ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

2 КЛАСС

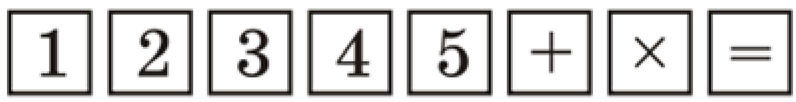
Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

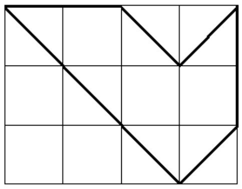
1. Мама купила персики, половину убрала в холодильник, 3 персика дала Васе, осталось у неё 4 персика. Сколько персиков купила мама? *Объясните, как получили ответ.*
Ответ. 14.
Решение. Половину персиков составляют $3 + 4 = 7$ персиков, значит, куплено было 14 персиков.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера, но не показано, что других ответов нет –15 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

2. Есть восемь карточек, изображенных на рисунке ниже, с цифрами и знаками. Переставьте карточки местами, чтобы получился верный пример. Карточки нельзя переворачивать или поворачивать. Если требуется, то можно использовать скобки.

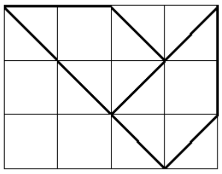


Ответ. Например, $2 \times 4 + 5 = 13$.
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Ответ не найден, но есть верный анализ требуемого примера – 10 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Равными называются фигуры, которые можно полностью совместить, наложив друг на друга. Можно ли разрезать фигуру на рисунке на две равные части? *Если можно, то нарисуйте на бланке ответов, как это сделать и объясните, почему части равны. Если это сделать нельзя, то объясните, почему.*



Ответ. Можно.
Решение. См. рисунок.



Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

4. У учителя на столе лежат 7 разных тетрадей по математике и 5 разных тетрадей по русскому языку. Сколькими способами учитель может взять себе две тетради, чтобы проверить их вечером? *Объясните, как получили ответ.*
Ответ. 66.
Решение. Одну тетрадь по математике и одну тетрадь по русскому учитель может выбрать $7 \cdot 5 = 35$ способами, две разные тетради по математике – $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способами (одну тетрадь можно выбрать 7 способами, еще одну из оставшихся – 6 способами, но таким образом каждая пара тетрадей по математике посчитана ровно два раза), а две разные тетради по русскому языку – $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами. Итого получаем: $35 + 21 + 10 = 66$ различными способами.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Получен ответ 35 – 10 баллов. Получен иной ответ и арифметических ошибок нет – не более 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Садовник сделал несколько клумб, и привез розы, чтобы высадить их на клумбах. Если на каждую клумбу высаживать по 9 роз, то 2 клумбы останутся пустыми. Если высаживать по 6 роз, то останутся 3 розы. Сколько роз было у садовника? *Объясните, как получили ответ.*
Ответ. 45.
Решение. Чтобы на каждую клумбу высаживать по 9 роз, не хватает 18 роз. Чтобы на каждую клумбу высаживать по 6 роз, нужно на 3 розы меньше. Таким образом, разница между числом роз, нужных для заполнения клумбы по 9 и по 6 роз, равна $18 + 3 = 21$. При высаживании по 9 роз в каждую клумбу попадает на 3 розы больше, чем при высаживании по 6 роз. Чтобы высадить разницу, требуется $21 : 3 = 7$ клумб. Роз тогда $9 \cdot (7 - 2) = 45$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера, но не показано, что других ответов нет – 10 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

Вариант 2

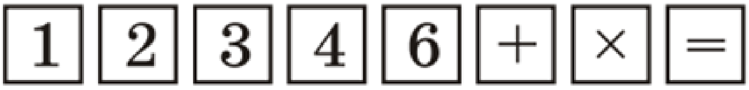
1. Красная Шапочка испекла пирожки, половину их отнесла бабушке, 5 пирожков подарила Волку. Осталось у неё 3 пирожка. Сколько пирожков испекла Красная Шапочка? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. 16.

Решение. Половину пирожков составляют $3 + 5 = 8$ пирожков, значит, всего было 16 пирожков.

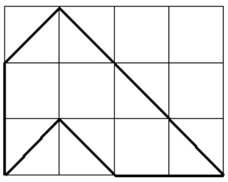
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера, но не показано, что других ответов нет –15 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

2. Есть восемь карточек, изображенных на рисунке ниже, с цифрами и знаками. Переставьте карточки местами, чтобы получился верный пример. Карточки нельзя переворачивать или поворачивать. Если требуется, то можно использовать скобки.



Ответ. Например, $(1 + 3) \times 6 = 24$.

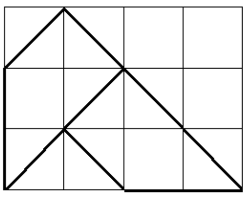
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Ответ не найден, но есть верный анализ требуемого примера – 10 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*



3. Равными называются фигуры, которые можно полностью совместить, наложив друг на друга. Можно ли разрезать фигуру на рисунке на две равные части? *Если можно, то нарисуйте на бланке ответов, как это сделать и объясните, почему части равны. Если это сделать нельзя, то объясните, почему.*

Ответ. Можно.

Решение. См. рисунок.



Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

4. У учителя на столе лежат 5 разных тетрадей по математике и 8 разных тетрадей по русскому языку. Сколькими способами учитель может взять себе две тетради, чтобы проверить их вечером? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. 78.

Решение. Одну тетрадь по математике и одну тетрадь по русскому учитель может выбрать $5 \cdot 8 = 40$ способами, две разные тетради по математике – $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами (одну тетрадь можно выбрать 5 способами, еще одну из оставшихся – 4 способами, но таким образом каждая пара тетрадей по математике посчитана ровно два раза), а две разные тет-

ради по русскому языку – $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ способами. Итого получаем: $40 + 10 + 28 = 78$ различными способами.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Получен ответ 40 – 10 баллов. Получен иной ответ и арифметических ошибок нет – не более 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Если положить по 8 монет в шкатулку, то 3 шкатулки останутся пустыми. Если положить по 5 монет в шкатулку, то останутся 3 монеты. Сколько было монет? *Объясните, как получили ответ.*
Ответ. 48.
Решение. Чтобы заполнить все шкатулки по 8 монет, не хватает 24 монет. Чтобы заполнить все шкатулки по 5 монет, нужно на 3 монеты меньше. Таким образом, разница между числом монет, нужных для заполнения шкатулок по 8 и по 5 монет, равна $24 + 3 = 27$. При раскладывании по 8 монет в каждую шкатулку попадает на 3 монеты больше, чем при раскладывании по 5 монет. Чтобы разложить разницу, требуется $27 : 3 = 9$ шкатулок. Монет тогда $8 \cdot (9 - 3) = 48$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера, но не показано, что других ответов нет – 10 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

Вариант 3

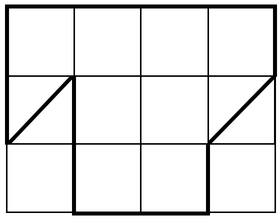
1. Мама купила персики, половину убрала в холодильник, 4 персика дала Васе, осталось у неё 6 персиков. Сколько персиков купила мама? *Объясните, как получили ответ.*
Ответ. 14.
Решение. Половину персиков составляют $6 + 4 = 10$ персиков, значит, куплено было 20 персиков.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера, но не показано, что других ответов нет –15 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

2. Есть восемь карточек, изображенных на рисунке ниже, с цифрами и знаками. Переставьте карточки местами, чтобы получился верный пример. Карточки нельзя переворачивать или поворачивать. Если требуется, то можно использовать скобки.

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{9}\ \boxed{+}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}$$

Ответ. Например, $3 \times 4 + 9 = 21$.
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Ответ не найден, но есть верный анализ требуемого примера – 10 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Равными называются фигуры, которые можно полностью совместить, наложив друг на друга. Можно ли разрезать фигуру на рисунке на две равные части? *Если можно, то нарисуйте на бланке ответов, как это сделать и объясните, почему части равны. Если это сделать нельзя, то объясните, почему.*



Ответ. Нельзя.

Решение. Фигуру нельзя разрезать на две равные части, потому что она несимметрична, имеет нечётное количество элементов (если разбить на блоки) и никакая прямая или ломаная линия по границам не даёт двух равных половин.

Комментарий. *Любое верное рассуждение – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

4. У учителя на столе лежат 4 разных тетради по математике и 7 разных тетрадей по русскому языку. Сколькими способами учитель может взять себе две тетради, чтобы проверить их вечером? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. 55.

Решение. Одну тетрадь по математике и одну тетрадь по русскому учитель может выбрать $4 \cdot 7 = 28$ способами, две разные тетради по математике – $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ способами (одну тетрадь можно выбрать 4 способами, еще одну из оставшихся – 3 способами, но таким образом каждая пара тетрадей по математике посчитана ровно два раза), а две разные тетради по русскому языку – $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способами. Итого получаем: $28 + 6 + 21 = 55$ различными способами.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Получен ответ 28 – 10 баллов. Получен иной ответ и арифметических ошибок нет – не более 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Садовник сделал несколько клумб, и привез розы, чтобы высадить их на клумбах. Если на каждую клумбу высаживать по 9 роз, то 3 клумбы останутся пустыми. Если высаживать по 6 роз, то останутся 3 розы. Сколько роз было у садовника? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. 63.

Решение. Чтобы на каждую клумбу высаживать по 9 роз, не хватает 27 роз. Чтобы на каждую клумбу высаживать по 6 роз, нужно на 3 розы меньше. Таким образом, разница между числом роз, нужных для заполнения клумбы по 9 и по 6 роз, равна $27 + 3 = 30$. При высаживании по 9 роз в каждую клумбу попадает на 3 розы больше, чем при высаживании по 6 роз. Чтобы высадить разницу, требуется $30: 3 = 10$ клумб. Роз тогда $9 \cdot (10 - 3) = 63$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера, но не показано, что других ответов нет – 10 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

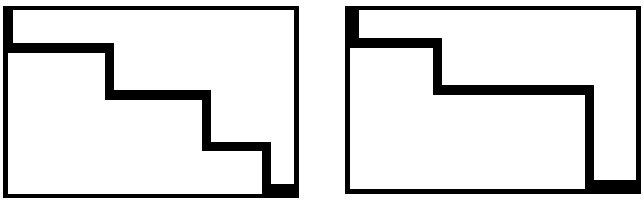
3 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. У Мити есть два одинаковых прямоугольника. Он нарисовал в каждом прямоугольнике ломаную из левого верхнего угла в правый нижний. В левом ломаная состоит из 8 отрезков, а в правом – из 6 отрезков, все углы прямые. Митя считает, что левая ломаная немного длиннее. Прав ли он? Объясните свой ответ, не используя измерение отрезков.



Ответ. Нет, не прав. Ломаные имеют одинаковую длину.
Решение. Длина каждой ломаной равна сумме длин двух соседних сторон прямоугольника, поэтому длины одинаковы.
Комментарий. *Получен ответ «равны» – 20 баллов. Ответ «не прав» без объяснений – 5 баллов. Ответ «правая длиннее» – 0 баллов. Ответ «прав» – 0 баллов.*

2. Бельчата Рыжик и Хвостик принесли маме грибы – Рыжик принёс два гриба, а Хвостик три гриба. Потом Рыжик приносил по два гриба каждые три минуты, а Хвостик приносил по три гриба каждые две минуты. Через сколько минут у мамы впервые станет больше 25 грибов?
Ответ. 10.
Решение 1. В начале у мамы уже есть 5 грибов. За 6 минут Рыжик приносит четыре гриба, а Хвостик приносит девять грибов, вместе 13, у мамы 18 грибов. За следующие две минуты Хвостик приносит три гриба, у мамы 21 гриб. Еще через минуту Рыжик прино-

сит два гриба, у мамы 23 гриба. Еще через минуту Хвостик приносит три гриба, у мамы 26 грибов. Прошло $6 + 2 + 1 + 1 = 10$ минут.

Решение 2. Отметим моменты, когда бельчата приносят грибы.

Минуты	0	2	3	4	6	8	9	10
Хвостик	+3	+3		+3	+3	+3		+3
Рыжик	+2		+2		+2		+2	
Сумма	5	8	10	13	18	21	23	26

За 9 минут Рыжик принёс 8 грибов, а Хвостик 15, сумма меньше 25. За 10 минут Хвостик принёс 18 грибов, а Рыжик 8. Сумма впервые больше 25.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Найдено, что за 6 минут приносят 13 грибов – 15 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. Подряд записаны 10 цифр 7: 7777777777. Между каждыми соседними цифрами вставьте знак «$+$» или «$-$», или «$\times$ » или « $:$ », и расставьте скобки так, чтобы получилось число 120.

Ответ. Например, так: $(7 \times 7 + 7) \cdot (7:7 + 7:7) + 7 + (7:7)$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получено верное равенство, но использовано не 10 цифр или знак не между каждыми цифрами, как требуется в условии – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

4. Аня и Вика купили корм для птиц. Аня купила 3 пакетика овса и 4 пакетика семечек, и заплатила 147 рублей. Вика купила 4 пакетика овса и 3 пакетика семечек, и заплатила 154 рубля. Сколько стоит пакетик овса?

Ответ. 25 рублей.

Решение. Вика заплатила на 7 рублей больше. Каждая купила по 3 пакетика и овса и семечек, их покупки отличаются только тем, что у Вики есть ещё пакетик овса, а у Ани пакетик семечек. Значит, пакетик овса стоит на 7 рублей больше, чем пакетик семечек. Если бы Аня купила 7 пакетиков овса, она бы заплатила $147 + 4 \cdot 7 = 175$ рублей. Один пакетик овса стоит $175:7 = 25$ рублей.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. На столе лежат четыре кучи орехов – по $4, 5, 6, 6$ орехов в куче. За один ход можно разделить какую-нибудь кучу на две меньшие кучи (в каждой новой куче должно быть не меньше 1 ореха). Трое ребят по очереди делают ходы. Первой Аля выбирает какую-нибудь кучу из четырёх и делит её на две. Потом Боря выбирает кучу из пяти куч и делит её на две. Затем Ваня выбирает кучу из шести куч и делит её на две. Потом опять Аля делает ход, за ней Боря, за ним Ваня, и они продолжают в таком порядке до тех пор, пока можно сделать ход. Чей ход будет последним?

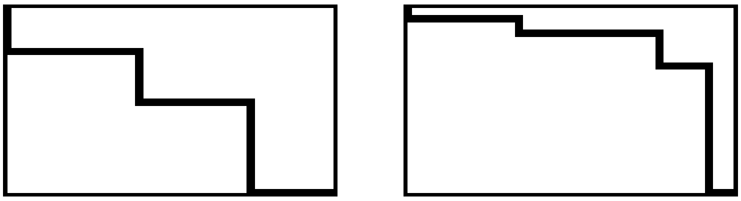
Ответ. Бори.

Решение. Если есть куча, содержащая больше 1 ореха, можно сделать ход. Последний ход приведёт к тому, что каждая куча будет содержать только 1 орех. Этих куч будет $4 + 5 + 6 + 6 = 21$. После каждого хода число куч увеличивается на 1. В начале куч было 4, в конце станет 21. Это требует $21 - 4 = 17$ ходов. $17 = 3 \cdot 5 + 2$. Значит, тройка ребят сделает ходы 5 раз, а после этого останется 2 хода: Али и Бори. Последний ход сделает Боря.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть ошибка – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

1. У Кости есть два одинаковых прямоугольника. Он нарисовал в каждом прямоугольнике ломаную из левого верхнего угла в правый нижний. В левом ломаная состоит из 6 отрезков, а в правом – из 8 отрезков, все углы прямые. Костя считает, что правая ломаная немного длиннее. Прав ли он? Объясните свой ответ, не используя измерение отрезков.



Ответ. Нет, не прав. Ломаные имеют одинаковую длину.
Решение. Длина каждой ломаной равна сумме длин двух соседних сторон прямоугольника, поэтому длины одинаковы.
Комментарий. *Получен ответ «равны» – 20 баллов. Ответ «не прав» без объяснений – 5 баллов. Ответ «левая длиннее» – 0 баллов. Ответ «прав» – 0 баллов.*

2. Мама за 3 минуты выпекает 2 блинчика и кладёт их на тарелку, а дети за 4 минуты съедают один блинчик с тарелки. Через сколько минут на тарелке впервые станет 9 блинчиков?
Ответ. 21.
Решение 1. За 12 минут мама печёт 8 блинчиков, а дети съедают 3, то есть за первые 12 минут на тарелке останется $8 - 3 = 5$ блинчиков. За следующие 3 минуты блинчиков станет 7 (15 минут), но еще через 1 минуту их станет 6 (16 минут). Еще через 2 минуты будет 8 блинчиков (18 минут), и через две минуты – 7 (20 минут). Потом через минуту мама испечёт еще 2 блинчика, и на тарелке их станет 9 (21 минута).
Решение 2. Отметим моменты, когда число блинчиков изменяется.

Минуты	3	4	6	8	9	12	15	16	18	20	21
Мама	$+2$		$+2$		$+2$	$+2$	$+2$		$+2$		$+2$
Дети		-1		-1		-1		-1		-1	
Сумма	2	1	3	2	4	5	7	6	8	7	9

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. Подряд записаны 10 цифр 2: 2222222222. Между каждыми соседними цифрами вставьте знак «$+$» или «$-$», или «$\times$» или «$:$», и расставьте скобки так, чтобы получилось число 100.
Ответ. Например, так: $(2 + 2 + 2:2) \cdot (2 + 2 + 2:2) \cdot (2 + 2)$.

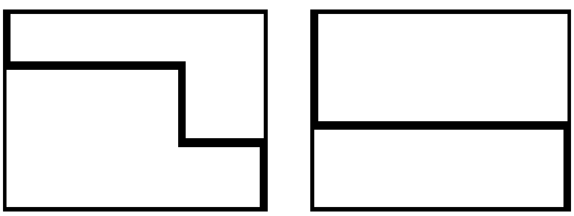
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получено верное равенство, но использовано не 10 цифр или знак не между каждыми цифрами, как требуется в условии – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

4. На опушке растут дуб, куст малины и куст смородины. Бельчонок Тюх пробежал 3 раза от дуба до малины и назад, и 4 раза от дуба до смородины и назад. Всего он пробежал 186 метров. Бельчонок Плюх пробежал 4 раза от дуба до малины и назад, и 3 раза от дуба до смородины и назад. Всего он пробежал 192 метра. Сколько метров от дуба до малины?
Ответ. 15 метров.
Решение. Плюх пробежал на 6 метров больше. Каждый пробежал по 3 раза от дуба до малины и назад, и от дуба до смородины и назад. Но последняя пробежка у них разная. Значит, расстояние от дуба до малины и назад на 6 метров больше, чем от дуба до смородины и назад. Если бы Тюх 7 раз пробежал до малины и назад, он бы пробежал $186 + 6 \cdot 4 = 210$ метров. Длина одной пробежки равна $210 : 7 = 30$ метров. Значит, от дуба до малины 15 метров.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении в ответе длина одной пробежки (30 метров) – 18 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. На столе лежат четыре кучи орехов – по $3, 5, 7, 8$ орехов в куче. За один ход можно разделить какую-нибудь кучу на две меньшие кучи (в каждой новой куче должно быть не меньше 1 ореха). Трое ребят по очереди делают ходы. Первой Надя выбирает какую-нибудь кучу из четырёх и делит её на две. Потом Вася выбирает кучу из пяти куч и делит её на две. Затем Петя выбирает кучу из шести куч и делит её на две. Потом опять Надя делает ход, за ней Вася, за ним Петя, и они продолжают в таком порядке до тех пор, пока можно сделать ход. Чей ход будет последним?
Ответ. Нади.
Решение. Если есть куча, содержащая больше 1 ореха, можно сделать ход. Последний ход приведёт к тому, что каждая куча будет содержать только 1 орех. Этих куч будет $3 + 5 + 7 + 8 = 23$. После каждого хода число куч увеличивается на 1. В начале куч было 4, в конце станет 23. Это требует $23 - 4 = 19$ ходов. $19 = 3 \cdot 6 + 1$. Значит, тройка ребят сделает ходы 6 раз, а после этого останется один ход: Нади. Последний ход сделает Надя.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть ошибка – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

1. У Нины есть два одинаковых прямоугольника. Она нарисовала в каждом прямоугольнике ломаную из левого верхнего угла в правый нижний. В левом ломаная состоит из 5 отрезков, а в правом – из 3 отрезков, все углы прямые. Нина считает, что левая ломаная длиннее. Права ли она? Объясните свой ответ, не используя измерение отрезков.



Ответ. Нет, не права. Ломаные имеют одинаковую длину.

Решение. Длина каждой ломаной равна сумме длин двух соседних сторон прямоугольника, поэтому длины одинаковы.
Комментарий. *Получен ответ «равны» – 20 баллов. Ответ «не прав» без объяснений – 5 баллов. Ответ «правая длиннее» – 0 баллов. Ответ «прав» – 0 баллов.*

2. Бельчонок Плюх каждые две минуты приносит по 3 шишки, и складывает их на пень, а бельчонок Тюх каждые 5 минут утаскивает 2 шишки с пня. Через сколько минут на пне впервые станет больше 20 шишек?
Ответ. 18.

Решение. Отметим моменты, когда число шишек изменяется.

Минуты	2	4	5	6	8	10	12	14	15	16	18
Плюх	$+3$	$+3$		$+3$	$+3$	$+3$	$+3$	$+3$		$+3$	$+3$
Тюх			-2			-2			-2		
Сумма	3	6	4	7	10	11	14	17	15	18	21

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. Подряд записаны 11 цифр 3: 33333333333. Между каждыми соседними цифрами вставьте знак «$+$» или «$-$», или «$\times$ » или «$:$ », и расставьте скобки так, чтобы получилось число 100.
Ответ. Например, так: $(3+3+3)\cdot(3\cdot3+3:3+3:3)+3:3$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получено верное равенство, но использовано не 11 цифр или знак не между каждыми цифрами, как требуется в условии – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

4. Есть одинаковые синие шарики и одинаковые красные шарики. 4 синих шарика и 5 красных вместе весят 360 граммов, а 5 синих шариков и 4 красных вместе весят 351 грамм. Сколько весит красный шарик?
Ответ. 44 грамма.
Решение. В первом случае вес на 9 граммов больше, чем во втором. Но отличие только в одной паре шариков. Значит, красный шарик весит на 9 граммов больше, чем синий. Если бы во втором случае все 9 шариков были красные, то вес был бы $351+5\cdot9=396$ граммов. Вес одного красного шарика $396:9=44$ грамма.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. На столе лежат четыре кучи орехов – по $7, 6, 6, 5$ орехов в куче. За один ход можно разделить какую-нибудь кучу на две меньшие кучи (в каждой новой куче должно быть не меньше 1 ореха). Трое ребят по очереди делают ходы. Первой Соня выбирает какую-нибудь кучу из четырёх и делит её на две. Потом Даня выбирает кучу из пяти куч и делит её на две. Затем Вася выбирает кучу из шести куч и делит её на две. Потом опять Соня делает ход, за ней Даня, за ним Вася, и они продолжают в таком порядке до тех пор, пока можно сделать ход. Чей ход будет последним?
Ответ. Дани.

Решение. Если есть куча, содержащая больше 1 ореха, можно сделать ход. Последний ход приведёт к тому, что каждая куча будет содержать только 1 орех. Этих куч будет $7 + 6 + 6 + 5 = 24$. После каждого хода число куч увеличивается на 1. В начале куч было 4, в конце станет 24. Это требует $24 - 4 = 20$ ходов. $20 = 3 \cdot 6 + 2$. Значит, тройка ребят сделает ходы 6 раз, а после этого останется 2 хода: Сони и Дани. Последний ход сделает Даня.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть ошибка – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

4 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

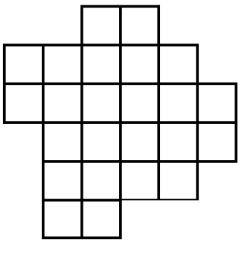
1. В классе 25 человек. Из них 20 человек любят математику, 14 любят биологию, а 3 не любят ни то, ни другое. Сколько учеников класса любят оба предмета?

Ответ. 12.

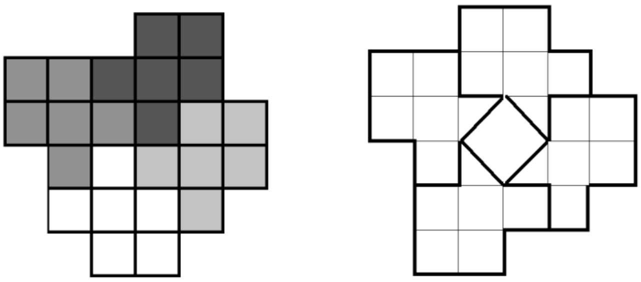
Решение. Любят хотя бы один из предметов $25-3=22$ человека. Если сложить тех, кто любит математику, и тех, кто любит биологию, то получится $20+14=34$. При этом те, кто любят оба предмета, посчитаются дважды. Тогда $34-22=12$ – «превышение» над общим количеством тех, кто любит хотя бы один предмет – и есть те, кто любят оба предмета.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

2. Разрежьте фигуру с вырезанными двумя клетками в центре, изображенную на рисунке, на четыре равные части (части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать).



Решение. См. рисунки (принимались оба ответа с вырезанными и без вырезанных клеток).



Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Найдена фигура для разбиения, но само разбиение не показано – 10 баллов. Найдено только количество клеток в частях – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. От дома Винни-Пуха к дому Пятачка ведут 3 дороги. От дома Пятачка к дому Кролика ведут 4 дороги, а от дома Кролика к дому Винни-Пуха ведут 2 дороги. Сколькими способами Винни-Пух может зайти в гости к своим друзьям (в произвольном порядке) и вернуться домой, пройдя суммарно ровно по трём дорогам?

Ответ. 48.

Решение. К Пятачку Винни-Пух может пройти 3 способами, от Пятачка к Кролику – 4 способами, а от Кролика домой – 2 способами, поэтому количество способов зайти сначала к Пятачку, потом к Кролику, а потом вернуться домой, равно 24. Аналогично, количество способов зайти сначала к Кролику, потом к Пятачку и потом вернуться домой, тоже равно 24. Значит, итоговое количество способов равно 48.

Комментарий. *Подсчет способов без учета варианта второго обхода – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. На острове живут рыцари и лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Однажды в кассы метро выстроились три очереди: в одной 6 людей, в другой – 10, в третьей – 14. Каждый в очереди сказал фразу: «Среди людей, стоящих в моей очереди передо мной, не менее двух лжецов». Сколько рыцарей стоит в очередях?

Ответ. 24.

Решение. Рассмотрим какую-нибудь очередь. Двое людей, стоящие в ней первыми, соврали, потому что перед ними нет двух человек. Следовательно, они лжецы. Тогда третий человек в очереди сказал правду, то есть он рыцарь. Аналогично все остальные люди в очереди являются рыцарями. Таким образом, в каждой очереди стоят 2 лжеца, а все остальные – рыцари. То есть ответ $6 + 10 + 14 - 6 = 24$.

Комментарий. *Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Использование без доказательства факта в каждой очереди «стоит 2 лжеца» – не более 4 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Паша выписал на доску натуральные числа от 1 до 1000. Нечётные числа он записывал в левой части доски, а чётные – в правой. После этого он просуммировал цифры всех чисел, записанных слева, и просуммировал цифры всех чисел, записанных справа. Где сумма получилась больше и на сколько?

Ответ. Слева; 499.

Решение. Разобьём все числа, кроме 1 и 1000, на 499 пар: 3 и 2, 5 и 4, 7 и 6, …, 999 и 998. В каждой паре числа отличаются только в разряде единиц, причём левое число на 1 больше. Т. е. эти числа делают сумму слева на 499 больше. Ещё осталось число 1 – оно нечётное, поэтому добавит 1 слева, и число 1000 – оно чётное, поэтому добавит 1 справа. В итоге левая сумма останется на 499 больше.

__Комментарий.__ В задаче при расчетах не учтено число 1000 – 16 баллов. Только идея разбиения на пары, без существенного продвижения дальше – 6 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

Вариант 2

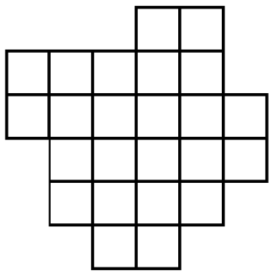
1. В классе 25 человек. Из них 18 человек любят математику, 10 любят биологию, а 5 не любят ни то, ни другое. Сколько учеников класса любят оба предмета?

