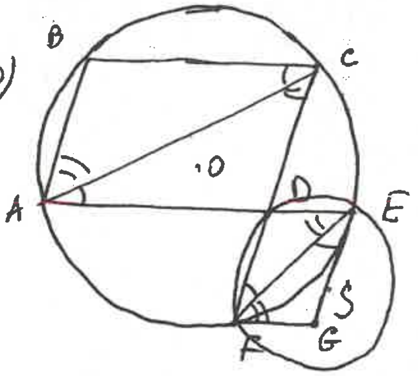
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамках справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	12	6		70

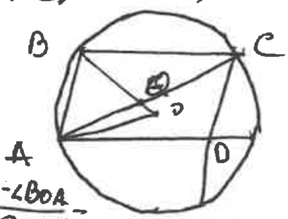
Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2

Дано: ABCD- пар-м
$\angle BAC = 36°$; $\angle BCA = 16$
ω-опис окр △ ABC (с центром в O)
A; D; E ∈ 1 прямой
C; D; F ∈ 1 прямой
E; F ∈ ω
S - центр окр опис около △ FDE
Найти: ∠ м/д AC и BS



Решение: ① Найдем ∠ м/д BO и AC (∠BQA)
Т.к ABCD-пар-м, то $\angle BCA = \angle CAD = 16°$, но т.к $\angle BOA$ - центральный, то $\angle BOA = 2\angle BCA = 16 \cdot 2 = 32°$, тогда, т.к $BO = AO = R$, то △ BOA - р/б, и $\angle ABO = \frac{180 - \angle BOA}{2} = 74°$, а т.к $\angle ABC + \angle BAD = 180°$, то $\angle ABC = 180 - \angle BAD$, а $\angle BAD = 36 + 16 = 52°$, и $\angle ABC = 128°$, а $\angle OBC = 128 - 74 = 54°$, тогда ∡ △ BQC, где $\angle BCA = 16°$; $\angle OBC = 54$, то $\angle BFC = 180 - 16 - 54 = 110°$, а $\underline{\angle BQA = 70°}$. Теперь докажем, что (·)-ки



B; O; S ∈ 1 прямой, достроим △DEF, до пар-ма, кот ~ ABCD (пар-м FDEG), теперь понятно, что существует гомотетия, кот переводит пар-м FDEG в пар-м ABCD $\left(K = \frac{AB}{FG}\right)$, тогда △ FDE → △ ABC, а S → в O ⇒ B; O S ∈ 1 окр и ∠ м/д BS и AC - это ∠ м/д AC и BO, и это ∠ BQA, кот = 70°

Ответ: 70°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА0002744526

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x\cdot\sin 3x=\frac{27}{64}$

~~cos(x…)~~ $\cos x\cdot\cos 3x-?$

Решение:

$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y^{*}$, тогда по ф-муле *, получим:

$\cos(-2x)=\sin 3x\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos 3x$; $\sin 3x\cdot\sin x=\cos 2x-\cos x\cdot\cos 3x$

ф-мула:

$\cos x\cdot\cos y=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$, и

$\cos x\cdot\cos 3x=\frac{\cos 4x+\cos 2x}{2}$, тогда:

$\sin 3x\cdot\sin x=\frac{2\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x}{2}$; $\sin 3x\cdot\sin x=\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2}$

~~ф-мула~~

№1

$\sin x\cdot\sin 3x=\frac{27}{64}$

$\sin x\cdot\sin 3x=\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2}$, и $\frac{27}{32}=\frac{\cos 2x-\cos^2 2x+\sin^2 2x}{1}$

$32(\cos 2x-2\cos^2 2x+1)=27$; $-64\cos^2 2x+32\cos 2x+5=0$,

$\cos 2x=t$; $-64t^2+32t+5=0$;

$(8t)^2-2\cdot\boxed{8\cdot t}\cdot 2+2^2-2^2-5=0$ $\quad(8t+2)^2-9=0$

$(8t+2-3)(8t+2+3)=0$; $(8t-1)(8t+5)=0$

$8t=1$, $t=\frac{1}{8}$ или $8t=-5$, $t=-\frac{5}{8}$. , тогда

$\cos 2x=\cos x\cdot\cos 3x-\sin x\cdot\sin 3x$, получим

$\cos x\cdot\cos 3x=\cos 2x+\sin x\cdot\sin 3x$.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\cos x\cdot\cos 3x=\frac{1}{8}+\frac{27}{64}=\frac{8+27}{64}=\frac{35}{64}$ или

$\cos x\cdot\cos 3x=\frac{27}{64}-\frac{40}{64}=-\frac{13}{64}$

Ответ: $-\frac{13}{64}$ или $\frac{35}{64}$.

№4

$$\begin{cases} q^2p-1\underset{mod\,a}{\equiv} pr-1\\ p^2r-1\underset{mod\,b}{\equiv} qr-1 \\ r^2q-1\underset{mod\,c}{\equiv} pq-1\end{cases}$$ по свойствам сравнений:

$$\begin{cases} q^2p\underset{mod\,a}{\equiv} pr \mid :p\\ p^2r\underset{mod\,b}{\equiv} qr \mid :r \\ r^2q\underset{mod\,c}{\equiv} pq \mid :q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2\underset{mod\,a}{\equiv} r\\ p^2\underset{mod\,b}{\equiv} q \\ r^2\underset{mod\,c}{\equiv} p\end{cases}$$

~~если $p\equiv r^2$~~, если $q^2 \vdots r$, а $r^2 \vdots p$, то $q^2 \vdots p$ и $p^2 \vdots q$ (по условию) $\Rightarrow$ ~~р или~~ p или q - это точный квадрат

Ответ: ч. и. т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 4 | 4 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Пишите только на одной стороне листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Сумма всех углов $(n-2)\cdot 180 = 158\cdot 180$, а

1 угол $= \frac{158\cdot 180}{160} = 177{,}75$, тогда если из 1-й вершины провести диагонали, то они образ между собой углы $=$ $1{,}125$, тогда сторона обр $\angle 18°$ только с 16-й диагональю (их всего 157), тогда всего неподход вершин будет 141 ~~(а тогда максимальное кол-во = 19)~~

~~Ответ: 19.~~ Но т.к нам надо только р/б Δ, то надо брать только ~~нет~~ те вершины, кот проходят г/з линию сим 160-уг (80 диаг.), таких всего 16, тогда точно можно отметить 80 вершин, и больше отметить не получится (т.к если отметить еще одну, то получ угол в 18°)

Ответ: 80.

№5

~~$\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}$~~ Ответ: $3\sqrt{2}$

Решение: минимум достигается, если $a=b=c=1$

$\frac{\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{2}}{1}=3\sqrt{2}$

Док-во: Нам надо док-ть, что

$$\frac{\sqrt{a^6+b^4\cdot c^6}}{b}+\frac{\sqrt{b^6+c^4\cdot a^6}}{c}+\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}\geqslant 3\sqrt{2},\ \text{тогда}$$

$$\left(\frac{\sqrt{a^6+b^4\cdot c^6}}{b}+\frac{\sqrt{b^6+c^4\cdot a^6}}{c}+\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}\right)^2\geqslant 18,\ \text{из нев-ства} \to$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 7 | 4 | 4 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Прикрепляя только то, что написано с этой стороны листа и рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\Rightarrow$ КБШ, следует, что

$$\left(\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}\cdot 1+\frac{\sqrt{b^8+c^4a^6}}{c}\cdot 1+\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}\cdot 1\right)^2 \le \left(\frac{a^6+b^4c^6}{b^2}+\frac{b^8+c^4a^6}{c^2}+\frac{c^6+a^4b^6}{a^2}\right)3;$$

$$\frac{a^6+b^4c^6}{b^2}+\frac{b^6+c^4a^6}{c^2}+\frac{c^6+a^4b^6}{a^2}\overset{?}{\geq} 6;$$

$$\frac{c^2a^2(a^6+b^4c^6)+b^2a^2(b^6+c^4a^6)+b^2c^2(c^6+a^4b^6)}{b^2c^2a^2}\overset{?}{\geq}\frac{2(a^2b+b^2c+c^2a)}{1}$$

$$\frac{c^2a^8+b^4a^2c^8+b^8a^2+c^4b^2a^8+c^8b^2+b^8c^2a^4-2a^4b^3c^2-2b^8c^3a^2-2c^4a^3b^2}{b^2c^2a^2}\geq 0$$

$$\frac{c^2a^8(1+c^2b^2)+c^8b^2(1+a^2b^2)+b^8a^2(1+c^2a^2)-6b^2c^2a^2}{b^2c^2a^2}\geq 0 \Big| \cdot b^2c^2a^2$$

(т.к. $b;c;a\in\mathbb{N}$)

$$c^2a^8(1+c^2b^2)+c^8b^2(1+a^2b^2)+b^8a^2(1+c^2a^2)-6b^2c^2a^2\geq 0$$

$c^2a^8(1+c^2b^2)+c^8b^2(1+a^2b^2)+b^8a^2(1+c^2a^2)\geq 6b^2c^2a^2$, заметим что ~~правая~~ левая часть возрастает быстрее правой, поэтому левая часть всегда $\geq$ правой, поэтому наше неравенство верное, и оно будет минимальным при $a=b=c=1$, и поэтому ответ $3\sqrt{2}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 7 4 8 8 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
16	0	8	10	20		54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$

$\cos x \cdot \cos 3x - ?$

1)

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2}$

$\cos x \cos 3x = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2}$

2)

$\left.\begin{array}{l}\cos 2x = A \\ \cos 4x = B\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A-B}{2} = \frac{5}{16}$

$A - B = \frac{5}{8}$

Искомое:

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{A+B}{2}$

$B = \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2A^2 - 1$

$A - (2A^2 - 1) = \frac{5}{8}$

$A - 2A^2 + 1 = \frac{5}{8}$

$-2A^2 + A + 1 - \frac{5}{8} = 0$

$-2A^2 + A + \frac{3}{8} = 0$

Умножим на 8.

$-16A^2 + 8A + 3 = 0$

$16A^2 - 8A - 3 = 0$

$A = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{32} = \frac{8 \pm 16}{32} = \left[\begin{array}{l}\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}\end{array}\right.$

Если:

3) $A = \frac{3}{4}$, то $B = 2 \cdot \frac{5}{16} - 1 = \frac{1}{8}$

$A + B = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Если:

$A = -\frac{1}{4}$, то $B = -\frac{1}{4} - \frac{7}{8} = -\frac{9}{8}$

4) $\cos x \cdot \cos 3x = \frac{A+B}{2} = \frac{7}{16}$ или $-\frac{9}{16}$

Ответ: $\frac{7}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 7 4 8 8 2 6

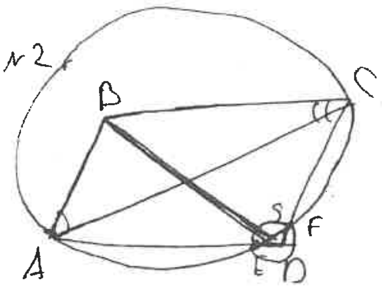
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



ABCD = п/см

∠BAC = 32

∠BCA = 14

Окружность ~~вписана~~ в ΔHBC

окружность описывает

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 7 4 8 8 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

$a, b, c > 0$

$a^2+b^2+c^2=3$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

$$a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2}=\frac{(3-c^2)^2}{2}$$

$$4ab \leq 2(a^2+b^2)=2(3-c^2) \Rightarrow c^2+4ab \leq c^2+2(3-c^2)=6-c^2$$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{(3-c^2)^2}{2(6-c^2)}$$

Пусть:

$x=a^2$ $\quad x+y+z=3$

$y=b^2$

$z=c^2$ $\quad x, y, z>0$

$E \geq f(x)+f(y)+f(z)$

$$f(t)=\frac{(3-t)^2}{2(6-t)}$$

$$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f(1)$$

$$f(1)=\frac{4}{2\cdot 5}=0{,}4 \Rightarrow \text{сумма} \geq 1{,}2$$

Равенство:

$x=y=z=1 \Rightarrow a=b=c=1$

Проверка:

$a=b=c=1$

$$\frac{1+1}{1+4}=\frac{2}{5} \quad 3\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$

Вариант № 1 MH00274882б

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3.

Максимум 40 вершин.

Треугольник с углами 18, 81 и 81 образуют вершины вида (x, x+36, x+44)

Разобьем 80 вершин на 4 типа по остатку от деления номера на 4.

В каждом классе по 20 вершин, и все запрещенные тройки лежат в одном классе.

Внутри класса тройки превращаются в

Граф с шагами 2 и 9 превращается в 9 и 2

В 20-цикле один цикл длины 20.

максимальное независимое мно (без рёбер) — 10 вершин.

Значит 4 таких класса 4·10 = 40 вершин можно выбрать, беря из каждого класса независимое множество

Ответ: 40 вершин.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 М А 0 0 0 2 7 4 8 8 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4. 1)

$(q^2p-1):(pr-1)$ p,q,r

$(p^2r-1):(qr-1)$

$(r^2q-1):(pq-1)$

$q^2p-1=k(pr-1)$ I условие

$q^2p-kpr=1-k$ II условие

2) $p(q^2-kr)=1-k$ III условие

① $k=1 \Rightarrow p(q^2-r)=0 \Rightarrow q^2=r$

r - квадрат

② $k>1$

$p(kr-q^2)=k-1 \Rightarrow k-1$ делится на p.

Пусть $k=ap+1$, где $a\in n$

Подставим в 1.

$p((ap+1)r-q^2)=ap$

$apr+r-q^2=a$

$a(pr-1)=q^2-r$ (2)

Из 2 видно: $q^2-r>0$

3) из II и III условий видно.

$b(qr-1)=p^2-q \Rightarrow p^2>q$

$c(pq-1)=r^2-p \Rightarrow r^2>p$ где $b,c\in N$

4) $q^2>r$, $p^2>q$, $r^2>p$ Перемножим все 3:

$(pqr)^2>pqr \Rightarrow pqr>1$

из 2 видно $a=\frac{q^2-r}{pr-1}$

5). т.к. a целое, $pr-1\le q^2-r$

Аналогично: $qr-1\le p^2-q$

$pq-1\le p^2-q$

$pq-1\le r^2-p$

6) Сложим 3 эти неравенства

$pr+qr+pq-3\le(q^2+p^2+r^2)-(p+q+r)$

$p^2+q^2+r^2-(pq+qr+rp)\ge p+q+r-3$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

М	А	0	0	0	2	7	5	5	8	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	–	20	12	6		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{11}{64}$

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{11}{32}$

Пусть $\cos 2x = a$, тогда $\cos 4x = 2a^2 - 1$

$a - (2a^2 - 1) = \frac{11}{32}$

$64a^2 - 32a - 21 = 0$

$a = \frac{7}{8}$ или $a = -\frac{3}{8}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{a + (2a^2 - 1)}{2} =$

$= \frac{\frac{7}{8} + \left(2 \cdot \frac{49}{64} - 1\right)}{2} = \frac{45}{64}$ или $-\frac{35}{64}$

Ответ: $\frac{45}{64}$ или $-\frac{35}{64}$

№3

[illegible] 8 [illegible], [illegible] углы 6°, 54°, 65°, [illegible] 80-[illegible] [illegible], [illegible] [illegible] углы [illegible] [illegible] углами.

[illegible] в [illegible] раз больше [illegible], тогда

угол $6 \cdot 5^\circ = 120$, тогда $\frac{120}{[illegible]} \cdot 80 = 38$ [illegible] угла

угол 54°: 108, тогда $\frac{108}{54} \cdot 80 = 24$ [illegible] угла

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible], [illegible]; [illegible] 80

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] 13 [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]; $13 \cdot 4 = 52$, Ответ: 52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$q^{n}+1 \;/\; q^{n}+1$ [illegible]

[illegible]

$q^{8}+1 \;/\; q$ [illegible]

если q [illegible], тогда [illegible] или $q>1$, тогда [illegible] $\Rightarrow$ не подходит

Значит [illegible] $(1-q^{2}) \Rightarrow$

при делении [illegible] или 1 или [illegible]

№5

$a+b+c=3$

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}$$

[illegible] при $a=b=c=1$, и $8ab+9-c^2=8\cdot1\cdot1+9-1=16$

$a^3+b^3=1+1=2$

[illegible] $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$, всего $3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

Ответ: $\frac{3}{8}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	2	7	5	9	2	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	–	20	12	6		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{11}{64}$

$\frac{(\cos 2x - \cos 4x)}{2} = \frac{11}{64}$

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{11}{32}$

пусть $\cos 2x = a$, тогда $\cos 4x = 2a^2 - 1$

$a - (2a^2 - 1) = \frac{11}{32}$

$64a^2 - 32a - 21 = 0$

$a = \frac{7}{8}$ или $a = -\frac{3}{8}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{a + (2a^2 - 1)}{2}$

при $a = \frac{7}{8}$: $\frac{\frac{7}{8} + (2(\frac{7}{8})^2 - 1)}{2} = \frac{45}{64}$

при $a = -\frac{3}{8}$: $\frac{-\frac{3}{8} + (2\cdot(-\frac{3}{8})^2 - 1)}{2} = -\frac{35}{64}$

Ответ: $\frac{45}{64}$ или $-\frac{35}{64}$

№ 3

рассм вершины прав-го 80-угольника по модулю 80. Треугольник с углами 63°, 63°, 54° впис-ся в окр-ть, поэтому соотв. дуги равны удвоенным углам: дуга напротив $54° = 108° \Rightarrow \frac{108}{360} \cdot 80 = 24$ шага. дуги напротив $63° = 126° \Rightarrow \frac{126}{360} \cdot 80 = 28$ шагов. Значит запрещенная тройка углов имеет вид: $x-28; x; x+28$ по модулю 80. Число 28 имеет с 80 Н.О.Д. = 4, поэтому все вершины разбиваются на 4 независимых цикла по 20 вершин, где "соседями"

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА00027592 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

отличаются вершины на расст. 28. В каждом таком цикле нельзя отмечать 3 подряд идущих вершин. Оптимальный шаблон - повторение 110, что даёт макс. 13 вершин для цикла. Итого максимум $4 \cdot 13 = 52$.

Ответ: 52.

№4.

расм разность $q^2r+1-q(qr+1) = q^2r+1-$
$-(q^2r+q) = 1-q \Rightarrow qr+1$ дел-ся на $q-1$.

Но при натур $q, r \geq 1$ имеем $qr+1 \geq q+1 > q-1$, если $q \geq 2$. Значит единств возможность: $q-1=0$, т.е. $q=1$

Число 1 явл-ся точным квадратом $(1=1^2)$, следовательно по крайней мере 1 число - точный квадрат. ч.т.д.

№5

$a+b+c=3$

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9+b^2} - ?$$

Из-за симметрии выражения минимальное знач. достигается при $a=b=c$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	2	7	5	9	2	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

т.к. $a+b+c=3$, то

$a=b=c=1$.

Подставим в выраж.

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}=\frac{1^3+1^3}{8\cdot1\cdot1+9-1^2}+\frac{1^3+1^3}{8\cdot1\cdot1+9-1^2}+$$

$$+\frac{1^3+1^3}{8\cdot1\cdot1+9-1^2}=\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{3}{8}.$$

Ответ: $\frac{3}{8}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 9 | 2 | 0 | 2 | 6 |

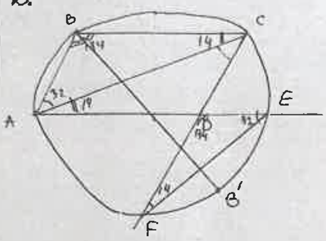
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	20	20	20		100

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2. лист 1



△ABC

По теореме о 180° $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 134$

По свойству парал:

$\angle ABC = \angle ADC = 134^\circ$

$\angle EDF = \angle ADC = 134^\circ$ (верт.)

$\angle BAC = \angle ACF = 32^\circ$ (накр. леж. при $BC \parallel AE$ и сек AC)

$\angle ACF = \angle AEF = 32^\circ$ (опир. на одну дугу AF)

Аналогично $\angle BCA - \angle CAE = \angle CFE = 14^\circ$

Пусть BB' – диаметр окружности, описанной около $\triangle ABC$

$\smile FB' = 180^\circ - \smile AB - \smile AF = 180 - 28 - 64 = 88^\circ$

$\smile EB' = 180^\circ - \smile BC - \smile CE = 180 - 64 - 28 = 88^\circ$

Равные дуги стягиваются равными хордами

$\Downarrow$

$FB' = B'E$

$\angle FB'E = \frac{1}{2}(\smile FA + \smile AB + \smile BC + \smile EC) = \frac{1}{2}(64 + 28 + 64 + 28) = 92^\circ$ (впис.)

