ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Последовательность задана условиями $a_1 = 20$, $a_2 = 24$, $a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2024}.

Ответ. $\frac{3}{32}$.

Решение. Из условия следует, что

$$a_{n+4} = \frac{a_{n+3}+1}{a_{n+2}} = \frac{\frac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}}+1}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+1}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}} - 1 = a_n a_{n+3} - 1,$$

Следовательно, $a_{n+5} = \frac{a_{n+4}+1}{a_{n+3}} = \frac{a_n a_{n+3}}{a_{n+3}} = a_n$ при всех n. Значит,

$$a_{2024} = a_4 = \frac{a_3+1}{a_2} = \frac{\frac{a_2+1}{a_1}+1}{a_2} = \frac{a_1+a_2+1}{a_1 a_2} = \frac{20+24+1}{20 \cdot 24} = \frac{45}{480} = \frac{3}{32}.$$

2. На конкурсе сладкоежек 7 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?

Ответ. $C_7^2 C_{21}^6 + 7C_{20}^6$ способами.

Решение. Распределение делаем в два шага: сначала раздадим торты, а тем, кому их не досталось, выделим по пирожному; затем распределим среди всех оставшихся пирожные. Рассмотрим два случая. На каждом шаге число вариантов второго шага не зависит от результата первого шага, поэтому эти числа перемножаются.

Случай 1. Оба торта достались одному участнику (7 вариантов). Остальным 6 участникам надо выделить 6 пирожных. Остаётся распределить 14 пирожных среди всех 7 участников. Это равносильно расстановке 14 шаров и $7-1=6$ перегородок, что даёт $C_{14+6}^{6}=C_{20}^{6}$ способов. Итого получается $7C_{20}^{6}$ способов.

Случай 2. Торты достались двум разным участникам (C_7^2 вариантов). Остальным 5 участникам надо выделить 5 пирожных. Остаётся распределить 15 пирожных среди всех 7 участников. Это можно сделать $C_{6+15}^{6}=C_{21}^{6}$ способами. Всего в этом случае имеется $C_7^2C_{21}^6$ способов.

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy+yz+xz=5xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $x+y+z$.

Ответ. $\frac{9}{5}$.

Решение 1. По условию $xy+yz+xz=5xyz$. Положим $a=\frac{3}{5}x$, $b=\frac{3}{5}y$, $c=\frac{3}{5}z$. Тогда

$$\frac{9}{25}(ab+bc+ac)=\frac{27}{25}abc, \text{ откуда } \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3.$$

Поэтому

$$x+y+z=\frac{3}{5}(a+b+c)=\frac{3}{5}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}-3\right)\geq\frac{3}{5}(6-3)=\frac{9}{5}.$$

В предпоследнем переходе мы использовали неравенство Коши для среднего арифметического и среднего геометрического, которое обращается в равенство при $a=b=c=1$.

Решение 2. Заметим, что для любых положительных чисел x, y и z имеет место неравенство

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9,$$

которое при $x=y=z$ обращается в равенство. Действительно, раскрывая скобки, мы получим

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 9,$$

поскольку сумма в каждой скобке не меньше двух. Тогда

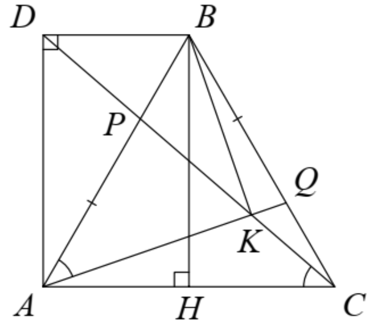
$$x+y+z\geq\frac{9}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{9}{\frac{zy+yz+zx}{xyz}}=\frac{9}{5}.$$

Осталось заметить, что числа $x=y=z=\frac{3}{5}$ удовлетворяют условию задачи и обращают неравенство в равенство.

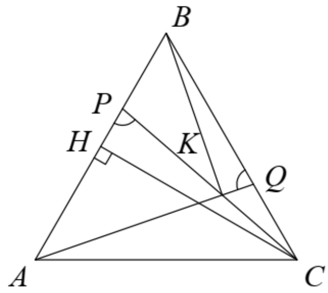
4. Дан равносторонний треугольник ABC, на сторонах AB и BC которого выбраны точки P и Q так, что $AP{:}PB=BQ{:}QC=2{:}1$, K – точка пересечения отрезков AQ и CP. Найдите градусную меру угла AKB.