Ответ. 8.

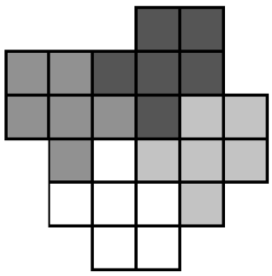
Решение. Любят хотя бы один из предметов $25 - 5 = 20$ человек. Если сложить тех, кто любит математику, и тех, кто любит биологию, то получится $18 + 10 = 28$. При этом те, кто любят оба предмета, посчитаются дважды. Тогда $28 - 20 = 8$ – «превышение» над общим количеством тех, кто любит хотя бы один предмет – и есть те, кто любят оба предмета.

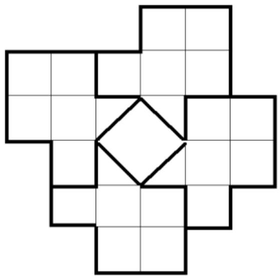
__Комментарий.__ Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

2. Разрежьте фигуру с вырезанными двумя клетками в центре, изображенную на рисунке, на четыре равные части (части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать).



Решение. См. рисунки (принимались оба ответа с вырезанными и без вырезанных клеток).





__Комментарий.__ Любой верный пример – 20 баллов. Найдена фигура для разбиения, но само разбиение не показано – 10 баллов. Найдено только количество клеток в частях – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. От дома Винни-Пуха к дому Пятачка ведут 2 дороги. От дома Пятачка к дому Кролика ведут 2 дороги, а от дома Кролика к дому Винни-Пуха ведут 5 дорог. Сколькими способами Винни-Пух может зайти в гости к своим друзьям (в произвольном порядке) и вернуться домой, пройдя суммарно ровно по трём дорогам?

Ответ. 40.

Решение. К Пятачку Винни-Пух может пройти 2 способами, от Пятачка к Кролику – 2 способами, а от Кролика домой – 5 способами, поэтому количество способов зайти сначала к Пятачку, потом к Кролику, а потом вернуться домой, равно 20. Аналогично, количество способов зайти сначала к Кролику, потом к Пятачку и потом вернуться домой, тоже равно 20. Значит, итоговое количество способов равно 40.

Подсчет способов без учета варианта второго обхода – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

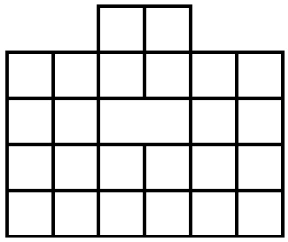
4. На острове живут рыцари и лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Однажды в кассы метро выстроились три очереди: в одной 9 людей, в другой – 11, в третьей – 14. Каждый в очереди сказал фразу: «Среди людей, стоящих в моей очереди передо мной, не менее двух лжецов». Сколько рыцарей стоит в очередях?
Ответ. 28.
Решение. Рассмотрим какую-нибудь очередь. Двое людей, стоящие в ней первыми, соврали, потому что перед ними нет двух человек. Следовательно, они лжецы. Тогда третий человек в очереди сказал правду, то есть он рыцарь. Аналогично все остальные люди в очереди являются рыцарями. Таким образом, в каждой очереди стоят 2 лжеца, а все остальные – рыцари. То есть ответ $9+11+14-6=28$.
Комментарий. *Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Использование без доказательства факта в каждой очереди «стоит 2 лжеца» – не более 4 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

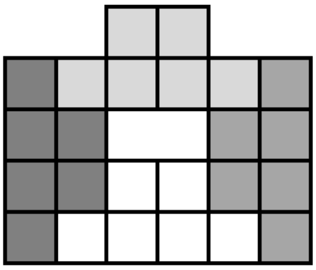
5. Паша выписал на доску натуральные числа от 1 до 500. Нечётные числа он записывал в левой части доски, а чётные – в правой. После этого он просуммировал цифры всех чисел, записанных слева, и просуммировал цифры всех чисел, записанных справа. Где сумма получилась больше и на сколько?
Ответ. Слева; 245.
Решение. Разобьём все числа, кроме 1 и 500, на 249 пар: 3 и 2, 5 и 4, 7 и 6, $\ldots$, 499 и 498. В каждой паре числа отличаются только в разряде единиц, причём левое число на 1 больше. Т. е. эти числа делают сумму слева на 249 больше. Ещё осталось число 1 – оно нечётное, поэтому добавит 1 слева, и число 500 – оно чётное, поэтому добавит 5 справа. В итоге левая сумма останется на 245 больше.
Комментарий. *В задаче при расчетах не учтено число 500 – 16 баллов. Только идея разбиения на пары, без существенного продвижения дальше – 6 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

Вариант 3

1. В классе 25 человек. Из них 16 человек любят математику, 7 любят биологию, а 4 не любят ни то, ни другое. Сколько учеников класса любят оба предмета?
Ответ. 2.
Решение. Любят хотя бы один из предметов $25-4=21$ человек. Если сложить тех, кто любит математику, и тех, кто любит биологию, то получится $16+7=23$. При этом те, кто любят оба предмета, посчитаются дважды. Тогда $23-21=2$ – «превышение» над общим количеством тех, кто любит хотя бы один предмет – и есть те, кто любят оба предмета.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

2. Разрежьте фигуру с вырезанными двумя клетками в центре, изображенную на рисунке, на четыре равные части (части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать).
Решение. См. рисунок.





Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Найдена фигура для разбиения, но само разбиение не показано – 10 баллов. Найдено только количество клеток в частях – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. От дома Винни-Пуха к дому Пятачка ведут 5 дорог. От дома Пятачка к дому Кролика ведут 3 дороги, а от дома Кролика к дому Винни-Пуха ведут 2 дороги. Сколькими способами Винни-Пух может зайти в гости к своим друзьям (в произвольном порядке) и вернуться домой, пройдя суммарно ровно по трём дорогам?

Ответ. 60.

Решение. К Пятачку Винни-Пух может пройти 5 способами, от Пятачка к Кролику – 3 способами, а от Кролика домой – 2 способами, поэтому количество способов зайти сначала к Пятачку, потом к Кролику, а потом вернуться домой, равно 30. Аналогично, количество способов зайти сначала к Кролику, потом к Пятачку и потом вернуться домой, тоже равно 30. Значит, итоговое количество способов равно 60.

Подсчет способов без учета варианта второго обхода – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

4. На острове живут рыцари и лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Однажды в кассы метро выстроились три очереди: в одной 9 людей, в другой – 11, в третьей – 15. Каждый в очереди сказал фразу: «Среди людей, стоящих в моей очереди передо мной, не менее двух лжецов». Сколько рыцарей стоит в очередях?

Ответ. 29.

Решение. Рассмотрим какую-нибудь очередь. Двое людей, стоящие в ней первыми, соврали, потому что перед ними нет двух человек. Следовательно, они лжецы. Тогда третий человек в очереди сказал правду, то есть он рыцарь. Аналогично все остальные люди в очереди являются рыцарями. Таким образом, в каждой очереди стоят 2 лжеца, а все остальные – рыцари. То есть ответ $9 + 11 + 15 - 6 = 29$.

Комментарий. *Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Использование без доказательства факта в каждой очереди «стоит 2 лжеца» – не более 4 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Паша выписал на доску натуральные числа от 1 до 700. Нечётные числа он записывал в левой части доски, а чётные – в правой. После этого он просуммировал цифры всех чисел, записанных слева, и просуммировал цифры всех чисел, записанных справа. Где сумма получилась больше и на сколько?

Ответ. Слева; 343.

Решение. Разобьём все числа, кроме 1 и 700, на 349 пар: 3 и 2, 5 и 4, 7 и 6, …, 699 и 698. В каждой паре числа отличаются только в разряде единиц, причём левое число на 1 больше. Т. е. эти числа делают сумму слева на 349 больше. Ещё осталось число 1 – оно нечётное, поэтому добавит 1 слева, и число 700 – оно чётное, поэтому добавит 7 справа. В итоге левая сумма останется на 343 больше.

Комментарий. *В задаче при расчетах не учтено число 700 – 16 баллов. Только идея разбиения на пары, без существенного продвижения дальше – 6 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 4 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

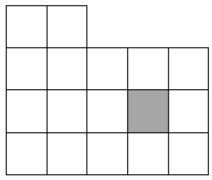
1. У Тани есть 10 палочек длиной $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ см. Может ли она выбрать из них 9, чтобы составить из этих 9 палочек квадрат? Ломать палочки и накладывать друг на друга нельзя. Если квадрат составить нельзя, объясните почему. Если можно, напишите, из каких палочек составлена каждая сторона.

Ответ. Можно.

Решение. Суммарная длина 10 палочек равна 55, и не делится на 4. Надо убрать палочку, длина которой имеет остаток 3 при делении на 4. Если уберём палочку длины 3, то стороны квадрата можно получить так: $6 + 7,\ 5 + 8,\ 9 + 4,\ 1 + 2 + 10.$

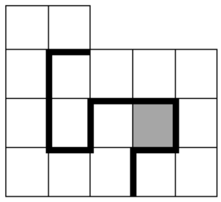
Комментарий. *Верный пример без неправильных объяснений – 20 баллов. «Доказывается», что это единственно возможный пример – 16 баллов. Указано, какую палочку убрать, но не показано, как составить стороны – 15 баллов.*

2. Фигура с вырезанной клеткой составлена из одинаковых квадратных клеток. Можно ли разделить её по границам клеток на две равные части? Части считаются равными, если при наложении они совпадают. При этом части можно поворачивать и переворачивать. Если фигуру можно разделить – покажите, как. Если нет – обоснуйте.



Ответ. Можно.

Решение. Например, так.



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Показана одна часть, но непонятно, как она вырезана, нет разбиения всей фигуры – 10 баллов. Приведено верное разбиение, но не замечено, что части равны, и обосновывается, что разбиение невозможно – 5 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Несколько мальчиков стояли в ряд. Между каждыми двумя мальчиками встал новый мальчик. Затем опять между каждыми двумя мальчиками встал новый мальчик, и так повторилось ещё в третий и четвёртый раз. Потом пришли ещё 3 мальчика, и в результате мальчиков в ряду стало в 13 раз больше, чем было в начале. Сколько мальчиков стояло в ряду в начале?

Ответ. 4.

Решение. Если сначала стояло a мальчиков, то между ними $a-1$ промежуток, и после первого добавления мальчиков стало $2a-1$. Между ними $2a-2$ промежутков, и после второго добавления мальчиков стало $4a-3$. Аналогично, после третьего добавления мальчиков стало $8a-7$, после четвёртого – мальчиков стало $16a-15$. Пришли ещё 3 мальчика, и их стало $16a-12$. По условию, $16a-12=13a$, откуда $a=4$. Проверка: $4, 7, 13, 25, 49, 52$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование уравнений – минус 2 балла. В уравнении не учтены 3 мальчика – минус 3 балла. Частичный перебор, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. При верном ходе решения за одну арифметическую ошибку при решении верного уравнения снимается 5 баллов. Неверное уравнение – 5 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

4. В равенстве КАРП $\cdot$ 7 = ЩУКА каждой букве соответствует цифра. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры. Найдите числовое значение слова ЩУКА.

Ответ. 9814.

Решение. Четырёхзначное число справа получается только в случае К $=1$ и А не больше 4 (так как в противном случае число КАРП больше 1500, а КАРП $\cdot 7$ больше $1500 \cdot 7 = 10500$). Значит, А может принимать значения $2, 3, 4$. Пусть А $=2$. Тогда П $\cdot 7$ оканчивается на 2. Подходит только число $42 = 6 \cdot 7$. Получаем равенство 12Р6 $\cdot 7$ = ЩУ12. При умножении $6 \cdot 7$ будет перенос 4. При умножении Р $\cdot 7$ после прибавления 4 надо получить 1, то есть до прибавления должно быть 7. Отсюда Р $=1$. Но цифра 1 уже использована. Пусть А $=3$. Тогда П $\cdot 7$ оканчивается на 3. Подходит только число $63 = 9 \cdot 7$. Получаем равенство 13Р9 $\cdot 7$ = ЩУ13. При умножении $9 \cdot 7$ будет перенос 6. При умножении Р $\cdot 7$ после прибавления 6 надо получить 1, то есть до прибавления должно быть 5. Отсюда Р $=5$. Получаем, что КАРП $=1359$. $1359 \cdot 7 = 9513$. Буквы Р и У имеют одинаковое значение, это противоречит условию. Пусть А $=4$. Тогда П $\cdot 7$ оканчивается на 4. Подходит только число $14 = 2 \cdot 7$. Получаем равенство 14Р2 $\cdot 7$ = ЩУ14. При умножении $2 \cdot 7$ будет перенос 1. При умножении Р $\cdot 7$ после прибавления 1 надо получить 1, то есть до прибавления должно быть 0. Отсюда Р $=0$. Получаем, что КАРП $=1402$. $1402 \cdot 7 = 9814$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пропущен существенный случай – минус 5 баллов. Недостаточное обоснование в отдельных пунктах – минус 2 балла за пункт. Частичный перебор, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. Перебор с ошибкой – 5 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 3 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

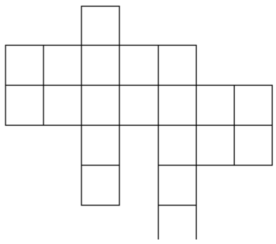
5. Бельчата Ух, Тюх и Плюх принесли несколько грибов. Каждый принёс не больше 2 грибов. Ух сказал: «Тюх принёс 2 гриба». Тюх сказал: «Плюх принёс 2 гриба». Плюх сказал: «Ух принёс 2 гриба». Ух сказал: «Все вместе мы принесли 3 гриба». Тюх сказал: «Все вместе мы принесли 4 гриба». Плюх сказал: «Все вместе мы принесли 5 грибов». Каждый солгал столько раз, сколько грибов он принёс. Сколько грибов принёс каждый из бельчат?

Ответ. Ух принёс 2 гриба, Тюх и Плюх по 1 грибу.
Решение. Число всех грибов равно числу ложных фраз, поэтому оно не больше 6. Грибов не может быть 6, так как тогда и первые три фразы должны быть ложными, и бельчата не принесли по 2 гриба, значит, 6 не получится. Если грибов 5, то фразы про 4 и 3 гриба ложные, и первые три фразы тоже должны быть ложными, тогда бельчата принесли не больше 3 грибов. Если грибов 4, то фразы про 3 и 5 грибов ложные, и из первых трёх фраз две должны быть ложными. Тут нет противоречия. Если грибов 3, то фразы про 4 и 5 грибов ложные, и из первых трёх фраз одна должна быть ложной. Тогда две оставшиеся фразы правдивые, и бельчата принесли не меньше 4 грибов. Если грибов меньше 3, то последние 3 фразы ложные, и это уже даёт 3 гриба. Итак, единственный возможный случай – если грибов было 4. Значит, у Тюха была правдивая вторая фраза, и он не мог принести 2 гриба. У Уха и Плюха последние фразы ложные, значит, они принесли по грибу за счёт этих фраз. Ух солгал про 2 гриба Тюха, значит, у Уха 2 лжи и, соответственно, 2 гриба. У Плюха и Тюха по 1 грибу.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что принесли ровно 4 гриба – 10 баллов, доказано, как распределены грибы – 10 баллов, баллы суммируются. Недостаточно подробно обосновано – 15 баллов. Рассмотрены не все варианты – 10 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 3 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

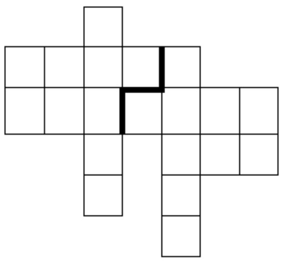
Вариант 2

1. У Кати есть 9 палочек длиной $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ см. Может ли она выбрать из них 8, чтобы составить из этих 8 палочек квадрат? Ломать палочки и накладывать друг на друга нельзя. Если квадрат составить нельзя, объясните почему. Если можно, напишите, из каких палочек составлена каждая сторона.
Ответ. Можно.
Решение. Суммарная длина 9 палочек равна 45, и не делится на 4. Надо убрать палочку, длина которой имеет остаток 1 при делении на 4. Если уберём палочку длины 1, то стороны квадрата можно получить так: $2+9, 3+8, 4+7, 5+6$.
Комментарий. *Верный пример без неправильных объяснений – 20 баллов. «Доказывается», что это единственно возможный пример – 16 баллов. Указано, какую палочку убрать, но не показано, как составить стороны – 15 баллов.*

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Можно ли разделить её по границам клеток на две равные части? Части считаются равными, если при наложении они совпадают. При этом части можно поворачивать и переворачивать. Если фигуру можно разделить – покажите, как. Если нет – обоснуйте.



Ответ. Можно.
Решение. Например, так.



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Показана одна часть, но непонятно, как она вырезана, нет разбиения всей фигуры – 10 баллов. Приведено верное разбиение, но не замечено, что части равны, и обосновывается, что разбиение невозможно – 5 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Несколько бельчат стояли в ряд. Между каждыми двумя бельчатами встал новый бельчонок. Затем опять между каждыми двумя бельчатами встал новый бельчонок, и так повторилось ещё в третий и четвёртый раз. В результате бельчат в ряду стало в 11 раз больше, чем было в начале. Сколько бельчат стояло в ряду в начале?

Ответ. 3.

Решение. Если сначала стояло a бельчат, то между ними $a-1$ промежуток, и после первого добавления бельчат стало $2a-1$. Между ними $2a-2$ промежутков, и после второго добавления бельчат стало $4a-3$. Аналогично, после третьего добавления бельчат стало $8a-7$, после четвёртого – бельчат стало $16a-15$. По условию, $16a-15=11a$, откуда $a=3$. Проверка: $3, 5, 9, 17, 33$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование уравнений – минус 2 балла. Частичный перебор, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. При верном ходе решения за одну арифметическую ошибку при решении верного уравнения снимается 5 баллов. Неверное уравнение – 5 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

4. В равенстве САД + САД = ЛЕСА каждой букве соответствует цифра. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры. Найдите все возможные числовые значения слова ЛЕСА, если известно, что в нём нет цифры 8.

Ответ. 1052.

Решение. Четырёхзначное число получается, если С не меньше 5. Букве Д соответствует не 0. Пусть $Д=1$. Тогда $А=2, С=4$ – отбрасываем. Пусть $Д=2$. Тогда $А=4, С=8$ – отбрасываем. Пусть $Д=3$. Тогда $А=6, С=2$ – отбрасываем. Пусть $Д=4$. Тогда $А=8$ – отбрасываем. Пусть $Д=5$. Тогда $А=0, С=1$ – отбрасываем. Пусть $Д=6$. Тогда $А=2, С=5, 5+5=10$. $526+526=1052$, верно. Пусть $Д=7$. Тогда $А=4, С=9$, $947+947=1894$ – отбрасываем. Пусть $Д=8$. Тогда $А=6, С=3$ – отбрасываем. Пусть Д = 9. Тогда $А=8$ – отбрасываем. Итак, остался один вариант: $526+526=1052$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не отброшены числа с цифрой 8 – минус 2 балла. Пропущен существенный случай – минус 5 баллов. Недостаточное обоснование в отдельном пункте – минус 2 балла. Частичный перебор, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 3 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

5. Антон, Борис и Захар толкали автомобиль. Антон сказал: «Все вместе мы толкали его всего 4 руками». Борис сказал: «Все вместе мы толкали его 5 руками». Захар сказал: «Все вместе мы толкали его 6 руками». Антон сказал: «Борис толкал двумя руками». Борис сказал: «Захар толкал двумя руками». Захар сказал: «Антон толкал двумя руками». Каждый солгал столько раз, сколькими руками он толкал. Сколькими руками толкал каждый из них?

Ответ. Захар двумя руками, Борис и Антон одной рукой.

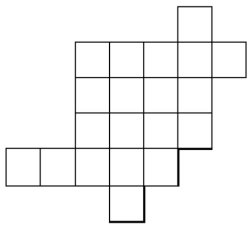
Решение. Число всех рук равно числу ложных фраз, и оно не больше 6. Рук не может быть 6, так как тогда все фразы должны быть ложными, и никто не толкал двумя руками, значит, 6 не получится. Если рук 5, то фразы про 4 и 6 рук ложные, и последние три фразы тоже должны быть ложными, никто не толкал двумя руками. Тогда вместе толкали не больше, чем 3 руками. Если рук 4, то фразы про 5 и 6 рук ложные, и из последних трёх фраз две должны быть ложными. Тут нет противоречия. Если рук 3, то фразы про $4, 5, 6$ рук ложные. Тогда последние 3 фразы правдивые, и получится 6 рук, а не 3. Если рук меньше 3, то первые 3 фразы ложные, и это уже даёт 3 руки. Итак, единственный возможный случай – если толкали в 4 руки. У Антона была правдивая первая фраза, значит, он не толкал двумя руками. У Бориса и Захара первые фразы ложные. Во второй своей

фразе Захар солгал про две руки Антона, значит, у Захара две лжи и, соответственно, он толкал двумя руками. Борис сказал правду, что Захар толкал двумя руками, то есть у Бориса одна ложь. Значит, Борис толкал одной рукой. Антон солгал, что Борис толкал двумя руками и сказал правду, что все вместе толкали 4 руками. Значит, у Антона одна ложь, и он толкал одной рукой.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что толкали ровно в 4 руки – 10 баллов, доказано, как распределены руки – 10 баллов, баллы суммируются. Недостаточно подробно обосновано – 15 баллов. Рассмотрены не все варианты – 10 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 3 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

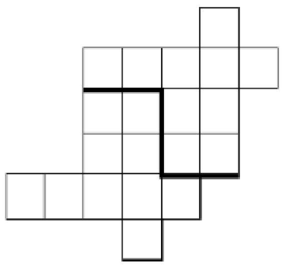
Вариант 3

1. У Коли есть 11 палочек длиной $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ см. Может ли он выбрать из них 10, чтобы составить из этих 10 палочек квадрат? Ломать палочки и накладывать друг на друга нельзя. Если квадрат составить нельзя, объясните почему. Если можно, напишите, из каких палочек составлена каждая сторона.
Ответ. Можно.
Решение. Суммарная длина 11 палочек равна 66, и не делится на 4. Надо убрать палочку, длина которой имеет остаток 2 при делении на 4. Если уберём палочку длины 2, то стороны квадрата можно получить, например, так: $11 + 5, 10 + 6, 9 + 7, \ 8 + 1 + 3 + 4$.
Комментарий. *Верный пример без неправильных объяснений – 20 баллов. «Доказывается», что это единственно возможный пример – 16 баллов. Указано, какую палочку убрать, но не показано, как составить стороны – 15 баллов.*

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Можно ли разделить её по границам клеток на две равные части? Части считаются равными, если при наложении они совпадают. При этом части можно поворачивать и переворачивать. Если фигуру можно разделить – покажите, как. Если нет – обоснуйте.



Ответ. Можно.
Решение. Например, так.



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Показана одна часть, но непонятно, как она вырезана, нет разбиения всей фигуры – 10 баллов. Приведено верное разбиение, но не замечено, что части равны, и обосновывается, что разбиение невозможно – 5 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Вдоль дороги росли клёны на большом расстоянии друг от друга. Между каждыми двумя клёнами посадили берёзу. Затем между каждыми двумя деревьями посадили тополь. Затем между каждыми двумя деревьями посадили ель. Затем между каждыми двумя деревьями посадили сосну. В результате всех деревьев вдоль дороги стало в 13 раз больше, чем клёнов. Сколько было посажено берёз?
Ответ. 4.

Решение. Если сначала росло a клёнов, то между ними $a-1$ промежуток, и после посадки берёз деревьев стало $2a-1$. Между ними $2a-2$ промежутков, и после посадки тополей деревьев стало $4a-3$. Аналогично, после посадки елей деревьев стало $8a-7$, после посадки сосен деревьев стало $16a-15$. По условию, $16a-15=13a$, откуда $a=5$. Берёз было посажено $a-1=4$. Проверка: $5, 9, 17, 33, 65$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование уравнений – минус 2 балла. Частичный перебор, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. При верном ходе решения за одну арифметическую ошибку при решении верного уравнения снимается 5 баллов. Неверное уравнение – 5 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

4. Семизначное число записано шифром АЛГЕБРА. Каждой букве соответствует цифра. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры. Выполняется соотношение: АЛГЕ − БРА = АЛГ – ЕБ. Какая цифра соответствует букве Б?
Ответ. Б $=9$.
Решение. АЛГЕ + ЕБ = АЛГ + БРА. Четырёхзначное число плюс двузначное равно сумме двух трёхзначных, значит, А= 1. Получаем число $1*****1$. АЛГ + БРА меньше 1200, так как БРА меньше 1000, АЛГ меньше 200. Значит, в левой части Л меньше 2 и не равно 1, то есть Л $=0$. Получаем число $10****1$. Когда складываем в правой части А и Б, получаем перенос единицы. Но А $=1$. Значит, Б $=9$. Б= 8 невозможно, так как перед этим складываются Р + 0, а до этого 1 +А. Если 1 + А =10, то А = 9, и Р + 0 не больше 8, переноса не будет. Число 1024971, это единственное решение.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование в отдельном пункте – минус 2 балла. Частичный перебор, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 3 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

5. Бельчата Лап, Пух и Рыжик принесли несколько шишек. Каждый принёс не больше 2 шишек. Лап сказал: «Пух принёс 2 шишки». Пух сказал: «Рыжик принёс 2 шишки». Рыжик сказал: «Лап принёс 2 шишки». Лап сказал: «Все вместе мы принесли 2 шишки». Пух сказал: «Все вместе мы принесли 3 шишки». Рыжик сказал: «Все вместе мы принесли 4 шишки». Каждый солгал столько раз, сколько шишек он принёс. Сколько шишек принёс каждый из бельчат?
Ответ. Пух принёс 2 шишки, Лап и Рыжик по 1 шишке.
Решение. Число всех шишек равно числу ложных фраз, поэтому оно не больше 6. Шишек не может быть 6, так как тогда и первые три фразы должны быть ложными, и бельчата не принесли по 2 шишки, значит, 6 не получится. Если шишек 5, то фразы про 2, 3, 4 шишки ложные, и из первых трёх фраз две тоже должны быть ложными, тогда бельчата принесли не больше 4 шишек. Если шишек 4, то фразы про 2 и 3 шишки ложные, и из первых трёх фраз две должны быть ложными. Тут нет противоречия. Если шишек 3, то фразы про 4 и 2 шишки ложные, и из первых трёх фраз одна должна быть ложной. Тогда две оставшиеся фразы правдивые, и бельчата принесли не меньше 4 шишек. Если шишек 2, то последние 2 фразы ложные, и это уже даёт 2 шишки. Значит, три первые фразы правдивые, но тогда шишек 6, а не 2. Если шишек меньше 2, то последние 3 фразы ложные, и это уже даёт 3 шишки. Итак, единственный возможный случай – если шишек было 4. Значит, у Рыжика была правдивая вторая фраза, и он не мог принести 2 шишки. У Лапа и Пуха последние фразы ложные, значит, они принесли по шишке за счёт этих фраз. Пух солгал про 2 шишки Рыжика, значит, у Пуха 2 лжи и, соответственно, 2 шишки. Лап сказал правду, что у Пуха 2 шишки. У Рыжика и Лапа по 1 шишке.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что принесли ровно 4 шишки – 10 баллов, доказано, как распределены шишки – 10 баллов, баллы суммируются. Недостаточно подробно обосновано – 15 баллов. Рассмотрены не все варианты – 10 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 3 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

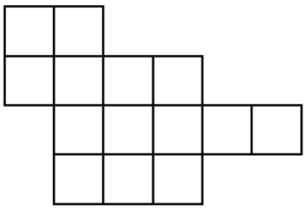
6 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

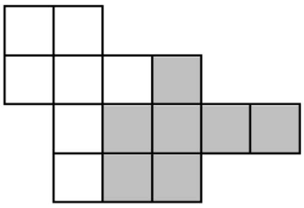
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно поворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Любые рассуждения, что искомое разрезание невозможно – 0 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.*

2. Маша в понедельник начала вязать шарфы. Она вяжет с постоянной скоростью одно и то же количество часов в день. В конце первой субботы она вязала пятый шарф, а в конце первого воскресенья – шестой шарф. К концу девятнадцатого дня она закончила вязать очередной шарф. Сколько шарфов она могла связать к этому моменту? *Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.*

Ответ. 14 или 15.