Если описать вокруг $\triangle EFD$ окружность

То какую бы ~~отторогу~~ мы точку K не взяли на дуге FE, на которой не лежит точка D, $\angle FKE =$

Лист 1 из 7

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА000279 2026

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

2 лист 2

$= 180^\circ - \angle FDE = 180 - 134 = 46^\circ$

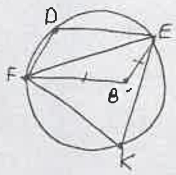
(вокруг четырехугольника FDEK описана ~~окружно~~ окружность)

$\angle FB'E = 2\angle FKF$, $FB' = B'F$ $\Rightarrow$ $FB'E$ – центральный и точка B' – центр опис окружности, т.е. $S \equiv B'$

$\angle(BB', AC) = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CE + \smile EB')$

$\angle(BB'; AC) = \frac{1}{2}(88 + 28 + 28) = 72^\circ$

Ответ: 72°



ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

3. Лист 1

Вокруг правильного 80-угольника можно описать окружность

$\triangle ABC$ имеет угла $18°, 81°, 81°$

Тогда $\angle A = 18° \Rightarrow \cup BC = 36°$

$\frac{360°}{80°} = 45°$ – дуга между соседними вершинами

$36° : 45 = 8$

$\angle B = 81° \Rightarrow \cup AC = 162° \Rightarrow 162° : 45 = 36$

Тогда если у вершины B номер i, то у вершины C номер $(i+8)$, а у вершины A номер $(i+44)$

$(i;\ i+8;\ i+44)$

При делении на 4 все эти числа дают одинаковый остаток. Поэтому можно рассмотреть 4 класса точек по отдельности. Возьмем для определенности, что они все делятся на 4 без остатка

Таких точек 20

Рассмотрим правильный 20-угольник:

x — вершина B $x = 1, 2, \ldots 20$

$x+2$ – вершина C

$x+11$ – вершина A (если превышает 20, то брать по цикку)

$20 : 3 = 6\frac{2}{3}$, т.е. как минимум 7 точек нельзя брать

Докажем, что 13 точек выбрать можно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 M A0 0 0 2 7 9 2 0 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Лист 2

1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18

Берем	Нельзя
	12
1, 3	13
2 4	14
3 5	19
8 10	20
9 11	6
15 17	7
16 18	

$20 - 7 = 13$ точек

$13 \cdot 4 = 52$

Ответ: 52

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА000219 2026
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа и рамке справа

4.

Если ~~$q^2 p - 1$~~ $(p^2 r - 1) \vdots (qr - 1) \Rightarrow$ существует целое k

$p^2 r - 1 = k(qr - 1)$ (*)

$p^2 r - kqr = 1 - k$

$r(p^2 - kq) = 1 - k \Rightarrow 1 - k \vdots r \Rightarrow k - 1 \vdots r$

Пусть $-1 + k = er$, e — целое $\Rightarrow k = (1 + er)(qr - 1)$

$p^2 r \cancel{-1} = \cancel{-1} + qr - er + eqr^2$

$p^2 = q - e + eqr$

$p^2 - q = e(-1 + qr) \Rightarrow p^2 - q \vdots (-1 + qr) \Rightarrow$ существует целое m $p^2 - q = m(-1 + qr)$

Если $m = 0$, то $p^2 = q$ — задача решена

Если $p^2 - q \geq -1 + qr$

$p^2 \geq -1 + q + qr$

$\left.\begin{matrix} p \leq r \\ p \leq q \end{matrix}\right| \Rightarrow rq \geq p^2$ Тогда $p^2 \geq q - 1 + p^2$

$q - 1 \leq 0$

$q = 1$

Точный квадрат

Т.е. во всех случаях хотя бы одно число точный квадрат ч.т.д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 MA000279202 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5.

$a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow c^2=3-a^2-b^2$

$$S=\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ac}$$

Пусть $a=b=c \Rightarrow 3a^2=3$, $a=1$

Если $a=b=c=1$, то $\frac{1+1}{1+4}+\frac{1+1}{1+4}+\frac{1+1}{1+4}=\frac{6}{5}=1.2$

Докажем, что больше этого значения не может

$a^2+b^4 \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{2}$ (нер-во Коши)

$$S \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2+4ab}+\frac{(b^2+c^2)^2}{a^2+4bc}+\frac{(c^2+a^2)^2}{b^2+4ac}\right.$$

Воспользуемся неравенством Титу

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\frac{x_3^2}{y_3} \geqslant \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{y_1+y_2+y_3}$$

$$S \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2)^2}{a^2+b^2+c^2+4ab+4ac+4bc}$$

$$S \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot3)^2}{3+4ab+ac+bc}$$

Т.к. по неравенству Коши

$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

$ac \leqslant \frac{a^2+c^2}{2}$

$bc \leqslant \frac{b^2+c^2}{2}$

$\Rightarrow ab+ac \leqslant a^2+b^2+c^2=3$

$$S \geqslant \frac{18}{3+4\cdot3}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}=1,2$$

Ответ: 1,2

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 МА000243 2026

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. $\cos x \sin 3x = \frac{5}{16}$

$\cos x \cos 3x - ?$

$\cos 3x \cos x + \sin x \sin 3x = \cos 2x$

$\cos 3x \cos x - \sin x \sin 3x = \cos 4x$

$\cos 4x + 1 = 2\cos^2 2x$

Пусть $\cos 3x \cos x = t \Rightarrow t + \frac{5}{16} + 1 = 2\left(t + \frac{5}{16}\right)^2$

$8t - 2{,}5 + 8 = 16\left(t^2 + \frac{5}{8}t + \frac{25}{256}\right)$

$8t + 5{,}5 = 16t^2 + 10t + \frac{25}{16}$

$16t^2 + 2t + \frac{25}{16} - \frac{11}{2} = 0$

$16t^2 + 2t - \frac{63}{16} = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{9}{16} \\ t = \frac{7}{16} \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{9}{16}; \frac{7}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 8 0 8 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	8	/	20		68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1. $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$

1) $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$

$\sin x \sin 3x = \sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = 1 - \cos^2 x(4\cos^2 x - 1) =$

$= 4\cos^2 x - 1 - 4\cos^4 x + \cos^2 x = -4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 1$

$-4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 1 = \frac{5}{16}$

$-4\cos^4 x + 5\cos^2 x - \frac{21}{16} = 0 \ \Big| \cdot (-1)$

$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + \frac{21}{16} = 0$

Пусть $\cos^2 x = t$

$4t^2 - 5t + \frac{21}{16} = 0$

$D = 25 - \frac{\cancel{16}\cdot 21}{\cancel{16}} = 4$

$t_1 = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$

$t_2 = \frac{5+2}{8} = \frac{7}{8}$

~~2) $\cos^2 x = \frac{3}{8}$~~

2) $\cos x \cos 3x = \cos^2 x(1 - 4\sin^2 x) =$
$= \cos^2 x(4\cos^2 x - 3)$

3) $\cos^2 x = \frac{3}{8}$

$\frac{3}{8}\left(\frac{4\cdot 3 - 24}{8}\right) = \frac{3}{8}\left(-\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}}\right) = -\frac{9}{16}$

4) $\cos^2 x = \frac{7}{8}$

$\frac{7}{8}\left(\frac{4\cdot 7 - 24}{8}\right) = \frac{7}{8}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{8}_2} = \frac{7}{16}$

Ответ: $-\frac{9}{16}, \frac{7}{16}$

5. $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$

По нер. коши:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[2]{ab} \Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$

$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geq \frac{2a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{2a^2c^2}{b^2+4ac}$

$\frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4-2b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4-2a^2c^2}{b^2+4ac} \geq 0$ (т.к. min зн. $\Rightarrow$ выраж $= 0$)

$\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2+4ab} + \frac{(b^2-c^2)^2}{a^2+4bc} + \frac{(c^2-a^2)^2}{b^2+4ac} = 0$

т.к. $(a^2-b^2)^2, (b^2-c^2)^2, (c^2-a^2)^2$ — неотриц. ~~полож.~~ числа $\Rightarrow$

$a^2 - b^2 = 0$, $b^2 - c^2 = 0$, $c^2 - a^2 = 0$

$a^2 = b^2$ $\quad b^2 = c^2$ $\quad a^2 = c^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 8 0 8 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a^2 = b^2 = c^2$

$a^2 + b^2 + c^2 = 3$

$3a^2 = 3$

$a^2 = 1$

$$\frac{1+1}{1+4\cdot1\cdot1} + \frac{1+1}{1+4\cdot1\cdot1} + \frac{1+1}{1+4\cdot1\cdot1} = 3\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1{,}2$$

Ответ: 1,2

3.

Опишем вокруг 80-угольника окружность. Т.к. он правильный, ⇒ ⇒ соседние вершины будут соединять равные дуги

Предположим, что 3 некоторые вершины создают $\angle\alpha$ так, что $\angle\alpha = 18°$. Его вершина лежит на окр-ти ⇒ ⇒ $\angle\alpha$ – впис. ⇒ $\angle\alpha = \frac{1}{2} \cup\alpha \Rightarrow \cup\alpha = 36°$

Мера дуги между соседними вершинами $= \frac{\cancel{360}^{9}}{\cancel{80}} = \frac{9}{2} = 4{,}5°$

$\frac{36}{4{,}5} = \frac{36\cdot2}{9} = 8$ дуг по 4,5° составляют дугу α, а внутри нее лежат 9 вершин (в т.ч. те, что ее ограничивают). Исключим начало и конец и получим, что мы можем отмечать 7 идущих подряд точек.

$\frac{80}{7+1} = 10$ точек нужно исключить

$80 - 10 = 70$

Ответ: 70

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 8 0 8 6 2 6

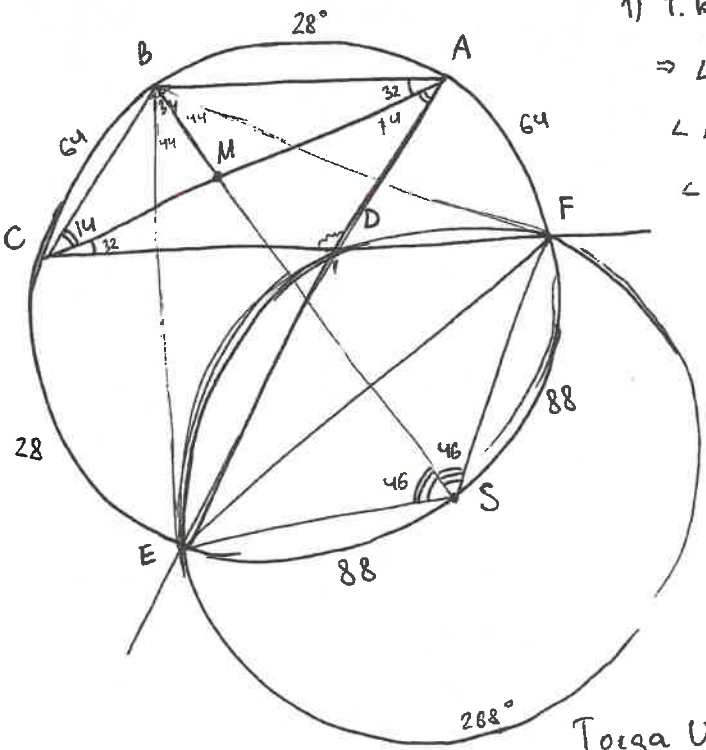
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2.

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Решение:

1) т.к. ABCD - пар-м, ⇒ AB ∥ CD ⇒

⇒ ∠BAC = ∠ACD = 32° (НЛУ),

∠ACB = ∠CAD = 14° (НЛУ),

∠CBA = ∠CDA = 180 - (14 + 32) = 134°

2) ∠CAE - впис. ⇒ ∪CE = 14·2 = 28°

∠ACF - впис. ⇒ ∪AF = 32·2 = 64°

∠CBA - впис. ⇒ ∪CA(б.) = 134 · 2 = 268° ⇒ ∪CA(м.) = 92°

3) ∠EDF = ∠ADC (верт.) = 134°,

∠EDF - впис. ⇒ ∪EF (в окр. с центром S) = 134·2 = 268

Тогда ∪EDF = 360 - 268 = 92°

Пусть S лежит на ∪EF (ESF), ⇒

⇒ ∠FSE - впис. ⇒ $\angle FSE = \frac{\cup CA(м.) + \cup CE + \cup AF}{2} = \frac{92 + 28 + 64}{2} = \frac{184}{2} = 92°$

∠FSE = 92°, ∠FSE - центр. (в окр-ти с центром S), ∠FSE = ∪EDF ⇒

⇒ S лежит на окр-ти

4) Проведем BE, BS, BF. ∪CB = ∪AC(м.) - ∪AB(м.) = 92 - 28 = 64

Р. △BES и △BFS:

ES = SF (как R в окр-ти с ц. S)

BS - общ.

$\angle BSE = \angle BSF$ (впис.) $= \frac{28+64}{2} = \frac{92}{2} = 46°$

⇒ △BES = △BFS (по 2-м ст. и ∠) ⇒

⇒ ∠EBS = ∠SBF, эти углы - впис. ⇒ $\frac{1}{2}\cup ES = \frac{1}{2}\cup FS$ ⇒ ∪ES = ∪FS =

$= \frac{1}{2}\cup ESF = \frac{176}{2} = 88$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 2 8 0 8 6 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle EBS = \angle SBF = \frac{88}{2} = 44$ (впис.)

Пусть $AC \cap BS = M$

$\angle CBS$ - впис. $\Rightarrow \angle CBS = \frac{1}{2} \cup CS$ (м.) $= \frac{28+88}{2} = \frac{116}{2} = 58°$.

В $\triangle CBM$ $\angle BCM = 14°$, $\angle CBM = 58°$ $\Rightarrow \angle BMC = 180 - (\overset{72}{58+14}) = 108$

$180 - 108 = 72°$

Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 8 2 0 1 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	–	16	–	20		56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N1

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$ $\cos x \cos 3x - ?$

$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{5}{16}$ (умножаем на 2)

$\Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

$\cos 4x = \cos 2x - \frac{5}{8}$

подставляем вместо $-\cos 4x \rightarrow -2\cos^2 2x + 1$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{5}{8}$

$\cos 2x - 2\cos^2 2x + \frac{3}{8} = 0 \quad | \cdot 8$

$8\cos 2x - 16\cos^2 2x + 3 = 0$

$-16\cos^2 2x + 8\cos 2x + 3 = 0$

$\cos 2x = t$

$\Rightarrow -16t^2 + 8t + 3 = 0$

$D = 64 + 4 \cdot 3 \cdot 16 = 16^2$

$\Rightarrow t_1 = \frac{-8+16}{-32} = \frac{8}{-32} = -\frac{1}{4}$

$t_2 = \frac{-8-16}{-32} = \frac{-8 \cdot 3}{-8 \cdot 4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4}$ или $\cos 2x = \frac{3}{4}$

подставляем $\cos 4x = \cos 2x - \frac{5}{8}$

$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2x - \frac{5}{8}) = \frac{1}{2}(2\cos 2x - \frac{5}{8})$

$= \cos 2x - \frac{5}{16}$

$\Rightarrow$ 1) $\cos 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos x \cos 3x = \cos 2x - \frac{5}{16} = -\frac{1}{4} - \frac{5}{16} = -\frac{9}{16}$

2) $\cos 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x \cos 3x = \cos 2x - \frac{5}{16} = \frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$

Ответ: $-\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$

N3

Заметим, что сумма всех углов многоугольника $= (n-2) \cdot 180$, где n – кол-во вершин многоугольника. т.е. $78 \cdot 180$

Т.к. в правильном 80-угольнике все углы равны $\Rightarrow$ каждый угол равен $\left(\frac{78 \cdot 180}{80}\right)^\circ$.

Рассмотрим произвольный угол A (вершину A, т.е. угол м/у двумя ~~~~ ~~~~ сторонами 80-угольника) и все отрезки, соединяющие её ...

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 2 8 2 0 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 (Продолжение)

с другими вершинами 80-угольника. т.к. 80-угольник правильный, все отрезки делят угол на 78 равных углов.

=> каждый такой уголок равен $\frac{78\cdot 180}{80\cdot 78} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$.

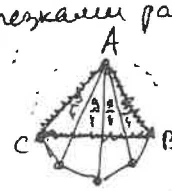
Рассмотрим произвольную вершину А. Пусть эта вершина — вершина в равнобедренном треугольнике, т.е. два других угла этого треугольника равны.

Заметим тогда, что такие Δ будут получаться только из 2 др. верш., симметричных относительно центральной линии. т.е.:

(поскольку любые два др. отрезка разной длины. Это можно док-ть тем, что любой правильный многоугольник можно вписать в ок-ть. И с одной стороны от диаметра, проведенного через опред. точку, все хорды будут иметь разную длину

)

Тогда для каждой вершины 80-угольника существует ровно один треугольник, у которого угол м/у своими отрезками равен 18°, а др. два угла Δ равны 81°. т.е. Δ след. вида: (ΔABC)



Тогда всего таких Δ — 80 штук (для кажд. верш. по 1 Δ, в котором она явл. верш. равнобедр. Δ)

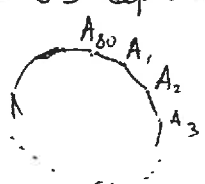
Заметим, что каждая верш. участв. в трех Δ. (1) когда эта вершина — вершина равнобедр. Δ, 2) когда эта вершина лежит у основания равнобедр. Δ, 3) опять у основания, но с др. стороны (т.е. для др. вершины равноб. Δ)

Тогда в каждом Δ не может быть выделена минимум 1 вершина.

т.е. не выделено минимум $\left[\frac{80}{3}\right]+1$, т.е. $26+1=27$ вершин

=> наибольшее кол-во вершин, которое можно выделить — $80-27=53$ верш.

Пример:



вершины $A_1, A_4, A_7, \ldots A_{79}$ — не выделены. Все остальные выделены.

№5

$a^2+b^2+c^2=3$

$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$ MIN — ?

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5 (продолжение)

По нер-вам о средних: $a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2}$ и $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

Из $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow a^2+b^2=3-c^2$

$\Rightarrow a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} = \frac{(3-c^2)^2}{2}$

и $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{3-c^2}{2}$, т.е. $4ab \leq 2(3-c^2) \Rightarrow c^2+4ab \leq c^2+$

$+2(3-c^2) = 6-c^2$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{\frac{(3-c^2)^2}{2}}{c^2+4ab} \geq \frac{(3-c^2)^2}{2(6-c^2)}$$

Аналогично $\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} \geq \frac{(3-a^2)^2}{2(6-a^2)}$ и $\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geq \frac{(3-b^2)^2}{2(6-b^2)}$

Пусть $f(t) = \frac{(3-t)^2}{2(6-t)}$. Пусть $a^2=t_1$, $b^2=t_2$, $c^2=t_3$

Тогда $\frac{f(t_1)+f(t_2)+f(t_3)}{3} \geq f\left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right) = f\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right) =$

$f\left(\frac{3}{3}\right) = f(1) = \frac{(3-1)^2}{2(6-1)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

т.е. $\frac{f(t_1)+f(t_2)+f(t_3)}{3} \geq \frac{2}{5} \quad \Big| \cdot 3$

$f(t_1)+f(t_2)+f(t_3) \geq \frac{6}{5}$

т.е. $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geq \frac{(3-c^2)^2}{2(6-c^2)} + \frac{(3-a^2)^2}{2(6-a^2)} + \frac{(3-b^2)^2}{2(6-b^2)}$

$= f(a^2)+f(b^2)+f(c^2) = f(t_1)+f(t_2)+f(t_3) \geq \frac{6}{5}$.

$\Rightarrow$ Наименьшее значение выражения равно $\frac{6}{5}$.

Пример: $a=1$, $b=1$, $c=1$

$\left(\frac{1^4+1^4}{1^2+4\cdot1\cdot1}\right)\cdot 3 = \frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1   МА000286 / 326
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
12	20	16	×	20		68

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

Дано: $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$ (*)

(?) : $\cos x \cos 3x$ – ?