Ответ. 90°.

Решение 1. Пусть BH – высота и медиана треугольника ABC. Проведём через вершину B параллельно AC прямую и обозначим точку её пересечения с прямой CP через D (см. левый рисунок). Треугольники BPD и APC подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $DB=\frac{1}{2}AC=AH$. Поэтому $ADBH$ – прямоугольник, то есть $\angle ADB=90^{\circ}$. Заметим, что треугольники ABQ и CAP равны по двум сторонам и углу. Тогда $\angle BDK=\angle DCA=\angle BAK$. Значит, четырёхугольник $ADBK$ – вписанный, откуда $\angle AKB=180^{\circ}-\angle ADB=90^{\circ}$.



Решение 2. Проведём в треугольнике ABC высоту CH. Так как $BH = \frac{1}{2}AB$, получим $\frac{BP}{BH} = \frac{2}{3} = \frac{BQ}{BC}$. Поэтому треугольники BPQ и BHC подобны, откуда $\angle BPQ = \angle BHC = 90^{\circ}$. Заметим теперь, что $BQ = AP$, $AB = CA$ и $\angle ABQ = \angle CAP = 60^{\circ}$. Тогда треугольники ABQ и CAP равны по двум сторонам и углу. Поскольку $\angle AQB = \angle CPA = 180^{\circ} - \angle CPB$, четырёхугольник $BPKQ$ вписанный, откуда $\angle AKB = 180^{\circ} - \angle BKQ = 180^{\circ} - \angle BPQ = 90^{\circ}$.



5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.
Ответ. $f(x) = 4 \cdot 3^x$.

Решение. Вначале докажем, что $f(x) \geq 0$. Действительно, $4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$. Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $4f(0) = f(0) \cdot f(0)$, откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 4$. Если $f(0) = 0$, то $4f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 4$. Подставляя $y = 1$, получаем $4f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 3f(x)$. Отсюда для любого натурального n, находим $f(n) = f(0)3^n = 4 \cdot 3^n$. Также легко по индукции доказать формулу

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{4^{n-1}} f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n),$$

откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4^{n-1}}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 3 \cdot 4^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 4 \cdot 3^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n. Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4^{m-1}}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \frac{1}{4^{m-1}} 4^m \cdot 3^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n. Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $4f(0) = 4f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 4 \cdot 3^{-\frac{m}{n}}$.
Таким образом, функция $f(x) = 4 \cdot 3^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенстве непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

Вариант 2

1. Последовательность задана условиями $a_1 = 20$, $a_2 = 25$, $a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2025}.
Ответ. $\frac{21}{25}$.
Решение. Из условия следует, что

$$a_{n+4} = \frac{a_{n+3}+1}{a_{n+2}} = \frac{\frac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}} + 1}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + 1}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}} - 1 = a_n a_{n+3} - 1,$$

Следовательно, $a_{n+5} = \frac{a_{n+4}+1}{a_{n+3}} = \frac{a_n a_{n+3}}{a_{n+3}} = a_n$ при всех n. Значит,

$$a_{2025} = a_5 = \frac{a_4+1}{a_3} = \frac{\frac{a_3+1}{a_2} + 1}{a_3} = \frac{a_3 + a_2 + 1}{a_2 a_3} = \frac{\frac{a_2+1}{a_1} + a_2 + 1}{a_2 \cdot \frac{a_2+1}{a_1}} = \frac{\frac{26}{20} + 25 + 1}{25 \cdot \frac{26}{20}} = \frac{21}{25}.$$

2. На конкурсе сладкоежек 8 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?
Ответ. $C_8^2 C_{21}^7 + 8C_{20}^7$ способами.

Решение. Распределение делаем в два шага: сначала раздадим торты, а тем, кому их не досталось, выделим по пирожному; затем распределим среди всех оставшихся пирожные. Рассмотрим два случая. На каждом шаге число вариантов второго шага не зависит от результата первого шага, поэтому эти числа перемножаются.
Случай 1. Оба торта достались одному участнику (8 вариантов). Остальным 7 участникам надо выделить 7 пирожных. Остаётся распределить 13 пирожных среди всех 8 участников. Это равносильно расстановке 13 шаров и $8-1=7$ перегородок, что даёт $C_{13+7}^{7}=C_{20}^{7}$ способов. Итого получается $8C_{20}^{7}$ способов.
Случай 2. Торты достались двум разным участникам (C_8^2 вариантов). Остальным 6 участникам надо выделить 6 пирожных. Остаётся распределить 14 пирожных среди всех 8 участников. Это можно сделать $C_{7+14}^{7}=C_{21}^{7}$ способами. Всего в этом случае имеется $C_8^2C_{21}^7$ способов.