Решение. Обозначим за v количество шарфов, которое Маша вяжет за день (возможно, v нецелое). По условию: $4 < 6v < 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < v < \frac{5}{6}$ и $5 < 7v < 6 \Leftrightarrow \frac{5}{7} < v < \frac{6}{7}$. Поскольку $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ и $\frac{5}{6} < \frac{5}{7}$, то $\frac{5}{7} < v < \frac{5}{6}$. Домножив это неравенство на 19, получим $13\frac{4}{7} < 19v < 15\frac{5}{6}$. По условию $19v$ – натуральное число. Следовательно, $19v$ может быть равно 14 или 15.

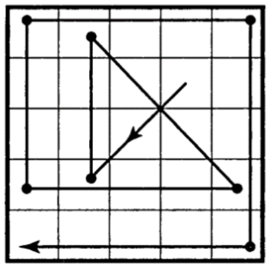
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Безосновательно сделан вывод, что производительность* v *лежит между* $\frac{5}{7}$ *и* $\frac{5}{6}$ *при, в целом, верном решении – 15 баллов. Получена одна из оценок «количество шарфов больше 13», «количество шарфов меньше 16» - 10 баллов. Верно и обоснованно получен один из двух ответов – 10 баллов. За каждую допущенную арифметическую ошибку – снимается 2 балла. Решение, основанное на том, что Маша вяжет определённое число шарфов в день (целое или дробное) – 0 баллов. Решение построено на рассмотрении одного или нескольких частных случаев – 0 баллов.*
Замечание. *Существенным с точки зрения решения является использование неравенств, формулировок «больше» и «меньше» или эквивалентных. Например, «каждый день Маша вяжет больше, чем* $\frac{4}{6}$ *шарфа в день». Если же решение включает в себя перебор уравнений, например «каждый день Маша вяжет* $\frac{4}{6}$ *шарфа или* $\frac{5}{7}$ *шарфа, или* $\frac{6}{7}$ *шарфа», то такое решение оценивается в 0 баллов.*

3. В конкурсе чтецов участвовали Аня, Боря, Витя, Галя и Дима. Два хулигана Саша и Яша делали ставки на их итоговые места.
Саша объявил: «Аня – первая, Боря – второй, Витя – третий, Галя – четвёртая, Дима – пятый».
На что Яша возразил: «Витя – первый, Дима – второй, Аня – третья, Боря – четвёртый, Галя – пятая».
Оказалось, что Саша верно угадал места ровно троих ребят, а Яша – ровно двоих. Кто какое место занял в конкурсе чтецов?
Ответ. Первое место занял Витя, второе – Боря, третье – Аня, четвёртое – Галя, пятое – Дима.
Решение. Заметим, что в сумме хулиганы сделали 10 догадок про места, занятые чтецами. Из этих догадок 5 оказались верными. Так как про каждого чтеца их догадки были разными, то каждому чтецу соответствует не более одной верной догадки. А так как всего чтецов 5, то про каждого из них ровно одна догадка оказалась верной.
Предположим, что Саша угадал место Бори (второе). Это означает, что Яша не угадал, кто занял второе место, то есть его догадка про Диму была неверна; отсюда следует, что Саша угадал место Димы тоже. Аналогично можно рассуждать про любых двух чтецов, которым Яша и Саша прочили одно и то же место: если Сашина догадка о том, кто занял это место, была верна, то и место другого чтеца он тоже угадал.
Изобразим это в виде диаграммы: соединим стрелкой двух чтецов, если Саша назначил первому из них то же место, что Яша назначил второму. Например, Саша утверждал, что Аня займёт первое место, а Яша утверждал, что это место займёт Витя, поэтому мы соединили их стрелкой 1. Для них работает рассуждение, аналогичное приведённому выше: если Саша угадал место Ани, то он угадал и место Вити, так как Яша его угадать не мог.
Теперь решить задачу совсем легко. Стрелки образуют циклы, поэтому если Саша угадал место хотя бы одного человека в цикле, то он угадал всех в цикле; а значит, каждый цикл целиком угадан либо Сашей, либо Яшей. Мы знаем, что Саша угадал места троих чтецов – это могут быть только Боря, Дима и Галя. Ну а Яша угадал места оставшихся – Ани и Вити.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При неполном переборе найден правильный случай – 5 баллов. В решении описывается единственный правильный случай, при этом не доказывается, что другие случаи невозможны – 5 баллов. Только верный ответ – 0 баллов.*

4. На доске написано 5 целых чисел. Рассмотрим все попарные суммы написанных чисел. Сколько из них могло оказаться чётными? *Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.*
Ответ. 4, 6 или 10.

Решение. Заметим, что чётных чисел могло быть от 0 до 5. Чётные суммы получаются при сложении двух чисел одной чётности, а нечётные суммы – при сложении двух чисел разной чётности. Всего на доске 10 попарных сумм. В зависимости от комбинаций чисел разной чётности нечётных сумм может быть $0 \cdot 5 = 0$, $1 \cdot 4 = 4$ или $2 \cdot 3 = 6$. Тогда чётных сумм: $10 - 0 = 10$, $10 - 4 = 6$ или $10 - 6 = 4$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном обоснованном решении все суммы учтены дважды – 18 баллов. Переборное решение, в котором пропущены некоторые случаи или получены дополнительные неверные случаи – не более 15 баллов. На некоторых частных случаях показано, что возможны суммы 4, 6 или 10, но не доказано, что других нет – 5 баллов.*

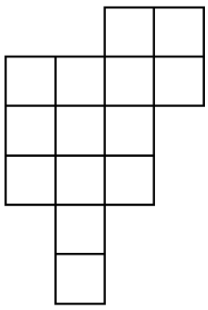
5. Шахматный король первый ход делает бесплатно. Каждый следующий ход бесплатный, если он в том же направлении, что и предыдущий, а при смене направления король платит рубль. Докажите, что можно обойти всю доску 40×40 за 77 рублей. (На одной клетке можно побывать и несколько раз.)



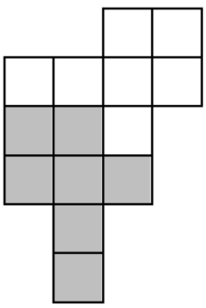
Решение. Обойдём сначала доску 5×5 за 7 рублей (см. рисунок, точки поворота показаны жирными, обход заканчивается в угловой клетке). Теперь легко построить обход доски 6×6 за 9 рублей: выделим в правом нижнем углу квадрат 5×5, обойдём его как на рисунке и продолжим обход по спирали, добавив 2 поворота. Аналогично, добавляя по 2 поворота, из обхода доски 6×6 получим обход доски 7×7, из него – обход 8×8 и т. д., пока не получим обход доски 40×40. Придётся сделать $40 - 5 = 35$ добавок, каждая обойдётся в 2 рубля, итого $7 + 2 \cdot 35 = 77$ рублей.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В решении присутствует пример обхода (верного или не верного) без объяснений, почему он работает – 0 баллов. Любые рассуждения, что обойти доску за 77 рублей невозможно – 0 баллов.*
Замечание. *Обход «змейкой» или «улиткой» требует от короля 78 рублей, так что такие способы обхода не является верными.*

Вариант 2

1. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно поворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Любые рассуждения, что искомое разрезание невозможно – 0 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.*

2. Маша в понедельник начала вязать шарфы. Она вяжет с постоянной скоростью одно и то же количество часов в день. В конце первой субботы она вязала пятый шарф, а в конце первого воскресенья – шестой шарф. К концу семнадцатого дня она закончила вязать оче-

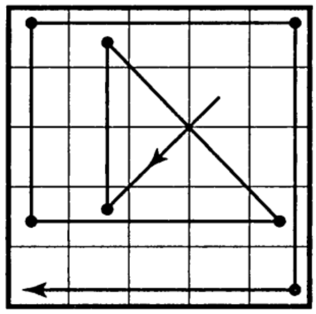
редной шарф. Сколько шарфов она могла связать к этому моменту? *Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.*
Ответ. 13 или 14.
Решение. Обозначим за v количество шарфов, которое Маша вяжет за день (возможно, v нецелое). По условию: $4 < 6v < 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < v < \frac{5}{6}$ и $5 < 7v < 6 \Leftrightarrow \frac{5}{7} < v < \frac{6}{7}$. Поскольку $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ и $\frac{5}{6} < \frac{5}{7}$, то $\frac{5}{7} < v < \frac{5}{6}$. Домножив это неравенство на 17, получим $12\frac{1}{7} < 17v < 14\frac{1}{6}$. По условию $17v$ – натуральное число. Следовательно, $17v$ может быть равно 12 или 14.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Безосновательно сделан вывод, что производительность v лежит между $\frac{5}{7}$ и $\frac{5}{6}$ при, в целом, верном решении – 15 баллов. Получена одна из оценок «количество шарфов больше 12», «количество шарфов меньше 15» - 10 баллов. Верно и обоснованно получен один из двух ответов – 10 баллов. За каждую допущенную арифметическую ошибку – снимается 2 балла. Решение, основанное на том, что Маша вяжет определённое число шарфов в день (целое или дробное) – 0 баллов. Решение построено на рассмотрении одного или нескольких частных случаев – 0 баллов.*
Замечание. *Существенным с точки зрения решения является использование неравенств, формулировок «больше» и «меньше» или эквивалентных. Например, «каждый день Маша вяжет больше, чем $\frac{4}{6}$ шарфа в день». Если же решение включает в себя перебор уравнений, например «каждый день Маша вяжет $\frac{4}{6}$ шарфа или $\frac{5}{7}$ шарфа, или $\frac{6}{7}$ шарфа», то такое решение оценивается в 0 баллов.*

3. В конкурсе чтецов участвовали Аня, Боря, Витя, Галя и Дима. Два хулигана Саша и Яша делали ставки на их итоговые места.
Саша объявил: «Аня – первая, Боря – второй, Витя – третий, Галя – четвёртая, Дима – пятый».
На что Яша возразил: «Витя – первый, Галя – вторая, Дима – третий, Боря – четвёртый, Аня – пятая».
Оказалось, что Саша верно угадал места ровно троих ребят, а Яша – ровно двоих. Кто какое место занял в конкурсе чтецов?
Ответ. Первое место заняла Аня, второе – Галя, третье – Витя, четвёртое – Боря, пятое – Дима.
Решение. Заметим, что в сумме хулиганы сделали 10 догадок про места, занятые чтецами. Из этих догадок 5 оказались верными. Так как про каждого чтеца их догадки были разными, то каждому чтецу соответствует не более одной верной догадки. А так как всего чтецов 5, то про каждого из них ровно одна догадка оказалась верной.
Предположим, что Саша угадал место Бори (второе). Это означает, что Яша не угадал, кто занял второе место, то есть его догадка про Галю была неверна; отсюда следует, что Саша угадал место Гали тоже. Аналогично можно рассуждать про любых двух чтецов, которым Яша и Саша прочили одно и то же место: если Сашина догадка о том, кто занял это место, была верна, то и место другого чтеца он тоже угадал.
Изобразим это в виде диаграммы: соединим стрелкой двух чтецов, если Саша назначил первому из них то же место, что Яша назначил второму. Например, Саша утверждал, что Аня займёт первое место, а Яша утверждал, что это место займёт Витя, поэтому мы соединили их стрелкой 1. Для них работает рассуждение, аналогичное приведённому выше: если Саша угадал место Ани, то он угадал и место Вити, так как Яша его угадать не мог.
Теперь решить задачу совсем легко. Стрелки образуют циклы, поэтому если Саша угадал место хотя бы одного человека в цикле, то он угадал всех в цикле; а значит, каждый цикл целиком угадан либо Сашей, либо Яшей. Мы знаем, что Саша угадал места троих чтецов – это могут быть только Аня, Витя и Дима. Ну а Яша угадал места оставшихся – Бори и Гали.

Комментарий. Верное обоснованное решение – 20 баллов. При неполном переборе найден правильный случай – 5 баллов. В решении описывается единственный правильный случай, при этом не доказывается, что другие случаи невозможны – 5 баллов. Только верный ответ – 0 баллов.

4. На доске написано 5 целых чисел. Рассмотрим все попарные суммы написанных чисел. Сколько из них могло оказаться нечётными? *Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.*
Ответ. 0, 4 или 6.
Решение. Заметим, что нечётных чисел могло быть от 0 до 5. Нечётные суммы получаются при сложении двух чисел одной разной чётности, а чётные суммы – при сложении двух чисел разной одной чётности. Всего на доске 10 попарных сумм. В зависимости от комбинаций чисел разной чётности нечётных сумм может быть $0 \cdot 5 = 0$, $1 \cdot 4 = 4$ или $2 \cdot 3 = 6$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном обоснованном решении все суммы учтены дважды – 18 баллов. Переборное решение, в котором пропущены некоторые случаи или получены дополнительные неверные случаи – не более 15 баллов. На некоторых частных случаях показано, что возможны суммы 0, 4 или 6, но не доказано, что других нет – 5 баллов.*

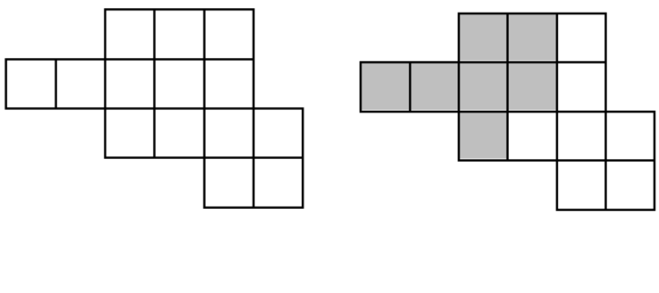
5. Шахматный король первый ход делает бесплатно. Каждый следующий ход бесплатный, если он в том же направлении, что и предыдущий, а при смене направления король платит рубль. Докажите, что можно обойти всю доску 42×42 за 81 рубль. (На одной клетке можно побывать и несколько раз.)
Решение. Обойдём сначала доску 5×5 за 7 рублей (см. рисунок, точки поворота показаны жирными, обход заканчивается в угловой клетке). Теперь легко построить обход доски 6×6 за 9 рублей: выделим в правом нижнем углу квадрат 5×5, обойдём его как на рисунке и продолжим обход по спирали, добавив 2 поворота. Аналогично, добавляя по 2 поворота, из обхода доски 6×6 получим обход доски 7×7, из него – обход 8×8 и т. д., пока не получим обход доски 42×42. Придётся сделать $42 - 5 = 37$ добавок, каждая обойдётся в 2 рубля, итого $7 + 2 \cdot 37 = 81$ рубль.



Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В решении присутствует пример обхода (верного или не верного) без объяснений, почему он работает – 0 баллов. Любые рассуждения, что обойти доску за 81 рубль невозможно – 0 баллов.*
Замечание. *Обход «змейкой» или «улиткой» требует от короля 82 рубля, так что такие способы обхода не является верными.*

Вариант 3

1. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно поворачивать.
Ответ. Например, так.



Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Любые рассуждения, что искомое разрезание невозможно – 0 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.*

2. Маша в понедельник начала вязать шарфы. Она вяжет с постоянной скоростью одно и то же количество часов в день. В конце первой субботы она вязала пятый шарф, а в конце первого воскресенья — шестой шарф. К концу девятнадцатого дня она закончила вязать очередной шарф. Сколько шарфов она могла связать к этому моменту? *Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.*
Ответ. 14 или 15.
Решение. Обозначим за v количество шарфов, которое Маша вяжет за день (возможно, v нецелое). По условию: $4 < 6v < 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < v < \frac{5}{6}$ и $5 < 7v < 6 \Leftrightarrow \frac{5}{7} < v < \frac{6}{7}$. Поскольку $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ и $\frac{5}{6} < \frac{5}{7}$, то $\frac{5}{7} < v < \frac{5}{6}$. Домножив это неравенство на 19, получим $13\frac{4}{7} < 19v < 15\frac{5}{6}$. По условию $19v$ – натуральное число. Следовательно, $19v$ может быть равно 14 или 15.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Безосновательно сделан вывод, что производительность v лежит между $\frac{5}{7}$ и $\frac{5}{6}$ при, в целом, верном решении – 15 баллов. Получена одна из оценок «количество шарфов больше 13», «количество шарфов меньше 16» - 10 баллов. Верно и обоснованно получен один из двух ответов – 10 баллов. За каждую допущенную арифметическую ошибку – снимается 2 балла. Решение, основанное на том, что Маша вяжет определённое число шарфов в день (целое или дробное) – 0 баллов. Решение построено на рассмотрении одного или нескольких частных случаев – 0 баллов.*
Замечание. *Существенным с точки зрения решения является использование неравенств, формулировок «больше» и «меньше» или эквивалентных. Например, «каждый день Маша вяжет больше, чем $\frac{4}{6}$ шарфа в день». Если же решение включает в себя перебор уравнений, например «каждый день Маша вяжет $\frac{4}{6}$ шарфа или $\frac{5}{7}$ шарфа, или $\frac{6}{7}$ шарфа», то такое решение оценивается в* 0 *баллов.*

3. В конкурсе чтецов участвовали Аня, Боря, Витя, Галя и Дима. Два хулигана Саша и Яша делали ставки на их итоговые места.
Саша объявил: «Аня – первая, Боря – второй, Витя – третий, Галя – четвёртая, Дима – пятый».
На что Яша возразил: «Галя – первая, Аня – вторая, Дима – третий, Боря – четвёртый, Витя – пятый».
Оказалось, что Саша верно угадал места ровно троих ребят, а Яша – ровно двоих. Кто какое место занял в конкурсе чтецов?
Ответ. Первое место заняла Аня, второе – Боря, третье – Дима, четвёртое – Галя, пятое – Витя.
Решение. Заметим, что в сумме хулиганы сделали 10 догадок про места, занятые чтецами. Из этих догадок 5 оказались верными. Так как про каждого чтеца их догадки были разными, то каждому чтецу соответствует не более одной верной догадки. А так как всего чтецов 5, то про каждого из них ровно одна догадка оказалась верной.
Предположим, что Саша угадал место Бори (второе). Это означает, что Яша не угадал, кто занял второе место, то есть его догадка про Аню была неверна; отсюда следует, что Саша угадал место Ани тоже. Аналогично можно рассуждать про любых двух чтецов, которым Яша и Саша прочили одно и то же место: если Сашина догадка о том, кто занял это место, была верна, то и место другого чтеца он тоже угадал.
Изобразим это в виде диаграммы: соединим стрелкой двух чтецов, если Саша назначил первому из них то же место, что Яша назначил второму. Например, Саша утверждал, что Аня займёт первое место, а Яша утверждал, что это место займёт Галя, поэтому мы соединили их стрелкой 1. Для них работает рассуждение, аналогичное приведённому выше: если Саша угадал место Ани, то он угадал и место Гали, так как Яша его угадать не мог. Те-

перь решить задачу совсем легко. Стрелки образуют циклы, поэтому если Саша угадал место хотя бы одного человека в цикле, то он угадал всех в цикле; а значит, каждый цикл целиком угадан либо Сашей, либо Яшей. Мы знаем, что Саша угадал места троих чтецов – это могут быть только Аня, Боря и Галя. Ну а Яша угадал места оставшихся – Вити и Димы.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При неполном переборе найден правильный случай – 5 баллов. В решении описывается единственный правильный случай, при этом не доказывается, что другие случаи невозможны – 5 баллов. Только верный ответ – 0 баллов.*

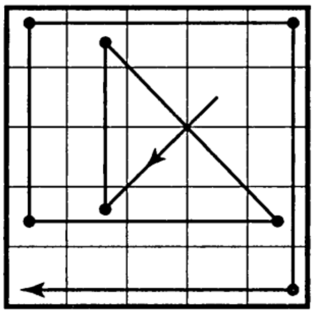
4. На доске написано 5 целых чисел. Рассмотрим все попарные произведения написанных чисел. Сколько из них могло оказаться нечётными? *Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.*

Ответ. 0, 1, 3, 6 или 10.

Решение. Заметим, что чётных чисел могло быть от 0 до 5. Нечётные произведения получаются при умножении двух нечётных чисел, а чётные произведения – при умножении двух чисел среди которых одно чётное. Всего на доске 10 попарных произведений. В зависимости от комбинаций двух нечётных чисел нечётных произведений может быть 0, 1, 3, 6 или 10.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном обоснованном решении все суммы учтены дважды – 18 баллов. Переборное решение, в котором пропущены некоторые случаи или получены дополнительные неверные случаи – не более 15 баллов. На некоторых частных случаях показано, что возможны суммы 0, 1, 3, 6 или 10, но не доказано, что других нет – 5 баллов.*

5. Шахматный король первый ход делает бесплатно. Каждый следующий ход бесплатный, если он в том же направлении, что и предыдущий, а при смене направления король платит рубль. Докажите, что можно обойти всю доску 44×44 за 85 рублей. (На одной клетке можно побывать и несколько раз.)



Решение. Обойдём сначала доску 5×5 за 7 рублей (см. рисунок, точки поворота показаны жирными, обход заканчивается в угловой клетке). Теперь легко построить обход доски 6×6 за 9 рублей: выделим в правом нижнем углу квадрат 5×5, обойдём его как на рисунке и продолжим обход по спирали, добавив 2 поворота. Аналогично, добавляя по 2 поворота, из обхода доски 6×6 получим обход доски 7×7, из него – обход 8×8 и т. д., пока не получим обход доски 44×44. Придётся сделать $44 - 5 = 39$ добавок, каждая обойдётся в 2 рубля, итого $7 + 2 \cdot 39 = 85$ рублей.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. В решении присутствует пример обхода (верного или не верного) без объяснений, почему он работает – 0 баллов. Любые рассуждения, что обойти доску за 85 рублей невозможно – 0 баллов.*

Замечание. *Обход «змейкой» или «улиткой» требует от короля 86 рублей, так что такие способы обхода не является верными.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

7 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. В мешке много карточек, на каждой карточке написана одна буква. Света раскладывает карточки в две стопки так, чтобы в каждой стопке чередовались гласные и согласные буквы. Делает она это так: вынимает карточку из мешка, если её нельзя положить ни на одну стопку сверху, возвращает карточку в мешок и вынимает другую до тех пор, пока не попадётся карточка, которую можно положить. Если вынутую карточку можно положить на любую из стопок, Света кладёт её на какую-нибудь стопку. Если вынутую карточку можно положить только на одну стопку, Света кладёт её туда. Восьмой она положила карточку с буквой «О», девятой – карточку с буквой «Е», 29-й – карточку с буквой «Ф». Какая буква была на 30-й карточке, гласная или согласная?

Ответ. Гласная.

Решение. Заметим, что буква «Е» не может идти после буквы «О» в одной стопке, так как обе буквы гласные. Значит, десятая буква должна быть согласной, после чего в одной стопке сверху лежит гласная буква, в другой согласная. Одиннадцатая буква может быть и гласной, и согласной. После этого в обеих стопках сверху лежат или обе гласные, или обе согласные буквы (как после девятой карточки). После двенадцатой карточки стопки будут заканчиваться на гласную и согласную (как после десятой карточки). Эти ситуации будет повторяться: после каждой карточки с чётным номером стопки заканчиваются на гласную и согласную, а после каждой карточки с нечётным номером стопки заканчиваются на две гласных или две согласных. По условию, 29-й выложена согласная буква. Значит, обе стопки заканчиваются на согласные буквы, и на 30-й карточке должна быть гласная буква.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение верно начато, но продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 2 балла.*

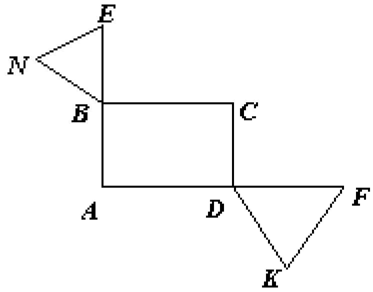
2. 16 бельчат собирали шишки. Рыжик собрал 25 шишек, Черныш собрал $\frac{2}{7}$ всех шишек, Серый собрал $\frac{2}{9}$ всех шишек. Каждый из остальных собрал не больше 3 шишек. Сколько всего шишек могли собрать 16 бельчат вместе? Найдите все возможные ответы, и докажите, что других нет.
Ответ. 63 или 126.
Решение. Число шишек a должно делиться на 7 и на 9, то есть a делится на 63; пусть $a = 63k$. Тогда $25 + \frac{2\cdot 63k}{7} + \frac{2\cdot 63k}{9} + x = 63k$, где x – число шишек, найденных остальными тринадцатью бельчатами. Упрощая уравнение, получаем: $25 + x = 31k$. По условию $0 \le x \le 39$. Левая часть делится на 31 при $x = 6$ и при $x = 37$. Если $x = 6$, то $k = 1, a = 63$. При $x = 37$ $k = 2, a = 126$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном ходе решения за одну арифметическую ошибку при решении верного уравнения снимается 2 балла. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Не отброшен лишний ответ – 15 баллов. Найдено одно решение –10 баллов. Верная идея решения, но допущена серьезная ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. За верные ответы без доказательства по 1 баллу за каждый.*

3. Сколько существует натуральных чисел, произведение цифр которых равно 72, причём ни одна цифра не равна ни 1, ни 8, ни 9?
Ответ. 43.
Решение. Разложим 72 на множители: $72 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$. Однозначными делителями являются $2, 3, 4, 6, 8, 9$, значит, возможные цифры – $2, 3, 4, 6$. Если число содержит цифру 6, то возможные цифры – $2, 2, 3, 6$ или $4, 3, 6$, или $2, 6, 6$. За счёт перестановок получаем в первом случае 12 чисел (число перестановок 4 цифр равно $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, но две цифры одинаковые, поэтому в 2 раза меньше). Во втором случае число перестановок равно 6, в третьем случае – 3. Если число не содержит ни цифры 6, но содержит цифру 4, то возможные цифры – $2, 4, 3, 3$ (12 перестановок). Если число не содержит цифры 4, 6, то его цифры – $2, 2, 2, 3, 3$. За счёт перестановок получаем 10 чисел. Всего чисел $12 + 6 + 3 + 12 + 10 = 43$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна небольшая ошибка – 18 баллов, больше одной (но большая часть подсчётов верна) – 10-15 баллов, множественные ошибки при верной идее решения – 5 баллов. Решение начато, есть продвижение –2-3 балла. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

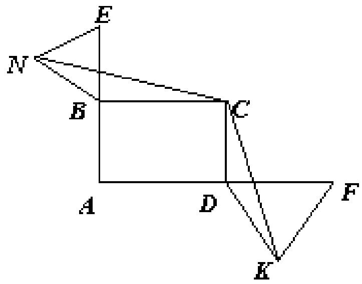
4. Четверо мальчиков встали в ряд на равном расстоянии друг от друга. Сеня стоял дальше от Миши, чем Миша от Пети. Семёнов стоял рядом с Сеней слева от него. Вася стоял ближе к Мише, чем Петя. Михайлов стоял дальше от Васильева, чем Семёнов. Расстояние между Васильевым и Михайловым меньше, чем между Петровым и Васильевым. В каком порядке стояли мальчики? Напишите в ответ мальчиков по порядку слева направо, указывая у каждого имя и фамилию. Докажите, что других расположений не может быть.
Ответ. Миша Петров, Вася Михайлов, Петя Семёнов, Сеня Васильев.
Решение. Семёнов и Сеня могут занимать места 1, 2 или 2, 3, или 3,4. Пусть они занимают места 1, 2. Тогда по первому условию Миша на месте 4, а Петя на месте 3. Значит, Вася – Семёнов, он на месте 1. Нарушается условие «Вася стоял ближе к Мише, чем Петя». Пусть Семёнов и Сеня занимают места 2, 3. По первому условию Миша на месте 1. Петя не может быть на 4 месте. Значит, Петя – Семёнов, он на месте 2. На 4 месте Вася. Нарушается условие «Вася стоял ближе к Мише, чем Петя». Значит, Семёнов и Сеня занимают места 3, 4. Если Михайлов на 1 месте, то Васильев на 4, но это противоречит условию «Расстояние между Васильевым и Михайловым меньше, чем между Петровым и Васильевым». Если Михайлов – Сеня, и он на 4 месте, то на 1 и 2 местах Васильев и Петров. Нарушается условие «Расстояние между Васильевым и Михайловым меньше, чем между

Петровым и Васильевым».Если Михайлов на 2 месте, то Васильев на 4, Петров на 1. Получаем расположение Петров, Михайлов, Семёнов, Сеня Васильев. Петя и Миша не могут стоять рядом, то есть они занимают места 1 и 3. Миша не рядом с Сеней. Значит, Петя на 3 месте, и это Семёнов. Получаем единственно возможное расположение: Миша Петров, Вася Михайлов, Петя Семёнов, Сеня Васильев.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование – 15 баллов. Одна ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Верный ответ без решения – 5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 2 балла.*

5. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 3, BC = 4$ (см. рисунок). $BE = AB, DF = AD$, треугольники BNE и DFK – равносторонние. Найдите величину угла CKN.