Решение: т.к. $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$ то (*) можно представить так:

(**) $\cos 2x - \cos 4x = \frac{10}{16}$, т.к. $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ (косинус двойн. уг.) то

$\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1 = \frac{10}{16}$

$-2\cos^2 2x + \cos 2x + \frac{6}{16} = 0$

$2\cos^2 2x - \cos 2x - \frac{6}{16} = 0 \quad | \cdot 8$

$16\cos^2 2x - 8\cos 2x - 3 = 0$

Пусть $\cos 2x = t$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = 64 + 3\cdot 4\cdot 16 = 256$

$t_{1,2} = \frac{8 \pm 16}{32}$ $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \quad 1)\ \cos 2x = \frac{3}{4} \\ t_2 = -\frac{8}{32} = -\frac{1}{4} \quad 2)\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$

Что нужно было найти? $\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \Rightarrow$

т.к. $\cos 4x = -\frac{10}{16} + \cos 2x$ (~~по условию~~ (**))

Найти $\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \frac{10}{16} + \cos 2x\right) = \cos 2x - \frac{5}{16}$?

(1) $\frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ ← !? ($\cos x \cdot \cos y \le 1$, ≥ -1)

(2) $-\frac{1}{4} - \frac{5}{16} = -\frac{9}{16}$ подходит $\Rightarrow$ Ответ: $-\frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

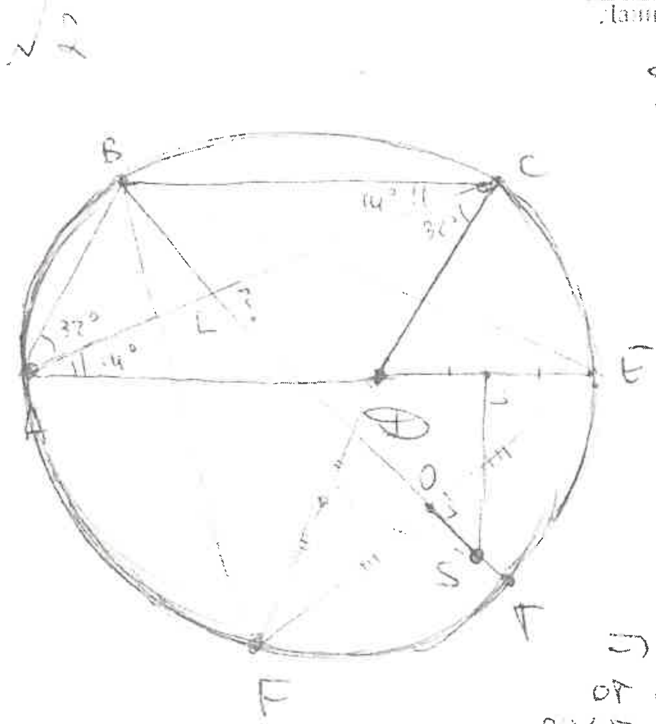
Вариант № 1 МА 000 286 1326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Дано: ABCD-парал.
$\angle BAC = 32°$
$\angle BCA = 14°$
т. S - центр описан окр. $\triangle DEF$

Найти (AC, BS) - ?

Решение

1) т.к. т.S - центр опис. около $\triangle DEF$ окр. => т.S ~~равноудалена~~ находится от сторон $\triangle FDE$ на расст. серединных перпендикуляров и ~~пересечения~~ находится за стороной FE (снаружи) т.к. $\angle FDE$ — тупой ($\angle A = 32° + 14°$ (накрест леж) $= 46°$) => $\angle ADC = 180 - 46 = 134° = \angle B$ (соответственные)

2) Р-м дугу $\cup AFDC = 2 \cdot \angle B = 268°$;
$\angle CAD = 14°$ (накрест леж) => $\cup CE = 28°$
2) $\angle ACF = 32°$ => $\cup AF = 64°$

Тогда $\cup FE = \cup ADFC - \cup AF - \cup CE = 268 - 28 - 64$ (240) $= 176°$ => $\angle FBE = 88°$

3) Р-м $\triangle FBE$ - он равнобедренный (т.к. FO = OE и BO ⊥ FE (т.к. S - серединн. перпенд.) => $\cup FT = \cup TE$ (т.к. BO - бис, бис, медиана)
=> т.к. $\angle FBE = 88°$ => $\angle TBE = 44°$ =>
=> $\cup TE = 88°$ => $\angle TBC = \frac{1}{2}\cup CE + \frac{1}{2}\cup ET = 14° + 44°$
$= 58°$, тогда $\angle BLC = 180 - 14° - 58°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA000 2861326

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 2 (продолжение)

По сумме углов треуг. в △BLC: $\cancel{\angle BLC = 18\ldots}$ [illegible]

$\angle BLC = \angle BCA - \angle TBC = 180° - 14° - 58° = 108°$

$\Rightarrow \angle TLC = 180° - 108° = 72°$

Ответ: 72°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 MA 0 0 0 2 8 6 1 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа

№5

Дано:

$a^2+b^2+c^2=3$

Найти: min $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$

1)

Т.к. $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{3}=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=1$

Т.к. $1=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \overset{(1)}{\geq} \frac{a+b+c}{3} \overset{(2)}{\geq} \sqrt[3]{abc} \overset{(3)}{\geq} \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

То (1): $\cancel{3 \geq}\ a+b+c \leq 3$

(2) $abc \leq 1$

(3) $3 \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \rightarrow \frac{bc+ac+ab}{\underbrace{abc}_{\leq 1}} \geq 3$

$\downarrow$

$\underline{bc+ac+ab \geq 3}$

2)

т.к. $a+b+c \cancel{\geq} \leq 3$

то $(a+b+c)(a+b+c) \leq 9$

$\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\text{(по условию) } 3}+2ab+2bc+2ca \leq 9$

$\downarrow$

$2(ab+bc+ca) \leq 6$

$\underline{ab+bc+ca \leq 3}$

(*) $\underline{bc+ac+ab=3}$

Тогда * $\frac{ab+bc+ca}{3} \cancel{\geq} = 1 \rightarrow 1 \leq \sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}}$

$\Downarrow$

Т.к. $\Longleftarrow$ $\underline{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq 3}$

$\cancel{a^4+b^4}$ $(\overset{3}{\overbrace{a^2+b^2+c^2}})^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$=9$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА 000 286 13 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N5 (продолжение)

Тогда

$$a^4+b^4+c^4 = 9 - 2(\underbrace{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}_{\leqslant 3})$$

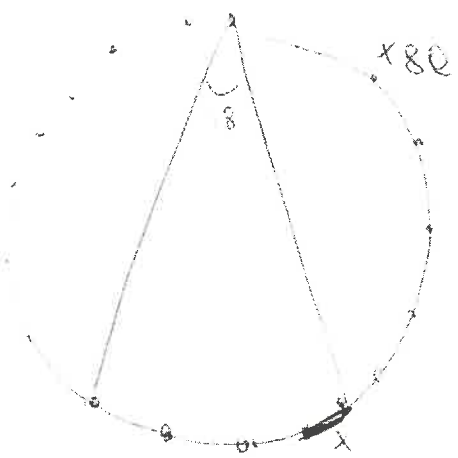
$$a^4+b^4+c^4 \geqslant 9-6 \geqslant 3$$

Тогда $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=3 \\ a^4+b^4+c^4 \geqslant 3 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=1$ (min)

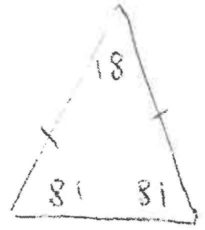
Тогда $\dfrac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \dfrac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \dfrac{c^4+a^4}{b^2+4ca} =$

$= 3 \cdot \dfrac{1+1}{1+4} = 3 \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{5}$ ← ответ.

N3



Дано: прав. 80-уг.
Найти: max кол-во вершин можно отметить чтобы никакие 3 не обр △



т.к. $\dfrac{360}{80} = \dfrac{9}{2}$

(можно сказать что каждая вершина при себе имеет угол $x = \dfrac{9}{2}$)

~~Т.к. 81 = $\frac{9}{2}$ · 18 = имеет 18 вершин~~

~~(Т.е. угол опирается на 18 кусков~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА006286 13 26

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

т.к. впис. уг $= \frac{1}{2}$ дуги не кот. он опир

$\Rightarrow$ угол 18 опирается не дугу имеющ

$18 \cdot 2 \leftarrow$ кусочков $\frac{9}{2}$

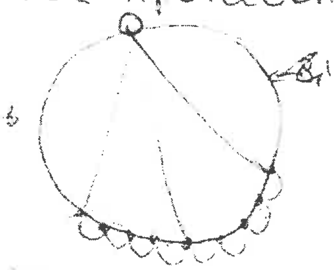
$\Rightarrow 36 = \frac{9}{2} \cdot 8 \leftarrow$ ~~вершин~~ кусков $(\frac{9}{2})$

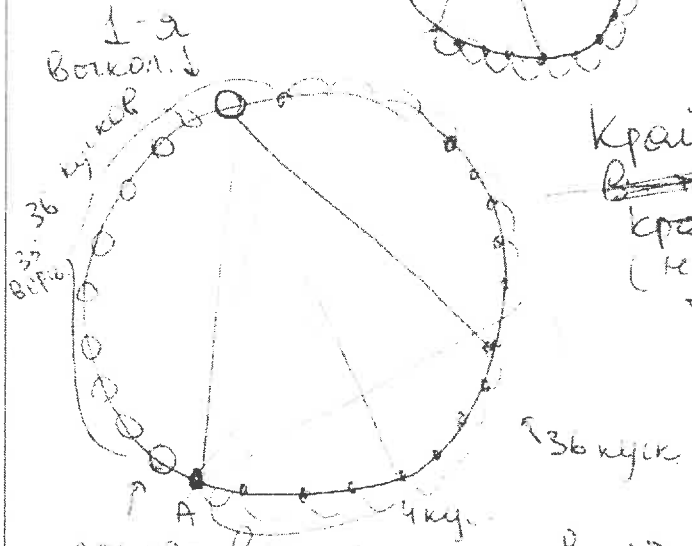
$2 \cdot 81 = \frac{9}{2} \cdot 18 \cdot 2 \leftarrow 36$ ~~верш~~. кусков

в итоге в сумме $36 \cdot 2 + 8 = 80$ ~~вершин~~. кусков

$\Rightarrow$ треугольник существует пригем.

Надо отмечать вершиной так, чтобы через которые 40 вершины не нашлось вершины не противопол. полуокр, некорош метру $\longrightarrow$





Крайнее положение т. A.

~~В т. А и в это вершин~~

~~крайние вскол~~

(не достигается)

Тогда max. ~~можно~~ ~~пройти 35~~ можно ~~отметить~~ иметь 35 кусков а это в свою очередь 17 точек. ~~(…)~~

если отметить ~~больше~~ 18 верш? $\to$ будет ~~такое~~ 14 верш. с одной стороны и 8 с другой стороны полуокружности (потому что при увели-чении отмечен. х верш. на 1, появл. новая

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000286/326
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке

№3 (продолжение)

возможность убрать 1 вершину ←
итог если приб +1, вычтеш -1
Тогда больше вершин отметить нельзя с одной ст. полуокр.
А если отмечать на другой стороне по ~~4~~ 8 верш. ~~с~~ через 1 ⟹
т.к. с др. стороны 35 вершин
$35 = \cancel{8k+3}\ 8 \cdot 4 + 3$ ← подходит
⟹ 17 вершин + $4 \cdot 8 - 4$ =

$17 + 32 - 4 = 45$

Ответ: 45

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М А 0 0 0 3 0 1 3 1 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	—	20		72

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. ДАНО:

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$

РЕШЕНИЕ:

ИСПОЛЬЗУЕМ ФОРМУЛУ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИНУСОВ:

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{\cos(x-3x) - \cos(x+3x)}{2}$

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{2}$

По усл.: $\frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{2} = \frac{5}{16} \quad |\cdot 2$

$\cos(2x) - \cos(4x) = \frac{5}{8}$

ЗАМЕНА: $y = \cos(2x)$, тогда $\cos(4x) = 2\cdot\cos^2(2x) - 1 = 2y^2 - 1$

ПОДСТАВИМ:

$y - (2\cdot y^2 - 1) = \frac{5}{8}$

$-2y^2 + y + 1 = \frac{5}{8}$

$-2y^2 + y + \frac{3}{8} = 0 \quad |\cdot 8$

$-16y^2 + 8y + 3 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$16y^2 - 8y - 3 = 0$

$D = 64 + 4\cdot 3\cdot 16 = 64 + 12\cdot 16 = 192$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 32 \\ +160 \\ \hline 192 \end{array}$

$y = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{32} = \frac{8 \pm 16}{32}$

$y_1 = \frac{3}{4} \qquad y_2 = -\frac{1}{4}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{y + 2y^2 - 1}{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

M	A	0	0	0	3	0	1	3	1	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

при $y=\frac{3}{4}$, $\cos(4x)=\frac{1}{8}$

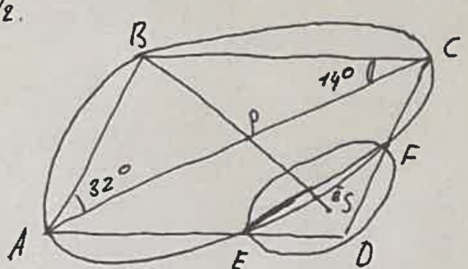
$\cos(x)\cdot\cos(3x)=\frac{7}{16}$

при $y=-\frac{1}{4}$, $\cos(4x)=-\frac{7}{8}$

$\cos(x)\cos(3x)=-\frac{9}{16}$

ОТВЕТ: $\frac{7}{16}$ или $(-\frac{7}{16})$.

№2.



НАЙТИ: $\angle(BS;AC)$

$\angle BAC=32°$, $\angle BCA=14°$

$\Rightarrow \angle ABC=180-(32+14)=134°$, тогда:

$\overset{\frown}{AB}=2\cdot\angle ACB=28°$,

$\overset{\frown}{BC}=2\cdot\angle BAC=64°$,

$\overset{\frown}{AC}$ (не содерж. B) $=2\cdot\angle ABC=268°$ ~~, т.к. ABCD-~~

т.к. ABCD-парал-м, то $AD\parallel BC$, $CD\parallel AB$

т.к. т. $E\in$ окр. и $AE\parallel BC$, то $\angle EAC=\angle BCA=14$ по т. об впис. угле

$\overset{\frown}{EC}=2\cdot\angle EAC=28°$

т. $F\in$ окр. и $CF\parallel AB$, тогда $\angle ACF=\angle CAB=32°$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AF}=2\cdot\angle ACF=64°$

Положим окр. единичной и зададим точки их центральными углами

Возьмём:

A: 0°, B: 28°, C: 92° т.к. (28+64=92),

тогда: 1. $\overset{\frown}{EC}=28°$

$\Rightarrow E: 92°+28°=120°$

2. $\overset{\frown}{AF}=64°$

$\Rightarrow F: 360-64=296$

ИМЕННО ЭТА Т. ДАЁТ $CF\parallel AB$

Т. D ПЕРЕСЕЧ. ПР. AE и CF

(ЭТО И ЕСТЬ ВЕРШИНА ПАРАЛ-МА)

ПУСТЬ $\bar{B}$ ТОЧКА ДИАМЕТРАЛЬНО ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ B НА ОКР., ТО ЕСТЬ $\bar{B}=28+180°=208°$

360 : 80 = 4,5 ТОГДА:

= 36 · 4.5 ЗНАЧИТ ПО КРУГУ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | МА0003013126

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

из полученного выше

$\overset{\frown}{AB} = 28° = \overset{\frown}{CE}$, $\overset{\frown}{BC} = 64 = \overset{\frown}{AF}$

$\Rightarrow \angle AEB = \angle CAB$, $\angle AFB = \angle ACB$

с учётом того что DG AE и DG CF, а также AE ∥ BC, CF ∥ AB

получаем что т. D,E,F равно удалены от $\bar{B}$:

$\bar{B}D = \bar{B}E = \bar{B}F$

$\Rightarrow$ т. $\bar{B}$ является центром описанной окр. $\triangle DEF$

$\Rightarrow$ т. $F = \bar{B}$

Значит BS диаметр окр.

Пусть $P = AC \cap BS$, тогда угол между пр. AC и BS $= \angle APB$

по т. об угле между пересек. хордами:

$\angle APB = \frac{1}{2} \cdot (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CS})$

мы знаем: $\overset{\frown}{AB} = 28°$, $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{CB} = 208 - 92 = 116°$, тогда

$\angle APB = \frac{1}{2} \cdot (28 + 116) = \frac{144}{2} = 72$

Ответ: 72.

№3.

Рассмотрим прав. 80-угольник

1) Какие тройки вершин запрещены

впис. угол $= \frac{1}{2}$ дуги на которую он опирается

для $\triangle$ с углами 9°, 9°, 81° дуги = 36, 162

центральный угол между соседними вершинами 80-угольника:

$360 : 80 = 4,5$ тогда:

$36° = 8 \cdot 4,5$, $162 = 36 \cdot 4,5$ значит по кругу между вершинами такого $\triangle$ идут промежутки: 8, 36, 36.

то есть запрещены тройки вершин вида: $i, i+8, i+44 \pmod{80}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	3	0	1	3	1	2	6

Вариант № 4 Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

и пусть $S_k = A_k + C_k$, тогда
C_k может быть 0, 1 или 2.

~~Главное утверждение~~

~~Если $S_k = 2$, то $A_k = 1$, $C_k = 1$, тогда из запрета~~
~~$A_k, A_{k+1}, C_k \Rightarrow A_{k+1} = 0$, а из запрета C_k, C_{k+1}, A_k следует C_{k+1}~~
~~$\Rightarrow S_k = 2$, $S_{k+1} = 0$~~

~~Рассмотрим 10 чисел~~
~~$S_0, S_1, \dots, S_9$~~

~~Пусть среди них двоек = x, после каждой двойки обязательно стоит 0~~
~~поэтому двойки вместе с нулями после них занимают минимум 2x мест.~~
~~Остаётся 10-2x мест и на каждом из них $C_k \le 1$, тогда~~
~~общее значение $S_0 + S_1 + \dots + S_9$ не превосходит $2x \cdot (10-2x) \cdot 1 = 10$.~~
~~Но $s_0 + s_1 + \dots + s_9 = a_0 + \dots + a_9 + c_0 + \dots + c_9$~~
~~то есть это ровно количество вершин отмеченых вершин в 2 классов $R, R+1$~~
~~значит в 1 паре классов можно отметить не более 10 вершин, пар всего 4.~~

Оценка количество отмеченых для каждого $k = 0, 1, \dots, 9$ имеем неравенство $A_k + B_{k+1}$ сложим эти 10 неравенств, тогда: каждая вершина класса R входит 2 раза; каждая вершина R+1 класса входит один раз. Получаем: $2 \cdot (A_0 + \dots + A_9) + (B_0 + \dots + B_9) \le 20$. Аналогично из 2 системы огр. получаем: $(A_0 + \dots + A_9) + 2 \cdot (B_0 + \dots + B_9) \le 20$. Складывая эти неравенства получаем $(A_0 + \dots + A_9) + (B_0 + \dots + B_9) \le 13$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) МОЖНА ОТМЕТИТЬ 40 ВЕРШИН

РАЗОБЬЁМ ВЕРШИНЫ ПО ОСТ.
ПРИ ДЕЛЕНИИ НОМЕРА НА 8

Т.К. $80 = 8 \cdot 10$ В КАЖДОМ КЛАССЕ ПО 10 ВЕРШИН

ЗАМЕТИМ: i и $i+8$ ЛЕЖАТ В ОДНОМ КЛАССЕ,
$44 = 40 + 4$, А 40 ДЕЛИТСЯ НА 8
ЗНАЧИТ $i+44$ ЛЕЖИТ В КЛАССЕ $i+4$
$\Rightarrow$ ЗАПРЕЩЁННАЯ ТРОЙКА ВСЕГДА БЕРЁТ 2 ВЕРШИНЫ ИЗ КЛАССА P и ОДНУ ИЗ КЛАССА $P+4$

ОТМЕТИМ ВСЕ ВЕРШИНЫ КЛАССА 0,1,2,3 (MOD 8),
А ВЕРШИНЫ КЛАССОВ: 4,5,6,7 (MOD 8) НЕ ОТМЕЧАЕМ)
ТОГДА ЕСЛИ $i = 0,1,2,3 \pmod 8$, ТО $i+44 \equiv i+4 \equiv 4,5,6,7 \pmod 8$,
ТО ЕСТЬ 3 ВЕРШИНА В ТРОЙКЕ $i, i+8, i+44$ НЕ ОТМЕЧЕНА.
ЗАПРЕЩЁННЫХ ТРОЕК НЕТ
ОТМЕЧЕННО $4 \cdot 10 = 40$ ВЕРШИН

3) БОЛЬШЕ ОТМЕТИТЬ НЕЛЬЗЯ

КЛАССЫ ДЕЛЯТСЯ НА ПАРЫ:
$(0,4), (1;5), (2;6), (3,7)$ ДОКАЖЕМ ЧТО В КАЖДОЙ ПАРЕ КЛАССОВ МОЖНО ОТМЕТИТЬ НЕ БОЛЕЕ 10 ВЕРШИН, РАССМОТРИМ ОДНУ ПАРУ $(R, R+4)$

В КЛАССЕ R ОБОЗНАЧИМ ВЕРШИНЫ ПО ПОРЯДКУ ЧЕРЕЗ ШАГ 8: $A_0, A_1, \dots, A_9$. В КЛАССЕ $R+4$ ОБОЗНАЧИМ ВЕРШИНЫ ТАКЖЕ: $Б_0, Б_1, \dots, Б_9$. ЗАПРЕЩЁННАЯ ТРОЙКА ИМЕЕТ ВИД: $A_k, A_{k+1}, Б_{k+5}$

СДЕЛАЕМ ЗАМЕНУ: $C_k = Б_{k+5}$, ТОГДА ЗАПРЕТ: НЕЛЬЗЯ ОДНОВРЕМЕННО ОТМЕЧАТЬ A_k, A_{k+1}, C_k и НЕЛЬЗЯ ОДНОВРЕМЕННО ОТМЕЧАТЬ C_k, C_{k+1}, A_k

ПУСТЬ $A_k = \begin{cases} 1, & A_k \text{ ОТМЕЧЕНА} \\ 0, & \text{ИНАЧЕ} \end{cases}$

$C_k = \begin{cases} 1, & C_k \text{ ОТМЕЧЕН} \\ 0, & \text{ИНАЧЕ} \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	3	0	1	3	1	2	6

Вариант № 4 Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$$a^4+b^4=\frac{(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2}{2}\geq$$

$$\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{2}$$

$b^4+c^4 \leq \frac{(b^2+c^2)^2}{2}$, $c^4+a^4\geq\frac{(c^2+a^2)^2}{2}$, ТОГДА

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ac}\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab}+\right.$$

$$\left.+\frac{(b^2+c^2)^2}{a^2+4bc}+\frac{(c^2+a^2)^2}{b^2+4ac}\right)$$

ПРИМЕНИМ НЕРАВ. КАШИ: ?