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy+yz+xz=6xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(y+z)(x+z)$.
Ответ. 1.
Решение 1. По условию $xy+yz+xz=6xyz$. Положим $a=2x$, $b=2y$, $c=2z$. Тогда

$$\frac{1}{4}(ab+bc+ac)=\frac{6}{8}abc, \text{ откуда } \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3.$$

Поэтому

$$(x+y)(y+z)(x+z)=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}=abc\geq\left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)^3=1.$$

Вначале мы трижды воспользовались неравенствами для средних арифметического и геометрического, затем – неравенством для средних геометрического и гармонического. Каждое из них обращается в равенство при $a=b=c=1$.
Решение 2. Заметим, что по неравенству Коши о средних для двух чисел

$$(x+y)(y+z)(x+z)\geq 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}=8xyz.$$

С другой стороны, по неравенству Коши о средних для трёх чисел

$$6xyz=xy+yz+xz\geq 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx}=3(xyz)^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{xyz}\geq\frac{1}{2}$ и, значит,

$$(x+y)(y+z)(x+z)\geq 8xyz\geq 1.$$

Осталось заметить, что числа $x=y=z=\frac{1}{2}$ удовлетворяют условию задачи и обращают все неравенства в равенства.

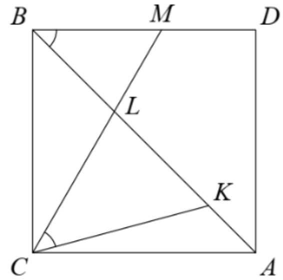
4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, на гипотенузе AB которого отмечены точки K и L, что $AK:KL:LB=1:2:\sqrt{3}$. Найдите градусную меру угла KCL.
Ответ. 45°.
Решение 1. Пусть $AK=1$. Тогда $KL=2$ и $LB=\sqrt{3}$, откуда $AB=3+\sqrt{3}$, откуда $AB=3+\sqrt{3}$ и $AC=BC=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$AC\cdot BC=6+3\sqrt{3}=3\left(2+\sqrt{3}\right)=AL\cdot KB, \text{ или } \frac{KB}{BC}=\frac{CA}{LA}.$$

Так как $\angle KBC=45^{\circ}=\angle CAL$, треугольники CBK и LAC подобны. Поэтому $\angle BCK=\angle ALC$ и

$\angle ALC=\angle BCL+\angle LBC=\angle BCL+45^{\circ}=\angle BCK-\angle KCL+45^{\circ}=\angle ALC-\angle KCL+45^{\circ}$, откуда $\angle KCL=45^{\circ}$.

Решение 2. Достроим треугольник ABC до квадрата $ABCD$, и пусть M – точка пересечения прямых BD и CL (см. рисунок). Положим $a = AC$. Треугольники ALC и BLM подобны с коэффициентом $\sqrt{3}$. Поэтому



$$BM = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad CM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad \frac{AB}{CM} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Кроме того,

$$BL = \frac{AB}{\sqrt{3}+1}, \quad CL = \frac{CM \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{CL}{BL} = \sqrt{3} \cdot \frac{CM}{AB} = \sqrt{2},$$

а также

$$KL = \frac{2AB}{\sqrt{3}+3}, \quad ML = \frac{CM}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{KL}{ML} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{AB}{CM} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, $\frac{CL}{BL} = \frac{KL}{ML}$, и треугольники BLM и CLK подобны. Тогда $\angle KCL = \angle MBL = 45^\circ$.

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $3f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.
Ответ. $f(x) = 3 \cdot 4^x$.