Ответ. $30°$.
Решение. Проведём NC и CK. $NB = BE$, так как треугольник BNE– равносторонний, и по условию $BE = AB = 3$. Значит, $NB = 3$. $CD = AB$ (как противоположные стороны прямоугольника). Отсюда $CD = 3$ и $NB = CD$. Аналогично, $BC = AD = DF = DK$, то есть $BC = DK$. Угол $\angle NBC = \angle NBE + \angle EBC = 60° + 90° = 150°$. Угол $\angle CDK = \angle CDF + \angle FDK = 90° + 60° = 150°$. Треугольники NBC и CDK равны по первому признаку равенства треугольников ($NB = CD, BC = DK, \angle NBC = \angle CDK$). Тогда $\angle NCB = \angle CKD$. $\angle NCK = \angle NCB + \angle BCD + \angle DCK = \angle CKD + 90° + \angle DCK$. Но $\angle CKD + \angle DCK = 180° - \angle CDK = 180° - 150° = 30°$. Тогда $\angle NCB = 90° + 30° = 120°$. $\angle CKN = \angle CNK$, так как треугольник NCK равнобедренный. Поэтому $\angle CKN = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть арифметическая ошибка – 18 баллов. Пробелы в верном доказательстве – 15 баллов. Доказано равенство треугольников NBC и CDK, но ответ не получен – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но полезное продвижение незначительно – 0-2 балла (при наличии грубых ошибок 0 баллов). За верный ответ без доказательства баллы не начисляются.*

Вариант 2

1. Миша записывает в два ряда натуральные числа так, чтобы в каждом ряду чередовались чётные и нечётные числа. Он может записывать очередное число в любой ряд, справа от уже записанных чисел. Пятым он записал число 17, шестым число 81, двадцатым число 36. Чётное или нечётное число он запишет двадцать первым?
Ответ. Нечётное число.
Решение. Заметим, что число 81 не может идти после 17 в одном ряду, так как оба числа нечётные. Значит, один ряд заканчивается на 17, другой – на 81, и седьмое число должно быть чётным, после чего один ряд будет заканчиваться на чётное число, другой на нечётное. Восьмое число может быть и чётным, и нечётным. После этого оба ряда будут заканчиваться на числа одинаковой чётности (как после шестого числа). После девятого числа ряды будут заканчиваться на числа разной чётности (как после седьмого числа). Эти ситу-

ации будет повторяться: после каждого числа с чётным номером ряды заканчиваются на числа одинаковой чётности. По условию, двадцатым выложено число 36. Значит, оба ряда заканчиваются на чётные числа, и двадцать первым Миша запишет нечётное число.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение верно начато, но продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 2 балла.*

2. 10 бельчат собирали шишки. Тим собрал 14 шишек, Чук собрал $\frac{1}{3}$ всех шишек, Дан собрал $\frac{1}{4}$ всех шишек. Каждый из остальных собрал не меньше 1 и не больше 3 шишек. Сколько всего шишек могли собрать 10 бельчат вместе? Найдите все возможные ответы, и докажите, что других нет.
Ответ. 60 или 72, или 84.
Решение. Число шишек a должно делиться на 3 и на 4, то есть a делится на 12; пусть $a = 12k$. Тогда $14 + \frac{12k}{3} + \frac{12k}{4} + x = 12k$, где x – число шишек, найденных остальными семью бельчатами. Упрощая уравнение, получаем: $14 + x = 5k$. По условию $7 \leq x \leq 21$. Левая часть делится на 5 при $x = 11, 16, 21$. Если $x = 11$, то $k = 5$, при $x = 16$ $k = 6$, при $x = 21$ $k = 7$. Найдём $a = 12k$: a равно 60 или 72, или 84.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Не отброшены лишние ответы – 15 баллов. Найдены два решения – 15 баллов. Найдено одно решение – 10 баллов. Верная идея решения, но допущена серьезная ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. За верные ответы без доказательства по 1 баллу за каждый.*

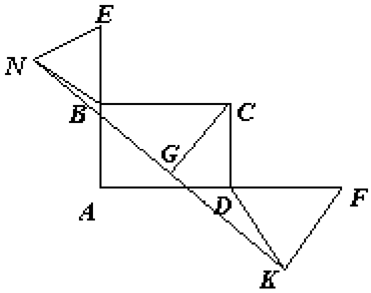
3. Сколько существует натуральных чисел, произведение цифр которых равно 48, причём ни одна цифра не равна 1?
Ответ. 38.
Решение. Разложим 48 на множители: $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Однозначными делителями являются $2, 3, 4, 6, 8,$ это и есть возможные цифры. Если число содержит цифру 8, то возможные цифры – 6 и 8, или $2, 3, 8$. За счёт перестановок получаем в первом случае 2 числа, во втором 6 чисел, всего 8. Если число не содержит цифру 8, но содержит цифру 6, его множители могут быть $2, 4, 6$, или $2, 2, 2, 6$. За счёт перестановок получаем в первом случае 6 чисел, во втором 4 числа, всего 10 чисел. Если число не содержит цифры 6 и 8, но содержит цифру 4, его множители могут быть $4, 4, 3$ (3 перестановки), или $2, 2, 3, 4$. Найдём число возможных перестановок. Места для $2, 2$ можно выбрать 6 способами, а место для 3 двумя способами, что даёт 12 перестановок. Если число не содержит цифры $4, 6, 8$, то возможен один набор цифр: $2, 2, 2, 2, 3$. Этот цифры можно переставить 5 способами (так как у 3 есть 5 возможных мест). Всего получаем $8 + 10 + 12 + 3 + 5 = 38$ чисел.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна небольшая ошибка – 18 баллов, больше одной (но большая часть подсчётов верна) – 10-15 баллов, множественные ошибки при верной идее решения – 5 баллов. Решение начато, есть продвижение –2-3 балла. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

4. Четверо девочек встали в ряд на равном расстоянии друг от друга. Лена стояла дальше от Сони, чем Соня от Веры. Пухова стояла рядом с Леной слева от неё. Катя стояла ближе к Соне, чем Вера. Кузнецова стояла дальше от Ильиной, чем Пухова. Расстояние между Ильиной и Кузнецовой меньше, чем между Сиваковой и Ильиной. В каком порядке стояли девочки? Напишите в ответ девочек по порядку слева направо, указывая у каждой имя и фамилию. Докажите, что других расположений не может быть.
Ответ. Соня Сивакова, Катя Кузнецова, Вера Пухова, Лена Ильина.

Решение. Пухова и Лена могут занимать места $1, 2$ или $2, 3$, или 3,4. Пусть они занимают места $1, 2$. Тогда по первому условию Соня на месте 4, а Вера на месте 3. Значит, Катя – Пухова, она на месте 1. Нарушается условие «Катя стояла ближе к Соне, чем Вера». Пусть Пухова и Лена занимают места $2, 3$. По первому условию Соня на месте 1. Вера не может быть на 4 месте. Значит, Вера – Пухова, она на месте 2. На 4 месте Катя. Нарушается условие «Катя стояла ближе к Соне, чем Вера». Значит, Пухова и Лена занимают места $3, 4$. Если Кузнецова на 1 месте, то Ильина на 4, но это противоречит условию «Расстояние между Ильиной и Кузнецовой меньше, чем между Сиваковой и Ильиной». Если Кузнецова – Лена, и она на 4 месте, то на 1 и 2 местах Ильина и Сивакова. Нарушается условие «Расстояние между Ильиной и Кузнецовой меньше, чем между Сиваковой и Ильиной». Если Кузнецова на 2 месте, то Ильина на 4, Сивакова на 1. Получаем расположение Сивакова, Кузнецова, Пухова, Лена Ильина. Вера и Соня не могут стоять рядом, то есть они занимают места 1 и 3. Соня не рядом с Леной. Значит, Вера на 3 месте, и это Пухова. Получаем единственно возможное расположение: Соня Сивакова, Катя Кузнецова, Вера Пухова, Лена Ильина.

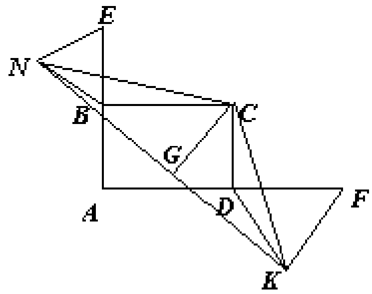
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование – 15 баллов. Одна ошибка – 10 баллов, две ошибки – 5 баллов. Верный ответ без решения – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 2 балла.*

5. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 2, BC = 3$. $BE = AB, DF = AD$, треугольники BNE и DFK – равносторонние (см. рисунок). Из точки C опущен перпендикуляр CG на прямую KN. Найдите величину угла NCG.



Ответ. $60°$.

Решение. Проведём NC и CK. $NB = BE$, так как треугольник BNE– равносторонний, и по условию $BE = AB = 2$. Значит, $NB = 2$. $CD = AB$ (как противоположные стороны прямоугольника). Отсюда $CD = 2$ и $NB = CD$. Аналогично, $BC = AD = DF = DK$, то есть $BC = DK$. Угол $\angle NBC = \angle NBE + \angle EBC = 60° + 90° = 150°$. Угол $\angle CDK = \angle CDF + \angle FDK = 90° + 60° = 150°$. Треугольники NBC и CDK равны по первому признаку равенства треугольников ($NB = CD, BC = DK, \angle NBC = \angle CDK$). Тогда $\angle NCB = \angle CKD$. $\angle NCK = \angle NCB + \angle BCD + \angle DCK = \angle CKD + 90° + \angle DCK$. Но $\angle CKD + \angle DCK = 180° - \angle CDK = 180° - 150° = 30°$. Тогда $\angle NCK = 90° + 30° = 120°$. В равнобедренном треугольнике NCK перпендикуляр CG является биссектрисой $\angle NCK$. Поэтому $\angle NCG = \frac{120°}{2} = 60°$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть арифметическая ошибка – 18 баллов. Пробелы в верном доказательстве – 15 баллов. Доказано равенство треугольников NBC и CDK, но ответ не получен – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но полезное продвижение незначительно – 0-2 балла (при наличии грубых ошибок 0 баллов). За верный ответ без доказательства баллы не начисляются.*

Вариант 3

1. Лена раскладывает в два ряда красные и зелёные карточки так, чтобы в каждом ряду чередовались красные и зелёные карточки. Она может положить очерёдную карточку в любой ряд, справа от уже выложенных карточек. Шестой, седьмой, и тридцать первой она положила красные карточки. Какого цвета карточку Лена положит тридцать второй?

Ответ. Зелёного.

Решение. Заметим, что две красные карточки не могут идти в одном ряду друг после друга. Значит, после седьмой карточки оба ряда заканчиваются красными карточками, и восьмая карточка должна быть зелёной, после чего один ряд будет заканчиваться на красную карточку, другой на зелёную. Девятая карточка может быть любого цвета. После этого оба ряда будут заканчиваться на карточки одного цвета (как после седьмой карточки). После десятой карточки ряды будут заканчиваться на числа разного цвета (как после восьмой карточки). Эти ситуации будет повторяться: после каждой карточки с нечётным номером ряды заканчиваются на карточки одного цвета. По условию, тридцать первой выложена красная карточка. Значит, оба ряда заканчиваются на красные карточки, и тридцать второй Лена положит зелёную карточку.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение верно начато, но продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без верных объяснений – 2 балла.*

2. 12 бельчат собирали шишки. Ярик собрал 15 шишек, Лесь собрал $\frac{3}{8}$ всех шишек, Тих собрал $\frac{1}{6}$ всех шишек. Каждый из остальных собрал не больше 3 шишек. Сколько всего шишек могли собрать 12 бельчат вместе? Найдите все возможные ответы, и докажите, что других нет.

Ответ. 48 или 72.

Решение. Число шишек a должно делиться на 8 и на 6, то есть a делится на 24; пусть $a = 24k$. Тогда $15 + \frac{3\cdot 24k}{8} + \frac{24k}{6} + x = 24k$, где x – число шишек, найденных остальными девятью бельчатами. Упрощая уравнение, получаем: $15 + x = 11k$. По условию $0 \le x \le 27$. Левая часть делится на 11 при $x = 7$ и при $x = 18$. Если $x = 7$, то $k = 2, a = 48$. При $x = 18$ $k = 3, a = 72$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном ходе решения за одну арифметическую ошибку при решении верного уравнения снимается 2 балла. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Не отброшен лишний ответ – 15 баллов. Найдено одно решение –10 баллов. Верная идея решения, но допущена серьезная ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. За верные ответы без доказательства по 1 баллу за каждый.*

3. Сколько существует натуральных чисел, произведение цифр которых равно 36, причём ни одна цифра не равна 1?

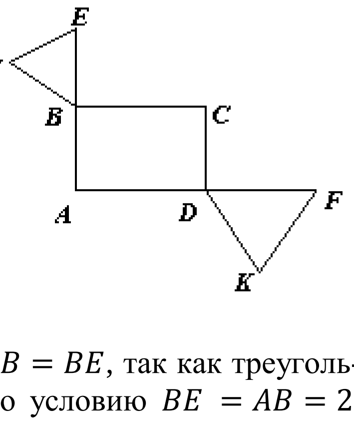
Ответ. 21.

Решение. Разложим 36 на множители: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Однозначными делителями являются $2, 3, 4, 6, 9,$ это и есть возможные цифры. Если число содержит цифру 9, то возможные цифры – 4 и 9, или $2, 2, 9$. За счёт перестановок получаем в первом случае 2 числа, во втором 3 числа, всего 5. Если число не содержит цифру 9, но содержит цифру 6, его множители могут быть $2, 3, 6$ или $6, 6$. За счёт перестановок получаем в первом случае 6 чисел, во втором 1 число, всего 7 чисел. Если число не содержит цифры 6 и 9, но содержит цифру 4, его множители могут быть $4, 3, 3$ (3 перестановки). Если число не содержит цифры $4, 6, 9$, то возможен один набор цифр: $2, 2, 3, 3$. В последнем случае места для $2, 2$ можно выбрать 6 способами, а место для $3, 3$ тогда определятся однозначно, что даёт 6 перестановок. Всего получаем $5 + 7 + 3 + 6 = 21$ число.

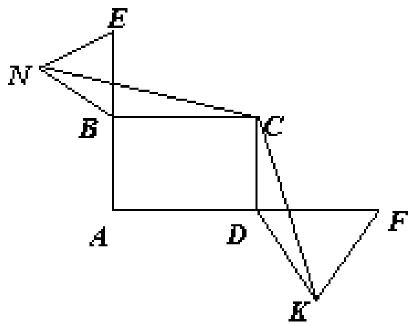
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна небольшая ошибка – 18 баллов, больше одной (но большая часть подсчётов верна) – 10-15 баллов, множественные ошибки при верной идее решения – 5 баллов. Решение начато, есть продвижение –2-3 балла. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

4. Четверо мальчиков встали в ряд на равном расстоянии друг от друга. Кондратьев стоял дальше от Фомина, чем Петров. Расстояние между Фоминым и Кондратьевым меньше, чем между Ивановым и Фоминым. Саша стоял дальше от Паши, чем Паша от Коли. Петров стоял рядом с Сашей слева от него. Лёня стоял ближе к Паше, чем Коля. В каком порядке стояли мальчики? Напишите в ответ мальчиков по порядку слева направо, указывая у каждого имя и фамилию. Докажите, что других расположений не может быть.
Ответ. Паша Иванов, Лёня Кондратьев, Коля Петров, Саша Фомин.
Решение. Петров и Саша могут занимать места $1,2$ или $2,3$, или $3,4$. Пусть они занимают места $1,2$. Тогда по условию Паша на месте 4, а Коля на месте 3. Значит, Лёня – Петров, он на месте 1. Нарушается условие «Лёня стоял ближе к Паше, чем Коля».Пусть Петров и Саша занимают места $2,3$. Тогда Паша на месте 1. Коля не может быть на 4 месте. Значит, Коля – Петров, он на месте 2. На 4 месте Лёня. Нарушается условие «Лёня стоял ближе к Паше, чем Коля». Значит, Петров и Саша занимают места $3,4$. Если Кондратьев на 1 месте, то Фомин на 4, но это противоречит условию «Расстояние между Фоминым и Кондратьевым меньше, чем между Ивановым и Фоминым». Если Кондратьев – Саша, и он на 4 месте, то на 1 и 2 местах Фомин и Иванов. Нарушается условие «Расстояние между Фоминым и Кондратьевым меньше, чем между Ивановым и Фоминым». Если Кондратьев на 2 месте, то Фомин на 4, Иванов на 1. Получаем расположение Иванов, Кондратьев, Петров, Саша Фомин. Коля и Паша не могут стоять рядом, то есть они занимают места 1 и 3. Паша не рядом с Сашей. Значит, Коля на 3 месте, и это Петров. Получаем единственно возможное расположение: Паша Иванов, Лёня Кондратьев, Коля Петров, Саша Фомин.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование – 15 баллов. Одна ошибка – 10 баллов, две ошибки – 5 баллов. Верный ответ без решения – 5 баллов. Решение начато, есть продвижение – 2 балла.*

5. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 2, BC = 3$ (см. рисунок). $BE = AB, DF = AD$, треугольники BNE и DFK – равносторонние. Найдите величину угла NCK.



Ответ. $120°$.
Решение. Проведём NC и CK. $NB = BE$, так как треугольник BNE– равносторонний, и по условию $BE = AB = 2$. Значит, $NB = 2$. $CD = AB$ (как противоположные стороны прямоугольника). Отсюда $CD = 2$ и $NB = CD$. Аналогично, $BC = AD = DF = DK,$ то есть $BC = DK$. Угол $\angle NBC = \angle NBE + \angle EBC = 60° + 90° = 150°$. Угол $\angle CDK = \angle CDF + \angle FDK = 90° + 60° = 150°$. Треугольники NBC и CDK равны по первому признаку равенства треугольников ($NB = CD, BC = DK, \angle NBC = \angle CDK$). Тогда $\angle NCB = \angle CKD$. $\angle NCK = \angle NCB + \angle BCD + \angle DCK = \angle CKD + 90° + \angle DCK$. Но $\angle CKD + \angle DCK = 180° - \angle CDK = 180° - 150° = 30°$. Тогда $\angle NCB = 90° + 30° = 120°$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть арифметическая ошибка – 18 баллов. Пробелы в верном доказательстве – 15 баллов. Доказано равенство треугольников NBC и CDK, но ответ не получен – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но полезное продвижение незначительно – 0-2 балла (при наличии грубых ошибок 0 баллов). За верный ответ без доказательства баллы не начисляются.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Семь девочек играли в шахматы. Все девочки сыграли одинаковое число партий. Любая пара девочек сыграла между собой не больше одной партии. Сколько партий могла сыграть каждая девочка, если известно, что Маша играла с Ниной, Катей и Светой, Лена с Женей и Аней, а Женя не играла с Катей?

Ответ. 4.

Решение. Число партий, сыгранных каждой девочкой, не меньше 3, так как Маша сыграла, по крайней мере, 3 партии, и не больше 5, так как каждая девочка сыграла не больше 6 партий, но Женя, например, хотя бы на одну меньше. Но если число всех партий, сыгранных каждой девочкой, равно 3, то число всех партий дробное (оно равно $\frac{7\cdot3}{2}=10{,}5$). Аналогично оно не может равняться 5. Значит, это число может равняться только 4. Тогда число всех партий равно $\frac{7\cdot4}{2}=14$. Эти 14 партий могли быть такими:

М – Н, М – С, М – К, М – Л, Л – К, Л – Ж, Л – А,
А – С, А – Н, А – Ж, Ж – С, Ж – Н, Н– К, К – С.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов.*
Доказано, что могло быть сыграно только 4 партии, но не приведён пример – 15 баллов.
Доказано, что могло быть сыграно только 4 партии, но не приведён пример и есть неточности в решении – 12 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Приведён только пример, когда каждая сыграла по 4 партии, но не доказано, что других вариантов нет – 5 баллов.
Показано, что каждая девочка сыграла не меньше 3 *и не больше 5 партий – 5 баллов*
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Найдите количество натуральных чисел n, для которых значение $-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+20$ тоже является натуральным числом.
Ответ. 6.
Решение. Заметим, что
$$-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+20=-\frac{1}{3}(n^2-4n-60)=-\frac{1}{3}(n-10)(n+6).$$
Поскольку n – натуральное, то $n+6$ тоже натуральное. Чтобы все выражение было положительным, то $n-10$ должно быть отрицательным, то есть n принимает значения от 1 до 9. Среди них подойдут только те, для которых $n-10$ или $n+6$ делится на 3, т.е. n имеет остаток 0 или 1 по модулю 3. Значит, подойдут только $n=1,3,4,6,7,9$.
Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Вывод о том, что n <10 сделан после нахождения корней уравнения $-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+20=0$ *без дополнительных пояснений при правильном решении – 18 баллов.*
Вывод о том, что n <10 сделан из факта, что значение выражения равно 0 при n = 10 без дополнительных пояснений при правильном решении – 16 баллов.
Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Доказано, что n <10 – 5 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Верный ответ, но не показано решение – 0 баллов
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, высота BH и медиана CM. Оказалось, что в треугольнике MLH выполнено $ML=MH=10$, а также $\angle LMH=30^{\circ}$. Найдите сумму длин высот треугольника ABC, опущенных из вершин B и C.
К большому сожалению жюри, в условии задачи во всех вариантах была допущена досадная ошибка, из-за которой решение задачи оказалась значительно более длинным и сложным, чем планировалось и никто из участников на олимпиаде не смог решить эту задачу. Решение задачи с исправленной ошибкой представлено ниже.
Ответ. 20.
Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $MH=MA=MB$. По условию $ML=MH$, значит треугольник BAL также является прямоугольным ($\angle ALB=90^{\circ}$). Тогда биссектриса AL треугольника ABC является также его высотой, значит, треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC. Значит AL является ещё и медианой треугольника ABC, то есть $BL=LC$. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника $LH=BL=LC$. Поэтому $\Delta LMH=\Delta LMB$ по трём сторонам (ML – общая, $MH=MB$, $LH=BL$). Получаем, что $\angle BML=\angle LMH=30^{\circ}$. То есть треугольник BMH – равнобедренный с углом 60°, а значит равносторонний. Но тогда $BH=MH=ML=10$. Поскольку мы показали, что треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC, то его высоты, опущенные из вершин B и C, равны. Значит, искомая сумма длин равна 20.
Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. У Влада есть несколько монеток. Он заметил, что как бы он ни положил все монетки в клетки доски 8×10 (в каждую клетку не более одной монетки), обязательно найдётся прямоугольник 1×3 или 3×1, во всех клетках которого лежат монетки. Какое наименьшее количество монеток может быть у Влада?

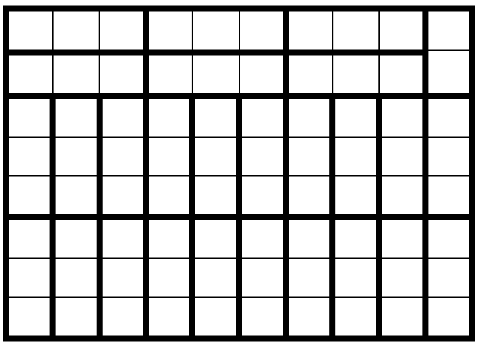
Ответ. 55.

Решение. Докажем, что если монеток не больше 54, то их можно выложить так, чтобы не было ни одного прямоугольника из трёх клеток с монетками. Покрасим доску в диагональную раскраску в три цвета.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

На доске 27 клетки цвета «1», 27 клеток цвета «2» и 26 клеток цвета «3». Положим монетки в «1» и «2» цвета. Каждый прямоугольник из трёх клеток содержит клетки всех трёх цветов, поэтому искомого прямоугольника нет.

Докажем, если монеток 55, то искомый прямоугольник найдётся. Выделим на доске 26 прямоугольников 1×3:



Если ни в одном прямоугольнике нет трёх монеток, то на доске лежит не больше двух монеток в каждом прямоугольнике и не больше двух монет в двух оставшихся клетках. Тогда всего монеток не больше $26 \cdot 2 + 2 = 54$, противоречие.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Доказано, что монеток не меньше 55 – 12 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Доказано, что если монеток 55, то искомый прямоугольник найдётся – 8 баллов.

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.

Любые попытки использовать другую раскраску, приводящую к неправильному ответу – 0 баллов.

Ответ получен путём умножения количества клеток на $\frac{2}{3}$ *с округлением без дополнительных пояснений – 0 баллов.*

Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство $\frac{a}{a+5}+\frac{b}{b+5}+\frac{c}{c+5}\le\frac{1}{2}$.

Решение. Заметим, что $\frac{a}{a+5}=1-\frac{5}{a+5}$, поэтому
$$\frac{a}{a+5}+\frac{b}{b+5}+\frac{c}{c+5}=3-\left(\frac{5}{a+5}+\frac{5}{b+5}+\frac{5}{c+5}\right).$$
Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше $\frac{5}{2}$. Это равносильно неравенству
$$\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5}\ge\frac{1}{2}$$
или, что тоже самое, неравенству
$$\left((a+5)+(b+5)+(c+5)\right)\left(\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+5}\right)\ge\frac{a+b+c+15}{2}. \qquad (*)$$
Но левая часть после раскрытия скобок имеет вид
$$3+\left(\frac{b+5}{a+5}+\frac{a+5}{b+5}\right)\left(\frac{c+5}{a+5}+\frac{a+5}{c+5}\right)\left(\frac{c+5}{a+5}+\frac{c+5}{b+5}\right),$$
где каждая скобка не меньше двух, поскольку является суммой взаимно обратных чисел. Таким образом, достаточно доказать, что $9\ge\frac{a+b+c+15}{2}$, то есть $a+b+c\le 3$. Но это неравенство справедливо, поскольку $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)=9$.

Неравенство $(*)$ можно объяснить и другими способами. Например, по неравенству о средних
$$(a+5)+(b+5)+(c+5)\ge 3\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)},$$
$$\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+5}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+5}\cdot\frac{1}{b+5}\cdot\frac{1}{c+5}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)}},$$
поэтому левая часть не меньше 9. Правая часть не больше 9, поскольку $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)=9$.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.

Показано, что при $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ неравенство выполняется – 0 баллов.

Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 2

1. После лагеря некоторые из 9 девочек переписывались. Каждая девочка участвовала в одинаковом числе переписок. Сколько всего переписок могло быть, если известно, что Маша переписывалась с Ниной, Катей, Леной, Аней и Светой, а Алёна с Варей и Женей?

Ответ. 27 или 36.

Решение. Число переписок у каждой девочки не меньше 5, так как у Маши по крайней мере 5 переписок. Но если число переписок у каждой девочки равно 5, то число всех переписок дробное (оно равно $\frac{9\cdot 5}{2}=22{,}5$). Аналогично оно не может равняться 7. Значит, это число может равняться только 6 или 8. Тогда число всех переписок равно $\frac{9\cdot 6}{2}=27$ или $\frac{9\cdot 8}{2}=36$. Если оно равно 36, то каждая девочка переписывается со всеми остальными. Если число переписок равно 27, то каждая девочка переписывается со всеми, кроме двух.

Пример того, что это возможно. Расположим всех девочек по кругу в том порядке, в каком они упомянуты в условии. Пусть каждая девочка переписывается с 6 девочками, расположенными прямо за ней, и не переписывается с двумя девочками, расположенными перед ней. Тогда условия выполняются.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Доказано, что могло быть только 27 или 36 переписок, но не приведён пример – 16 баллов.

Доказано, что могло быть только 27 или 36 переписок, но не приведён пример и есть неточности в решении – 12 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Приведён только пример, когда всего 27 переписок, но не доказано, что других вариантов нет – 5 баллов

Показано, что каждая девочка участвовала не менее чем в 5 переписках – 5 баллов

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.

Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Найдите количество натуральных чисел n, для которых значение $-\frac{1}{5}n^2+\frac{6}{5}n+11$ тоже является натуральным числом.

Ответ. 4.

Решение. Заметим, что
$$-\frac{1}{5}n^2+\frac{6}{5}n+11=-\frac{1}{5}(n^2-6n-55)=-\frac{1}{5}(n-11)(n+5).$$
Поскольку n – натуральное, то $n+5$ тоже натуральное. Чтобы все выражение было положительным, то $n-11$ должно быть отрицательным, то есть n принимает значения от 1 до 10. Среди них подойдут только те, для которых $n-11$ или $n+5$ делится на 5, т.е. n имеет остаток 0 или 1 по модулю 5. Значит, подойдут только $n=1,5,6,10$.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Вывод о том, что n *<11 сделан после нахождения корней уравнения* $-\frac{1}{5}n^2+\frac{6}{5}n+11=0$ *без дополнительных пояснений при правильном решении – 18 баллов.*

Вывод о том, что n *<11 сделан из факта, что значение выражения равно 0 при* n *= 11 без дополнительных пояснений при правильном решении – 16 баллов.*

Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Доказано, что n *<11 – 5 баллов.*

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.

Верный ответ, но не показано решение – 0 баллов

Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, высота BH и медиана CM. Оказалось, что в треугольнике MLH выполнено $ML=MH=12$, а также $\angle LMH=30^{\circ}$. Найдите сумму длин высот треугольника ABC, опущенных из вершин B и C.

К большому сожалению жюри, в условии задачи во всех вариантах была допущена досадная ошибка, из-за которой решение задачи оказалась значительно более длинным и сложным, чем планировалось и никто из участников на олимпиаде не смог решить эту задачу. Решение задачи с исправленной ошибкой представлено ниже.

Ответ. 24.

Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $MH = MA = MB$. По условию $ML = MH$, значит треугольник BAL также является прямоугольным ($\angle ALB = 90^\circ$). Тогда биссектриса AL треугольника ABC является также его высотой, значит, треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC. Значит AL является ещё и медианой треугольника ABC, то есть $BL = LC$. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника $LH = BL = LC$. Поэтому $\Delta LMH = \Delta LMB$ по трём сторонам (ML – общая, $MH = MB$, $LH = BL$). Получаем, что $\angle BML = \angle LMH = 30^\circ$. То есть треугольник BMH – равнобедренный с углом 60°, а значит равносторонний. Но тогда $BH = MH = ML = 12$. Поскольку мы показали, что треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC, то его высоты, опущенные из вершин B и C, равны. Значит, искомая сумма длин равна 24.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.

Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. У Влада есть несколько монеток. Он заметил, что как бы он ни положил все монетки в клетки доски 7×10 (в каждую клетку не более одной монетки), обязательно найдётся прямоугольник 1×3 или 3×1, во всех клетках которого лежат монетки. Какое наименьшее количество монеток может быть у Влада?

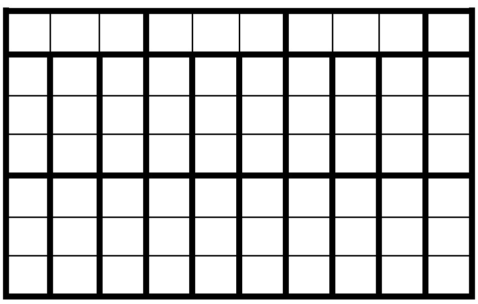
Ответ. 48.

Решение. Докажем, что если монеток не больше 47, то их можно выложить так, чтобы не было ни одного прямоугольника из трёх клеток с монетками. Покрасим доску в диагональную раскраску в три цвета.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

На доске 24 клетки цвета «1», 23 клетки цвета «2» и 23 клетки цвета «3». Положим монетки в «1» и «2» цвета. Каждый прямоугольник из трёх клеток содержит клетки всех трёх цветов, поэтому искомого прямоугольника нет.

Докажем, если монеток 48, то искомый прямоугольник найдётся. Выделим на доске 23 прямоугольника 1×3:



Если ни в одном прямоугольнике нет трёх монеток, то на доске лежит не больше двух монеток в каждом прямоугольнике и не больше одной монеты в одной оставшейся клетке. Тогда всего монеток не больше $23 \cdot 2 + 1 = 47$, противоречие.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Доказано, что монеток не меньше 48– 12 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Доказано, что если монеток 48, то искомый прямоугольник найдётся – 8 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Любые попытки использовать другую раскраску, приводящую к неправильному ответу – 0 баллов.
Ответ получен путём умножения количества клеток на $\frac{2}{3}$ *с округлением без дополнительных пояснений – 0 баллов.*
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^3+b^3+c^3=3$. Докажите неравенство $\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}\ge\frac{3}{4}$.
Решение. Поскольку $\frac{a^4}{a^4+3}+\frac{3}{a^4+3}=1$,
$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}\ge\frac{1}{3}\left(3-\frac{a^4}{a^4+3}-\frac{b^4}{b^4+3}-\frac{c^4}{c^4+3}\right).$$
Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше, чем $\frac{9}{4}$. Это равносильно неравенству
$$\frac{a^4}{a^4+3}+\frac{b^4}{b^4+3}+\frac{c^4}{c^4+3}\le\frac{3}{4}.$$
Докажем, что $\frac{a^4}{a^4+3}\le\frac{a^3}{4}$. Действительно, это равносильно неравенству $4a\le a^4+3$, которое уже совсем простое:
$$a^4+3=(a^4+1)+2\ge2\sqrt{a^4}+2=2(a^2+1)\ge4a.$$
Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Показано, что при a = 1, b = 1, c = 1 неравенство выполняется – 0 баллов.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 3

1. Семь девочек играли в шахматы. Все девочки сыграли одинаковое число партий. Любая пара девочек сыграла между собой не больше одной партии. Сколько партий могла сыграть каждая девочка, если известно, что Маша играла с Ниной, Катей и Светой, Лена с Женей и Аней, а Женя не играла с Катей?
Решение. Число партий, сыгранных каждой девочкой, не меньше 3, так как Маша сыграла, по крайней мере, 3 партии, и не больше 5, так как каждая девочка сыграла не больше 6 партий, но Женя, например, хотя бы на одну меньше. Но если число всех партий, сыгранных каждой девочкой, равно 3, то число всех партий дробное (оно равно $\frac{7\cdot3}{2}=10{,}5$). Аналогично оно не может равняться 5. Значит, это число может равняться только 4. Тогда число всех партий равно $\frac{7\cdot4}{2}=14$. Эти 14 партий могли быть такими:

М – Н, М – С, М – К, М – Л, Л – К, Л – Ж, Л – А,
А – С, А – Н, А – Ж, Ж – С, Ж – Н, Н– К, К – С.

Комментарий
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Доказано, что могло быть сыграно только 4 партии, но не приведён пример – 15 баллов.
Доказано, что могло быть сыграно только 4 партии, но не приведён пример и есть неточности в решении – 12 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Приведён только пример, когда каждая сыграла по 4 партии, но не доказано, что других вариантов нет – 5 баллов
Показано, что каждая девочка сыграла не меньше 3 и не больше 5 партий – 5 баллов
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Найдите количество натуральных чисел n, для которых значение $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12$ тоже является натуральным числом.
Ответ. 5.
Решение. Заметим, что
$$-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 = -\frac{1}{4}(n^2 - 8n - 48) = -\frac{1}{4}(n-12)(n+4).$$
Поскольку n – натуральное, то $n + 4$ тоже натуральное. Чтобы все выражение было положительным, то $n - 12$ должно быть отрицательным, то есть n принимает значения от 1 до 11. Среди них подойдут только те, для которых $(n-12)(n+4)$ делится на 4, т.е. n имеет остаток 0 или 2 по модулю 4. Значит, подойдут только $n = 2, 4, 6, 8, 10$.
Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Вывод о том, что n <12 сделан после нахождения корней уравнения $-\frac{1}{4}n^2 + 2n + 12 = 0$ *без дополнительных пояснений при правильном решении – 18 баллов.*
Вывод о том, что n <12 сделан из факта, что значение выражения равно 0 при n = 12 без дополнительных пояснений при правильном решении – 16 баллов.
Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Доказано, что n <12 – 5 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Верный ответ, но не показано решение – 0 баллов
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, высота BH и медиана CM. Оказалось, что в треугольнике MLH выполнено $ML = MH = 17$, а также $\angle LMH = 30^\circ$. Найдите сумму длин высот треугольника ABC, опущенных из вершин B и C.
К большому сожалению жюри, в условии задачи во всех вариантах была допущена досадная ошибка, из-за которой решение задачи оказалась значительно более длинным и сложным, чем планировалось и никто из участников на олимпиаде не смог решить эту задачу. Решение задачи с исправленной ошибкой представлено ниже.
Ответ. 34.
Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $MH = MA = MB$. По условию $ML = MH$, значит треугольник BAL также является прямоугольным ($\angle ALB = 90^\circ$). Тогда биссектриса AL треугольника ABC является также его высотой, значит, треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC. Значит AL является ещё и медианой треугольника ABC, то есть $BL = LC$. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника

$LH = BL = LC$. Поэтому $\Delta LMH = \Delta LMB$ по трём сторонам (ML – общая, $MH = MB$, $LH = BL$). Получаем, что $\angle BML = \angle LMH = 30^\circ$. То есть треугольник BMH – равнобедренный с углом 60°, а значит равносторонний. Но тогда $BH = MH = ML = 17$. Поскольку мы показали, что треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC, то его высоты, опущенные из вершин B и C, равны. Значит, искомая сумма длин равна 34.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.

Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. У Влада есть несколько монеток. Он заметил, что как бы он ни положил все монетки в клетки доски 7×8 (в каждую клетку не более одной монетки), обязательно найдётся прямоугольник 1×3 или 3×1, во всех клетках которого лежат монетки. Какое наименьшее количество монеток может быть у Влада?

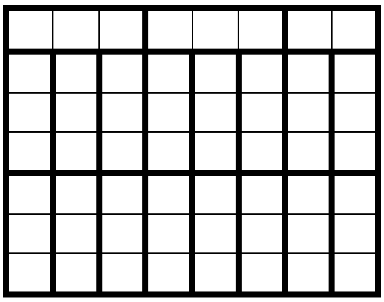
Ответ. 39.

Решение. Докажем, что если монеток не больше 38, то их можно выложить так, чтобы не было ни одного прямоугольника из трёх клеток с монетками. Покрасим доску в диагональную раскраску в три цвета.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2

На доске 19 клеток цвета «1», 18 клеток цвета «2» и 19 клеток цвета «3». Положим монетки в «2» и «3» цвета. Каждый прямоугольник из трёх клеток содержит клетки всех трёх цветов, поэтому искомого прямоугольника нет.

Докажем, если монеток 39, то искомый прямоугольник найдётся. Выделим на доске 18 прямоугольников 1×3:



Если ни в одном прямоугольнике нет трёх монеток, то на доске лежит не больше двух монеток в каждом прямоугольнике и не больше двух монет в двух оставшихся клетках. Тогда всего монеток не больше $18 \cdot 2 + 2 = 38$, противоречие.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Доказано, что монеток не меньше 39 – 12 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Доказано, что если монеток 39, то искомый прямоугольник найдётся – 8 баллов.

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Любые попытки использовать другую раскраску, приводящую к неправильному ответу – 0 баллов.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Положительные числа $a,\ b,\ c$ удовлетворяют условию $a+b+c=1$. Докажите неравенство $\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6}+\frac{b^4+c^4}{b^6+c^6}+\frac{c^4+a^4}{c^6+a^6}\le\frac{1}{abc}$.

Решение. Заметим, что $\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6}\le\frac{1}{ab}$. Действительно, это неравенство после домножения на знаменатель примет вид: $a^6+b^6-a^5b-ab^5\ge 0$, что эквивалентно неравенству $(a^5-b^5)(a-b)\ge 0$. В таком виде очевидно, поскольку скобки в левой части одного знака. Следовательно,

$$\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6}+\frac{b^4+c^4}{b^6+c^6}+\frac{c^4+a^4}{c^6+a^6}\le\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{abc}.$$

Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Показано, что при a = b = c неравенство выполняется – 0 баллов.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 4

1. Семь девочек играли в шахматы. Все девочки сыграли одинаковое число партий. Любая пара девочек сыграла между собой не больше одной партии. Сколько партий могла сыграть каждая девочка, если известно, что Маша играла с Ниной, Катей и Светой, Лена с Женей и Аней, а Женя не играла с Катей?

Ответ. 4.

Решение. Число партий, сыгранных каждой девочкой, не меньше 3, так как Маша сыграла, по крайней мере, 3 партии, и не больше 5, так как каждая девочка сыграла не больше 6 партий, но Женя, например, хотя бы на одну меньше. Но если число всех партий, сыгранных каждой девочкой, равно 3, то число всех партий дробное (оно равно $\frac{7\cdot 3}{2}=10{,}5$). Аналогично оно не может равняться 5. Значит, это число может равняться только 4. Тогда число всех партий равно $\frac{7\cdot 4}{2}=14$. Эти 14 партий могли быть такими:

М – Н, М – С, М – К, М – Л, Л – К, Л – Ж, Л – А,
А – С, А – Н, А – Ж, Ж – С, Ж – Н, Н– К, К – С.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов.*
Доказано, что могло быть сыграно только 4 партии, но не приведён пример – 15 баллов.
Доказано, что могло быть сыграно только 4 партии, но не приведён пример и есть неточности в решении – 12 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Приведён только пример, когда каждая сыграла по 4 партии, но не доказано, что других вариантов нет – 5 баллов.
Показано, что каждая девочка сыграла не меньше 3 *и не больше 5 партий – 5 баллов*
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

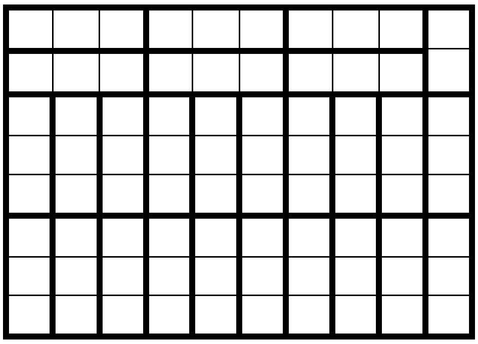
2. Найдите количество натуральных чисел n, для которых значение $-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+20$ тоже является натуральным числом.
Ответ. 6.
Решение. Заметим, что
$$-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+20=-\frac{1}{3}(n^2-4n-60)=-\frac{1}{3}(n-10)(n+6).$$
Поскольку n – натуральное, то $n+6$ тоже натуральное. Чтобы все выражение было положительным, то $n-10$ должно быть отрицательным, то есть n принимает значения от 1 до 9. Среди них подойдут только те, для которых $n-10$ или $n+6$ делится на 3, т.е. n имеет остаток 0 или 1 по модулю 3. Значит, подойдут только $n=1,3,4,6,7,9$.
Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Вывод о том, что n <10 *сделан после нахождения корней уравнения* $-\frac{1}{3}n^2+\frac{4}{3}n+20=0$ *без дополнительных пояснений при правильном решении – 18 баллов.*
Вывод о том, что n <10 *сделан из факта, что значение выражения равно 0 при* n = 10 *без дополнительных пояснений при правильном решении – 16 баллов.*
Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Доказано, что n <10 *– 5 баллов.*
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Верный ответ, но не показано решение – 0 баллов
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, высота BH и медиана CM. Оказалось, что в треугольнике MLH выполнено $ML=MH=10$, а также $\angle LMH=30^\circ$. Найдите сумму длин высот треугольника ABC, опущенных из вершин B и C.
К большому сожалению жюри, в условии задачи во всех вариантах была допущена досадная ошибка, из-за которой решение задачи оказалась значительно более длинным и сложным, чем планировалось и никто из участников на олимпиаде не смог решить эту задачу. Решение задачи с исправленной ошибкой представлено ниже.
Ответ. 20.
Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $MH=MA=MB$. По условию $ML=MH$, значит треугольник BAL также является прямоугольным ($\angle ALB=90^\circ$). Тогда биссектриса AL треугольника ABC является также его высотой, значит, треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC. Значит AL является ещё и медианой треугольника ABC, то есть $BL=LC$. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника $LH=BL=LC$. Поэтому $\Delta LMH=\Delta LMB$ по трём сторонам (ML – общая, $MH=MB$, $LH=BL$). Получаем, что $\angle BML=\angle LMH=30^\circ$. То есть треугольник BMH – равнобедренный с углом 60°, а значит равносторонний. Но тогда $BH=MH=ML=10$. Поскольку мы показали, что треугольник ABC – равнобедренный с основанием BC, то его высоты, опущенные из вершин B и C, равны. Значит, искомая сумма длин равна 20.
Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. У Влада есть несколько монеток. Он заметил, что как бы он ни положил все монетки в клетки доски 8×10 (в каждую клетку не более одной монетки), обязательно найдётся прямоугольник 1×3 или 3×1, во всех клетках которого лежат монетки. Какое наименьшее количество монеток может быть у Влада?
Ответ. 55.
Решение. Докажем, что если монеток не больше 54, то их можно выложить так, чтобы не было ни одного прямоугольника из трёх клеток с монетками. Покрасим доску в диагональную раскраску в три цвета.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

На доске 27 клетки цвета «1», 27 клеток цвета «2» и 26 клеток цвета «3». Положим монетки в «1» и «2» цвета. Каждый прямоугольник из трёх клеток содержит клетки всех трёх цветов, поэтому искомого прямоугольника нет.
Докажем, если монеток 55, то искомый прямоугольник найдётся. Выделим на доске 26 прямоугольников 1×3:



Если ни в одном прямоугольнике нет трёх монеток, то на доске лежит не больше двух монеток в каждом прямоугольнике и не больше двух монет в двух оставшихся клетках. Тогда всего монеток не больше $26 \cdot 2 + 2 = 54$, противоречие.
Комментарий.
Верное решение – 20 баллов.
При верном решении есть неточность – 18 баллов.
Доказано, что монеток не меньше 55 – 12 баллов.
Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.
Доказано, что если монеток 55, то искомый прямоугольник найдётся – 8 баллов.
Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.
Любые попытки использовать другую раскраску, приводящую к неправильному ответу – 0 баллов.
Ответ получен путём умножения количества клеток на $\frac{2}{3}$ с округлением без дополнительных пояснений – 0 баллов.
Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите неравенство $\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} \leq \frac{1}{2}$.

Решение. Заметим, что $\frac{a}{a+5} = 1 - \frac{5}{a+5}$, поэтому

$$\frac{a}{a+5} + \frac{b}{b+5} + \frac{c}{c+5} = 3 - \left(\frac{5}{a+5} + \frac{5}{b+5} + \frac{5}{c+5}\right).$$

Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше $\frac{5}{2}$. Это равносильно неравенству

$$\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+5} + \frac{1}{c+5} \geq \frac{1}{2}$$

или, что тоже самое, неравенству

$$\big((a+5) + (b+5) + (c+5)\big)\left(\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+5}\right) \geq \frac{a+b+c+15}{2}. \qquad (*)$$

Но левая часть после раскрытия скобок имеет вид

$$3 + \left(\frac{b+5}{a+5} + \frac{a+5}{b+5}\right)\left(\frac{c+5}{a+5} + \frac{a+5}{c+5}\right)\left(\frac{c+5}{a+5} + \frac{c+5}{b+5}\right),$$

где каждая скобка не меньше двух, поскольку является суммой взаимно обратных чисел. Таким образом, достаточно доказать, что $9 \geq \frac{a+b+c+15}{2}$, то есть $a + b + c \leq 3$. Но это неравенство справедливо, поскольку $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9$.

Неравенство $(*)$ можно объяснить и другими способами. Например, по неравенству о средних

$$(a+5) + (b+5) + (c+5) \geq 3\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)},$$

$$\frac{1}{a+5} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+5} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+5} \cdot \frac{1}{b+5} \cdot \frac{1}{c+5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)}},$$

поэтому левая часть не меньше 9. Правая часть не больше 9, поскольку $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9$.

Комментарий.

Верное решение – 20 баллов.

При верном решении есть неточность – 18 баллов.

Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов.

Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла.

Показано, что при a = 1, b = 1, c = 1 неравенство выполняется – 0 баллов.

Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

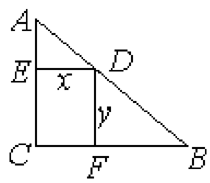
1. Число 2025 представили в виде суммы слагаемых, причём каждое слагаемое равно 2 или 3. Порядок не учитывается, то есть все суммы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одну. Сколько существует сумм, в которых больше слагаемых, равных 3?

Ответ. 135.

Решение. $2025 = 2x + 3y$. Пусть двоек и троек поровну. Тогда $2025 = 5x, x = y = 405$. Найдём, сколько всего может быть слагаемых, равных 3. Очевидно, их должно быть нечётное число, чтобы после вычитания из 2025 осталось чётное число. Поэтому возможные количества слагаемых, равных 3: $1, 3, 5, \ldots 675$. В этом ряду стоит и число 405, осталось найти, сколько чисел стоит правее него: $\frac{675-405}{2} = 135$. Проверка. Посчитаем, сколько сумм, в которых меньше слагаемых, равных 2. Возможные количества слагаемых, равных 2: $0, 3, 6, \ldots 1011$. В этом ряду стоит и число 405, найдём, сколько чисел стоит левее него: $\frac{405-0}{3} = 135$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном ходе решения есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 2-5 баллов. Есть незначительное продвижение – 1 балл. За ответы без доказательства баллы не начисляются.*

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D, и из неё проведены перпендикуляры DE и DF к катетам CA и CB соответственно. Известно, что $AE = 4, BF = 5$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник ABC?



Ответ. 40.

Решение. Обозначим $ED = x, DF = y$. Тогда площадь треугольника ABC равна $S = \frac{(4+y)(5+x)}{2} = \frac{20+4x+5y+xy}{2}$. Из подобия треугольников следует, что $\frac{4}{y} = \frac{x}{5}$, то есть $xy = 20$. Тогда $S = \frac{40+4x+\frac{100}{x}}{2} = 20 + 2\left(x + \frac{25}{x}\right)$. По неравенству $|a| + |b| \geq 2\sqrt{|ab|}$, $x + \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{25}{x}}$ =10. Поэтому $S \geq 20 + 2 \cdot 10 = 40$.

Равенство достигается при $x = \frac{25}{x}$, то есть при $x = 5$. Тогда $y = 4$, и получаем треугольник с катетами 8 и 10, площадь которого равна 40, а перпендикуляры являются средними линиями.

Замечание. *Неравенство* $S = 20 + 2\left(x + \frac{25}{x}\right) \geq 40$ *может быть доказано и, например, так: пусть* $20 + 2\left(x + \frac{25}{x}\right) < 40$. *Тогда* $2x^2 - 20x + 50 < 0$, *то есть* $2(x-5)^2 < 0$, *что невозможно.*

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов, из них оценка – 15 баллов, пример – 5 баллов. Следующие баллы не суммируются между собой, но могут суммироваться с примером. Площадь выражена как функция одного аргумента – 5 баллов. Установлена связь между* DE *и* DF*– 3 балла. Площадь выражена только как функция двух аргументов – 1 балл. Таким образом, за доказательство того, что* $DE \cdot DF = 20$, *и пример для* $S = 40$ *ставится 3+5=8 баллов. Бездоказательные утверждения и доказательства только для целых значений не оцениваются.*

3. Из прямоугольника 13×9 вырезана центральная клетка. Можно ли замостить прямоугольник с вырезанной клеткой полосками 1×4 и 4×1?

Ответ. Нет.

Решение. Раскрасим клетки в 4 цвета, включая вырезанную (см. рисунок).

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

Всего 117 клеток, из них 30 клеток цвета 1 и по 29 клеток цветов $2, 3, 4$. Вырезанная клетка покрашена в цвет 3, значит, после вырезания имеется 30 клеток цвета $1, 29$ клеток цвета 2, 28 клеток цвета 3, 29 клеток цвета 4. Но каждая полоска закрывает ровно 1 клетку каждого цвета.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При отсутствии строгого доказательства за обоснование ответа – от 1 до 7 баллов.*

4. Найдите все действительные решения уравнения $(2x^2 + 3x + 3)(2x^2 + 5x + 3) = 35x^2$.

Ответ. $\frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}$.

Решение. Заметим, что $x \neq 0$. Поделим обе части уравнения на x^2: $\left(2x + 3 + \frac{3}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{3}{x}\right) = 35$. Сделаем замену $y = 2x + \frac{3}{x}$. Уравнение примет вид $(y+3)(y+5) = 35$. Уравнение $y^2 + 8y - 20 = 0$ имеет корни -10 и 2. Пусть $y = -10$. Тогда $2x + \frac{3}{x} =$

-10, $2x^2+10x+3=0$. Корни уравнения равны $\frac{-10\pm\sqrt{100-24}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{19}}{2}$. Пусть $y=-2$. Тогда $2x+\frac{3}{x}=-2$, $2x^2+2x+3=0$. Дискриминант меньше 0, действительных корней нет.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 19 баллов. В верном решении есть недочёты – 15 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 2-5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл. За ответы без доказательства баллы не начисляются.*

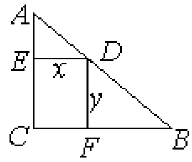
5. В лесу живут 300 серых и 5 чёрных бельчат. Каждый чёрный бельчонок знаком ровно с половиной серых бельчат. Докажите, что число серых бельчат, знакомых меньше, чем с половиной чёрных бельчат, может равняться 249, но не может равняться 251.
Решение. Всего было $5\cdot 150=750$ знакомств. Пусть серых бельчат, которые знакомы не более, чем с 2 чёрными бельчатами, было n. Тогда каждого из них знали не более 2 чёрных бельчат, а остальных $300-n$ – не более 5 чёрных бельчат. Таким образом, всего знакомств было не более $2n+5(300-n)$, откуда получаем, что $750\le 2\mathrm{n}+5(300-n)$, откуда $3n\le 750$. Таким образом, $\mathrm{n}\le 250$.
Построим пример для 249 бельчат. Пусть 51 серый бельчонок знаком со всеми 5 чёрными бельчатами. 3 серых бельчонка знакомы с первым чёрным, 48 серых бельчат знакомы с первым и вторым, 51 – со вторым и третьим, 48 – с третьим и четвёртым, 51 – с четвёртым и пятым, 48 – с первым и пятым.
Обоснование примера. 51 серый бельчонок знаком со всеми чёрными бельчатами, $3+48+51+48+51+48=249$ серых бельчат знакомы с одним или двумя чёрными бельчатами, то есть меньше, чем с половиной чёрных бельчат. Проверим выполнение условий для каждого чёрного бельчонка. Первый: $51+3+48+48=150$. Второй: $51+48+51=150$. Третий: $51+51+48=150$. Четвёртый: $51+48+51=150$. Пятый: $51+51+48=150$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Небольшой недочёт – 18 баллов. Доказательство, что не может равняться* 251 *– 15 баллов, пример для* 249 *– 5 баллов, баллы суммируются. Есть некоторое продвижение – 2-5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл.*

Вариант 2

1. Число 875 представили в виде суммы слагаемых, причём каждое слагаемое равно 2 или 5. Порядок не учитывается, то есть все суммы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одну. Сколько существует сумм, в которых больше слагаемых, равных 5?
Ответ. 25.
Решение. $875=2x+5y$. Пусть двоек и пятёрок поровну. Тогда $875=7x, x=y=125$. Найдём, сколько всего может быть слагаемых, равных 5. Очевидно, их должно быть нечётное число, чтобы после вычитания из 875 осталось чётное число. Поэтому возможные количества слагаемых, равных 5: $1,3,5,\ldots 175$. В этом ряду стоит и число 125, осталось найти, сколько чисел стоит правее него: $\frac{175-125}{2}=25$. Проверка. Посчитаем, сколько сумм, в которых меньше слагаемых, равных 2. Возможные количества слагаемых, равных 2: $0,5,10,\ldots 435$. В этом ряду стоит и число 125, найдём, сколько чисел стоит левее го: $\frac{125-0}{5}=25$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном ходе решения есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Верная идея решения,*

но допущена ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 2-5 баллов. Есть незначительное продвижение – 1 балл. За ответы без доказательства баллы не начисляются.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D, и из неё проведены перпендикуляры DE и DF к катетам CA и CB соответственно. Известно, что $AE = 5, BF = 6$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник ABC?