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab}+\frac{(b^2+c^2)^2}{a^2+4bc}+\frac{(c^2+a^2)^2}{b^2+4ac}\right)\geq\frac{((a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2))^2}{(c^2+4ab)+(a^2+4bc)+(b^2+4ac)}$$

СЧИТАЕМ: $(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=2\cdot(a^2+b^2+c^2)=6$

$(c^2+4ab)+(a^2+4bc)+(b^2+4ac)=(a^2+b^2+c^2)+4\cdot(ab+bc+ca)=$

$=3+4\cdot(ab+bc+ca)$

$$\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2+4ab}+\frac{(b^2+c^2)^2}{a^2+4bc}+\frac{(c^2+a^2)^2}{b^2+4ac}\geq\frac{36}{3+4\cdot(ab+bc+ca)}$$

ТОГДА:

$$S\geq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{36}{3+4\cdot(ab+bc+ca)}\right)=\frac{18}{3+4\cdot(ab+bc+ca)}$$

ОЦЕНИМ $ab+bc+ca$: $2ab\leq a^2+b^2$, $2bc\leq b^2+c^2$, $2ca\leq c^2+a^2$

$2\cdot(ab+bc+ca)\leq 2\cdot(a^2+b^2+c^2)=6 \Rightarrow ab+bc+ca\leq 3$, ТОГДА:

$3+4\cdot(ab+bc+ca)\leq 15 \Rightarrow \frac{18}{3+4\cdot(ab+bc+ca)}\geq\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$

$\Rightarrow S\geq\frac{6}{5}$ ПРОВЕРКА: ПРИ $a=b=c=1$ ИМЕЕМ $a^2+b^2+c^2=3$ и $S=\frac{3+3}{1+4}=\frac{6}{5}$

ОТВЕТ: $\frac{6}{5}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 9 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	12	X	20		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$

$\sin x \cdot \sin 3x = \sin x \cdot (3\sin x - 4\sin^3 x) = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x =$

$= 3(1-\cos^2 x) - 4(1-\cos^2 x)^2 = 3(1-\cos^2 x) - 4(1-2\cos^2 x + \cos^4 x) =$

$= 3 - 3\cos^2 x - 4 + 8\cos^2 x - 4\cos^4 x = -4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow \quad -4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 1 = \frac{5}{16}$

$-4\cos^4 x + 5\cos^2 x - \frac{21}{16} = 0 \qquad 4\cos^4 x - 5\cos^2 x + \frac{21}{16} = 0$

$\cos^2 x = t, \ t \geq 0$

$4t^2 - 5t + \frac{21}{16} = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-21}}{8} = \frac{5 \pm 2}{8} \quad t_1 = \frac{7}{8} \quad t_2 = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{7}{8}; \quad \cos^2 x = \frac{3}{8}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x =$

$= 4 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 - 3 \cdot \frac{7}{8} = 4 \cdot \frac{49}{64} - 3 \cdot \frac{56}{64} = \frac{196-168}{64} = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$

$\cos x \cdot \cos 3x = \cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x =$

$= 4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{8} = 4 \cdot \frac{9}{64} - 3 \cdot \frac{24}{64} = \frac{36-72}{64} = -\frac{36}{64} = -\frac{9}{16}$

Ответ: $\frac{7}{16}; \ -\frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 0 2 1 9 2 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5

По т. Коши: $a^4+b^4 \geq 2a^2b^2$; $b^4+c^4 \geq 2b^2c^2$; $c^2+a^2 \geq 2a^2c^2$

$\Rightarrow \cancel{\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + b^4+c^4}$

$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{2a^2b^2}{c^2+4ab}$; $\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} \geq \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc}$;

$\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geq \frac{2c^2a^2}{b^2+4ca} \Rightarrow$

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geq \frac{2a^2b^2}{c^2+4ab} + \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc} + \frac{2c^2a^2}{b^2+4ca}$$

$$\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4-2b^2c^2+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4-2c^2a^2+a^4}{b^2+4ca} \geq 0$$

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2+4ab} + \frac{(b^2-c^2)^2}{a^2+4bc} + \cancel{\frac{c^4}{2ca}} + \frac{(c^2-a^2)^2}{b^2+4ca} \geq 0$$

Выражение будет минимальным, то есть равно 0 при $(a^2-b^2)^2=0$, $(b^2-c^2)^2=0$ и $(c^2-a^2)^2=0$ $\Rightarrow$

$a^2=b^2$, $b^2=c^2$, $c^2=a^2$ $\cancel{a^2+b^2+c^2=3}$ $\Rightarrow a^2=b^2=c^2$.

$a^2+b^2+c^2=3$ $\quad 3b^2=1 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow a^2=c^2=b^2=1 \Rightarrow$

$a=b=c=1$.

~~Минимальное~~ $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} = \frac{1+1}{1+4\cdot1\cdot1} + \frac{1+1}{1+4\cdot1\cdot1} + \frac{1+1}{1+4\cdot1\cdot1} =$

$= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 9 | 2 | 6 |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

80-угольник правильный => его можно вписать в окр-сть. Вершины будут находиться на растояние по окр-сти равная $\frac{360°}{80}=4{,}5°$. Дуга на которую опирается угол 18° равна $2\cdot18=36°$, а на которую опираются углы 81° равна по $81\cdot2=162°$. $\frac{36}{4{,}5}=8$, $\frac{162}{4{,}5}=36$ => между вершинами треугольника основании будут находиться 7 вершин 80-угольника, а между вершинами боковых сторон треугольника по 35 вершин 80-угольника => ~~Чтобы угол не~~ ~~Треугольник~~ треугольник с углами 18°, 81°, 81° не сможет образоваться если между любыми двумя вершинами треугольника будут находится более 35 вершин 80-угольника. Значит кол-во ~~выбранных~~ отмеченых вершин наибольшее равно $80-36=44$.

Ответ: 44

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	3	0	2	1	9	2	6

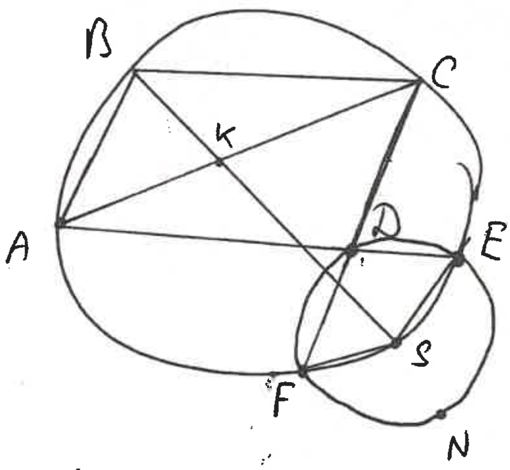
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Дано: ABCD - параллелограмм, $\angle BAC = 32°$, $\angle BCA = 14°$.

Найти: $\angle BKA$

Решение

$\angle ABC = 180 - \angle BAC - \angle BCA = 180 - 32 - 14 = 134°$, $\cup AC = 2\angle ABC = 2 \cdot 134 = 268°$.

~~Ве~~ => $\angle BAC = \angle ACD = 32°$, $\angle BCA = \angle CAE = 14°$ (по св-ву паралл-ма) => $\cup AF = \cup BC = 2\angle BAC = 2 \cdot 32 = 64°$, $\cup AB = \cup CE = 2\angle BCA = 2 \cdot 14 = 28°$.

$\cup EF = \cup AC - \cup AF - \cup CE = 268 - 64 - 28 = 176°$.

($\angle ADC = \angle FDE$ как вертикальные), $\angle ABC = \angle ADC = \angle FDE = 134°$, $\cup ENF = 2\angle FDE = 134 \cdot 2 = 268°$.

$\angle FSE = \cup FDE = 360° - \cup ENF = 360 - 268 = 92°$.

Если S лежит на окр-сти описанной около треуг. ABC, то $\cup FBE = 2\angle FSE = 2 \cdot 92 = 184°$, $\cup FBE + \cup EF = 184 + 176 = 360°$ => S лежит на окружности описанной около треуг. ABC.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 3 0 5 5 2 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ
8	20	12	8	6		54

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

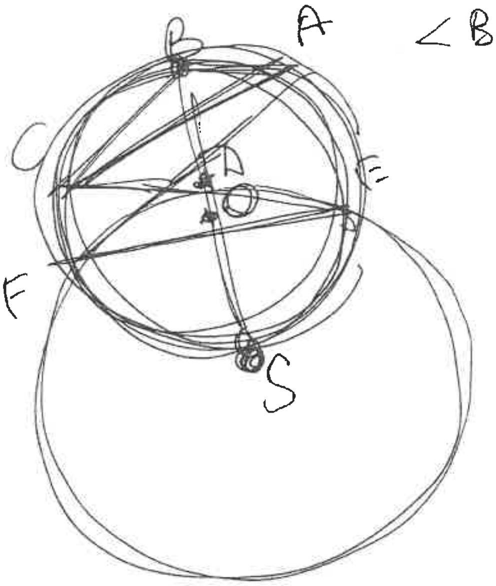
$\sin xy = \cos x \cos y + \sin x \sin y \Rightarrow \cos x \cos y = \sin xy - \sin x \sin y$

$\sin x \cdot 3x = 1$

$\Rightarrow \cos x \cos 3x = 1 - \frac{11}{64} = \frac{53}{64}$

Ответ: $\frac{53}{64}$

№2



$\angle BCA = 15^\circ$

$\angle BAC = 34^\circ$

$\Rightarrow \angle CBA = 131^\circ = \angle ADC$

$\angle ACD = \angle BAC = 34^\circ$ (внутр. накр. леж.)

аналогично $\angle CAD = \angle BCA = 15^\circ$

~~$\angle CBA =$~~ $\angle BAD = \angle BCD = 49^\circ$

$\angle FDE = \angle CDA$ (вертик.)

$\angle DEF = \angle CAD$ (опир. на $\overset{\frown}{CF}$)

$\angle AFE = \angle ACE$ (опир. на $\overset{\frown}{AE}$)

CE и AF — пересек. хорды

CD · DE = FD · AD

$S \in \omega(O, OA)$; B–O–S; $\triangle BFE / 15$

$\angle SCB = \angle BFS = \angle BES = 90^\circ = \angle BAS$

$\overset{\frown}{ABC} = 360^\circ - \overset{\frown}{AEC} = 360^\circ - 131^\circ \cdot 2 = 98^\circ$

$\overset{\frown}{FCB} = 2\angle BAF = 2\angle BAD = 98^\circ$

$\overset{\frown}{FC} + \overset{\frown}{CB} = 98^\circ = \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BA}$; $\overset{\frown}{FC} = 2\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BA} = 30^\circ$, $\overset{\frown}{CB} = 68^\circ$

$\Rightarrow \angle CSB = 34^\circ$; $\angle ASB = 15^\circ \Rightarrow \angle CBS = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$;

Ответ: $\angle(BS, AC) = 71^\circ$. $\angle(BS, AC) = \angle CXS = 15^\circ + 56^\circ = 71^\circ$

Лист 1 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 5 | 5 | 2 | 2 | 6 |

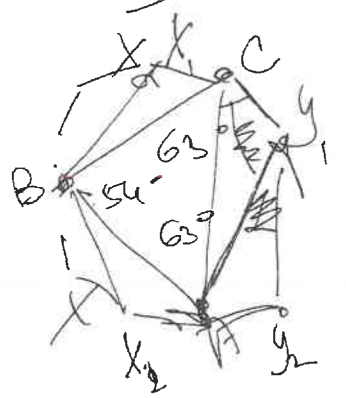
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3



Если вершины обр. какой Δ-к, то кол-во вершин м/у B и C, A и B должно быть равным

~~Максимальное кол-во x_i~~

~~Если~~ При максимальном ~~2x+3+~~ кол-ве вершин (x)

$2x+3+1=80$; $x=\frac{80-4}{2}$

$x=38$

т.е. взятое кол-во ~~те вершин~~ $:2$ вершины A и ~~C не соседни~~ не соседние

$\alpha = \frac{180°\cdot 80-360°}{80} = \frac{14040}{80} = 175{,}5° = \angle Y_1CY_1 = \angle X_2AY_2$

Чтобы $\angle BCA = \angle BAC < 63°$, нужно, чтобы м/у B и C, A и B находилось как можно меньше вершин

Ответ: 35 вершин.

№4

$p, q, r \in N$ $(p^2q+1) \vdots (qr+1)$ $(p^2q+1) = a(qr+1)$, $a \in N$

$(q^2r+1) \vdots (qr+1)$ $(q^2r+1) = b(qr+1)$, $b \in N$

$(q^2r+1) \vdots (pq+1)$ $(q^2r+1) = c(pq+1)$, $c \in N$

$b(qr+1) = c(pq+1)$

$p^2 \cdot \frac{c-b}{br-cp} = a\frac{(c-b)r}{br-cp} + a$

$q(br-cp) = c-b$

$c \neq b$, то $(c-b) \vdots (br-cp)$ $p^2(c-b) = a(c-b)r + a(br-cp)$

$(c-b) \vdots q$ $(c-b)(p^2-ar) = a(br-cp)$

$(q^2r+1) \geq (qr+1)(pq+1)$ $q^2r+\cancel{1} \geq pq^2r + q(p+r) + \cancel{1}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | MA00030055226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$q^2r \geq pq^2r + pq + pr$

$q^2r(1-p) \geq p(q-r)$

$p=1$, то $\frac{p}{q^2r}$ - полн кв.

$r(q^2-p) \geq pq(qr+1)$

$r(q^2-p) \geq p(q^2r+1)+pq-p$

$q^2r \geq p(q^2r+\cancel{pq}+\cancel{pr})$ — не уд.

$\frac{p^2q+1}{a} = \frac{q^2r+1}{b}$

$bp^2q+b = aq^2r+a$

т.е. $c=b$

$qr+1 = pq+1$

$r=p$

$q(pqb-qra)=a-b$

Аналогично

b и a не м.б. разл

$a=b$

$\cancel{pq}$ $p=r$

$p^2q+1 = a(pq+1)$

$p^2q+1 \mid pq+1$
$-p^2q+p \quad p$
$1-p$

$\cancel{\frac{p^2q+1}{a} \mid pq+1}$

$p^2q+1=q^2r+1$

$p^2q=q^2r$ $\boxed{p^2=qr}$

$\boxed{q=r}$

$\boxed{\frac{p^2q+1}{pq+1}} = p - \frac{p-1}{pq+1}$, т.е. $(p-1)\vdots(pq+1)$

$(p-1)\geq(pq+1)$, т.к. $p,q\in N$, то

возможно только при $p-1=pq+1$, ~~$p\geq 1$~~

$2=pq-p$

$2=p(q-1)$, ~~т.е. $q>1$~~

$q^2r+1 = c(pq+1) = c(p-1)$

$\frac{q^2r+1}{r\cancel{p}-1} = q^2 + \frac{q^2+1}{r-1}$

$q^2r+1 \mid r-1$
$-q^2r-q^2 \quad q^2$
$1+q^2$

$q^2+1 \geq r-1$

$q^2r+1 = cp-c$

$p=q=r=x$

$x^3+1 \vdots (x^2+1)$

$(x^3+1) = a(x^2+1)$

$(x^2+1)(x^2-x+1)=a((x+1)^2-2x)$

$x^3-ax^2-a+1=0$

$x^3+1=x^2+1$, $x^3=x^2$ $x^2(x-1)=0$

~~$x^2(1-a)-a$~~ $x^2(1-a)+1(1-a)=0$

$(x^2+1)(1-a)=0$

$x=0$ не уд. $x=1$ — полн. кв.

$a=1$

~~Отв~~ т.е. ~~$p+1$~~ как минимум одно число из pqr полн кв, ч. и т. д.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 5 | 5 | 2 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a, b, c > 0$

№5

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2} \qquad a+b+c=3$$

$$9=a^2+b^2+c^2+ab+ac+ab+bc+ca+cb=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$a^2+b^2\geq 2ab \qquad a^2+b^2=9-c^2-2ab-2ac-2bc$

$9-c^2-2ab-2ac-2bc\geq 2ab$

$9-c^2-2ac-2bc\geq 4ab$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(3-c)((3-c)^2-3ab)$

$b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2)=(3-a)((3-a)^2-3bc)$

$c^3+a^3=(c+a)(c^2-ca+a^2)=(3-b)((3-b)^2-3ca)$

a^3+b^3 – наим при c наиб

b^3+c^3 – наим при a наиб

c^3+a^3 – наим при b наиб

все 3 перем. прин. наиб. возм. зн. одновр $\Rightarrow a=b=c=1$.

$$\frac{1+1}{8+9-1}\cdot 3=\frac{2}{16}\cdot 3=\frac{3}{8}$$

~~Ответ: $\frac{3}{8}$~~

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}\geq$$

$\vee$ 0 $\quad \vee$ 0 $\quad \vee$ 0

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a^3+b^3)(c^3+a^3)(b^3+c^3)}{(8ab+9-c^2)(8bc+9-a^2)(8ca+9-b^2)}}$$; наим. значение

достигается при рав-ве, т.е

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}=\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}=\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}$$

$\Rightarrow a=b=c=1$, значит, наим. значение равно

$$3\sqrt[3]{\frac{(1+1)(1+1)(1+1)}{(8+9-1)(8+9-1)(8+9-1)}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{8\cdot 8\cdot 8}}=\frac{3}{8}$$

Ответ: $\frac{3}{8}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | МА000310042 6
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	16	6	20		70

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{11}{64}$

$\cos x \cdot \cos 3x - ?$

1) ~~преобразуем~~ то, что необходимо найти $\cos x \cdot \cos 3x = \cos x \cdot \cos(2x+x) = \cos x(\cos 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin 2x) = \cos^2 x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2\cos^4 x - \cos^2 x - 2\cos^2 x(1-\cos^2 x) = 2\cos^4 x - \cos^2 x - 2\cos^2 x + 2\cos^4 x = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x$

2) преобразуем $\sin x \cdot \sin 3x$ и выразим $\cos^2 x$:

$\sin x \cdot \sin(2x+x) = \sin x(\sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x) = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)(1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x(1-\cos^2 x) + 2\cos^2 x - 2\cos^4 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 2\cos^4 x + 2\cos^2 x - 2\cos^4 x - 1 + \cos^2 x = -4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 1 = \frac{11}{64}$ (по условию)

3) Решим уравнение:

$-4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 1 - \frac{11}{64} = 0$

Пусть $\cos^2 x = t;\ t \geq 0;\ t \leq 1$, тогда

↓ др. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$-4t^2+5t-\frac{75}{64}=0 \mid \cdot(-1)$

$4t^2-5t+\frac{75}{64}=0$

$D=25-\frac{\cancel{16}\cdot 75}{\cancel{64}\,4}=25-\frac{75}{4}=\frac{100-75}{4}=\frac{25}{4}$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{5-\frac{5}{2}}{8} \\ t=\frac{5+\frac{5}{2}}{8}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t=\frac{2,5}{8} \\ t=\frac{7,5}{8}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t=\frac{5}{16} \\ t=\frac{15}{16}\end{array}\right.$

тогда $\left[\begin{array}{l} \cos^2 x=\frac{5}{16} \\ \cos^2 x=\frac{15}{16}\end{array}\right.$ причем оба нам подходят

4) найдем $\cos x\cdot\cos 3x$.