Решение. Вначале докажем, что $f(x) \geq 0$. Действительно, $3f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$. Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $3f(0) = f(0) \cdot f(0)$, откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 3$. Если $f(0) = 0$, то $3f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 3$. Подставляя $y = 1$, получаем $3f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 4f(x)$. Отсюда для любого натурального n, находим $f(n) = f(0)4^n = 3 \cdot 4^n$. Также легко по индукции доказать формулу

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{3^{n-1}} f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n),$$

откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3^{n-1}}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 4 \cdot 3^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 3 \cdot 4^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n. Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3^{m-1}}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \frac{1}{3^{m-1}} 3^m \cdot 4^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n. Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $3f(0) = 3f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 3 \cdot 4^{-\frac{m}{n}}$.
Таким образом, функция $f(x) = 3 \cdot 4^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенстве непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

Вариант 3

1. Последовательность задана условиями $a_1 = 20$, $a_2 = 26$, $a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2024}.
Ответ. $\frac{47}{520}$.
Решение. Из условия следует, что

$$a_{n+4} = \frac{a_{n+3}+1}{a_{n+2}} = \frac{\frac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}} + 1}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + 1}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}} - 1 = a_n a_{n+3} - 1,$$

Следовательно, $a_{n+5} = \frac{a_{n+4}+1}{a_{n+3}} = \frac{a_n a_{n+3}}{a_{n+3}} = a_n$ при всех n. Значит,

$$a_{2024} = a_4 = \frac{a_3 + 1}{a_2} = \frac{\frac{a_2 + 1}{a_1} + 1}{a_2} = \frac{a_2 + a_1 + 1}{a_1 a_2} = \frac{47}{520}.$$

2. На конкурсе сладкоежек 9 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?
Ответ. $C_9^2 C_{21}^8 + 9C_{20}^8 = 8459370$ способами.
Решение. Распределение делаем в два шага: сначала раздадим торты, а тем, кому их не досталось, выделим по пирожному; затем распределим среди всех оставшихся пирожные. Рассмотрим два случая. На каждом шаге число вариантов второго шага не зависит от результата первого шага, поэтому эти числа перемножаются.
Случай 1. Оба торта достались одному участнику (9 вариантов). Остальным 8 участникам надо выделить 8 пирожных. Остаётся распределить 12 пирожных среди всех 9 участников. Это равносильно расстановке 12 шаров и $9 - 1 = 8$ перегородок, что даёт $C_{12+8}^8 = C_{20}^8$ способов. Итого получается $9C_{20}^8$ способов.
Случай 2. Торты достались двум разным участникам (C_9^2 вариантов). Остальным 7 участникам надо выделить 7 пирожных. Остаётся распределить 13 пирожных среди всех 9 участников. Это можно сделать $C_{8+13}^8 = C_{21}^8$ способами. Всего в этом случае имеется $C_9^2 C_{21}^8$ способов.

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 27xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $(x + y)(y + z)(x + z)$.
Ответ. $\frac{8}{27}$.
Решение 1. По условию $x + y + z = 27xyz$. Положим $a = 3x$, $b = 3y$, $c = 3z$. Тогда

$$\frac{a+b+c}{3} = abc, \text{ откуда } \frac{1}{bz} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = 3.$$

Поэтому

$$(x + y)(y + z)(x + z) = \frac{(a + b)(b + c)(a + c)}{27} \geq \frac{8}{27}\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} \geq \frac{8}{27}\left(\frac{3}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}.$$

Вначале мы трижды воспользовались неравенствами для средних арифметического и геометрического, затем – неравенством для средних геометрического и гармонического. Каждое из них обращается в равенство при $a = b = c = 1$.
Решение 2. Заметим, что по неравенству Коши о средних для двух чисел

$$(x + y)(y + z)(x + z) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} = 8xyz.$$

С другой стороны, по неравенству Коши о средних для трёх чисел

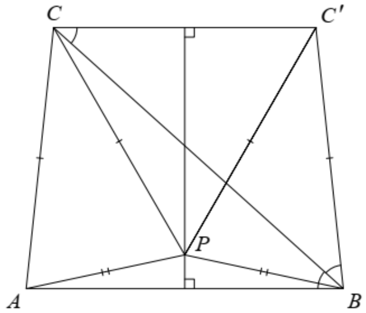
$$9xyz = \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Таким образом, $(xyz)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{1}{9}$ и, значит, $xyz \geq \frac{1}{27}$. Поэтому

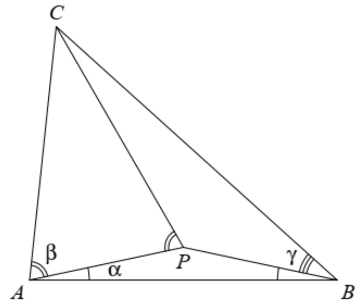
$$(x + y)(y + z)(x + z) \geq 8xyz \geq \frac{8}{27}.$$

Осталось заметить, что числа $x = y = z = \frac{1}{3}$ удовлетворяют условию задачи и обращают все неравенства в равенства.

4. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 2\angle B$. Внутри этого треугольника выбрана точка P так, что $PA = PB$, $PC = AC$. Найдите градусную меру угла CBP.
Ответ. 30°.
Решение 1. Проведём серединный перпендикуляр к стороне AB. Очевидно, что он пройдёт через точку P. Пусть C' – точка, симметричная C относительно этого перпендикуляра (см. рисунок). В силу симметрии $\angle C'BA = \angle CAB = 2\angle ABC$, откуда $\angle C'BC = \angle ABC$. С другой стороны, прямые CC' и AB параллельны, поэтому $\angle ABC = \angle BCC'$. Стало быть, $\angle BCC' = \angle C'BC$, треугольник $BC'C$ равнобедренный и $BC' = C'C$. Из симметрии $BC' = AC$ и $CP = C'P$, а по условию $AC = CP$. Следовательно,



$$C'P = CP = AC = BC' = C'C,$$
и треугольник PCC' равносторонний. Таким образом, $\angle CC'P = 60^\circ$. Заметим, что
$$180^\circ - 2\angle PBC' = \angle PC'B = \angle BC'C - 60^\circ = 120^\circ - 2\angle CBC'.$$
Поэтому
$$\angle CBP = \angle PBC' - \angle CBC' = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ.$$
Решение 2. Положим $\alpha = \angle PAB$, $\beta = \angle PAC$, $\gamma = \angle PBC$, $\varphi = \alpha + \gamma$ (см. рисунок). По условию $\angle PBA = \alpha$, $\angle CPA = \beta$ и
$$\alpha + \beta = 2\varphi = 2(\alpha + \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad 2\gamma = \beta - \alpha.$$
По теореме синусов



$$\frac{AC}{\sin\varphi} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 3\varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} = \frac{AB}{AC}.$$
Заметим, что
$$AB = 2AP\cos\alpha = 4AC\cos\alpha\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AC} = 2(\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)) = 2\cos 2\varphi + 2\cos 2\gamma.$$
Кроме того,
$$\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} = 3 - 4\sin^2\varphi = 2\cos 2\varphi + 1.$$
Поэтому
$$2\cos 2\varphi + 2\cos 2\gamma = 2\cos 2\varphi + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2\gamma = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\gamma = 60^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 30^\circ.$$

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $5f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.
Ответ. $f(x) = 5\cdot 2^x$.
Решение. Вначале докажем, что $f(x) \geq 0$. Действительно, $5f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$. Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $5f(0) = f(0)\cdot f(0)$, откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 5$. Если $f(0) = 0$, то $5f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 5$. Подставляя $y = 1$, получаем $5f(x+1) = f(x)\cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 5f(x)$. Отсюда для любого натурального n, находим $f(n) = f(0)2^n = 5\cdot 2^n$. Также легко по индукции доказать формулу
$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{5^{n-1}} f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n),$$
откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5^{n-1}}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 2\cdot 5^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 5\cdot 2^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n. Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5^{m-1}}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m =$

$\frac{1}{5^{m-1}}5^m \cdot 2^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n. Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $5f(0) = 5f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 5 \cdot 2^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 5 \cdot 2^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенстве непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

Вариант 4

1. Последовательность чисел a_1, a_2, …, a_{2024} такова, что $a_1 = a_{2024}$ и $a_n + a_{n+1} - 1 = a_{n+1}^2$ при всех целых n от 1 до 2023. Найдите a_{2000}.

Ответ. 1.

Решение. Из условия следует, что

$$a_n - a_{n+1} = (a_{n+1} - 1)^2 \geq 0.$$

Но тогда $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2024}$, а так как $a_1 = a_{2024}$, то во всех неравенствах имеет место равенство, т.е. все числа равны 1.

2. Найдите количество строк из 6 натуральных чисел, произведение которых равно 6!.

Ответ. $C_9^4 C_7^2 C_6^1 = 15876$ строк.

Решение. Разложим 6! на простые множители: $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Значит, каждое число в строке имеет вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. Строку можно закодировать тройкой строк показателей, первая состоит из 6 показателей степени у двойки с суммой 4, вторая – у тройки с суммой 2, третья – у пятёрки с суммой 1. Методом шаров и перегородок находим, что строк первого вида C_{4+5}^4, второго – C_{2+5}^2, третьего – C_{1+5}^1, а число строк получается перемножением.