Ответ. 60.

Решение. Обозначим $ED = x, DF = y$. Тогда площадь треугольника ABC равна $S = \frac{(5+y)(6+x)}{2} = \frac{30+5x+6y+xy}{2}$. Из подобия треугольников следует, что $\frac{5}{y} = \frac{x}{6}$, то есть $xy = 30$. Тогда $S = \frac{60+5x+\frac{180}{x}}{2} = 30 + \frac{5}{2}\left(x + \frac{36}{x}\right)$. По неравенству $|a| + |b| \geq 2\sqrt{|ab|}$, $x + \frac{36}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{36}{x}}$ =12. Поэтому $S \geq 30 + \frac{5}{2} \cdot 12 = 60$. Равенство достигается при $x = \frac{36}{x}$, то есть при $x = 6$. Тогда $y = 5$, и получаем треугольник с катетами 10 и 12, площадь которого равна 60, а перпендикуляры являются средними линиями.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов, из них оценка – 15 баллов, пример – 5 баллов. Следующие баллы не суммируются между собой, но могут суммироваться с примером. Площадь выражена как функция одного аргумента – 5 баллов. Установлена связь между* DE *и* DF*– 3 балла. Площадь выражена только как функция двух аргументов – 1 балл. Таким образом, за доказательство того, что* $DE \cdot DF = 30$, *и пример для* $S = 60$ *ставится 3+5=8 баллов. Бездоказательные утверждения и доказательства только для целых значений не оцениваются.*

3. Из квадрата 15×15 вырезана угловая клетка. Можно ли замостить этот квадрат прямоугольниками 1×4 и 4×1?

Ответ. Нет.

Решение. Повернём квадрат так, что вырезана правая верхняя угловая клетка. Раскрасим клетки в 4 цвета, включая вырезанную (см. рисунок). После вырезания осталось 224 клетки, из них по 56 клеток цвета 2 и 4, 55 клеток цвета 3, 57 клеток цвета 1. Но каждый прямоугольник закрывает ровно 1 клетку каждого цвета.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При отсутствии строгого доказательства за обоснование ответа – от 1 до 7 баллов.*

4. Найдите все действительные решения уравнения $(3x^2 - 4x - 4)(3x^2 - 5x - 4) = 56x^2$.
Ответ. $2 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$.
Решение. Заметим, что $x \neq 0$. Поделим обе части уравнения на x^2: $\left(3x - 4 - \frac{4}{x}\right)\left(3x - 5 - \frac{4}{x}\right) = 56$. Сделаем замену $y = 3x - \frac{4}{x}$. Уравнение примет вид $(y-4)(y-5) = 56$. Уравнение $y^2 - 9y - 36 = 0$ имеет корни 12 и -3. Пусть $y = 12$. Тогда $3x - \frac{4}{x} = 12$, $3x^2 - 12x - 4 = 0$. Корни уравнения равны $\frac{12\pm\sqrt{144+48}}{6} = \frac{6\pm8\sqrt{3}}{3} = 2 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$. Пусть $y = -3$. Тогда $3x - \frac{4}{x} = -3, 3x^2 + 3x - 4 = 0$. Корни уравнения равны $\frac{-3\pm\sqrt{9+48}}{6} = \frac{-3\pm\sqrt{57}}{6}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 19 баллов. В верном решении есть недочёты – 15 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 2-5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл. За ответы без доказательства баллы не начисляются.*

5. В лесу живут 200 серых и 5 чёрных бельчат. Каждый чёрный бельчонок знаком ровно с половиной серых бельчат. Какое наибольшее количество серых бельчат может быть знакомо меньше, чем с половиной чёрных бельчат?
Ответ. 166.
Решение. Оценка. Всего $5 \cdot 100 = 500$ знакомств. Пусть было n серых бельчат, которые знакомы с 0, 1 или 2 чёрными бельчатами. Тогда каждого из них знает не более 2 чёрных бельчат, а остальных $200 - \mathrm{n}$ не более 5 чёрных бельчат. Таким образом, всего знакомств было не более $2\mathrm{n} + 5(200 - \mathrm{n})$, откуда получаем, что $500 \leq 2\mathrm{n} + 5(200 - \mathrm{n})$, откуда $3\mathrm{n} \leq 500$. Таким образом, $\mathrm{n} \leq 166$.
Пример. Пусть 34 серых бельчонка знакомы со всеми 5 чёрными бельчатами. 2 серых бельчонка знакомы с первым чёрным, 32 серых бельчонка знакомы с первым и рым, 34 – со вторым и третьим, 32 – с третьим и четвёртым, 34 – с четвёртым и пятым, 32 – с первым и пятым.
Обоснование примера. 34 серых бельчонка знакомы со всеми чёрными бельчатами, $2 + 32 + 34 + 32 + 34 + 32 = 166$ серых бельчат знакомы с одним или двумя чёрными бельчатами, то есть меньше, чем с половиной чёрных бельчат. Проверим выполнение условий для каждого чёрного бельчонка. Первый: $34 + 2 + 32 + 32 = 100$. Второй: $34 + 32 + 34 = 100$. Третий: $34 + 34 + 32 = 100$. Четвёртый: $34 + 32 + 34 = 100$. Пятый: $34 + 34 + 32 = 100$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Небольшой недочёт – 18 баллов. Нет примера достижения максимума – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 1-5 баллов.*

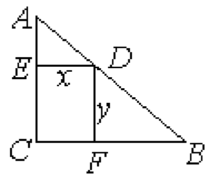
Вариант 3

1. Число 1120 представили в виде суммы слагаемых, причём каждое слагаемое равно 3 или 5. Порядок не учитывается, то есть все суммы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одну. Сколько существует сумм, в которых больше слагаемых, равных 3?
Ответ. 46.
Решение. $1120 = 3x + 5y$. Пусть троек и пятёрок поровну. Тогда $1120 = 8x, x = y = 140$. Найдём, сколько всего может быть слагаемых, равных 5. Очевидно, их должно быть столько, чтобы после вычитания пятёрок из 1120 осталось число, делящееся на 3. 1120 и 1115 не делятся на 3, поэтому пятёрок не меньше 2. Возможные количества слагаемых, равных 5: $2, 5, 8, \ldots 224$. В этом ряду стоит и число 140, осталось найти, сколько чи-

сел стоит левее него: $\frac{140-2}{3} = 46$. Проверка. Возможные количества слагаемых, равных 3: $0, 5, 10, \ldots 370$. В этом ряду стоит и число 140, найдём, сколько чисел стоит правее го: $\frac{370-140}{5} = 46$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном ходе решения есть арифметическая ошибка – 15 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 2-5 баллов. Есть незначительное продвижение – 1 балл. За ответы без доказательства баллы не начисляются.*

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D, и из неё проведены перпендикуляры DE и DF к катетам CA и CB соответственно. Известно, что $AE = 4, BF = 7$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник ABC?

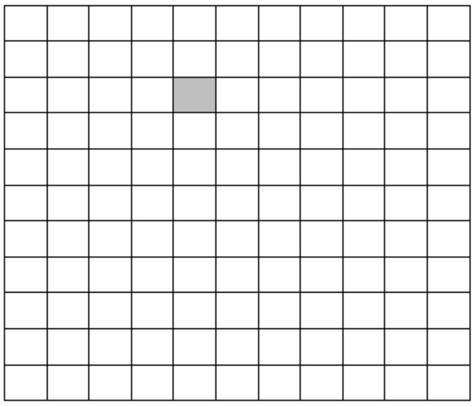


Ответ. 56.

Решение. Обозначим $ED = x, DF = y$. Тогда площадь треугольника ABC равна $S = \frac{(4+y)(7+x)}{2} = \frac{28+4x+7y+xy}{2}$. Из подобия треугольников следует, что $\frac{4}{y} = \frac{x}{7}$, то есть $xy = 28$. Тогда $S = \frac{56+4x+\frac{196}{x}}{2} = 28 + 2\left(x + \frac{49}{x}\right)$. По неравенству $|a| + |b| \geq 2\sqrt{|ab|}$, $x + \frac{49}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{49}{x}}$ =14. Поэтому $S \geq 28 + 2 \cdot 14 = 56$. Равенство достигается при $x = \frac{49}{x}$, то есть при $x = 7$. Тогда $y = 4$, и получаем треугольник с катетами 8 и 14, площадь которого равна 56, а перпендикуляры являются средними линиями.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов, из них оценка – 15 баллов, пример – 5 баллов. Следующие баллы не суммируются между собой, но могут суммироваться с примером. Площадь выражена как функция одного аргумента – 5 баллов. Установлена связь между* DE *и* DF*– 3 балла. Площадь выражена только как функция двух аргументов – 1 балл. Таким образом, за доказательство того, что* $DE \cdot DF = 28$*, и пример для* $S = 56$ *ставится 3+5=8 баллов. Бездоказательные утверждения и доказательства только для целых значений не оцениваются.*

3. Из квадрата 11×11 вырезана клетка (см. рисунок).



Можно ли замостить полученную фигуру прямоугольниками 1×4 и 4×1?

Ответ. Нет.

Решение. Раскрасим клетки в 4 цвета, включая вырезанную (см. рисунок). После вырезания осталось 120 клеток, из них по 30 клеток цвета 2 и 4, 29 клеток цвета 3, 31 клетка цвета 1. Но каждый прямоугольник закрывает ровно 1 клетку каждого цвета.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При отсутствии строгого доказательства за обоснование ответа – от 1 до 7 баллов.*

4. Найдите все действительные решения уравнения $(x^2+2x+4)(x^2-7x+4)=10x^2$.

Ответ. $4 \pm 2\sqrt{3}$.

Решение. Заметим, что $x \neq 0$. Поделим обе части уравнения на x^2: $\left(x+2+\frac{4}{x}\right)\left(x-7+\frac{4}{x}\right)=10$. Сделаем замену $y = x+\frac{4}{x}$. Уравнение примет вид $(y+2)(y-7)=10$. Уравнение $y^2-5y-24=0$ имеет корни 8 и -3. Пусть $y=8$. Тогда $x+\frac{4}{x}=8, x^2-8x+4=0$. Корни уравнения равны $\frac{8\pm\sqrt{64-16}}{2}=4\pm2\sqrt{3}$. Пусть $y=-3$. Тогда $x+\frac{4}{x}=-3, x^2+3x+4=0$. Дискриминант меньше 0, действительных корней нет.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 19 баллов. В верном решении есть недочёты – 15 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 2-5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл. За ответы без доказательства баллы не начисляются.*

5. В лесу живут 100 серых и 5 чёрных бельчат. Каждый чёрный бельчонок знаком ровно с половиной серых бельчат. Какое наибольшее количество серых бельчат может быть знакомо меньше, чем с половиной чёрных бельчат?

Ответ. 83.

Решение. Оценка. Всего $5\cdot 50=250$ знакомств. Пусть было n серых бельчат, которых знакомы не более, чем с двумя чёрными бельчатами. Тогда каждого из них знает не более 2 чёрных бельчат, а остальных $100-\mathrm{n}$ не более 5 чёрных бельчат. Таким образом, всего знакомств было не более $2\mathrm{n}+5(100-\mathrm{n})$, откуда получаем, что $250 \leq 2\mathrm{n}+5(100-\mathrm{n})$, откуда $3n \leq 250$: Таким образом, $\mathrm{n} \leq 83$.

Пример. Пусть 17 серых бельчат знакомы со всеми 5 чёрными бельчатами. 1 серый бельчонок знаком с первым чёрным, 16 серых бельчат знакомы с первым и вторым, 17 – со вторым и третьим, 16 – с третьим и четвёртым, 17 – с четвёртым и пятым, 16 – с первым и пятым.

Обоснование примера. 17 серых бельчат знакомы со всеми чёрными бельчатами, $1+16+17+16+17+16=83$ серых бельчат знакомы с одним или двумя чёрными бельчатами, то есть меньше, чем с половиной чёрных бельчат. Проверим выполнение условий для каждого чёрного бельчонка. Первый: $17+1+16+16=50$. Второй: $17+16+17=50$. Третий: $17+17+16=50$. Четвёртый: $17+16+17=50$. Пятый: $17+17+16=50$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Небольшой недочёт – 18 баллов. Нет примера достижения максимума – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 2-5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл.*

Вариант 4

1. Миша переставил цифры в последовательности $1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9$, и разбил переставленную последовательность на несколько групп цифр, например, $23,\ 87, 1, 5, 694$. Оказалось, что все полученные им числа – простые. Чему равняется наименьшая возможная сумма чисел, полученных Мишей?
Ответ. 207.
Решение. Цифры $4, 6, 8$ не могут быть цифрами единиц в этих числах. Сумма не меньше, чем $40 + 60 + 80 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 207$. Эта сумма достигается, например, $2 + 3 + 5 + 41 + 67 + 89 = 207$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Приведён верный пример, но не обосновано, что сумма наименьшая – 15 баллов. В примере с суммой* 207 *есть одна ошибка, которую можно исправить, например, среди слагаемых есть одно составное число или единица – 10 баллов. Сумма простых чисел равна* 225 *– 10 баллов. Сумма простых чисел больше* 225 *– 5 баллов. Задача не решена, есть небольшое продвижение – 1 балл.*

2. 34 бельчонка сели в некоторые 34 вершины правильного 80-угольника, по одному бельчонку в вершину. Докажите, что найдутся по крайней мере два бельчонка, каждый из которых будет сидеть на равном расстоянии от двух бельчат.
Решение. Разобьем все вершины на 16 групп по 5 вершин, расположенных через 15 последовательных вершин. 5 вершин в каждой группе являются вершинами правильного пятиугольника. Вершин, в которых сидят бельчата, $34 = 16 \cdot 2 + 2$. Следовательно, или в какой-то из групп сидит не менее четырёх бельчат, или найдутся две группы, в каждой из которых сидит не менее трёх бельчат. Но если у правильного пятиугольника отмечены три вершины, то они лежат в вершинах равнобедренного треугольника.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Небольшой недочёт – 18 баллов. Нет примера достижения максимума – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 2-5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл. В верном решении есть недочёты – 15 баллов. Верная идея решения, но допущена ошибка – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 2-5 баллов. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл. За ответы без доказательства баллы не начисляются.*

3. В треугольнике ABC основание $AC = 8$. Точка M – середина стороны AC, точка N – основание высоты BN. Вписанная окружность касается стороны AC в точке K. Точки располагаются на основании AC в порядке A, M, K, N, C. Известно, что $MK = KN > 0$. Найдите периметр треугольника ABC.
Ответ. 24.
Решение. Обозначим $a = BC, b = CA, c = AB, d = MK, x = AN, y = NC.$ По теореме Пифагора $c^2 - x^2 = a^2 - y^2$, откуда $x^2 - y^2 = c^2 - a^2$. Обозначим различные отрезки сторон, касательных к окружности, от вершины до точки касания, как m, n, k. Тогда $2(m + n + k) = P$, где P– периметр треугольника. Отсюда $2m = P - 2n - 2k, m = {}^{P}/_{2} - (n + k) = {}^{P}/_{2} - a$, где a – сторона, не смежная с отрезком m. Таким образом, $m = AK = \frac{b}{2} + d = {}^{P}/_{2} - a, KC = \frac{b}{2} - d = {}^{P}/_{2} - c$. Вычитая, получаем $AK - KC = 2d = c - a$, откуда $d = \frac{c-a}{2}$. $AN = \frac{b}{2} + 2d$, $NC = \frac{b}{2} - 2d$. Вычитая, получаем $x - y = AN - NC = 4d = 2(c - a)$. Поделим равенство $x^2 - y^2 = c^2 - a^2$ на $x - y = 2(c - a)$ (по условию $x \neq y$). Тогда $x + y = \frac{c+a}{2}$, но $x + y = b = 8$. Значит, $c + a = 16$, и периметр $a + b + c = 24$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Использованы без доказательства сведения, не входящие в школьную программу – 10 баллов. Ошибки в записи решения – минус 5 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Есть незначительное продвижение – 1 балл. Задача решается с нарушением условий задания – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. Решите уравнение $|x+1|-1=\frac{\{x\}}{|x-1|}$, где $|a|$ означает абсолютную величину числа a, $\{a\}$ – дробную часть числа a, то есть разность между числом a и наибольшим целым числом, не превосходящим a.

Ответ. $0;\ -2;\ -\sqrt{5}$.

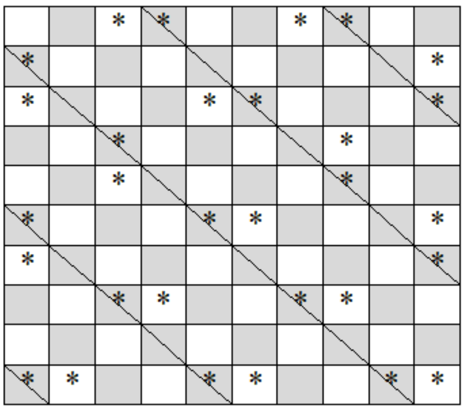
Решение. $x \neq 1$. Пусть $x>1$. Тогда $x(x-1)=\{x\}$. Но $x(x-1)>x-1 \geq \{x\}$, в этом случае нет решений. Пусть $-1 \leq x < 1$. Тогда $x(1-x)=\{x\}$. $\{x\} \geq 0$, $1-x>0$, следовательно, $x \geq 0$. Для $0 \leq x < 1$ дробная часть x равна x, и уравнение принимает вид $x(1-x)=x$, или $x=0$. Пусть $x<-1$. Тогда $(x+2)(x-1)=\{x\}$. Поскольку $x-1<0, \{x\} \geq 0$, то $x+2 \leq 0$. Пусть $x=-2$. Это число удовлетворяет уравнению. Пусть $-3 \leq x < -2$.Тогда $\{x\}=x+3$, $(x+2)(x-1)=x+3$, $x^2=5$, $x=-\sqrt{5} \in [-3;\ -2)$. Пусть $x<-3$. Тогда $|(x+2)(x-1)|=|(x+2)| \cdot |(x-1)| > 1 \cdot 4 > |\{x\}|$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верная идея решения, но допущена существенная ошибка – 10 баллов. Есть продвижение – 1-5 баллов. При отсутствии верного хода решения за правильные ответы в целых числах – по 1 баллу за каждый. Задача решается с нарушением условий задания – 0 баллов. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. В квадрате 10×10 клеток закрасили некоторые клетки так, что каждая из 100 клеток имеет соседнюю по стороне закрашенную клетку. Найдите наименьшее возможное число закрашенных клеток.

Ответ. 30.

Решение. Раскрасим клетки в шахматном порядке. Покажем, что минимальное количество закрашенных белых клеток равно минимальному количеству закрашенных чёрных клеток и равно 15. Заметим, что соседями не могут быть две белые или две чёрные клетки. Выделим чёрные диагонали длиной $1, 3, 5, 7, 9$. Каждая закрашенная белая клетка соседствует не более чем с двумя клетками на такой диагонали. Значит, чтобы обеспечить соседями чёрные клетки, надо закрасить не менее $1+2+3+4+5 = 15$ белых клеток. То же рассуждение можно провести для чёрных клеток. Всего требуется закрасить не меньше $15+15=30$ клеток. Ниже приводится пример расстановки (закрашенные клетки отмечены *).



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Оценка – 10 баллов, пример – 10 баллов. Пробелы в доказательстве оценки – 5-10 баллов из 10. Есть продвижение – 1-5 баллов. Приведена неоптимальная раскраска – 2-5 баллов. Незначительное продвижение – 1 балл.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

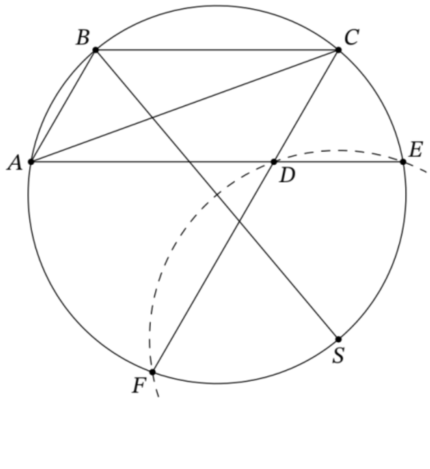
1. Число x таково, что выполняется равенство$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$. Найдите $\cos x \cos 3x$.

Ответ. $\frac{7}{16}$; $-\frac{9}{16}$.

Решение. Пусть $\alpha = \frac{5}{16}$, тогда $\alpha = \sin x \sin 3x = \sin x\,(3\sin x - 4\sin^3 x) = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x$. Обозначим $\sin^2 x$ за t и получим квадратное уравнение на t: $4t^2 - 3t + \alpha = 0$, откуда $t = \frac{3\pm\sqrt{9-16\alpha}}{8}$. С другой стороны, $\cos x \cos 3x = (1-t)^2 - 3t(1-t) = 4t^2 - 5t + 1 = -\alpha - 2t + 1$. Поэтому $\cos x \cos 3x = -\alpha - 2t + 1 = -\frac{5}{16} - \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{9 - 16\cdot\frac{5}{16}}\right) + 1$, откуда получаем ответы: $-\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$.

2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAC = 32^\circ$, $\angle BCA = 14^\circ$. Лучи AD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках E и F соответственно. Точка S – центр описанной окружности треугольника DEF. Найдите угол между прямыми AC и BS.

Ответ. 72°.



Решение. Заметим, что поскольку $AB \parallel CE$, меры дуг AB и CE равны. Аналогично равны меры дуг BC и AF. Докажем, что точка S лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Вычислим $\angle ESF$, разложив его в сумму двух центральных углов описанной окружности треугольника DEF и заменив их на удвоенные вписанные:

$$\angle ESF = \angle ESD + \angle DSF == 2\angle EFD + 2\angle DEF =$$

$$= 2 \cdot (180^{\circ} - \angle EDF) = 360^{\circ} - 2\angle ABC.$$

С другой стороны, выразим угол EBF через меры дуг:

$$\angle EBF = \frac{\widehat{FE}}{2} = \frac{360^{\circ} - \widehat{AF} - \widehat{BA} - \widehat{CB} - \widehat{EC}}{2} = \frac{360^{\circ} - \widehat{CB} - \widehat{BA} - \widehat{CB} - \widehat{BA}}{2} =$$
$$= 180^{\circ} - \widehat{BA} - \widehat{CB} = \widehat{AC} - 180^{\circ} = 2\angle ABC - 180^{\circ}.$$

Таким образом, $\angle ESF + \angle EBF = 180^{\circ}$, то есть точки B, E, F, S лежат на одной окружности описанной окружности треугольника ABC.

Так как точка S равноудалена от точек E и F, то S – середина дуги $\widehat{FE}$. Зная углы $\angle BAC = 32^{\circ}$, $\angle BCA = 14^{\circ}$, можно найти меры всех дуг окружности:

$$\widehat{EC} = \widehat{BA} = 2 \cdot 14^{\circ} = 28^{\circ}; \quad \widehat{CB} = \widehat{AF} = 2 \cdot 32^{\circ} = 64^{\circ};$$
$$\widehat{FS} = \widehat{SE} = \frac{360^{\circ} - \widehat{EC} - \widehat{CB} - \widehat{BA} - \widehat{AF}}{2} = \frac{360^{\circ} - 2 \cdot 28^{\circ} - 2 \cdot 64^{\circ}}{2} = 88^{\circ}.$$

Вычислим угол между хордами BS и AC по формуле через полусумму высекаемых дуг:

$$\angle(BS, CA) = \frac{\widehat{SC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{\widehat{SE} + \widehat{EC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{88^{\circ} + 28^{\circ} + 28^{\circ}}{2} = 72^{\circ}.$$

3. Какое наибольшее количество вершин правильного $80-$угольника можно отметить, чтобы никакие три отмеченные вершины не образовывали равнобедренный треугольник с углами 18°, 81°, 81°?

Ответ. 52.

Решение. Стороны такого треугольника стягивают дуги, на которых уложено по 8, 36 и 36 стороны. Рассмотрим граф, который представляет собой 4 цикла длины 20. Если среди вершин цикла хотя бы 14 отмеченных, то какие-то три из них идут подряд, а значит, образуется искомый треугольник. При этом для 13 отмеченных вершин это уже неверно. Поэтому ответ $13 \cdot 4 = 52$.

4. Натуральные числа p, q, r таковы, что $q^2p - 1$ делится на $pr - 1$, $p^2r - 1$ делится на $qr - 1$ и $r^2q - 1$ делится на $pq - 1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел p, q, r – точный квадрат.

Решение. Если какое-то из чисел равно 1, то оно является квадратом. Пусть теперь все числа больше 1. Не умаляя общности, будем считать, что q – наименьшее из них. Поскольку $q^2p - 1$ делится на $pr - 1$, их разность $q^2p - pr = p(q^2 - r)$ тоже делится на $pr - 1$. Число p взаимно просто с $pr - 1$, поэтому $q^2 - r$ кратно $pr - 1$. Однако $q^2 - r < pr - 1$ (так как $q \leq p, q \leq r$ и $r > 1$) и $r - q^2 < pr - 1$, поэтому число $q^2 - r$ может быть равно лишь нулю. Таким образом, $r = q^2$.

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$.

Ответ. $\frac{6}{5}$.

Решение. По неравенствам для средних:

$$\frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} \geq \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 2a^2 + 2b^2} = \frac{a^4 + b^4}{3 + a^2 + b^2} \geq$$
$$\geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2(3 + a^2 + b^2)} = \frac{(3 - c^2)^2}{2(6 - c^2)} = \frac{1}{2}\left(-c^2 + \frac{9}{6 - c^2}\right).$$

Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в A. Складывая эти неравенства, мы получим

$$A \geq \frac{1}{2}\left(-a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9}{6 - a^2} + \frac{9}{6 - b^2} + \frac{9}{6 - c^2}\right) \geq \geq \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{81}{18 - (a^2 + b^2 + c^2)}\right) = \frac{6}{5}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$.

Вариант 2

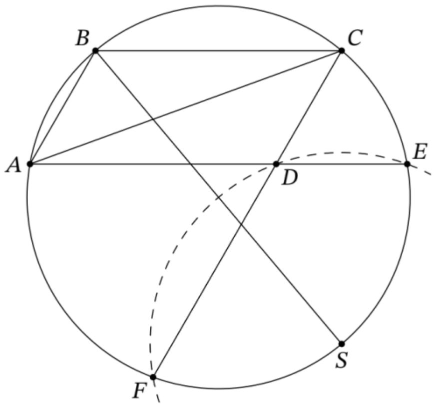
Число x таково, что выполняется равенство$\sin x \sin 3x = \frac{11}{64}$. Найдите $\cos x \cos 3x$.

Ответ. $-\frac{35}{64}; \frac{45}{64}$.

Решение. Пусть $\alpha = \frac{11}{64}$, тогда $\alpha = \sin x \sin 3x = \sin x\,(3\sin x - 4\sin^3 x) = 3\sin^2 x - 4\sin^4 x$. Обозначим $\sin^2 x$ за t и получим квадратное уравнение на t: $4t^2 - 3t + \alpha = 0$, откуда $t = \frac{3\pm\sqrt{9-16\alpha}}{8}$. С другой стороны, $\cos x \cos 3x = (1-t)^2 - 3t(1-t) = 4t^2 - 5t + 1 = -\alpha - 2t + 1$. Поэтому $\cos x \cos 3x = -\alpha - 2t + 1 = -\frac{11}{64} - \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{9 - 16\cdot\frac{11}{64}}\right) + 1$, откуда получаем ответы: $-\frac{35}{64}; \frac{45}{64}$.

2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAC = 34^\circ$, $\angle BCA = 15^\circ$. Лучи AD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках E и F соответственно. Точка S – центр описанной окружности треугольника DEF. Найдите угол между прямыми AC и BS.

Ответ. 71°.