~~если~~ если $\cos^2 x=\frac{5}{16}$, то $\cos x\cdot\cos 3x=$

$=4\cdot\frac{25}{256}-\frac{3\cdot 5}{16}=\frac{100-240}{256}=\frac{\cancel{140}^{35}}{\cancel{256}_{64}}=-\frac{35}{64}$

если $\cos^2 x=\frac{15}{16}$, то $\cos x\ \cos 3x=$

$=\frac{4\cdot 225}{256}-\frac{45}{16}=\frac{900-720}{256}=\frac{\cancel{180}^{45}}{\cancel{256}_{64}}=\frac{45}{64}$

Ответ: $-\frac{35}{64}$ или $\frac{45}{64}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

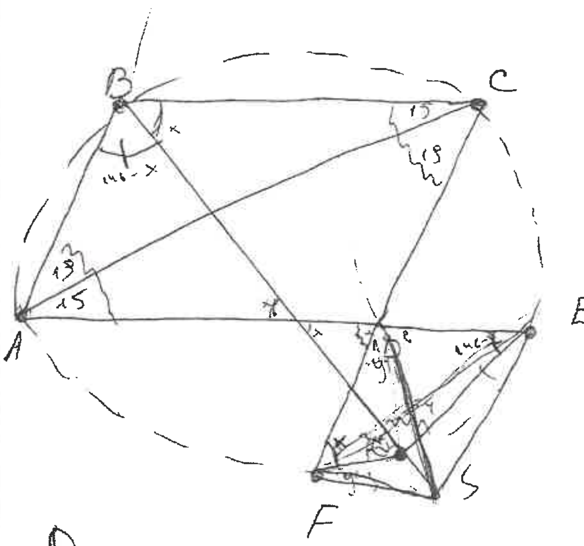
Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Дано: ABCD - параллелогр.

$\angle BAC = 34°$

$\angle BCA = 15°$

S - центр ω (DEF)

$(\widehat{AC; BS})$ - ?

Решение.

1) S - центр опис. окр. $\triangle FDE$, значит

$FS = DS = ES$

2) обозначим ~~BS~~ пересечение BS и окр ω точкой Q:

$\angle BQF = \angle BCF = 34$ (опир на одну дугу)

$\angle BQE = \angle BAE = 34$ (опир. на одну дугу)

из этого следует, что $\angle FQB = \angle BQE$, т.е. BQ - бисс. $\angle FQE$

3) $\angle BCD = \angle ADF$, т.к. $AD \parallel BC$, значит DFQE - описанный четырехугольник т.к. внешний угол равен противоположному

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

M	A	0	0	0	3	1	0	0	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

4) $\angle CBQ = \angle CJE$

(опир. на одну дугу)

$\angle DEF = \angle ABJ$

(опир. на одну дугу)

№4

$p^2q+1 \vdots qr+1$

$q^2r+1 \vdots qr+1$

~~[illegible]~~ $q^2r \vdots pq+1$

1) $qr \underset{qr+1}{\equiv} -1$

2) $q^2r+1 \underset{qr+1}{\equiv} 0$

$q^2r \underset{qr+1}{\equiv} -1$

$-q \underset{qr+1}{\equiv} -1$

$q \underset{qr+1}{\equiv} 1$

3) $p^2q+1 \underset{qr+1}{\equiv} qr+1$

$p^2 \underset{qr+1}{\equiv} -1$

4) $q^2r+1 \underset{qr+1}{\equiv} r+1$

$r \underset{qr+1}{\equiv} -1$

т.е. числа дают остатки -1 или 1 по модулю $qr+1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

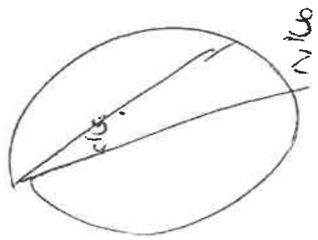
80-угольник

углы треугольника

63; 63; 54

1) опишем вокруг 80-угольника окр-и посчитаем градусную меру каждой дуги, она равна $\frac{360}{80} = \frac{9}{2}$ ← т.к. у нас 80 равных дуг.

тогда градусная мера вписанного угла, который опирается на одну дугу равна $\frac{9}{4}°$



2) Чтобы создать треугольник мы выбираем 3 вершины, а точнее — расстояние или кол-во дуг между ними.

Чтобы получить $\angle\alpha = 63$ нужно взять $\frac{63}{\frac{9}{4}} = \frac{\cancel{63}^{7}\cdot 4}{\cancel{9}} = 28$ дуг, а чтобы ~~взять~~ получить $\angle\beta = 54$ — взять $\frac{54}{\frac{9}{4}} = \frac{\cancel{54}^{6}\cdot 4}{\cancel{9}} = 24$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	3	1	0	0	4	2	6

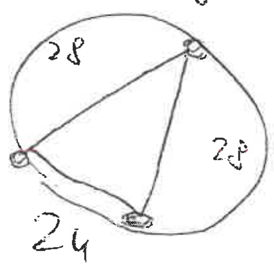
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

т.е. наш треугольник получается следущим образом



тогда чтобы его получить гарантированно нужно выбрать $\geq 28+24=52$ точки, т.к. можно будет выбрать 2 точки на расстоянии 28 и 24 (одна дуга = 1 точка, т.к. кол-во дуг = кол-во точек), тогда чтобы этого не произошло нужно выбрать ≤ 51 точку т.к. нельзя будет выбрать 2 точки на расстоянии 28 и 24, т.е. в max = 51

Ответ: 51 вершина

№5

$$a+b+c=3$$

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ac+9-b^2}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ неравенство о средних +

$\sqrt[3]{abc} \leq 1$

$abc \leq 1$, т.к. $a>0$, $b>0$, $c>0$

$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} + \frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2} + \frac{c^3+a^3}{8ac+9-b^2} \geq$

$\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}{(8ab+9-c^2)(8bc+9-a^2)(8ac+9-b^2)}}$ *

оценим по отдельности:

$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \sqrt{a^3b^3} = ab\sqrt{ab}$

$a^3+b^3 \geq 2ab\sqrt{ab}$

аналогично для b^3+c^3 и c^3+a^3

тогда $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) \geq 2ab\sqrt{ab} \cdot 2bc\sqrt{bc} \cdot 2ac\sqrt{ac} =$

$= 8a^2b^2c^2\sqrt{a^2b^2c^2} = 8a^3b^3c^3 \leq 8$ (т.к. $abc \leq 1$)

Нам нужно минимизировать *, это корень 3-ей степени из дроби, он минимален, когда дробь минимальна, т.е. числитель минимален, знаменатель максимален. Знаменатель $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) \geq 8$, например при $a=b=c=1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____ | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

преобразуем знаменатель:

$(8ab+9-c^2)(8bc+9-a^2)(8ac+9-b^2)=$

$=512a^2b^2c^2+64\cdot 9ab^2c-64ab^4c+64\cdot 9a^2bc-$

$-72ab^3+64a^4bc-72a^3b+8a^3b^3+$

$+64\cdot 9abc^2+81\cdot 8bc-72b^3c+$

$+81\cdot 8ac+9^3-81b^2-72a^3c-81a^2+9a^2b^2+$

$+64abc^4-72bc^3+8b^3c^3-72ac^3-81c^2+9b^2c^2+$

$+8a^3c^3$ ~~...~~ $+9a^2c^2-(abc)^2=$

$=64\cdot 9abc(b+a+c)-64abc(a^3+b^3+c^3)-72\cdot$

$\cdot(ab^3+a^3b+b^3c+a^3c+bc^3+ac^3)$

Заметим, что минимум достигается при $a=b=c=1$,

тогда $\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ac+9-b^2}\geq\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}=$

$=\frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{16}\,8}=\frac{3}{8}$

Ответ: $\frac{3}{8}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

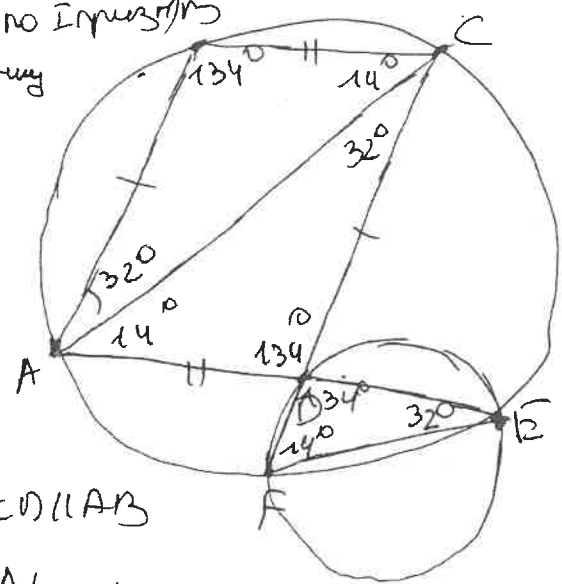
1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	20	12	20		80

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

N 2

Дано:
$\angle BAC = 32^\circ$
$\angle BCA = 14^\circ$
S - центр описокр-ти треуг. DEF

$\triangle ABC = \triangle CAD$ (по I признаку) по рисунку доказ.



$\triangle ABC$: $\angle BAC = 32^\circ$, $\angle BCA = 14^\circ$

$\angle ABC = 134^\circ$

ABCD - пар-м AD ∥ BC, CD ∥ AB

E = AD ∩ окр-ть (ABC) AE ∥ BC ⇒ $\angle EAC = \angle BCA = 14^\circ$

F = CD ∩ окр-ть (ABC) CF ∥ AB ⇒ $\angle FCA = \angle BAC = 32^\circ$

в $\triangle ABC$: $\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \cdot 134 = 268^\circ$ (центр O)

Рассм. т.т.т D, E, F

D - верш. пар-ма, E и F на окр-ти лет.

можно показ, что $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ (с поворотом на 90°) по 2 углам

(т.к $\angle CFE = \angle CAE$ (опир на одну дугу)
и $\angle ACF = \angle AEF$ соотв.),

Тогда S - центр опис окр-ти $\triangle DEF$ соотв центру O $\triangle ABC$ после поворота вокруг точки пересеч диагоналей пар-ма

⇒ угол м/у AC и BS = 90°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 5 | 0 | 3 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3

Какое наиб кол-во вершин правильного 80 угольника

один шаг м/у сосед верш 80-угольника

$\frac{360^\circ}{80} = 4,5^\circ$

р/б треуг с угл. $18^\circ, 81^\circ, 81^\circ$ имеет 2 стягивающ боковые стор. дуги $2\cdot 81 = 162^\circ$ каждая и основание стягив. дугу $2\cdot 18 = 36^\circ$

в кол-во вершин эти дуги соотв

$\frac{162}{4,5} = 36$ шагов $\frac{36}{4,5} = 8$ шагов

три вершины образ задает треуг если отст др от др на дуги 36, 36, 8 это соотв 3 последоват чл. арифметич пр-ии с разностью 36 по модулю (mod 80)

т.к $36+36+8 = 80 \equiv 0 \pmod{80}$

т.о в последовательности ~~не~~ образ цепи +36 нельзя выбирать три вершины подряд: Разобьем на циклы:

НОД $(36, 80) = 4 \Rightarrow$ мн-во вершин разбив на 4 непересек цикла.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 1 5 0 3 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	7

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№3 продолжение:

для каждого цикла длина $= \frac{80}{4} = 20$ вершин

в цикле длины 20 надо выбирать max кол-во вершин так чтоб никакие три не шли подряд.

Для 20 вершин max кол-во ~~так чтоб~~ и max плотность $= \frac{2}{3}$

отмеченных $= \left\lfloor 20 \cdot \frac{2}{3} \right\rfloor = 13$

Ответ: умножим сколько для одного цикла на их кол-во $4 \cdot 13 = 52$

Ответ: 52

№5 для числителя $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ $x=a^2$ $y=b^2$

№5 ~~для числителя~~ для знаменателя $ab \leq a^2+b^2$ и $4ab \leq 2(a^2+b^2)$

$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} \geq \frac{\frac{(a^2+b^2)^2}{2}}{c^2+2(a^2+b^2)} = \frac{(a^2+b^2)^2}{2(c^2+2a^2+2b^2)}$ | пусть $x=a^2$ $y=b^2$ $z=c^2$ $x+y+z=3$

$a^2+b^2=3-z$ подставим получим $\frac{(3-z)^2}{2(6-z)}$

$t=6-z$ $3-z=t-3$

$t_a=6-a^2$ $t_b=6-b^2$ $t_c=6-c^2$ их $\Sigma = 18-(a^2+b^2+c^2) = 15$

ф-ция $f(t) = \frac{(t-3)^2}{2t} = \frac{t}{2} - 3 + \frac{9}{2t}$

иск. сумма оценив снизу

$Sum \geq \Sigma\left(\frac{t_a}{2} - 3 + \frac{9}{2t_a}\right) = \frac{1}{2}\Sigma t - 9 + \frac{9}{2}\Sigma\frac{1}{t} = \frac{15}{2} - 9 + \frac{9}{2}\Sigma\frac{1}{t}$

нер-во для суммы обрат. величин $\Sigma\frac{1}{t} \geq \frac{9}{\Sigma t}$

$S \geq -1{,}5 + \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{15} = 1{,}2$ рав-во достиг при $a=b=c=1$

а тогда $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$ Ответ: 1,2

Лист 3 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 1 5 0 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$ $\quad \cos x \cos 3x - ?$

$\sin x \sin 3x = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3}$

(по формуле произведения sin)

$\cos 2x - \cos 4x = \frac{5}{8}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = \frac{5}{8}$

$-2\cos^2 2x + \cos 2x + \frac{3}{8} = 0$

$\cos 2x = t$

$-2t^2 + t + \frac{3}{8} = 0 \quad t^2 - \frac{t}{2} - \frac{3}{16} = 0$

по т. Виетта $t = \frac{3}{4}$ $\quad t = -\frac{1}{4}$

$t \cancel{= \frac{3}{4}}$ $\quad \cos 2x = \frac{3}{4}$ $\quad \cos 2x = -\frac{1}{4}$

$\cos x \cos 3x = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2}$ — по формуле произвед cos

$\frac{2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x}{2}$

~~eют~~ — сюда будем подставлять

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 3 1 5 0 3 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$q^2p-1 \vdots pr-1$

$p^2r-1 \vdots qr-1$

$r^2q-1 \vdots pq-1$

Рассмотр выраж

$r(q^2p-1)-q^2(pr-1)=q^2-r$

т.к НОД $(r, pr-1)=1$

исход ~~…~~ $q^2p-1 \vdots pr-1$ равносильно

$q^2-r \vdots pr-1$

применяя ко всем условиям получ систему

$\begin{cases} (1)\ q^2-r \vdots pr-1 \\ (2)\ p^2-q \vdots qr-1 \\ (3)\ r^2-p \vdots pq-1 \end{cases}$ Без огранич общности $p \geq q \geq r$

Рассмотр (3) усл если $r^2-p=0$

то $p=r^2$ и задача решена

Если $r^2-p \neq 0$:

$r^2-p>0$, то делитель не превосход делимое

$pq-1 \leq r^2-p$ т.к $r \leq q \leq p$, то $r^2-p < r^2 \leq pq$ т.к p, q, r - натур числа

единств случай, когда $pq-1<r^2$ возможен при равенстве переменных, но тогда $p^2-p \vdots p^2-1$

$\Rightarrow p=1=1^2$; если $r^2-p<0$, то $pq-1 \leq |r^2-p| =$

$= p-r^2<p \Rightarrow pq-1<p$, что эквивалентно

$p(q-1)<1$ т.к $p \geq 1$ это возможно только при

Лист 5 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 1 5 0 3 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1 продолжение

если $\cos 2x = \frac{3}{4}$

$$\frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{9}{8} - \frac{8}{8} + \frac{6}{8}}{2} = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

если $\cos 2x = -\frac{1}{4}$

$$\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{9}{16}$$ (на черновике)

Ответ: $\frac{7}{16}$; $-\frac{9}{16}$

продолж №4! только при $q-1=0$, т.е.

$q=1=1^2$

итог:

т.к $r \le q$, из $q=1$ следует $r=1$ подставим

$q=1$, $r=1$ в усл. $p^2-1 \vdots qr-1$ получ $p^2-1 \vdots 0$

дел на ноль невозможно $\Rightarrow$ делимое $=0$

$p^2-1=0$ $p^2=1$; $p=1=1^2$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 6 | 1 | 7 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
12	20	16	2	2		52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1 $\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x=\cos 4x$

$\sin x\cdot\sin 3x=\sin x(\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x)=$
$=\sin^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x+2\cos^2 x)=\sin^2 x(3-4\sin^2 x)$

$\alpha=\sin^2 x \Rightarrow \alpha(3-4\alpha)=\frac{27}{64}\Rightarrow \alpha\in\left\{\frac{9}{16};\frac{3}{16}\right\}\Rightarrow \cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$
$-2\sin x\cos x=1-2\sin^2 x-2\sin x\cos x$; 1) $\alpha=\frac{9}{16}\Rightarrow \cos 4x=1-\frac{9}{8}-2\cdot\frac{\pm 3}{4}\cdot\frac{\pm\sqrt7}{4}=-\frac{1\pm3\sqrt7}{8}$
$\alpha\in\left\{\frac{9}{16};\frac{3}{16}\right\}\Rightarrow \cos^2 x\in\left\{\frac{7}{16};\frac{13}{16}\right\}$
$\sin x\in\left\{\pm\frac{3}{4};\frac{\sqrt3}{4}\right\}$ $\quad\cos x\in\left\{\pm\frac{\sqrt7}{4};\pm\frac{\sqrt{13}}{4}\right\}$ $\quad$ если $\sin x<0$, $\sin x=-\frac{3}{4}$; $\cos x=\pm\frac{\sqrt7}{4}\Rightarrow$

$\cos 4x\in\left\{-\frac{1+3\sqrt7}{8};-\frac{1-3\sqrt7}{8}\right\}$
2) $\alpha=\frac{3}{16}\Rightarrow \cos 4x=1-\frac{3}{8}\pm2\cdot\frac{\sqrt3}{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{39}}{8}$ $\Rightarrow\in\left\{\frac{5+\sqrt{39}}{8};\frac{5-\sqrt{39}}{8}\right\}$
$\Rightarrow \cos 4x\in\left\{-\frac{1+3\sqrt7}{8};-\frac{1-3\sqrt7}{8};\frac{5+\sqrt{39}}{8};\frac{5-\sqrt{39}}{8}\right\}$ но $-\frac{1+3\sqrt7}{8}<-1$; $\frac{5+\sqrt{39}}{8}>1$ не уд.
$\Rightarrow \cos 4x\in\left\{\frac{3\sqrt7-1}{8};\frac{5-\sqrt{39}}{8}\right\}$, ~~обе значения возможны~~, $\cos x\cos 3x=$
$\sin x\sin 3x+\cos 4x=\frac{27}{64}+\cos 4x\in\left\{\frac{27+24\sqrt7-8}{64};\frac{27+40-8\sqrt{39}}{64}\right\}=\left\{\frac{19+24\sqrt7}{64};\frac{67-8\sqrt{39}}{64}\right\}$
$\frac{19+24\sqrt7}{64}>1\Rightarrow$ не достигается $\Rightarrow$ ~~$\sin x\sin$~~ $\cos x\cos 3x=\frac{67-8\sqrt{39}}{64}$; очев. достигается

Ответ: $\frac{67-8\sqrt{39}}{64}$

№2: ~~∠E~~ $\angle FSE=360-2\angle FDE=360-2\angle ABD-2\angle BAD=\angle BAD+\angle BCD=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$
$=\frac{\overset{\frown}{FBE}}{2}$, S и B в разных полуплоскостях относительно EF т.к. $\angle FDE>90^\circ\Rightarrow$
S ∈ описанной окружности ABC; S – середина дуги FE (S ∈ серпер к FE) ⇒
$O=BS\cap AC$; $\angle AOB=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}+\frac{\overset{\frown}{CS}}{2}=\angle ACB+\frac{\overset{\frown}{CE}}{2}+\frac{\overset{\frown}{ES}}{2}=16^\circ+\angle CAE+\frac{\overset{\frown}{FE}}{4}=16^\circ+\angle BCA+$
$+\frac{\overset{\frown}{FBE}}{2}=16+16+\frac{\angle ABC-\angle ABF-\angle CBE}{2}=32^\circ+\frac{178-36-16}{2}=32+64-26=$
$=70^\circ$; $*\ \angle ABC=180-\angle BAC-\angle BCA=180^\circ-16^\circ-36^\circ=178$

Ответ: 70

№4 $q^2p-1 \vdots pr-1\Rightarrow q^2p-1-(pr-1)=p(q^2-r)\vdots pr-1$; $(p;pr-1)=1\Rightarrow q^2-r\vdots pr-1$; $r\geq1\Rightarrow$
$q^2\geq pr-1$, аналогично $p^2\geq qr$; $r^2\geq pq$, причём если среди чисел $p,q,r\neq1$ m
есть строгий знак и $p^2\cdot q^2\cdot r^2>pr\cdot qr\cdot pq$, но т.к. $=$ п.ч. $\Rightarrow p=q=r=1\Rightarrow$
; Доказано $\quad$ аналогично очев. для других случаев

№5 очев $a+b\geq2\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}\geq\frac{\sqrt{2a^3b^2c^6}}{b}=\sqrt{2}ac\sqrt{ac}$; далее
~~очев $a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\sqrt{2}ac\sqrt{ac}+\sqrt{2}ba\sqrt{ba}+\sqrt{2}cb\sqrt{cb}\geq3\sqrt[3]{2}\cdot$~~
~~$a^2b^2c^2\ 3\sqrt{2}\ abc$ также $\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}=1\Rightarrow abc\leq1$~~
очев $\forall n\in\mathbb{R}, n\neq0$ $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$ – функция, не уменьшающаяся при росте n ⇒
$\sqrt[1{,}5]{\frac{(ab)^{1{,}5}+(bc)^{1{,}5}+(ac)^{1{,}5}}{3}}\geq\frac{ab+bc+ac}{3}$ $\quad$ см. след. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	1	6	1	7	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$a^2b+b^2c+c^2a \Rightarrow - \Rightarrow$ из транс. неравенства

$a^3+b^3+c^3 \ge 3$ из транс. неравенства

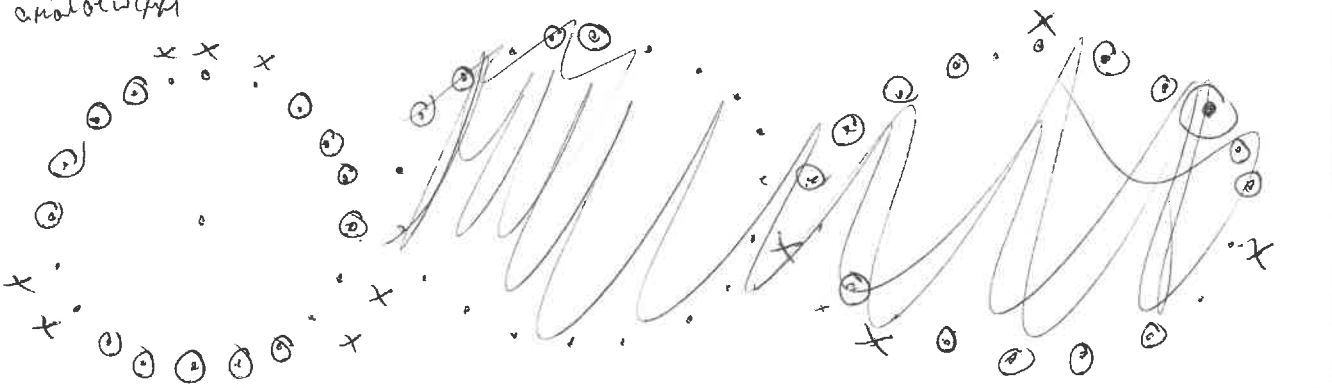
$\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3} \le \sqrt{a^3a^3}+\sqrt{b^3b^3}+\sqrt{c^3c^3}=a^3+b^3+c^3$

№3

1) разделим 160-угольник на 8 20-угольников правильных, очев любой треугольник $(18^\circ;81^\circ;81^\circ)$ будет уд. след. усл.: все его вершины в 1 20-угольнике

2) в каждом 20-угольнике есть 20 треугольников $(18^\circ;81^\circ;81^\circ)$ [будем не отмечать вершины а удалять их], удаление точки удаляет ≤ 3 треугольника $\Rightarrow$ удалено ≥ 7 вершин $\Rightarrow$ осталось $\le 13\cdot 8 = 104$ вершины

3) эта оценка достигается: в примере ниже дан 1 20-угольник, отмеченные вершины обозначены ⊙, очев там нет $\triangle(18^\circ;81^\circ;81^\circ)$, все остальные 20-угольники аналогичны



№5 $\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}+\frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c}+\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a} \ge 3\sqrt{27} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}+\frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c} \ge 3\sqrt{27}-\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a} \;|\wedge^2$

$\frac{a^6+b^4c^6}{b^2}+\frac{b^6+c^4a^6}{c^2}+2\frac{\sqrt{a^6b^6+a^{12}c^4+b^{10}c^6+b^4c^{10}a^6}}{bc} \ge 18+\frac{c^6+a^4b^6}{a^2}-\frac{6\sqrt{27}}{a}\left(\sqrt{c^6+a^4b^6}\right) \Leftrightarrow$

$2\left(\frac{\sqrt{a^6b^6+a^{12}c^4+b^{10}c^6+a^6b^4c^{10}}}{bc}+\frac{3\sqrt{27}\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}\right) \ge 18+\frac{c^6+a^4b^6}{a^2}-\frac{a^6+b^4c^6}{b^2}-\frac{b^6+c^4a^6}{c^2} \;|\wedge^2$

$4\left(\frac{a^6b^6+a^{12}c^4+b^{10}c^6+a^6b^4c^{10}}{b^2c^2}+\frac{18(c^6+a^4b^6)}{a^2}+\frac{6\sqrt{3}}{abc}\sqrt{\ldots}\right) \ge 18^2+\ldots^2+\ldots^2+\ldots^2-2\ldots-2\ldots-2\ldots$

$\frac{24\sqrt{3}}{abc}\sqrt{\frac{a^6b^6c^6+a^{12}c^{10}+b^6c^{12}+a^6b^4c^{16}+a^{10}b^{12}+a^{16}b^6c^4+a^4b^{16}c^6+a^{10}b^{10}c^{10}}{a^2b^2c^2}} \Leftrightarrow \ge 18^2+\frac{c^{12}+2a^4b^6c^6+a^8b^{12}}{a^4}+\frac{a^{12}+2a^6b^4c^6+b^8c^{12}}{b^4}+$

$+\frac{b^{12}+2a^6b^6c^4+a^{12}c^8}{c^4}+\frac{2(a^6b^6+a^{12}c^4+b^{10}c^6+a^6b^4c^{10})}{b^2c^2}-\frac{2(b^6c^6+a^6c^{10}+a^4b^{12}+a^{10}b^6c^4)}{a^2c^2}-$

$-\frac{2(a^6c^6+b^4c^{12}+a^{10}b^6+a^4b^{10}c^6)}{a^2b^2}+\frac{36(c^6+a^4b^6)}{a^2}-\frac{36(a^6+b^4c^6)}{b^2}-\frac{36(b^6+c^4a^6)}{c^2} \;|\wedge^2$

см. след. лист

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № ____

М	А	0	0	0	3	1	6	1	7	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$$576\left(\frac{a^6b^6c^6+a^{12}c^{10}+b^{10}c^{12}+a^6b^4c^{16}+a^{10}b^{12}+a^{16}b^6c^4+a^4b^{16}c^6+a^{16}b^{10}c^{10}}{a^4b^4c^4}\right)\geq$$

$$\cancel{324^2+}\ \frac{a^{24}+4a^4b^6c^{18}+4a^8b^{12}c^{12}}{a^8}+a^{24}+4a^{18}b^4c^6+4a^{12}b^8c^{12}$$

$$324^2+\frac{c^{24}+4a^8b^{12}c^{12}+a^{16}b^{24}+4a^4b^6c^{18}+4a^{12}b^{18}c^6+2a^8b^{12}c^{12}}{a^8}+\frac{a^{24}+4a^{12}b^8c^{12}+b^{16}c^{24}+4a^{18}b^4c^6}{b^8}$$

$$+4a^6b^{12}c^{18}+2a^{12}b^8c^{12}+\frac{b^{24}+4a^{12}b^{12}c^8+a^{24}c^8+4a^6b^{18}c^4+4a^{18}b^6c^8+2a^{12}b^{12}c^8}{c^8}+$$

$$+\frac{4(a^{12}b^{12}+a^{24}c^8+b^{20}c^{12}+a^{12}b^8c^{20}+2a^{18}b^6c^4\cancel{c^8}+2a^6b^{16}c^6+2a^{12}b^{10}c^{10}+2a^{12}b^{10}c^{16}+}{b^4c^4}$$

$$+2a^{18}b^4c^{14}+2a^6b^{14}c^{16}+\ +\ \frac{4(b^{12}c^{12}+a^{12}c^{20}+a^8b^{24}+a^{20}b^{12}c^8+2a^6b^6c^{16}+}{a^4c^4}$$

$$+2a^4b^{18}c^6+2a^{10}b^{12}c^{10}+2a^{10}b^{12}c^{10}+2a^{16}b^6c^{24}+2a^{14}b^{18}c^4\quad+\frac{4(a^{12}c^{12}+b^8c^{24}+a^{20}b^{12}+a^8b^{12}c^{20}}{}$$

$$+2a^6b^4c^{18}+2a^{16}b^6c^6+2a^{10}b^{10}c^{12}+2a^{10}b^{10}c^{12}+2a^4b^{14}c^{18}+2a^{14}b^{12}c^{12}b^{8}\quad+\frac{1296(c^{12}+2a^4b^6c^6+a^8b^{12}}{a^4}$$

$$+\frac{1296(a^{12}+2a^6b^4c^6+b^8c^{12})}{b^4}+\frac{1296(b^{12}+2a^6b^6c^4+a^{12}c^8)}{c^4}+2\cdot 324^2\left(\frac{c^{12}+2c^4b^6c^6+a^8b^{12}}{a^4}\right.$$

$$+\frac{a^{12}+2a^6b^4c^6+b^8c^{12}}{b^4}+\frac{b^{12}+2a^6b^6c^4+a^{12}c^8}{}+\frac{2(a^6b^6c^4+a^{12}c^4+b^{10}c^6+a^6b^4c^{10})}{b^2c^2}-\frac{2(b^6c^6+a^6c^{16}}{}$$

$$\left.+\frac{a^4b^{12}b^4+a^{10}b^6c^4)}{a^2c^2}-\frac{2(a^6c^6b^4c^{12}+a^{10}b^6+a^4b^{10}c^6)}{a^2b^2}+\frac{36(c^6+a^4b^6)}{a^2}-\frac{36(c^6+b^4c^6)}{b^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{36(b^6+c^4a^6)}{c^2}\right)\Bigg)$$ — очевидно верно

Ответ: $3\sqrt{21}$ достигается и наименьшее возможно

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	3	1	8	3	5	2	6

Вариант № 4. Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

[redacted]

1	2	3	4	5	6	Σ
20	6	8	20	2		56

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Дано:
$a^2+b^2+c^2=3$

1. Идея: заметим симметрию выражения, проверим частный случай:

$a=b=c=1$

Тогда выполняется условие

$1+1+1=3$

Каждое слагаемое $\frac{1+1}{1+4}=\frac{2}{5}$.

Сумма всех 3-ех ~~дробей~~ $3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

№1

$\sin x\cdot\cos 3x=\frac{5}{16}$ $\quad \cos x\cdot\cos 3x$

1. $\sin x\cdot\sin 3x=\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2}=\frac{5}{16}$.

$\cos 2x-\cos 4x=\frac{5}{8}$.

Введем переменную $a=\cos 2x$, тогда $\cos 4x=2\cos^2 2x-1=$
$=2a^2-1$

Подставим $a-(2a^2-1)=\frac{5}{8}$

Решим ур-е:

$-2a^2+a+\frac{3}{8}=0\ |\cdot 8$

$-16a^2+8a+3=0$

$16a^2-8a-3=0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 8 | 3 | 5 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$D = 64 + 192 = 256.$

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{8+16}{32}. \\ a = \frac{8-16}{32}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{3}{4} \\ a = -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

$$\cos 4x = \frac{2}{1} \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}.$$

$$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{2} = \frac{7}{16}.$$

$$\cos 4x = \frac{2}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$$

или

$$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{7}{8}}{2} = -\frac{9}{16}.$$

Ответ: $-\frac{9}{16}$ или $\frac{7}{16}$.

Вариант № 4 | M A 0 0 0 3 1 8 3 5 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Дано:

$q^2\cdot p-1 \equiv p^2\cdot r-1$

$p^2\cdot r-1 \vdots q\cdot r-1$

$r^2\cdot q-1 \vdots p\cdot q-1$

① То есть существуют натуральные a, в и c, что $q^2\cdot p-1 = a(p\cdot r-1)$

② $p^2\cdot r-1 = b(q\cdot r-1)$

③ $r^2\cdot q-1 = c(p\cdot q-1)$

Док-ть: Хотя бы одно из чисел p, q, r - точный квадрат.

4. Из ① $q^2\cdot p\equiv 1 \pmod{p\cdot r-1}$

По модулю $p\cdot r-1 = p\cdot r\equiv 1$ (Умножим это сравнение на q)

$q^2\cdot p\cdot r\equiv q^2$

5. Сравним с ①, умножим на r

$q^2\cdot p\cdot r\equiv r \Rightarrow q^2\equiv r \pmod{p\cdot r-1}$ ④

Аналогично получаем:

$p^2\equiv q \pmod{q\cdot r-1}$ ⑤

$r^2\equiv p \pmod{p\cdot q-1}$ ⑥

6. Из ④ следует число $r-q^2 \vdots p\cdot r-1$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | M | A | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 8 | 3 | 5 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $p\cdot r - 1 > r\cdot q^2$, то единственная возможность $r=q^2$.

Аналогично из оставшихся сравнений получаем:

$p=r^2$ или $q=p^2$

3. Покажем, что модуль больше остатка.

Заметим $p\cdot r-1 \geq p\cdot r-1$.

Если не одно из чисел не является квадратом, то из симметрии получаем неравенства

$r\geq q^2$; $q\geq p^2$, $p\geq r^2$

$p\cdot q\cdot r \geq (p\cdot q\cdot p)^2$ - это ~~невозможно~~ невозможно для натурал ~~это~~ ных чисел ≥ 1.

Следовательно предположение неверно

Вывод: хотя бы одно из чисел является точным квадратом другого.

Ответ: хотя бы одно из чисел p, q и r - точный квадрат.

№3.

Вписанный угол равен половине соответственной дуги.

В Δ с углами $18°, 81°, 81°$ дуга против $18°$ равна $36°$.

Дуги напротив $\angle 81° = 162°$.

~~Если~~ Значит на окружности должны сосуществовать 3 вершины делящие дуги напротив угла $36, 162$ и $162°$.

Если n-угольник одна дуга равна $\frac{360}{n} \Rightarrow 36° = k\cdot\frac{360}{n}$

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\frac{36}{360} = \frac{k}{n}$

$0{,}1 = \frac{k}{n}$

$n = 10k$

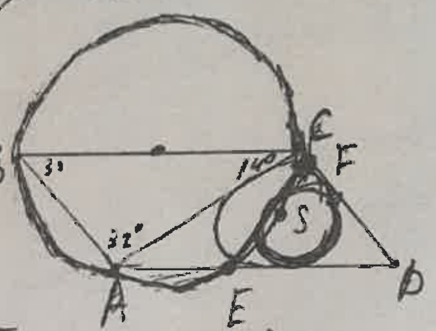
2. Вывод: Δ - существует тогда и только тогда когда n кратно 10, чтобы таких Δ не было n не должна делится на 10, макс $n < 20$. Т.к. при $n = 20$ уже кратно 10

⇓ Ответ: 19.

№2. $\angle BCA = 14°$

Дано:
ABCD-параллелограмм
$\angle BAC = 32°$

Найти: ~~∠ABC~~?



~~1. В Δ~~ 1. Рассмотрим Δ ABC:

$\angle ABC = 180 - 32° - 14° = 134°$

2. Т.к ABCD-параллелограмм => $AD \parallel BC$ и $CD \parallel AB$, луч AD - пересекает окр Δ ABC в точке E.

Луч CD пересекает окр. в точке F.

Из параллельности => $\angle AEC = \angle ABC = 134°$ =>

=> $AFC = \angle ABC = 134°$

$\angle AFC = \angle ABC = 134°$

В результате точки D, E и F располагаются симметрично относительно серединных перпендикуляров и центр окр S ΔDEF оказывается так, что прямая $BC \perp AC$, следовательно угол между AC и BS равен 90°

Ответ: 90°

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
12	—	12	8	20		52

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1

1) $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{24}{64}$

$\sin x \cdot (\sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x) = \frac{24}{64}$

$\sin x \cdot (2\sin x\cos^2 x + 2\sin x\cos^2 x - \sin x) = \frac{24}{64}$

$\sin x\, (4\sin x\cos^2 x - \sin x) = \frac{24}{64}$

$\sin^2 x \cdot (4\cos^2 x - 1) = \frac{24}{64}$

$4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{24}{64}$

$4\sin^2 x - 4\sin^4 x - \sin^2 x = \frac{24}{64}$

Замена: $t = \sin^2 x$

$-4t^2 + 3t = \frac{24}{64}$

$4t^2 - 3t + \frac{24}{64} = 0 \mid \cdot 64$

$4 \cdot 64 \cdot t^2 - 3 \cdot 64 \cdot t + 24 = 0$

$D = 3^2 \cdot 4^6 - 4 \cdot 4 \cdot 4^3 \cdot 3^3 = 3^2 \cdot 4^6 - 4^5 \cdot 3^3 = 3^2 4^5 (4-3) =$

$= 3^2 \cdot 2^{10} \Rightarrow \sqrt{D} = 3 \cdot 2^5 = 96$

$t_1 = \frac{3 \cdot 64 - 96}{256} = \frac{96}{256} = \frac{3 \cdot 2^5}{2^8} = \frac{3}{8}$

$t_2 = \frac{3 \cdot 64 + 96}{256} > 1$, $t = \sin^2 x \Rightarrow$ посм.

2) Также $\cos x \cdot \cos 3x$

$\cos x\, (\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x)$

$\cos x\, ((1-2\sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x)$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000321 3226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\cos x\,(\cos x\,(1-2\sin^2 x-2\sin^2 x))$

$\cos^2 x\,(1-4\sin^2 x)$

$(1-\sin^2 x)(1-4\sin^2 x)$

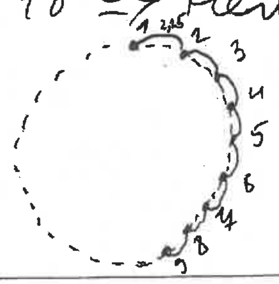
Подставим $\sin^2 x$

$(1-\frac{3}{8})(1-\frac{3}{2})=\frac{5}{8}\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{16}.$

Ответ: $-\frac{5}{16}$

№ 3

Каждая дуга окружности, заключ. между вершинами правильного 160-уг. будет равна $360:160=2{,}25^0$. То есть, если между двумя точками лежит 8 таких дуг, то вписанный угол, опир. на эти две точки будет равен 18^0. Попробуем исключить все такие углы. Если мы берем точки 1−8, берем точки 17−24 и т.д. то не сможем взять точки 9−16, т.к. между ними лежит 8 маленьких дуг. Тогда всего можно взять точек ≤ 80, то есть ровно половину, и никакие из этих точек не образуют угол в 18^0 $\Rightarrow$ нельзя достроить равнобед. ∠.