Решение. Заметим, что поскольку $AB \parallel CE$, меры дуг AB и CE равны. Аналогично равны меры дуг BC и AF. Докажем, что точка S лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Вычислим $\angle ESF$, разложив его в сумму двух центральных углов описанной окружности треугольника DEF и заменив их на удвоенные вписанные:

$$\angle ESF = \angle ESD + \angle DSF == 2\angle EFD + 2\angle DEF =$$
$$= 2\cdot(180^\circ - \angle EDF) = 360^\circ - 2\angle ABC.$$

С другой стороны, выразим угол EBF через меры дуг:

$$\angle EBF = \frac{\widehat{FE}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{AF} - \widehat{BA} - \widehat{CB} - \widehat{EC}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{CB} - \widehat{BA} - \widehat{CB} - \widehat{BA}}{2} =$$
$$= 180^\circ - \widehat{BA} - \widehat{CB} = \widehat{AC} - 180^\circ = 2\angle ABC - 180^\circ.$$

Таким образом, $\angle ESF + \angle EBF = 180^\circ$, то есть точки B, E, F, S лежат на одной окружности описанной окружности треугольника ABC.

Так как точка S равноудалена от точек E и F, то S – середина дуги $\widehat{FE}$. Зная углы $\angle BAC = 34^\circ$, $\angle BCA = 15^\circ$, можно найти меры всех дуг окружности:

$$\widehat{EC} = \widehat{BA} = 2\cdot 15^\circ = 30^\circ; \quad \widehat{CB} = \widehat{AF} = 2\cdot 34^\circ = 68^\circ;$$
$$\widehat{FS} = \widehat{SE} = \frac{360^\circ - \widehat{EC} - \widehat{CB} - \widehat{BA} - \widehat{AF}}{2} = \frac{360^\circ - 2\cdot 30^\circ - 2\cdot 68^\circ}{2} = 82^\circ.$$

Вычислим угол между хордами BS и AC по формуле через полусумму высекаемых дуг:

$$\angle(BS, CA) = \frac{\widehat{SC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{\widehat{SE} + \widehat{EC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{82^\circ + 30^\circ + 30^\circ}{2} = 71^\circ.$$

3. Какое наибольшее количество вершин правильного $80-$угольника можно отметить, чтобы никакие три отмеченные вершины не образовывали равнобедренный треугольник с углами $63^\circ, 63^\circ, 54$?

Ответ. 52.

Решение. Стороны такого треугольника стягивают дуги, на которых уложено по 24, 28 и 28 сторон. Рассмотрим граф, который представляет собой 4 цикла длины 20. Если среди вершин цикла хотя бы 14 отмеченных, то какие-то три из них идут подряд, а значит, образуется искомый треугольник. При этом для 13 отмеченных вершин это уже неверно. Поэтому ответ $13\cdot 4 = 52$.

4. Натуральные числа p, q, r таковы, что p^2q+1 делится на $qr+1$, q^2r+1 делится на $pr+1$ и r^2p+1 делится на $pq+1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел p, q, r – точный квадрат.

Решение. Если какое-то из чисел равно 1, то оно является квадратом. Пусть теперь все числа больше 1. Не умаляя общности, будем считать, что p – наименьшее из них. Поскольку p^2q+1 делится на $qr+1$, их разность $p^2q-qr\ =q(p^2-r)$ тоже делится на $qr+1$. Число q взаимно просто с $qr+1$, поэтому p^2-q кратно $qr+1$. Однако $p^2-q<qr+1$ (так как $p\le q, p\le r$ и $q>1$) и $p^2-q>qr+1$, поэтому число p^2-q может быть равно лишь нулю. Таким образом, $q=p^2$.

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a+b+c=3$. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}$.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

Решение. Заметим, что

$$4(a^3+b^3)\ge(a+b)^3\ \ и\ \ 9-c^2=(3-c)(3+c)=(a+b)(3+c).$$

Тогда по неравенствам о средних

$$\frac{4(a^3+b^3)}{8ab+9-c^2}\ge\frac{(a+b)^3}{2(a+b)^2+9-c^2}=\frac{(a+b)^2}{2(a+b)+3+c}=$$
$$=\frac{(3-c)^2}{9-c}=-c-3+\frac{36}{9-c}.$$

Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в $4A$. Складывая эти неравенства, мы получим

$$\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2}+\frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}$$
$$\ge\frac{1}{4}\left(-(a+b+c)-9+\frac{36}{9-a}+\frac{36}{9-b}+\frac{36}{9-c}\right)\ge-3+\frac{81}{27-(a+b+c)}$$
$$=\frac{3}{8}.$$

Равенство реализуется при $a=b=c=1$.

Вариант 3

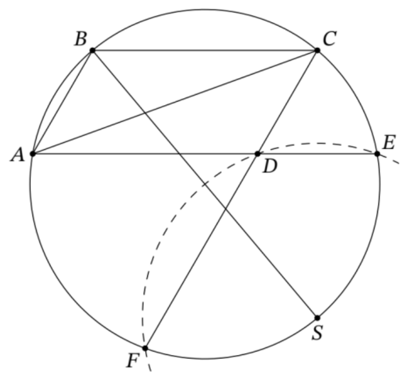
1. Число x таково, что выполняется равенство$\sin x\sin 3x=\frac{27}{64}$. Найдите $\cos x\cos 3x$.

Ответ. $-\frac{35}{64};\frac{13}{64}$.

Решение. Пусть $\alpha=\frac{11}{64}$, тогда $\alpha=\sin x\sin 3x=\sin x\,(3\sin x-4\sin^3 x)=3\sin^2 x-4\sin^4 x$. Обозначим $\sin^2 x$ за t и получим квадратное уравнение на t: $4t^2-3t+\alpha=0$, откуда $t=\frac{3\pm\sqrt{9-16\alpha}}{8}$. С другой стороны, $\cos x\cos 3x=(1-t)^2-3t(1-t)=4t^2-5t+1=-\alpha-2t+1$. Поэтому $\cos x\cos 3x=-\alpha-2t+1=-\frac{11}{64}-\frac{1}{4}\left(3\pm\sqrt{9-16\cdot\frac{11}{64}}\right)+1$, откуда получаем ответы: $-\frac{35}{64};\frac{45}{64}$.

2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAC=36^\circ$, $\angle BCA=16^\circ$. Лучи AD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках E и F соответственно. Точка S – центр описанной окружности треугольника DEF. Найдите угол между прямыми AC и BS.

Ответ. 70°.



Решение. Заметим, что поскольку $AB \parallel CE$, меры дуг AB и CE равны. Аналогично равны меры дуг BC и AF. Докажем, что точка S лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Вычислим $\angle ESF$, разложив его в сумму двух центральных углов описанной окружности треугольника DEF и заменив их на удвоенные вписанные:

$$\angle ESF = \angle ESD + \angle DSF == 2\angle EFD + 2\angle DEF =$$
$$= 2 \cdot (180^\circ - \angle EDF) = 360^\circ - 2\angle ABC.$$

С другой стороны, выразим угол EBF через меры дуг:

$$\angle EBF = \frac{\widehat{FE}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{AF} - \widehat{BA} - \widehat{CB} - \widehat{EC}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{CB} - \widehat{BA} - \widehat{CB} - \widehat{BA}}{2} =$$
$$= 180^\circ - \widehat{BA} - \widehat{CB} = \widehat{AC} - 180^\circ = 2\angle ABC - 180^\circ.$$

Таким образом, $\angle ESF + \angle EBF = 180^\circ$, то есть точки B, E, F, S лежат на одной окружности описанной окружности треугольника ABC.

Так как точка S равноудалена от точек E и F, то S – середина дуги $\widehat{FE}$. Зная углы $\angle BAC = 36^\circ$, $\angle BCA = 16^\circ$, можно найти меры всех дуг окружности:

$$\widehat{EC} = \widehat{BA} = 2 \cdot 16^\circ = 32^\circ; \quad \widehat{CB} = \widehat{AF} = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ;$$
$$\widehat{FS} = \widehat{SE} = \frac{360^\circ - \widehat{EC} - \widehat{CB} - \widehat{BA} - \widehat{AF}}{2} = \frac{360^\circ - 2 \cdot 32^\circ - 2 \cdot 72^\circ}{2} = 76^\circ.$$

Вычислим угол между хордами BS и AC по формуле через полусумму высекаемых дуг:

$$\angle(BS, CA) = \frac{\widehat{SC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{\widehat{SE} + \widehat{EC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{76^\circ + 32^\circ + 32^\circ}{2} = 70^\circ.$$

3. Какое наибольшее количество вершин правильного $160-$угольника можно отметить, чтобы никакие три отмеченные вершины не образовывали равнобедренный треугольник с углами 18°, 81°, 81?

Ответ. 112.

Решение. Стороны такого треугольника стягивают дуги, на которых уложено по 16, 72 и 72 сторон. Рассмотрим граф, который представляет собой 8 цикл длины 20. Если среди вершин цикла хотя бы 14 отмеченных, то какие-то три из них идут подряд, а значит, образуется искомый треугольник. При этом для 13 отмеченных вершин это уже неверно. Поэтому ответ $13 \cdot 8 = 112$.

4. Натуральные числа p, q, r таковы, что $q^2p - 1$ делится на $pr - 1$, $p^2r - 1$ делится на $qr - 1$ и $r^2q - 1$ делится на $pq - 1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел p, q, r – точный квадрат.

Решение. Если какое-то из чисел равно 1, то оно является квадратом. Пусть теперь все числа больше 1. Не умаляя общности, будем считать, что q – наименьшее из них. Поскольку $q^2p - 1$ делится на $pr - 1$, их разность $q^2p - pr = p(q^2 - r)$ тоже делится на $pr - 1$. Число p взаимно просто с $pr - 1$, поэтому $q^2 - r$ кратно $pr - 1$. Однако $q^2 - r < pr - 1$ (так как $q \le p, q \le r$ и $r > 1$) и $r - q^2 < pr - 1$, поэтому число $q^2 - r$ может быть равно лишь нулю. Таким образом, $r = q^2$.

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}$.

Ответ. $3\sqrt{2}$.

Решение. Воспользуемся неравенством $\sqrt{x+y} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ при $x, y \ge 0$. С учётом неравенства Коши мы получим:

$$\frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b}+\frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c}+\frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^3+b^2c^3}{b}+\frac{b^3+c^2a^3}{c}+\frac{c^3+a^2b^3}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^3}{b}+bc^3+\frac{b^3}{c}+ca^3+\frac{c^3}{a}+ab^3\right)\geq$$
$$\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{a^3}{b}+ab^3\right)+\left(\frac{b^3}{c}+bc^3\right)+\left(\frac{c^3}{a}+ca^3\right)\right)\geq\sqrt{2}(a^2b+b^2a+c^2a)=3\sqrt{2}.$$

Равенство реализуется при $a=b=c=1$.

Вариант 4

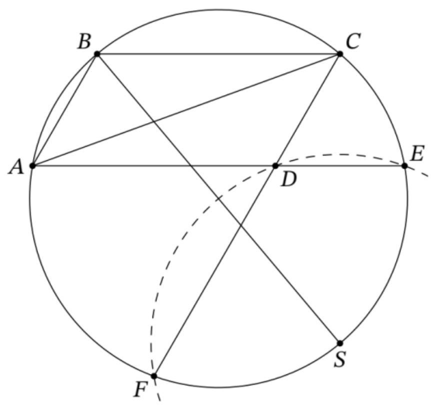
1. Число x таково, что выполняется равенство$\sin x\sin 3x=\frac{5}{16}$. Найдите $\cos x\cos 3x$.

Ответ. $\frac{7}{16}$; $-\frac{9}{16}$.

Решение. Пусть $\alpha=\frac{5}{16}$, тогда $\alpha=\sin x\sin 3x=\sin x\,(3\sin x-4\sin^3 x)=3\sin^2 x-4\sin^4 x$. Обозначим $\sin^2 x$ за t и получим квадратное уравнение на t: $4t^2-3t+\alpha=0$, откуда $t=\frac{3\pm\sqrt{9-16\alpha}}{8}$. С другой стороны, $\cos x\cos 3x=(1-t)^2-3t(1-t)=4t^2-5t+1=-\alpha-2t+1$. Поэтому $\cos x\cos 3x=-\alpha-2t+1=-\frac{5}{16}-\frac{1}{4}\left(3\pm\sqrt{9-16\cdot\frac{5}{16}}\right)+1$, откуда получаем ответы: $-\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$.

2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle BAC=32^\circ$, $\angle BCA=14^\circ$. Лучи AD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках E и F соответственно. Точка S – центр описанной окружности треугольника DEF. Найдите угол между прямыми AC и BS.

Ответ. 72°.



Решение. Заметим, что поскольку $AB\parallel CE$, меры дуг AB и CE равны. Аналогично равны меры дуг BC и AF. Докажем, что точка S лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Вычислим $\angle ESF$, разложив его в сумму двух центральных углов описанной окружности треугольника DEF и заменив их на удвоенные вписанные:
$$\angle ESF=\angle ESD+\angle DSF==2\angle EFD+2\angle DEF=$$
$$=2\cdot(180^\circ-\angle EDF)=360^\circ-2\angle ABC.$$

С другой стороны, выразим угол EBF через меры дуг:
$$\angle EBF=\frac{\widehat{FE}}{2}=\frac{360^\circ-\widehat{AF}-\widehat{BA}-\widehat{CB}-\widehat{EC}}{2}=\frac{360^\circ-\widehat{CB}-\widehat{BA}-\widehat{CB}-\widehat{BA}}{2}=$$
$$=180^\circ-\widehat{BA}-\widehat{CB}=\widehat{AC}-180^\circ=2\angle ABC-180^\circ.$$

Таким образом, $\angle ESF+\angle EBF=180^\circ$, то есть точки B, E, F, S лежат на одной окружности описанной окружности треугольника ABC.

Так как точка S равноудалена от точек E и F, то S – середина дуги $\widehat{FE}$. Зная углы $\angle BAC=32^\circ$, $\angle BCA=14^\circ$, можно найти меры всех дуг окружности:
$$\widehat{EC}=\widehat{BA}=2\cdot 14^\circ=28^\circ;\quad \widehat{CB}=\widehat{AF}=2\cdot 32^\circ=64^\circ;$$
$$\widehat{FS}=\widehat{SE}=\frac{360^\circ-\widehat{EC}-\widehat{CB}-\widehat{BA}-\widehat{AF}}{2}=\frac{360^\circ-2\cdot 28^\circ-2\cdot 64^\circ}{2}=88^\circ.$$

Вычислим угол между хордами BS и AC по формуле через полусумму высекаемых дуг:

$$\angle(BS, CA) = \frac{\widehat{SC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{\widehat{SE} + \widehat{EC} + \widehat{BA}}{2} = \frac{88^\circ + 28^\circ + 28^\circ}{2} = 72^\circ.$$

3. Какое наибольшее количество вершин правильного $80-$угольника можно отметить, чтобы никакие три отмеченные вершины не образовывали равнобедренный треугольник с углами $18^\circ, 81^\circ, 81^\circ$?

Ответ. 52.

Решение. Стороны такого треугольника стягивают дуги, на которых уложено по 8, 36 и 36 стороны. Рассмотрим граф, который представляет собой 4 цикла длины 20. Если среди вершин цикла хотя бы 14 отмеченных, то какие-то три из них идут подряд, а значит, образуется искомый треугольник. При этом для 13 отмеченных вершин это уже неверно. Поэтому ответ $13 \cdot 4 = 52$.

4. Натуральные числа p, q, r таковы, что $q^2p - 1$ делится на $pr - 1$, $p^2r - 1$ делится на $qr - 1$ и $r^2q - 1$ делится на $pq - 1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел p, q, r – точный квадрат.

Решение. Если какое-то из чисел равно 1, то оно является квадратом. Пусть теперь все числа больше 1. Не умаляя общности, будем считать, что q – наименьшее из них. Поскольку $q^2p - 1$ делится на $pr - 1$, их разность $q^2p - pr = p(q^2 - r)$ тоже делится на $pr - 1$. Число p взаимно просто с $pr - 1$, поэтому $q^2 - r$ кратно $pr - 1$. Однако $q^2 - r < pr - 1$ (так как $q \le p, q \le r$ и $r > 1$) и $r - q^2 < pr - 1$, поэтому число $q^2 - r$ может быть равно лишь нулю. Таким образом, $r = q^2$.

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab} + \frac{b^4+c^4}{a^2+4bc} + \frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$.

Ответ. $\frac{6}{5}$.

Решение. По неравенствам для средних:

$$\frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} \ge \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 2a^2 + 2b^2} = \frac{a^4 + b^4}{3 + a^2 + b^2} \ge$$
$$\ge \frac{(a^2 + b^2)^2}{2(3 + a^2 + b^2)} = \frac{(3 - c^2)^2}{2(6 - c^2)} = \frac{1}{2}\left(-c^2 + \frac{9}{6 - c^2}\right).$$

Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в A. Складывая эти неравенства, мы получим

$$A \ge \frac{1}{2}\left(-a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9}{6 - a^2} + \frac{9}{6 - b^2} + \frac{9}{6 - c^2}\right) \ge\ge \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{81}{18 - (a^2 + b^2 + c^2)}\right) = \frac{6}{5}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Составьте последовательность из 8 натуральных чисел, удовлетворяющую следующим условиям: 1) любые соседние числа взаимно просты, 2) любые числа, не являющиеся соседними, имеют общие множители, 3) последовательность содержит число 12. Члены последовательности запишите разложенными на простые множители.

Решение. $12 = 3 \cdot 2^2$. Пусть $p_1, p_2, p_3, \dots$ – последовательность различных простых сел. $p_1 = 2, p_2 = 3$. 8 требуемых чисел можно составить, например, таким образом: 1) $p_1{}^2 p_2$, 2) $p_3 p_4$, 3) $p_1 p_5 p_6$, 4) $p_2 p_3 p_7$, 5) $p_1 p_4 p_5 p_8$, 6) $p_2 p_3 p_6$, 7) $p_1 p_4 p_5 p_7$, 8) $p_2 p_3 p_6 p_8$. Следующие простые числа пусть будут $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11, p_6 = 13$, $p_7 = 17, p_8 = 19$. Тогда последовательность может иметь вид

1	2	3	4	5	6	7	8
$3 \cdot 2^2$	$5 \cdot 7$	$2 \cdot 11 \cdot 13$	$3 \cdot 5 \cdot 17$	$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	$3 \cdot 5 \cdot 13$	$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$	$3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ошибка в записи верной последовательности – 18 баллов. Одна ошибка – 10 баллов. Две ошибки – 5 баллов. Неверное решение – 0 баллов.*

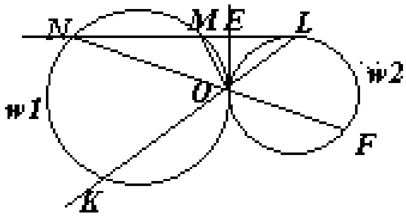
2. В выбранном множестве натуральных чисел более 90% чисел кратны 6 и более 90% кратны 14. Докажите, что среди чисел этого множества, кратных 21, более 90% чётных.

Решение. Рассмотрим делители $2, 3, 7$. Пусть a чисел кратны и 2, и 3, и 7, b – кратны только 2 и 3, c – кратны только 2 и 7, d – кратны только 3 и 7, x – количество чисел, не входящих в указанные подмножества. Тогда $a + b$ – количество чисел, кратных 6, а $c + d + x$ – количество чисел, не кратных 6. По условию числа, кратные 6, составляют не менее 90% всех чисел, тогда числа, не кратные 6, составляют не более 10% чисел, то есть $a + b > 9(c + d + x)$. Аналогично, $a + c > 9(b + d + x)$. Сложим эти неравенства: $2a + b + c > 9(b + c + 2d + 2x)$, или $2a > 18d + 8(b + c) + 18x$. Отсюда $a > 9d +$

$4(b+c)+9x$, тем более $a>9d$. Но a – количество чётных чисел, кратных 21, d – количество нечётных чисел, кратных 21, $a+d$ – количество чисел, кратных 21. Неравенство $a>9d$ означает, что $\frac{d}{a}<\frac{1}{9}$. Тогда $\frac{a}{a+d}=\frac{1}{1+d/a}>\frac{1}{1+\frac{1}{9}}=\frac{9}{10}$. Таким образом, a составляет не менее 90% от $a+d$, что и требовалось доказать.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. Окружности ω_1 и ω_2 внешним образом касаются друг друга в точке O. Через точку L окружности ω_2 проведена касательная к этой окружности, пересекающая ω_1 в точках M и N. На прямой LO вне окружностей взята точка K, из которой опущены перпендикуляры KP и KR соответственно на прямые OM и NO. Докажите, что KP равно KR.



Решение. Продолжим прямую NO до второго пересечения с окружностью в точке F. Проведем общую касательную OE, где E – точка пересечения касательной с прямой MN. В левой окружности $\angle MOE=\angle MNO$ (как угол между касательной и хордой MO и равный ему угол, опирающийся на дугу MO). $\angle LFO$ =1/2 дуги LO, $\angle ELO=\angle EOL$, так как это углы между касательными и хордой LO, значит, $\angle LFO=\angle ELO=\angle EOL$. $\angle MOL=\angle MOE+\angle EOL$, $\angle LOF=\angle ENO+\angle ELO$ (как внешний угол треугольника LNO). Но $\angle ENO=\angle MNO=\angle MOE$, $\angle ELO=\angle EOL$, то есть $\angle LOF=\angle MOE+\angle EOL=\angle MOL$. Таким образом, LO – биссектриса угла $\angle MOF$, и точки биссектрисы равноудалены от сторон этого угла.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. Кате, Лене и Мише надо подстричь газон, полить грядки, прополоть клумбу. Чтобы определить, кто что будет делать, они поочерёдно бросают игральный кубик (на гранях кубика нанесены числа $1,2,3,4,5,6$). Первой бросает Катя, потом Лена, потом Миша, и дальше в том же порядке (бросание может продолжаться неограниченно долго). Тот, у кого первым выпадет чётное число, будет стричь газон. После этого все трое продолжают бросать кубик, не нарушая очерёдности, но смотрят только на результаты оставшихся двоих. Тот из оставшихся, у кого быстрее выпадет чётное число, будет поливать грядки. Оставшийся будет пропалывать клумбу. Какова вероятность, что Лена не достанется ни подстригание газона, ни прополка клумбы?

Ответ. $\frac{3}{7}$.

Решение. Найдём вероятность P_k того, что у Лены первое чётное число выпадет на её $(k+1)$-м броске $(k=0,1,2,\dots)$. До этого она сделала k бросков, и числа выпадали нечётные, вероятность этого $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. На $(k+1)$-м броске у Лены чётное число, значит, надо умножить на $\frac{1}{2}$. По условию, Лена может быть только второй, значит, до неё у кого-то выпадало чётное число. Пусть это было у Кати. Катя сделала $k+1$ бросок, и у неё было хотя бы одно чётное число, вероятность этого $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. Тогда у Миши чётное число не выпадало, а ходов он сделал k, вероятность $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Итак, если первое чётное число выпало у Кати, вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right), k\geq 0$. Если первое чётное число выпало у Миши, вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right), k \geq 0$. Эти события несовместны, поэтому вероятность P_k равна их сумме: $P_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}$.

События «У Лены выпадает первое чётное число на её $(k+1)-$м броске» при разных k несовместны. Поэтому, чтобы получить ответ, надо просуммировать найденные вероятности P_k по k от 0 до ∞. $P=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}-2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}$. По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии первая сумма равна $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$. Вторая сумма равна $\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$. Третья сумма равна $\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$. Подставляя, получаем $\frac{2}{3}-2\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{3}=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$.

Проверка. Вероятность того, что первый игрок выигрывает вторым, равна $\frac{4}{21}$ *(см. вариант 2). Найдём вероятность того, что третий игрок выигрывает вторым.* $2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}$. *Суммируя, получаем:* $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}, \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}-\frac{2}{7}=\frac{14-6}{21}=\frac{8}{21}$, $\frac{8}{21}+\frac{4}{21}+\frac{3}{7}=\frac{12+9}{21}=1$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. Решите в натуральных числах уравнение $(x^2-y)(x+y^2)=2(x-y)^3$.

Ответ.(1,1).

Решение. Положим $x=da, y=db$, где $d=$ НОД(x,y). Тогда $(da^2-b)(a+db^2)=2d(a-b)^3$. Отсюда следует, что $-db^3\equiv -2db^3(mod\ a)$ или $db^3\equiv 0(mod\ a)$. Так как НОД$(a,b)=1$, имеем $d\equiv 0(mod\ a)$. Аналогично можно доказать, что $d\equiv 0(mod\ b)$. Следовательно, d делится и на a, и на b, а значит, и на ab.

Пусть $d=kab$, где $k-$ натуральное число. Подставим в равенство $(da^2-b)(a+db^2)=2d(a-b)^3$: $(kaba^2-b)(a+kabb^2)=2kab(a-b)^3$. Сократим на ab: $(ka^3-1)(1+kb^3)=2k(a-b)^3$. Отсюда следует, что $-1\equiv 0(mod\ k)$. Это означает, что $k=1$. Таким образом, $(a^3-1)(1+b^3)=2(a-b)^3$. Если $a=1$, то $b=a=1$, $d=kab=1$. Получаем решение (1,1). Пусть $a>1$. Обозначим $l=a-b$. Из равенства $(a^3-1)(1+b^3)=2(a-b)^3$ следует, что $a>b$, то есть $l\geq 1$. Подставим в это равенство l: $((l-b)^3-1)(1+b^3)=2l^3$. Но $((l+b)^3-1)(1+b^3)\geq((l+1)^3-1)(1+1^3)=2(l^3+3l^2+3l)>2l^3$. Значит, других решений, кроме (1,1), нет.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов (найденное решение* (1, 1) *– 1 балл, доказательство, что нет других решений – 19 баллов, баллы суммируются). Пробел в верном доказательстве – 14 баллов. Ошибка в доказательстве (в основном, верном) – 9 баллов. При отсутствии верного доказательства за небольшие полезные продвижения – 1-4 балла.*

Вариант 2

1. Составьте последовательность из 8 натуральных чисел, удовлетворяющую следующим условиям: 1) любые соседние числа взаимно просты, 2) любые числа, не являющиеся соседними, имеют общие множители, 3) последовательность содержит число 15. Члены последовательности запишите разложенными на простые множители.

Решение. Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ – последовательность различных простых чисел. 8 требуемых чисел можно составить, например, таким образом:
1) p_1p_2, 2) p_3p_4, 3) $p_1p_5p_6$, 4) $p_2p_3p_7$, 5) $p_1p_4p_5p_8$, 6) $p_2p_3p_6$, 7) $p_1p_4p_5p_7$, 8) $p_2p_3p_6p_8$. $15 = 3 \cdot 5$; пусть это будет p_1p_2. Следующие простые числа пусть будут $p_3 = 2$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, $p_8 = 19$. Тогда последовательность может иметь вид

1	2	3	4	5	6	7	8
$3 \cdot 5$	$2 \cdot 7$	$3 \cdot 11 \cdot 13$	$5 \cdot 2 \cdot 17$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	$5 \cdot 2 \cdot 13$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$	$5 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 19$

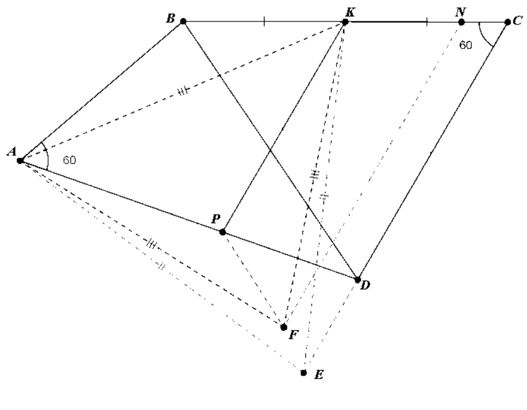
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ошибка в записи верной последовательности – 18 баллов. Одна ошибка – 10 баллов. Две ошибки – 5 баллов. Неверное решение – 0 баллов.*

2. В выбранном множестве натуральных чисел более 70% чисел кратны 10 и более 70% кратны 6. Докажите, что среди чисел этого множества, кратных 15, менее 30% нечётных.