Ответ: 80 вершин.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА000321322б |
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№5.

$a^2b+b^2c+c^2a=3$

Тогда

$\underbrace{a^2b+b^2c}_{>0}=\underbrace{3-c^2a}_{>0} \Rightarrow 3-c^2a>0 \Rightarrow 3>c^2a \Rightarrow c^2<\frac{3}{a} \Rightarrow c<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$

$a^2b+c^2a=3-b^2c \Rightarrow 3-b^2c>0 \Rightarrow 3>b^2c \Rightarrow b^2<\frac{3}{c} \Rightarrow b<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}}$

$b^2c+c^2a=3-a^2b \Rightarrow 3-a^2b>0 \Rightarrow 3>a^2b \Rightarrow a^2<\frac{3}{b} \Rightarrow a<\sqrt{\frac{3}{c}}$

из ограничения:

$\begin{cases} b^6+c^4a^6\geq 0 \\ a^6+b^4c^6\geq 0 \\ c^6+a^4b^6\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b^6\geq -c^4a^6 \\ a^6+b^4c^6\geq 0 \\ b^6\geq -\frac{c^6}{a^4} \end{cases}$ $\begin{cases} b^6\geq -c^4a^6 \\ b^4\geq -\frac{a^6}{c^6} \\ b^6\geq -\frac{c^6}{a^4} \end{cases}$

$\begin{cases} b^3\geq c^2a^3 \\ b^2\geq a^3c^{-3} \\ b^3\geq \frac{c^6}{a^4} \end{cases} \Rightarrow c^2a^3\geq \frac{a^3}{c^3}$

$c^5a^3\geq a^3$

$c^5\geq 1$

$c\geq 1$

Аналогично можно получить, что $a\geq 1$, $b\geq 1$. Тогда минимальные значения равны 1. Проверяем

$1^2\cdot 1+1^2\cdot 1+1^2\cdot 1=3$ — верно. Считаем сумму.

$\frac{\sqrt{1+1}}{1}+\frac{\sqrt{1+1}}{1}+\frac{\sqrt{1+1}}{1}=3\sqrt{2}$

Ответ: $3\sqrt{2}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3 | МА0003213226

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

$$q^2p-1 \underset{pr-1}{\equiv} 0$$

$$pr-1 \underset{pr-1}{\equiv} 0$$

$$pr \underset{pr-1}{\equiv} 1$$

$$p \underset{pr-1}{\equiv} \frac{1}{r}$$

$$\frac{q^2}{r}-1 \underset{pr-1}{\equiv} 0$$

$$\frac{q^2}{r} \underset{pr-1}{\equiv} 1$$

$$q^2 \underset{pr-1}{\equiv} r$$

$$q^2r-r^2 \underset{pr-1}{\equiv} 0$$

$$r(q^2-r) \underset{pr-1}{\equiv} 0$$

Отсюда $r \underset{pr-1}{\equiv} 0$, тогда $r = npr-n$ и $n, r \in \mathbb{N} \Rightarrow$ подходит вариант, только где $n=1, r=1, p=2$, тогда r — точный квадрат.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 M A 0 0 0 3 2 2 3 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	12	2	20		74

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1.

$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$

$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x) = 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) -$

$- 2\sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$; По усл: $3\sin^2(x) - 4\sin^4(x) = \frac{5}{16}$.

~~Пусть $\sin^2(x) = t \Rightarrow 4t^2 - 3t + \frac{5}{16} = 0$. $\sqrt{D} = \ldots$~~

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \Rightarrow 3(1-\cos^2(x)) - 4(1-\cos^2(x))^2 = \frac{5}{16} \mid \cdot -1$

$4\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 4 - 3 + 3\cos^2(x) + \frac{5}{16} = 0.$

Пусть $\cos^2(x) = t \Rightarrow 4t^2 - 5t + \frac{21}{16} = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25-21} = 2$.

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 2}{8} = \frac{7}{8}; \frac{3}{8};$

$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) =$

$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) = 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)$

$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$; $\cos(x)\cdot\cos(3x) = 4\cos^4(x) - 3\cos^2(x) \Rightarrow$

$\frac{\cancel{4}\cdot 49}{16\cancel{64}} - \frac{3\cdot 7}{8} = \frac{7}{16}$; $\frac{\cancel{4}\cdot 9}{16\cancel{64}} - \frac{3\cdot 3}{8} = -\frac{9}{16}$

Ответ: $\frac{7}{16}; -\frac{9}{16}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 2 2 3 9 2 6

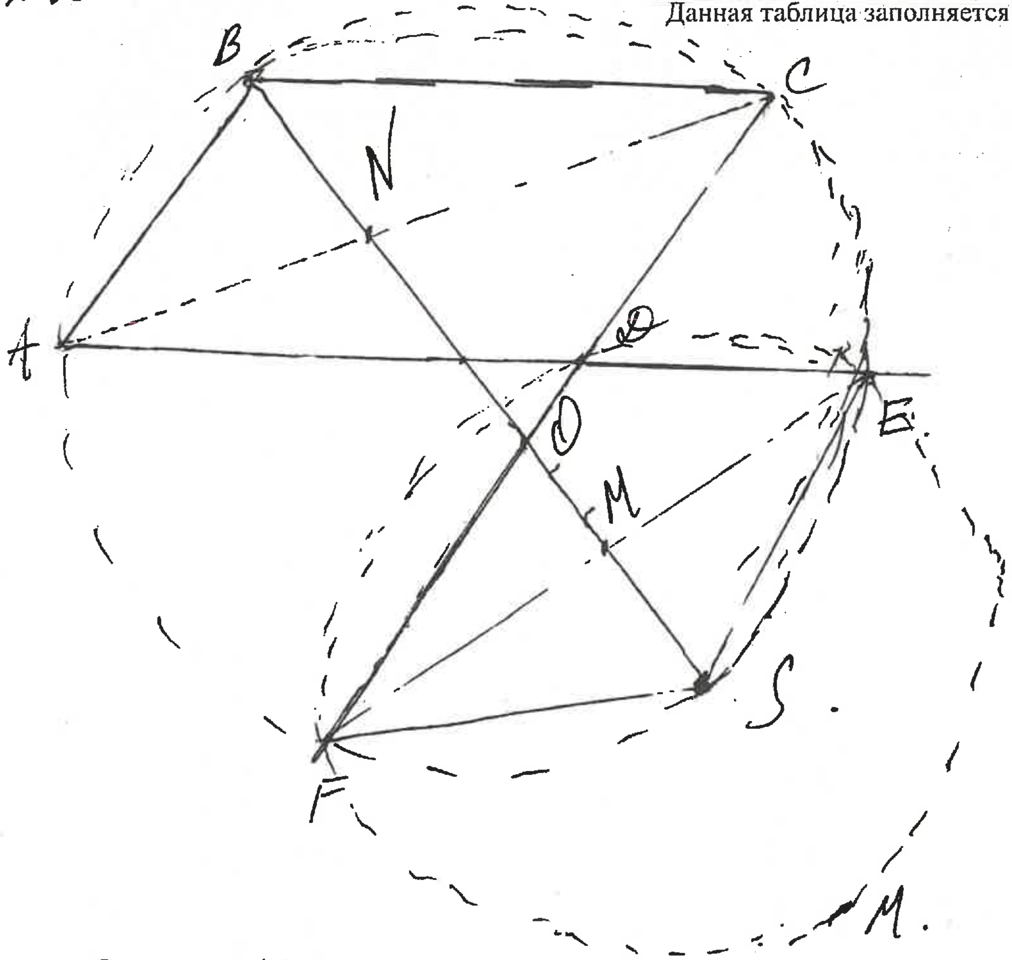
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.



Дано: $ABCD$ - параллелограмм; Q_1 окр. описанная около $\triangle ABC$.

$\angle BAC = 32^\circ$; Q_2 - окр. описан. около $\triangle FDE$.

$\angle BCA = 14^\circ$; S - центр. Q_2.

$AD \cap Q_1 = E$;

$CD \cap Q_2 = F$

Найти: $\angle AC \cap BS$.

Решение: $\angle ABC = 180^\circ - (32+14) = 134 \Rightarrow \angle ADC = \angle ABC$;
$\angle FDE = \angle ADC = 134$ (верт. $\angle$) $\Rightarrow \cup FME = 268^\circ \Rightarrow \cup FDE = 92^\circ \Rightarrow \angle FSE = 92^\circ$ (центральный $\angle$); $BC \parallel AD \Rightarrow \angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle CAD$ (т.к. $AB \parallel CD$) $\Rightarrow \cup AF = \cup BC = 64^\circ$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 | 9 | 2 | 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2 (прод.).

$\smile AB = \smile CE = 28^\circ$ ⇒

$\smile FBE = 184^\circ$; т.к. $\angle FSE = \frac{\smile FBE}{2}$ ⇒.

⇒ $S \in \Omega_1$; $SF = SE$ (как радиусы окр Ω_2)

$\angle FSB = \frac{1}{2} \smile FAB = 46^\circ$; $\angle BSE = \frac{1}{2} \smile BCE = 46^\circ$ ⇒.

⇒ SM – бис. △FSE, и △FSE равнобедренный ⇒.

$SM \perp FE$ ⇒ $\angle FOM = 90^\circ - \angle CFE = 90^\circ - \angle CAE =$

$= 90^\circ - \angle ACB = 76^\circ$ (т.к. $\angle FOM$ и $\angle CAE$ опираются

на 1 дугу) ⇒ $\angle NOC = 76^\circ$ ⇒ $\angle CNO = 180^\circ - 32^\circ - 76^\circ =$

$= 72^\circ$.

Ответ: 72°.

№3.

Обозначим дугу между двумя соседними вершинами

как x. $x = \frac{360}{80} = \frac{36}{8}$ ⇒ Если расстояние между двумя

точками $8x$, то на расстоянии $36x$ не может быть выбрана точка. ⇒

Начнём заполнять таким образом всю фигуру ⇒

Между 1 и 2 точкой раст. x ⇒ 8 и 1 раст. $7x$ ⇒ начиная с точки

начнут появлятся X с каждой поставленной точкой ⇒

на 1 клетку левее пред.

⇒ $2x + 8 = 80$ ⇒ $x = 36$ – количество крестиков.

⇒ Ответ: 44 вершины.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 2 2 3 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4.

$$\left.\begin{aligned} \frac{q^2p-1}{pr-1} &= \alpha \\ \frac{p^2r-1}{qr-1} &= \beta \\ \frac{r^2q-1}{pq-1} &= \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\cancel{pqr}(q^2-\frac{1}{p})(p^2-\frac{1}{r})(r^2-\frac{1}{q})}{\cancel{pqr}(p-\frac{1}{r})(r-\frac{1}{q})(q-\frac{1}{p})} = N$$

Такое выражение принимает натуральные значения только при $p; q; r$ - точные квадраты.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 2 2 3 9 2 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~a, b~~

№5

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} &\geqslant \frac{2a^2b^2}{c^2+4ab}\\ \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} &\geqslant \frac{2b^2c^2}{a^2+4bc}.\\ \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} &\geqslant \frac{2c^2a^2}{b^2+4ca}\end{aligned}\right\}+$$

(По неравенству Коши: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.).

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca} \geqslant \frac{2a^2b^2}{c^2+4ab}+\frac{2b^2c^2}{a^2+4bc}+\frac{2c^2a^2}{b^2+4ca}.$$

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2+4ab}+\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2+4bc}+\frac{(c^2-a^2)^2}{b^2+4ca} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2-b^2=0 \quad b^2-c^2=0 \quad c^2-a^2=0$.

$a=b^2 \quad b^2=c^2 \quad c^2=a^2 \Rightarrow$

$a^2+b^2+c^2=3c^2=3 \Rightarrow c^2=1; a^2=1; b^2=1 \Rightarrow a,b,c=1$

$$\frac{1+1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}.$$ Ответ: $\frac{6}{5}$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	2	6	4	4	2	6

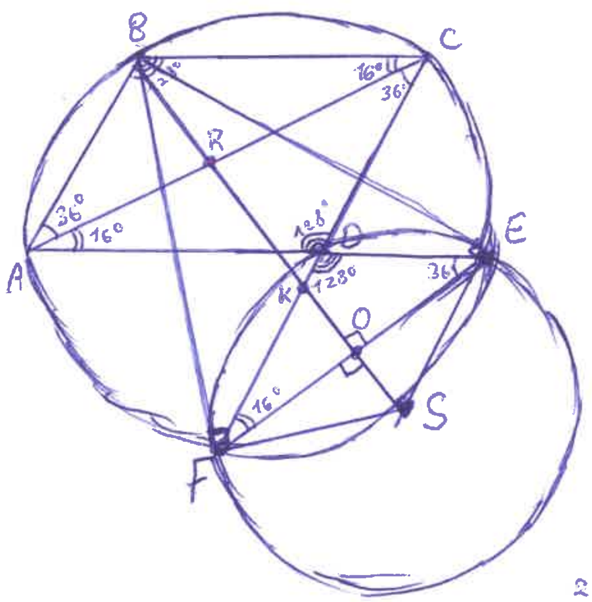
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	20	X	12	6		58

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2



Дано: ABCD - параллелограм; ∠BAC = 36°, ∠BCA = 16°; F ∈ продолжению CD и F ∈ окр. опис. около △BAC; E ∈ продолж. AD; E ∈ окр. опис. около △BAC. окр S — опис. около △DEF.

Найти:

∠ между AC и BS

Решение:

1) ∠CAD = 16° т.к накрест. леж с ∠ACB в парал. ABCD.

2) ∠CFE = ∠CAE = 16° т.к они опираются на 1 дугу CE в окр. опис. около △BAC.

3) Проведем BE; BF; SE; SF.

причем ∠SFB = ∠SEB = 90° — радиус проведенный к касательной.

тогда вокруг четырехугольника BESF можно описать окружность т.к противолежащие углы дают в сумме 180 градусов, и эта окружность и есть изначальная окружность описанная около △ABC т.к B ∈ окр; E ∈ окр; F ∈ окр, а значит S — тоже ∈ окр. опис. около △ABC

4) ∠CFB = ∠CAB т.к они обе впис в одну окр. и опираются на одну дугу BC.

∠CFB = 36°

5) Рассмотрим △BEF — равнобедренный т.к BE = BF — касательные проведенные из 1 точки. Пусть O — пересеч. FE и BS тогда т.к ∠FBS = ∠EBS (кас. из 1 точки и точка соед. с центром окр), а значит BO — биссектриса, а значит и высота и медиана.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	D	О	D	3	2	6	4	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$\angle FOK = 90^\circ$ (K – точка пересеч. FC и BS)

6) В $\triangle FOK$; $\angle FKO = 180^\circ - 90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$

$\angle FKO = \angle RKC$ где R – пересеч. AC и BS (т.к эти углы вертик).

7) В $\triangle CRK$; $\angle ACK = 36^\circ$ (накрест. лех с углом $\angle BAC$ в парал. ABCD)

$\angle CKR = \angle FKO = 74^\circ \Rightarrow \angle CRK$ (угл между AC и BS) $= 180^\circ - 74^\circ - 36^\circ =$

$= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Ответ: $\angle CRK = 70^\circ$. – угл между AC и BS.

№ 1

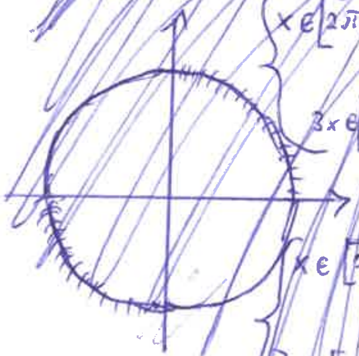
$\sin x \sin 3x = \frac{27}{64}$ т.к произведение 2 синусов – положительное число то значит оба синуса либо <0, либо оба >0.

$\sin x(\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x) = \frac{27}{64}$

$\sin x(2\cos^2 x \sin x + \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)) = \frac{27}{64}$

$\sin^2 x(2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{27}{64}$

$\sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{27}{64}$



~~(1 и 3 четверть)~~ ~~$x \in [2\pi k; 2\pi k + \frac{\pi}{2}]$ $k \in Z$~~ ~~$3x \in [2\pi k; 2\pi k + \frac{\pi}{2}]$ $k \in Z$~~ ~~или~~ ~~$x \in [2\pi n + \pi; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}]$~~ ~~$3x \in [2\pi n + \pi; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}]$ $n \in Z$~~

$(1 - \cos^2 x)(3\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) = \frac{27}{64}$

$(1 - \cos^2 x)(4\cos^2 x - 1) = \frac{27}{64}$

$4\cos^2 x - 1 - 4\cos^4 x + \cos^2 x = \frac{27}{64}$

$-4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 1 - \frac{27}{64} = 0 \mid \cdot(-1)$

$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + \frac{91}{64} = 0$ Пусть $\cos^2 x = t$, $t \in [0; 1]$ тогда

$4t^2 - 5t + \frac{91}{64} = 0$

$D = 25 - 16\frac{91}{64} = 25 - \frac{91}{4} = 25 - 22{,}75 = 2{,}25 > 0$; 2 корня

$t_1 = \frac{5 + 1{,}5}{8} = \frac{6{,}5}{8} = \frac{13}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	2	6	4	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$t_2 = \frac{5-1{,}5}{8} = \frac{3{,}5}{8} = \frac{7}{16}$

Оба корня $t_1 = \frac{13}{16}$ и $t_2 = \frac{7}{16}$ удовлетворяют условию $t \in [0; 1]$

Обратная замена.

$\cos^2 x = \frac{13}{16}$ или $\cos^2 x = \frac{7}{16}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ (1) или $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$ (2)

$\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ (3) или $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ (4)

Получилось 4 разных косинуса, найдем для них синусы.

(1) $\left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$

$\sin^2 x = \frac{3}{16}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

~~не удовлетворяют условию того что x находится в 1 или 3 четверти => у косинуса и синуса одинаковый знак (я буду писать далее не удовлетворяет ОДЗ для краткости написания)~~

(2) $\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$

$\sin^2 x = \frac{3}{\sqrt{16}}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ ~~не удовлетворяет ОДЗ~~

(3) $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$

$\sin^2 x = \frac{9}{16}$

$\sin x = \frac{3}{4}$ или $\sin x = \frac{-3}{4}$ ~~не удовлетворяет ОДЗ~~

(4) $\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$

$\sin^2 x = \frac{9}{16}$

$\sin x = \frac{3}{4}$ ~~не удовлетворяет ОДЗ~~ или $\sin x = -\frac{3}{4}$

~~У нас получились 4 пары синусов и косинусов.~~

$\cancel{\left(\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{4};\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{4}\right); \left(\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4};\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \left(\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4};\ \sin x = \frac{3}{4}\right); \left(\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4};\ \sin x = -\frac{3}{4}\right)}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	2	6	4	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Теперь нужно проверить условие того что при этих парах синусов и косинусов,~~

У нас получилось 8 пар синусов и косинусов, причем некоторые синусы повторяются так, например при $\left(\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{4};\ \sin x = \frac{\sqrt3}{4}\right.$ или $\left.\sin x = \frac{-\sqrt3}{4}\right)$

при $\left(\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4};\ \sin x = \frac{\sqrt3}{4}\right.$ или $\left.\sin x = -\frac{\sqrt3}{4}\right)$

Нужно проверить условие того, что у синуса $3x$ и синуса x — один и тот же знак:

$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$

Подставим 8 пар и посмотрим.

$\sin x = \frac{\sqrt3}{4};\ \cos x = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad \sin 3x = \frac{36\sqrt3}{64}$ уд. условию

$\sin x = \frac{\sqrt3}{4};\ \cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad \sin 3x = \frac{36\sqrt3}{64}$ уд. условию

$\sin x = -\frac{\sqrt3}{4};\ \cos x = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad \sin 3x = -\frac{36\sqrt3}{64}$ уд. условию

$\sin x = -\frac{\sqrt3}{4};\ \cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad \sin 3x = -\frac{36\sqrt3}{64}$ уд. условию

$\sin x = \frac{3}{4};\ \cos x = \frac{\sqrt7}{4}$ $\quad \sin 3x = \frac{36}{64}$ уд. условию

$\sin x = -\frac{3}{4};\ \cos x = \frac{\sqrt7}{4}$ $\quad \sin 3x = -\frac{36}{64}$ уд. условию

$\sin x = \frac{3}{4};\ \cos x = -\frac{\sqrt7}{4}$ $\quad \sin 3x = \frac{36}{64}$ уд. условию

$\sin x = -\frac{3}{4};\ \cos x = -\frac{\sqrt7}{4}$ $\quad \sin 3x = -\frac{36}{64}$ уд. условию

Найдем значение ~~[illegible]~~ $\cos x\cos 3x$ перемножив.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	2	6	4	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Большинство значений получатся ошибка но всеми ; ~~из налоет основные~~ из-за того что − на − дает + и + на + дает −

из-за того получаются только 2 значения

$$\cos 3x \cos x = \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}}{16} = \frac{13}{64}$$

$$\cos 3x \cos x = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{5 \cdot 7}{64} = \frac{35}{64}.$$

Ответ: $\cos 3x \cos x = \frac{13}{64}$ или $\cos 3x \cos x = \frac{35}{64}$

№4.