Решение. Рассмотрим делители $2, 3, 5$. Пусть a чисел кратны и 2, и 3, и 5, b – кратны только 2 и 3, c – кратны только 2 и 5, d – кратны только 3 и 5, x – количество чисел, не входящих в указанные подмножества. Тогда $a + b$ – количество чисел, кратных 6, а $c + d + x$ – количество чисел, не кратных 6. По условию, числа, кратные 6, составляют не менее 70% всех чисел, тогда числа, не кратные 6, составляют не более 30% чисел, то есть $a + b > 7/3(c + d + x)$. Аналогично, $a + c > 7/3(b + d + x)$. Сложим эти неравенства: $2a + b + c > 7/3(b + c + 2d + 2x)$, или $6a > 14d + 4(b + c) + 14x$. Отсюда $a > 7/3\, d + 2/3\,(b + c) + 7/3\, x$, тем более $a > 7/3\, d$. Но a – количество чётных чисел, кратных 15, d – количество нечётных чисел, кратных 15, $a + d$ – количество чисел, кратных 15. Неравенство $a > 7/3\, d$ означает, что $\frac{a}{d} > \frac{7}{3}$. Тогда $\frac{d}{d+a} = \frac{1}{1+{a}/{d}} < \frac{1}{1+\frac{7}{3}} = \frac{3}{10}$. Значит, d составляет менее 30% от $a + d$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAD = \angle BCD = 60°$. Через точку K, являющуюся серединой стороны BC, проведена прямая параллельно CD. Эта прямая пересекает AD в точке P. На прямой CD выбрана точка E так, что $AE = KE$. Известно, что $BA = AP$. Докажите, что $\angle KEA = 60°$.



Решение. Построим на отрезке AK равносторонний треугольник KAF (в той полуплоскости, где находится точка E).Из условия следует, что $\angle BAP = 60°$ и треугольник BAP равносторонний. Тогда $\angle BAP = \angle KAY = 60°, \angle BAK = \angle PAF$. Треугольники ABK и APF равны по двум сторонам и углу между ними, так как $BA = AP, AK = AF$. $\angle FPK = 360° - \angle KPA - \angle APF = 360° - \angle CDA - \angle ABK$. Но $\angle CDA + \angle ABK = 360° - 60° - 60° = 240°$. Поэтому $\angle FPK = 360° - 240° = 120°$. Из параллельности PK и

DC следует, что $\angle PKC = 120^{\circ}$ (так как $\angle BCD = 60°$). Проведём через F прямую, параллельную CD; пусть она пересекает BC в точке N. Трапеция $FPKN$ – равнобедренная, поскольку $\angle FPK = \angle PKN$. Отсюда $PF = KN$. С другой стороны, $PF = BK$ (так как треугольники ABK и KPF равны), и $BK = KC$ (так как K – середина стороны BC). Значит, $KN = BK$. Это означает, что N совпадает с C, и тогда F лежит на DC. Обе точки, F и E, лежат на DC и являются вершинами равнобедренного треугольника с основанием AK, то есть каждая из них образуется как пересечние DC и серединного перпендикуляра AK. Значит, эти точки совпадают. Следовательно, $\angle KEA = \angle KFA = 60°$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. При вращении игрового барабана стрелка равновероятно останавливается на одном из 10 секторов. 5 секторов чёрные, 5 секторов белые. Антон, Борис и Сергей поочерёдно вращают барабан (именно в таком порядке). После Сергея опять вращает Антон, затем Борис и т.д. (процесс может продолжаться неограниченно долго). Событие A = «У Антона впервые при его ходах стрелка остановилась на белом секторе», событие B = «У Бориса впервые при его ходах стрелка остановилась на белом секторе», Событие C = «У Сергея впервые при его ходах стрелка остановилась на белом секторе». Какова вероятность, что событие A осуществится вторым из событий A, B, C?
Ответ. $\frac{4}{21}$.
Решение. Найдём вероятность P_k того, что событие A осуществится вторым из событий A, B, C на $(k+1)$-м ходу Антона. До этого каждый сделал по k ходов. У Антона не было белого сектора, вероятность этого $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. На $(k+1)$-м ходу у Антона белый сектор, значит, надо умножить на $\frac{1}{2}$, получим $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. Если Антон второй, то до него было попадание в белый сектор. Пусть это попадание было у Бориса. Борису мог и дальше выпадать белый сектор, то есть обязательно было хотя бы одно попадание за его первые k ходов. Вероятность этого равна $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Сергей тогда не попадал в белый сектор, вероятность го $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Итак, если первый раз в белый сектор попал Борис, вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right), k \geq 0$. Если первый раз в белый сектор попал Сергей, вероятность такая же. Эти два события несовместны, поэтому их вероятности складываются, и вероятность того, что событие A осуществилось вторым на $(k+1)$-м ходу Антона, равна $P_k = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$. Чтобы получить ответ, надо просуммировать найденные вероятности по k от 0 до ∞. $P = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$. По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии первая сумма равна $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. Вторая сумма равна $\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$. Вычитая, получаем $\frac{4}{3} - \frac{8}{7} = \frac{28-24}{21} = \frac{4}{21}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Верный ход решения, но допущена ошибка – 13 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. Решите уравнение $(x+y-1)^y = y^x$ в натуральных числах.
Ответ. (1, 1).
Решение. Воспользуемся следующим утверждением: если $a^m = b^n$, то для некоторых t, c, d $a = t^c$, $b = t^d$ (все буквы обозначают натуральные числа).
Если $y = 1$, то $x = 1$. Далее считаем $y > 1$. Пусть $x + y - 1 = t^c$, $y = t^d$, при этом $c \geq d$. В частности, $x - 1$ делится на y. Пусть $x - 1 = ky$. Тогда $\left((k+1)y\right)^y = y^{ky+1}$. Отсюда $a^y = y$, где $a = \frac{(k+1)y}{y^k} = \frac{k+1}{y^{k-1}}$. Рассмотрим число a. Оно рационально, как отношение целых чисел. Поскольку в соотношении $a^y = y$ число y– целое, рациональное число a должно быть целым. Так как $y > 1, a > 1$. Тогда $y = a^y \geq 2^y$, что невозможно. Таким образом, решений при $y > 1$ не существует. При $y = 1$ единственное решение (1, 1).
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов (найденное решение* (1, 1) *– 1 балл, доказательство, что нет других решений – 19 баллов, баллы суммируются). Пробелы в верном доказательстве – 14 баллов. Ошибка в верном (в основном) доказательстве – 9 баллов. При отсутствии верного доказательства за небольшие полезные продвижения – 1-4 балла.*

Вариант 3

1. Составьте последовательность из 9 натуральных чисел, удовлетворяющую следующим условиям: 1) любые соседние числа взаимно просты, 2) любые числа, не являющиеся соседними, имеют общие множители, 3) последовательность содержит число 10. Члены последовательности запишите разложенными на простые множители.
Решение. Пусть $p_1, p_2, p_3, \dots$ – последовательность различных простых чисел. 9 требуемых чисел можно составить, например, таким образом: 1) p_1p_2, 2) p_3p_4, 3) $p_1p_5p_6$, 4) $p_2p_3p_7p_8$, 5) $p_1p_4p_5p_9$, 6) $p_2p_3p_6p_{10}$, 7) $p_1p_4p_5p_7$, 8) $p_2p_3p_6p_9$, 9) $p_1p_4p_5p_8p_{10}$. $10 = 2 \cdot 5$. $p_1 = 2, p_2 = 5$. Следующие простые числа пусть будут $p_3 = 3$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11, p_6 = 13$, $p_7 = 17, p_8 = 19$. Тогда последовательность может иметь вид
$2 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $2 \cdot 11 \cdot 13$, $5 \cdot 3 \cdot 17$, $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$, $5 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 23$, $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$, $5 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 19$, $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ошибка в записи верной последовательности – 18 баллов. Одна ошибка – 10 баллов. Две ошибки – 5 баллов. Неверное решение – 0 баллов.*

2. В группе людей Иванов Ивановых более, чем в 3 раза больше, чем остальных. И Иванов Ивановичей более, чем в 3 раза больше, чем остальных. Докажите, что среди Ивановых с отчеством Иванович более 75% имеют имя Иван.
Решение. Пусть Иванов Ивановичей Ивановых – a, Иванов Ивановых с другим отчеством – b, Иванов Ивановичей с другой фамилией – c, Ивановых с отчеством Иванович, но с другим именем – d. Через x обозначим число людей, не входящих в указанные подмножества. Тогда $a + b$ – число Иванов Ивановых, $c + d + x$ – число остальных людей. По условию, $a + b > 3(c + d + x)$. Аналогично, $a + c$ – число Иванов Ивановичей, $b + d + x$ – число остальных людей, $a + c > 3(b + d + x)$. Сложим эти неравенства: $2a + b + c > 3(b + c + 2d + 2x)$, или $2a > 6d + 2(b + c) + 6x$. Отсюда $a > 3d + b + c + 3x$, тем более a > 3d. Но a – число Иванов Ивановичей Ивановых, d – число Ивановых с отчеством Иванович, но с другим именем, $a + d$ – число Ивановых с отчеством Иванович. Неравенство $a > 3d$ означает, что $\frac{d}{a} < \frac{1}{3}$, $\frac{a}{a+d} = \frac{1}{1+d/a} > \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$. Значит, a составляет более 75% от $a + d$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

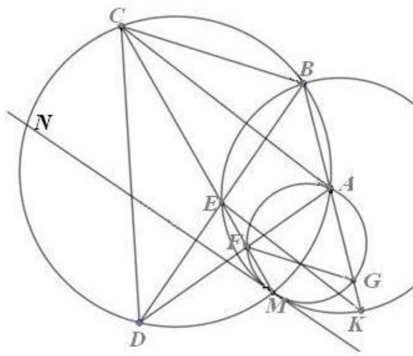
3. Маша, Нина и Света поочерёдно бросают правильную монету. Первой бросает Маша, потом Нина, потом Света, и дальше в том же порядке (бросание может продолжаться неограниченно долго). Каждая девочка может один раз получить приз. Приз даётся, когда у девочки первый раз при её бросках выпадает «герб». Если у девочки, уже получившей приз, повторно выпадает «герб», то второй раз приз не дают. Получение приза не влияет на порядок очереди. Какова вероятность, что Маша получит приз третьей?

Ответ. $\frac{5}{21}$.

Решение. Найдём вероятность P_k того, что Маша получит приз третьей на своём $(k+1)$-м броске $(k = 0, 1, 2, \dots)$. До этого каждый сделал по k бросков. У Маши не было приза, вероятность этого $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. На $(k+1)$-м броске у Маши герб, значит, надо умножить на $\frac{1}{2}$. У Нины был хотя бы один герб за k бросков, вероятность этого $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Такая же вероятность и для Светы. Получаем, что $P_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. События «Получение Машей приза на её $(k+1)-$м броске» при разных k несовместны. Поэтому, чтобы получить ответ, надо просуммировать найденные вероятности P_k по k от 0 до ∞. $P = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}$. По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии первая сумма равна $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Вторая сумма равна $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. Третья сумма равна $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$. Подставляя, получаем $1 - \frac{4}{3} + \frac{4}{7} = \frac{21-28+12}{21} = \frac{5}{21}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

4. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Через точку F, выбранную на стороне AD, проведена прямая CF. DB пересекается с CF в точке E. Через точку F проведена прямая параллельно BC. Эта прямая пересекает продолжение стороны BA за A в точке G. Через точку E проведена прямая параллельно AC. Эта прямая пересекает продолжение стороны BA за A в точке K. Докажите, что описанные окружности треугольников AGF и BKE касаются.



Решение. Пусть CF пересекает окружность, описанную около четырёхугольника $ABCD$, в точках C и M. Покажем, что точка M принадлежит описанным окружностям треугольников AGF и BKE. $\angle FMA = 180° - \angle ABC$, так как это противоположные углы вписанного четырёхугольника $CMAB$. $180° - \angle ABC = \angle FGA$, так как $FG \,||\, BC$. Из равенства углов $\angle FMA$ и $\angle FGA$ следует, что точки F, A, G, M лежат на одной окружности, и это описанная окружность треугольника AGF. Аналогично, $\angle EMB = \angle CMB = \angle CAB$ (как опирающиеся на одну дугу), $\angle CAB = \angle EKB$, так как $AC \,||\, KE$. откуда следует, что точки E, B, K, M лежат на одной окружности, и это описанная окружность треугольника BKE. Проведём касательную к окружности AGF в точке M и пусть N – вторая точка пересечения этой касательной и окружности $DABC$. $\angle NMF = \angle DAM$ (так как $\angle NMF$ – угол между касательной и хордой FM, а $\angle DAM$ – вписанный угол, опирающийся на хорду FM). $\angle DAM = \angle DBM$, как вписанные углы. $\angle DBM = \angle EBM = \angle EKM$, значит, $\angle NMF = \angle EKM$, но $\angle NMF = \angle NME$ – угол между касательной и хордой ME окружности

BKE, а $\angle EKM$ – вписанный угол этой окружности, опирающийся на хорду ME). Значит, эта прямая касается в точке M окружности BKE. Следовательно описанные окружности треугольников AGF и BKE касаются в точке M.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробелы в доказательстве – 15 баллов. Есть продвижение – 5-10 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

5. Целые числа x и y удовлетворяют равенству $y^2 = 8x^2 + 2x$. Докажите, что число $6x + 2y + 1$ является точным квадратом.
Решение. Легко видеть, что x и y должны быть чётными. Если $x = 2a, y = 2b$, то $4b^2 = 32a^2 + 4a$, $b^2 = a(8a + 1)$, при этом НОД$(a, 8a + 1) = 1$. Если $a < 0$, то из равенства $b^2 = a(8a + 1)$ следует, что $8a + 1 = -c^2$ для некоторого целого c, но это невозможно. Значит, $a \geq 0$, и, как следствие, $x \geq 0$. Положим $t = 6x + 2y + 1$. Для чётных неотрицательных x имеем $y^2 = 8x^2 + 2x \leq 9x^2$, то есть $y \leq 3x$. Отсюда следует, что $t \geq 1$. Подставив $y = \frac{t-6x-1}{2}$ в уравнение $y^2 = 8x^2 + 2x$ и решив последнее как квадратное относительно x, получаем $x = \frac{3t-1}{2} \pm \sqrt{t(2t-1)}$.
Но x – целое число, поэтому $t(2t - 1)$ должно быть точным квадратом. Поскольку НОД$(t, 2t - 1) = 1$, оба числа, t и $2t - 1$ должны быть точными квадратами.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Небольшой пробел в верном решении – 15-18 баллов. Не рассматриваются отрицательные значения x – 15 баллов. Ошибка в верном (в основном) решении – 10 баллов. При отсутствии верного решения найдены три пары (x, y) удовлетворяющие условию – 5 баллов, две пары (x, y) удовлетворяющие условию – 3 балла, одна пара – 1 балл. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1балл.*

Вариант 4

1. На гранях кубика нанесены точки, их $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Соня заклеила одну точку, которую случайным образом равновероятно выбрала среди всех точек. После этого Соня бросила кубик. Какова вероятность, что выпала грань с 2 или 4 точками (заклеенная точка не учитывается)?
Ответ. $\frac{22}{63}$.
Решение 1. Всего точек было 21. Граней с 2 или 4 точками после заклеивания может быть 0, 1, 2. Грань с 2 точками после заклеивания одна, если точка была заклеена не на грани 2 и не на грани 3 (грани занумерованы по исходному числу точек). Вероятность этого $\frac{16}{21}$. Граней с 2 точками две, если точка была заклеена на грани 3. Вероятность этого $\frac{3}{21}$. Вероятность того, что выпала грань с 2 точками, равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{16}{21} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{21} = \frac{22}{6 \cdot 21}$. Грань с 4 точками одна, если точка была заклеена не на грани 4 и не на грани 5. Вероятность этого $\frac{12}{21}$. Граней с 4 точками две, если точка была заклеена на грани 5. Вероятность этого $\frac{5}{21}$. Вероятность того, что выпала грань с 4 точками, равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{12}{21} + \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{21} = \frac{22}{6 \cdot 21}$. Поскольку события {точка заклеена на -й грани} несовместны, вероятности складываются: $P = \frac{22}{6 \cdot 21} + \frac{22}{6 \cdot 21} = \frac{22}{63}$.
Решение 2. Найдём вероятность того, что выпала грань с чётным числом точек. Всего точек было 21. Будем называть грани чётными и нечётными по чётности числа точек на них. Вероятность того, что точка была заклеена на чётной грани, равна $\frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. После этого чётных граней осталось 2, и вероятность, что выпадет чётная грань, равна $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{21}$. Вероятность того, что точка была заклеена на нечётной грани, равна $\frac{1+3+5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

После этого чётных граней стало 4, и вероятность, что выпадет чётная грань, равна $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$. Поскольку события несовместны, вероятности складываются: $P = \frac{4}{21} + \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$. Кроме 2 и 4, чётными значениями являются 0 и 6. Чтобы грань с 0 появилась, должна быть выбрана точка с грани 1, вероятность этого $\frac{1}{21}$. Чтобы грань с 6 сохранилась, должна быть выбрана точка не с грани 6, вероятность этого $\frac{15}{21}$. Вероятность выпадения 0 или 6 равна $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{21} + \frac{15}{21}\right) = \frac{8}{3 \cdot 21}$. Тогда вероятность выпадения грани с 2 или 4 точками равна $\frac{10}{21} - \frac{8}{3 \cdot 21} = \frac{22}{63}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточное обоснование, пробел в доказательстве – 15 баллов. Арифметическая ошибка – 10 баллов, ошибка при окончательном подсчёте – 15 баллов. Решение верно начато, но не закончено или содержит ошибку – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

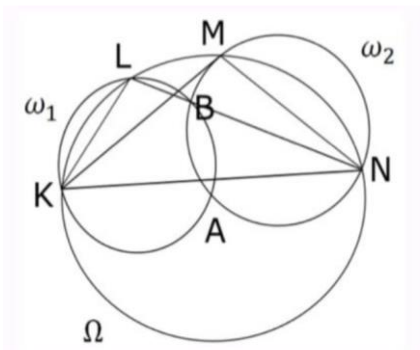
2. Коля записал все составные натуральные числа, не превышающие 40. С каждым числом отдельно он хочет проделать следующую операцию: расположить все делители данного числа, не равные 1, на окружности так, чтобы соседние делители не были взаимно просты. Со сколькими числами из записанных Колей это возможно сделать?
Ответ. 15.
Решение. Если число является степенью простого числа, то любое расположение подходит – возможно. Если число равно произведению простых чисел p и q, то делителей всего 3: p, q, pq, и взаимно простые числа p и q обязательно будут рядом – невозможно. Если число имеет вид $p^m q^n$, где хотя бы одно из чисел $m, n \geq 2$, то возможно. Действительно, пусть $n \geq 2$. Расположим подряд все делители, содержащие p, причём в начале дуги поместим pq, а в конце – pq^2. На другой дуге между этими числами поместим все делители, содержащие только q. Для чисел вида pqr это также возможно, что показывает следующее размещение. Расположим подряд все делители, содержащие p, причём в начале дуги поместим pq, а в конце – pr. После pr поместим все делители, содержащие r, и последним пусть будет qr. Между pq и qr будут располагаться все делители, содержащие q. Другого вида составное число, не превышающее 40, иметь не может. Итак, надо сосчитать, сколько составных чисел, и сколько из них имеет вид pq. Простые числа: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$. Вычеркнув их и 1, получим 27 составных чисел. Из них имеют вид pq $(q > p)$ следующие. Если $p = 2$, $3 \leq q \leq 19$ (7 чисел). Если $p = 3$, $5 \leq q \leq 13$ (4 числа). Если $p = 5, q = 7$ (1 число). Итак, всего для $7 + 4 + 1 = 12$ чисел данная операция невозможна. Для $27 - 12 = 15$ чисел возможна.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка при верном решении – 15 баллов. Есть пробел или небольшая ошибка в доказательстве (в основном, верном) – 10 баллов. Не доказано, что расположение возможно для чисел вида* $p^m q^n$ *– минус 7 баллов. Не доказано, что расположение возможно для чисел вида* pqr *– минус 7 баллов. В каждом из этих случаев, если доказательство проводится, но оно плохо обосновано – минус 5 баллов. При полном переборе пропущено одно число – 10 баллов. При отсутствии верного решения есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*

3. В ряд стоят 9 корзин с яблоками, в корзине с номером k лежит $2k$ яблок, $k = 1, 2, \ldots, 9$. Потом корзины в ряду случайным образом переставили. Оказалось, что суммарное количество яблок из k первых слева корзин в ряду можно поровну поделить между k людьми для всех k, $k = 1, 2, \ldots, 9$. Сколько существует таких перестановок?
Ответ. $3 \cdot 2^7 = 384$.
Решение. Рассмотрим благоприятную расстановку корзин, при которой выполняется требование. Всего яблок $2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = n(n+1)$. Это число делится на n при любой расстановке

корзин. Пусть в самой правой корзине лежит $2a_n$ яблок, где $a_n \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда в корзинах слева лежит $n(n+1) - 2a_n$ яблок, и это число должно делиться на $n-1$: $n(n+1) - 2a_n = (n-1)p$, или $(n+2)(n-1) + 2 - 2a_n = (n-1)p$. Отсюда $2(a_n - 1)$ делится на $n-1$. Для чётного n это возможно при $a_n = 1$ или $a_n = n$. Если n нечётное, то возможен также случай $a_n = \frac{n+1}{2}$. Но если $a_n = \frac{n+1}{2}$, то осталось $n(n+1) - (n+1) = n^2 - 1$ яблок, и надо убрать чётное число яблок, чтобы оставшаяся сумма делилась на $n-2$. $n^2 - 1 - 2a_{n-1} = (n+2)(n-2) + 3 - 2a_{n-1} = (n-2)k$. $2a_{n-1} - 3$ кратно $(n-2)$ только при $a_n = \frac{n+1}{2}$, но это число уже использовано. Таким образом, на последнем месте должна стоять или корзина с номером n, или корзина с номером 1. Обозначим A_n число благоприятных перестановок n корзин с $2, 4, \dots, 2n$ яблоками. В первом случае $A_n = A_{n-1}$ (поскольку на последнем месте может быть единственная корзина). Во втором случае на последнем месте корзина с 2 яблоками, перед ней некая перестановка корзин с $4, \dots, 2n$ яблоками. Запишем эти числа яблок как $2(1+1), 2(2+1), 2(3+1), \dots, 2(n-1+1)$. Очевидно, что если складываем k слагаемых данного вида, то они делятся на k тогда и только тогда, когда делилась на k сумма слагаемых без добавленных единиц, то есть слагаемые из множества $\{2, 4, \dots, 2(n-1)\}$. Значит, и в этом случае (когда на последнем месте корзина номер 1), $A_n = A_{n-1}$. Объединяя результаты, получаем: $A_n = 2A_{n-1}$. Последовательно находим: $A_9 = 2A_8 = 4A_7 = 8A_6 = 16A_5 = 32A_4 = 64A_3$. Закономерность нарушается только при переходе от A_3 к A_2, поскольку, если последовательность состоит из трёх чётных чисел, сумма которых делится на 3, то на последнем месте может стоять любое число, так как делимость на 2 имеет место автоматически. A_2, очевидно, равно 2. Тогда $A_9 = 64 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2^7 = 384$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка при верном решении – 15 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Недостаточное обоснование – 10 баллов. При отсутствии верного решения есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов. Бездоказательные утверждения не оцениваются.*

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B (см. рисунок). Окружность Ω с центром в точке A пересекает ω_1 в точках K и L, а ω_2 в точках M и N. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$ лежит на окружности, описанной около треугольника KNB.



Решение. Обозначим C точку пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$. Докажем, что $\angle KBN = \angle KCN$. $\angle KBN = \angle KBA + \angle ABN$. $\angle KBA = \angle KLA$, как опирающиеся на одну дугу в ω_1, $\angle ABN = \angle AMN$, как опирающиеся на одну дугу в ω_2. Таким образом, $\angle KBN = \angle KLA + \angle AMN$. Проведём касательные к окружности Ω в точках L и M: XL и YM (точки X, Y выберем так, чтобы углы $\angle XLK$ и $\angle YMN$ были не больше $90°$). Тогда $\angle KLA = 90° - \angle XLK = 90° - \angle KNL$. $\angle AMN = 90° - \angle YMN = 90° - \angle MKN$. Отсюда, $\angle KBN = \angle KLA + \angle AMN = 90° - \angle KNL + 90° - \angle MKN = 180° - \angle KNL - \angle MKN = 180° - \angle KNC - \angle CKN = \angle KCN$. Таким образом, $\angle KBN = \angle KCN$, и значит, точка C лежит на окружности, описанной около треугольника KNB.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пробел в доказательстве – 15 баллов. Недостаточное обоснование – 10 баллов. При отсутствии законченного решения есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, полезное продвижения незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов. Бездоказательные утверждения не оцениваются.*

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a(b^2 - a^2) = bc$. Докажите, что $b \le (c+1)^{3/4}$.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(a,b)$, так что $a = da_1, b = db_1,$ где $\text{НОД}(a_1,b_1) = 1$. Тогда $d^2a_1({b_1}^2 - {a_1}^2) = b_1c$. Поскольку a_1 и b_1, а также ${b_1}^2 - {a_1}^2$ и b_1взаимно просты, отсюда следует, что $d^2 = tb_1$ и $ta_1({b_1}^2 - {a_1}^2) = c$ для некоторого натурального t. Имеем $b_1 \ge a_1 + 1 \ge 2$. Покажем, что при $1 \le a_1 \le b_1 - 1$ $\min a_1({b_1}^2 - {a_1}^2) = {b_1}^2 - 1$. Действительно, минимальное значение функции $f(x) = x\left({b_1}^2 - x\right)$ достигается на её концах, как показывает исследование её производной $f'(x) = {b_1}^2 - 3x$, при этом $f(1) = {b_1}^2 - 1 \le 2{b_1}^2 - 3b_1 + 1 = f(b_1 - 1)$ для $b_1 \ge 2$. Как следствие, $c = ta_1\left({b_1}^2 - 1\right) \ge t\left({b_1}^2 - 1\right)$.

Таким образом, имеем $4 \le {b_1}^2 \le \frac{c}{t}$+1. В частности, $c \ge 3t$. Тогда

$$b^4 = t^2{b_1}^6 \le t^2\left(\frac{c}{t} + 1\right)^3 \le \max_{1 \le t \le c/3} t^2\left(\frac{c}{t} + 1\right)^3 = (c+1)^3.$$

Докажем последнее равенство. Положим $s = \frac{t}{c}$. Тогда $M = \max_{1 \le t \le c/3} t^2\left(\frac{c}{t} + 1\right)^3 = c^2 \max_{1/c \le s \le 1/3} s^2\left(\frac{1}{s} + 1\right)^3$. Функция $g(s) = s^2\left(\frac{1}{s} + 1\right)^3 = \frac{1}{s} + 3 + 3s + s^2$ убывает на $\left(0, 1/2\right)$, так как $g'(s) = -\frac{1}{s^2} + 3 + 2s = (2s - 1)\left(\frac{1}{s} + 1\right)^2 < 0$. Поэтому $\max_{1/c \le s \le 1/3} g(s) = g\left(1/c\right) = \frac{(c+1)^3}{c^2}$, так что $M = (c+1)^3$. Отсюда $b \le (c+1)^{3/4}$.

Замечание 1. Верхняя граница для b *достигается для бесконечно многих значений* c, *поскольку равенство выполняется для пары чисел* $(a,b) = \left((c+1)^{1/4}, (c+1)^{3/4}\right)$.

Замечание 2. Пусть уже доказано, что $c \ge t\left({b_1}^2 - 1\right)$. *Тогда неравенство* $(c+1)^3 \ge b^4$ *можно доказать так. Имеем* $b^4 = t^2{b_1}^6$, *поэтому достаточно доказать неравенство* $\left(t\left({b_1}^2 - 1\right) + 1\right)^3 \ge t^2{b_1}^6$. *Положим* $t = u^3$, *где* $u \ge 1$, *и докажем равносильное неравенство* $u^3\left({b_1}^2 - 1\right) + 1 \ge u^2{b_1}^2$. *Последнее можно преобразовать к виду* $(u-1)(u^2\left({b_1}^2 - 1\right) - u - 1) \ge 0$, *после чего оно становится очевидным:* $b_1 \ge 2$ *и* $u^2\left({b_1}^2 - 1\right) - u - 1 \ge 3u^2 - u - 1 \ge 0$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Небольшой пробел в обосновании – минус 2 балла. Неравенство строго не доказано, но есть значительное продвижение – 10 баллов. Есть некоторое продвижение (в частности, при решении изложенным выше методом, доказано, что* $d^2 = tb_1$*) – 5 баллов. Полезное продвижение незначительно – 1-2 балла. Решение отсутствует или неверно – 0 баллов.*