$p; q; r \in \mathbb{N}$

Доказать: одно из чисел − точный квадрат

$q^2p - 1 \equiv 0 \pmod{pr-1}$

$p^2r - 1 \equiv 0 \pmod{qr-1}$

$r^2q - 1 \equiv 0 \pmod{pq-1}$

Рассмотрим все по $\mathrm{mod}(pr-1)$

$$q^2p - 1 \equiv 0 \equiv \frac{q^2}{r} - 1 - 1 \equiv \frac{q^2}{r} - 2$$

$$\frac{q^2}{r} - 2 \equiv 0 \Leftarrow$$

$$-\frac{q^2}{r} \equiv -2$$

$$p^2r - 1 \equiv p - 1 - 1 \equiv p - 2$$

$$r^2q - 1 \equiv \frac{rq}{p} - 1 - 1 \equiv \frac{rq}{p} - 2$$

Рассмотрим выражение.

$$p^2r - 1 \equiv p - 2 \pmod{pr-1}$$

$$p^2r - 1 \equiv p - \frac{q^2}{r} \quad | \cdot r$$

$$p^2r^2 - r - pr + q^2 \equiv 0$$

$$q^2 - r \equiv 0$$

$$q^2 \equiv r \pmod{pr-1}$$

$$\Leftarrow q^2 - r + \underbrace{pr(pr-1)}_{0} \equiv 0$$

0 т.к ~~сравнение~~ делится на $(pr-1)$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	Р	3	2	6	4	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

~~Из~~ ~~этих~~ Видно что

$$q^2 \equiv r \pmod{pr-1}$$

А значит что хотя бы одно число всегда будет точным квадратом другого

что...

№5

$a; b; c > 0$ $\quad a^2b + b^2c + c^2a = 3$ т.к все числа $a; b; c > 0$

то $a^2b < 3$; $b^2c < 3$; $c^2a < 3$.

Найти: минимум.

$$\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}$$

возведем в квадрат выражение $a^2b + b^2c + c^2a = 3$

$$a^4b^2 + c^4a^2 + b^4c^2 + 2ac^3b^2 + 2ca^2b^3 + 2c^2ba^3 = 9$$

$$a^4b^2 + c^4a^2 + b^4c^2 + 2abc\underbrace{(c^2b + b^2a + a^2c)}_{3} = 9$$

$$a^4b^2 + c^4a^2 + b^4c^2 + 6abc = 9$$

причем заметим что

$$(a^2b)^2 + (c^2a)^2 + (b^2c)^2 + 6abc = 9$$

т.к $a; b; c > 0$ то можно утверждать что

$a^2b < 3 \qquad c^2a < 3 \qquad b^2c < 3$

$(a^2b)^2 < 9 \qquad (c^2a)^2 < 9 \qquad b^4c^2 < 9$

$$abc = \frac{9 - a^4b^2 - c^4a^2 - b^4c^2}{6}$$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 3

М	А	0	0	0	3	2	6	4	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Тогда

$$\frac{ac\sqrt{a^6+b^4c^6}+ba\sqrt{b^6+c^4a^6}+bc\sqrt{c^6+a^4b^6}}{abc}=$$

$$=\frac{6ac\sqrt{a^6+b^4c^6}+6ba\sqrt{b^6+c^4a^6}+bcb\sqrt{c^6+a^4b^6}}{9-a^4b^2-c^4a^2-b^4c^2}=$$

$$\frac{6\sqrt{a^8c^2+a^2b^4c^8}+6\sqrt{b^8a^2+b^2c^4a^8}+6\sqrt{b^2c^8+c^2a^4b^8}}{9-a^4b^2-c^4a^2-b^4c^2}$$

Знаменатель $9-a^4b^2-c^4a^2-b^4c^2$ не может быть отриц. ведь тогда условие что $a^2b+b^2c+c^2a=3$ не соблюдается. Значит что $(a^2b)^2<3$ а не <9. (аналогично для остальных)

Числитель же это 6·(на сумму 3 корней) чтобы знач. ~~было~~ выражения было минимальным надо что бы чис был маленьким, а знам большим, но знаменатель ограничен, отсюда надо что бы a^4b^2; c^4a^2; b^4c^2 стремились к 0, но если 1 из выраж. стремятся к 0, то остальные автоматически стремятся к $+\infty$ т.к $a^2b+b^2c+c^2a=3$, а значит что макс. знач. знам. будет достигнуто когда $a^2b=b^2c=c^2a$ а это при $a=b=c=1$, а значит мин. знач. выражения это $3\sqrt{2}$ (если подставить еденицы)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 6 | 5 | 4 | 2 | 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4.

1	2	3	4	5	6	Σ
20	2	20	20	–		62

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

$q^2p-1 \vdots pr-1 \Longrightarrow q^2p-1-pr+1 \vdots pr-1 \Rightarrow (q^2-r)\cdot p \vdots pr-1$

$p^2r-1 \vdots qr-1 \Longrightarrow p^2r-1-qr+1 \vdots qr-1 \Rightarrow (p^2-q)\cdot r \vdots qr-1$

$r^2q-1 \vdots pq-1 \Longrightarrow r^2q-1-(pq-1) \vdots pq-1 \Rightarrow (r^2-p)\cdot q \vdots pq-1$

по св-ву делимости: $a \vdots b \Rightarrow a-b \vdots b$

Теперь заметим, что для $(q^2-r)\cdot p \vdots pr-1$: $\begin{cases} pr \vdots p \\ НОД(pr, pr-1)=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow НОД(p, pr-1)=1 \Rightarrow q^2-r \vdots pr-1$.

Аналогично, получаем $p^2-q \vdots qr-1$, $r^2-p \vdots pq-1$

Как мы знаем, если $a \vdots b$, то либо $a \geq b$, либо $a=0$.

Тогда мы получаем систему уравнений:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} q^2-r \geq qr-1 \\ q^2-r=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} p^2-q \geq qr-1 \\ p^2-q=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} r^2-p \geq pq-1 \\ r^2-p=0 \end{array}\right. \end{cases}$

Без ограничения общности будем считать, что $q \geq p \leq r$, тогда должно ~~в~~ быть верно хотя бы 1 из ~~либо~~ $p^2 \geq qr+(q-1)$, ~~либо~~ $p^2=q$. Предположим, что $p^2 \geq qr+(q-1)$; нетрудно заметить, что $p^2 \leq qr$, и $q-1 \geq 0$. Тогда для ~~быть~~ верности неравенства должно быть верно $p^2=qr$ и $q=1$. ~~Но~~ Это возможно только при $p=q=r=1$, но тогда $pr-1=0$, а в условии указано, ~~что~~ про делимость на $pr-1$, а значит $pr-1 \neq 0$, противоречие.

Значит, верно $p^2=q$, т. е. q - точный квадрат. Аналогично для $p \geq q \leq r$ (r - точный квадрат) и для $p \geq r \leq q$ (p - точный квадрат), ч. т. д.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 3.

Впишем 80-угольник в окружность, тогда окружность поделится вершинами на 80 равных единичных дуг. Тогда каждая единичная дуга равна $\frac{360}{80} = 4,5^\circ$, а вписанный угол опирающийся на неё — $\frac{4,5}{2} = 2,25^\circ$. Тогда $\angle 18^\circ$ опирается на дугу из $\frac{18}{2,25} = 8$ единич. дуг, а $\angle 81^\circ$ — $\frac{81}{2,25} = 36$ ед. дуг. Если мы обозначим все вершины как $A_1, A_2, \dots, A_{80}$, то ~~вершины~~ индексы вершин треугольника с углами $18^\circ, 81^\circ, 81^\circ$ будут давать одинаковый остаток при делении на 4, а значит отмечания вершин с индексами с разными ост. по (mod 4) не влияют друг на друга. Тогда возьмём окр. ~~с 20 вершинами~~ со вписанным правильным 20-угольником.

Заметим, что всего на ней есть 20 подходящих треугольников (каждую из 20 вершин можно взять для $\angle 18^\circ$, тогда остальные 2 вершины треуг-ка определяются однозначно). Каждая из вершин является вершиной для 3 треугольников. Тогда нужно отметить вершины так, чтобы для каждого △ было отмечено не более 2 вершин, т.е. в каждом △ неотмеченной должна остаться хотя бы 1 вершина. Тогда вершин может быть ~~отмечено не больше трети, т.е. $\frac{20}{3} = 13(3)$~~ не отмечено не меньше трети (т.е. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} \Rightarrow$ не меньше 7), т.к. если будет неотмечено не больше 6, то ~~если взять~~ т.к. каждая вершина входит лишь в 3 треугольника, то всего треугольников с хотя бы 1 неотмеченной вершиной не более $6 \cdot 3 = 18 < 20$, противоречие. (т.е. хотя бы 1 будет с 3 отмеч. верш.)

Значит для 20 вершин можно отметить не больше 13 вершин (пример: обозначим за $B_1, B_2, \dots, B_{20}$ и отметим $B_3, B_4, B_5, B_8, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{16}, B_{17}, B_{18}, B_{19}, B_{20}$), а значит для 80-угольника — не более $13 \cdot 4 = 52$ вершин. Ответ: 52 вершины.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4

М	А	0	0	0	3	2	6	5	4	2	6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 1.

$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{5}{16}$

$\sin x \cdot \sin 3x = \sin x \cdot (3\sin x - 4\sin^3 x) = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x =$

$= 3(1-\cos^2 x) - 4(1-\cos^2 x)^2 = 3 - 3\cos^2 x - 4 + 8\cos^2 x - 4\cos^4 x =$

$= -(4\cos^4 x - 3\cos^2 x) + 2\cos^2 x - 1 = -\cos x \cdot \cos 3x + 1 - 2\sin^2 x = \frac{5}{16}$

$\cos x \cdot \cos 3x = -\frac{5}{16} + 1 - 2\sin^2 x = \frac{11}{16} - 2\sin^2 x$ $\quad \sin^2 x = 1/8;\ 5/8.$

$3\sin^2 x - 4\sin^4 x = \frac{5}{16}$ $\quad \sin^2 x = t$ $\quad 0 \le t \le 1$

$4t^2 - 3t + \frac{5}{16} = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{5}{16} = 9 - 5 = 4 = 2^2$

$t_1 = \frac{3-2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

$t_2 = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$

$\cos x_1 \cdot \cos 3x_1 = \frac{11}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8};$

$\cos x_2 \cdot \cos 3x_1 = \frac{11}{16} - 2 \cdot \frac{5}{8}$

$\cos x_1 \cdot \cos 3x_1 = \frac{11}{16} - \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$

$\cos x_2 \cdot \cos 3x = \frac{11}{16} - \frac{5}{4} = -\frac{9}{16}$

~~противоречит так как $\cos x \cdot \cos 3x \le |\cos x|$~~

Ответ: $\frac{7}{16}; -\frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | М | А | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 6 | 5 | 4 | 2 | 6 |

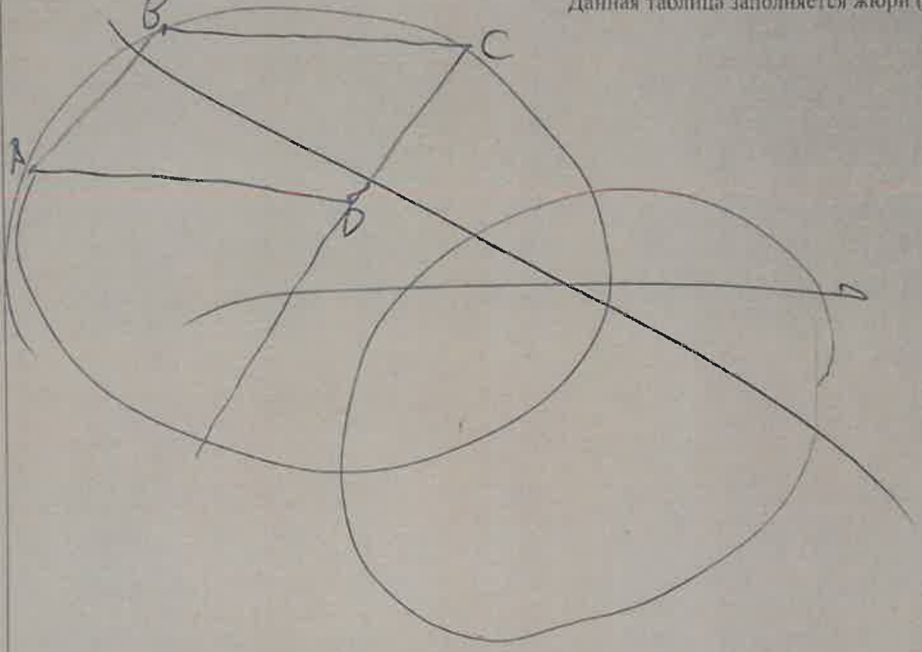
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 2.



Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 4 | MA 0 0 0 3 2 6 5 4 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Задание 2

Заметим, что S - пересечение сер.пер-ов FD и DE, Тогда если основание серпера FD - H, DE - K, то т.к. $\angle FDE = 180^\circ - 32^\circ - 14^\circ = 134^\circ$, то $\angle HSK = 46^\circ$.

Также заметим, что ABCE и FABC - р/б трапеции, значит $BD = CE$ и $AF = AD \Rightarrow \triangle FAD$ и $\triangle DCE$ - р/б. $\Rightarrow S = AH \cap CK$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 3 2 9 4 5 2 6 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ
20	8	x	12	20		60

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№1

$\sin\alpha \sin 3\alpha = \frac{5}{16}$

$\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{2} = \frac{5}{16}$

$\cos 2\alpha - \cos 4\alpha = \frac{5}{8}$

$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1 - \frac{5}{8} = 0$

$\cos 2\alpha = t$

$t - 2t^2 + \frac{3}{8} = 0$

$2t^2 - t - \frac{3}{8} = 0$

$16t^2 - 8t - 3 = 0$

$D = 256$

$t_1 = \frac{8-16}{32}$

$t_1 = -\frac{1}{4}$ $t_2 = \frac{3}{4}$

Подставляя значения получаем $\cos \cdot \cos 3\alpha = \frac{7}{16}; -\frac{9}{16}$

Ответ: $\frac{7}{16}; -\frac{9}{16}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА000329452 6

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$a^2+b^2+c^2=3.$

Заметим, что $a=b=c=1$ удовл., тогда

$\frac{1+1}{1+4}+\frac{1+1}{1+4}+\frac{1+1}{1+4}=\frac{6}{5}$. Докажем, что меньше не будет.

Заметим, что ни одно из чисел не может быть $\geq\sqrt{3}$, т.к. при возведении в квадрат сумма двух других будет равна 0 - не удовл, но и если $a,b,c<1$, то $a^2+b^2+c^2<3 \Rightarrow$ могут быть max 2 числа <1.

Если одно число <1. Пусть это $c<1 \Rightarrow a^2+b^2>2 \Rightarrow$

$a^4+b^4+2a^2b^2>4$. по нер-ву о средних $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \Rightarrow$

$a^4+b^4>2 \Rightarrow a^2b^2<1. \Rightarrow$ аналогично в других случаях получаем ~~что произведение двух чисел~~ это не усл. удовл., тогда при подстановке значений знаменатель, ~~от~~ ~~будет~~ дробь будет лишь увеличиваться.

При $a,b<1$, ~~то $c>1$. Тогда~~ Тогда из-за $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow$ что $c^2>2. \Rightarrow$ все знаменатели будут <6, но ваще $3>c^2>2$, то и $c^4>4 \Rightarrow$ сумма дробей будет увеличиваться

Ответ: $\frac{6}{5}$.

(Оценка на знаменатель достигнута из c^2+4ab, $4ab<4$, $c<2$.)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000329452б

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№4

Из условия получаем, что $q^2 \equiv r \pmod{pr-1}$, $p^2 \equiv q \pmod{qr-1}$, $r^2 \equiv p \pmod{pq-1}$

Предположим, что ни одно из них не является точным квадратом ⇒ все разности ненулевые ⇒ модули не превосходят этих величин: $pr-1 \le |q^2-r|$; $qr-1 \le |p^2-q|$ $pq-1 \le |r^2-p|$. Пусть $p \ge q \ge r$. Из $qr-1 \le p^2-q$ и $p \ge q$, получаем, что $q^2-q \ge qr-1 \Rightarrow q(q-1) \ge qr-1$, при $q \ge r$ это возможно лишь при $q=r \Rightarrow qr-1=q^2-q$ - делит p^2-q, но $p^2-q < q^2-1$ при $q>r$ - противоречие ⇒ $p=q=r$ но тог-~~да $p^2-1 \mid p+1$~~ ~~p^3-1~~ да $p^2-1 \mid p^3-1$ дает $p+1 \mid p^2+p+1 \Rightarrow p+1 \mid 1 \Rightarrow$ $p=0$ - не удовл ⇒ наше предположение неверно и хотя бы одно из $q^2=r$ $p^2=q$ $r^2=p$ - будет выполняться.

Лист 3 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 3 2 9 4 5 2 6

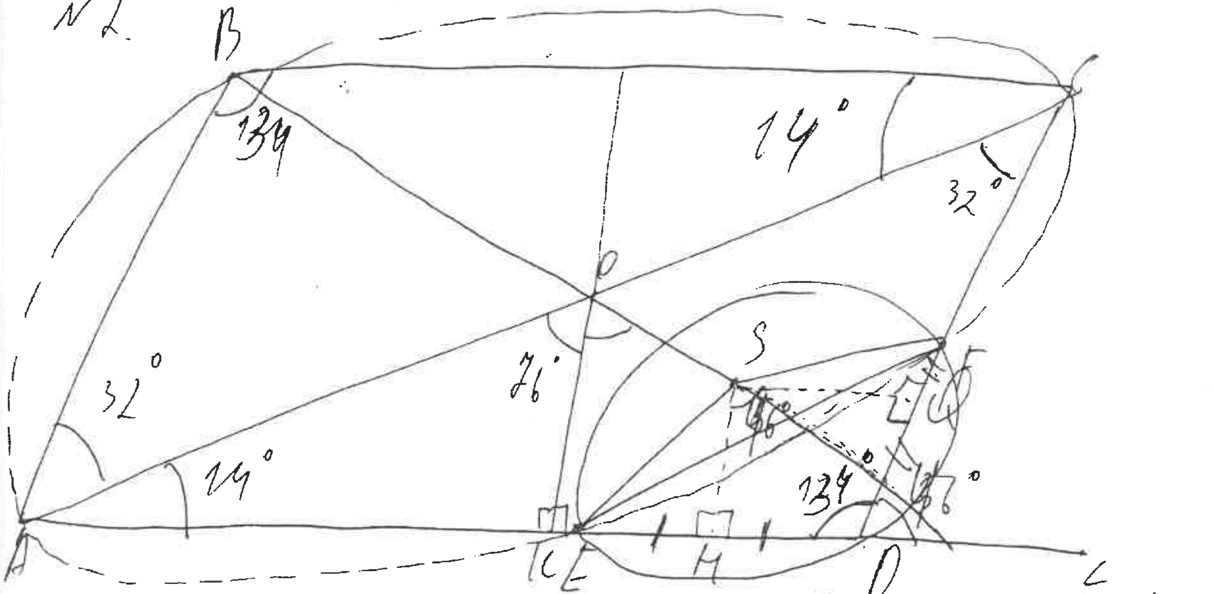
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6	Σ

Данная таблица заполняется жюри (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№2.



180 − 32 − 14 = 134° = ∠ABC = ∠ADC. ~~Отметим~~ Проведём

сер.-пер. => ∠HSQ = 180 − 134 = 46° и ∠CDL = 46°

Опустим Q перпен. DL => 180 − 90 − 14 = 76.