3. Для положительных чисел x, y, z и t найдите минимальное значение выражения

$$N = \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 + \left(y + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{t}\right)^3 + \left(t + \frac{1}{x}\right)^3.$$

Ответ. 32.

Решение 1. Воспользуемся неравенством Коши для средних вначале в каждой скобке, а затем для всей суммы. Мы получим

$$A \geq \left(2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^3 + \left(2\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^3 + \left(2\sqrt{\frac{z}{t}}\right)^3 + \left(2\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^3 \geq 32\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{t}{x}\right)^{\frac{3}{8}} = 32.$$

Равенство достигается при $x = y = z = t = 1$.

Решение 2. Воспользуемся неравенством $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a + b)^3$, верным для $a, b > 0$. Применяя его трижды, мы получим:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq ((a + b)^3 + (c + d)^3) \geq \frac{1}{16}(a + b + c + d)^3 \text{ при } a, b, c, d > 0.$$

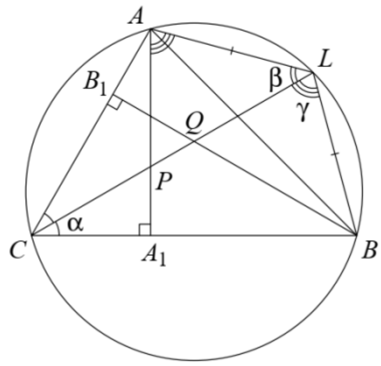
Тогда в силу неравенства Коши для средних:

$$A \geq \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{t} + t + \frac{1}{x}\right)^3 \geq \frac{1}{16}\left(8\sqrt[8]{x \cdot \frac{1}{x} \cdot y \cdot \frac{1}{y} \cdot z \cdot \frac{1}{z} \cdot t \cdot \frac{1}{t}}\right)^3 = \frac{8^3}{16} = 32.$$

Равенство достигается при $x = y = z = t = 1$.

4. Пусть BC – наибольшая сторона в треугольнике ABC, в котором проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса $\angle C$ пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке L, высоту AA_1 в точке P, BB_1 – в точке Q. Найдите градусную меру угла ACB, если известно, что $AP = LQ$.

Ответ. 60°.



Решение. Пусть $\alpha = \angle BCL$, $\beta = \angle ALC$, $\gamma = \angle BLC$. Докажем равенство треугольников ALP и BLQ. Заметим, что $AP = LQ$ пр условию и $AL = LB$ как хорды, соответствующие одинаковым углам. Кроме того,

$$\angle APL = \angle A_1PC = 90^\circ - \alpha = \angle B_1QC = \angle BQL.$$

Тогда по теореме синусов

$$\frac{AP}{\sin\angle ALP} = \frac{AL}{\sin\angle APL} = \frac{LB}{\sin\angle BQL} = \frac{LQ}{\sin\angle LBQ},$$ откуда $\sin\angle ALP = \sin\angle LBQ$.

Но $\angle ALP = \angle ABC < 90^\circ$ и $\angle LBQ = 180^\circ - \angle BLC - \angle BQL = 90^\circ - \angle BAC + \alpha < 90^\circ - \angle BAC + \angle ACB \leq 90^\circ$ (последнее неравенство верно, поскольку $BC \geq AB$). Значит, углы ALP и LBQ острые, и они одинаковы ввиду равенства их синусов. Таким образом, треугольники ALP и BLQ равны по стороне и двум углам. Поэтому $\angle LAP = \angle QLB = \gamma$. Теперь из треугольника ALP:

$$\beta + \gamma + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \implies \beta + \gamma = 90^\circ + \alpha,$$

а из четырёхугольника $ALBC$:

$$\beta + \gamma = 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ + \alpha \implies \alpha = 30^\circ \implies \angle ACB = 60^\circ.$$

5. Существует ли функция f, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, и действительное число α, такие, что $f(\alpha) = -2$ и $f(f(x)) = xf(x) + 2x$ для любого действительного x?

Ответ. Нет, не существует.

Решение. Допустим, что существует функция, удовлетворяющая равенству $f\big(f(x)\big) = xf(x) + 2x$ при любом действительном x, причем $f(\alpha) = -2$ при некотором α. Имеем

$$f(-2) = f\big(f(\alpha)\big) = \alpha f(\alpha) + 2\alpha = -2\alpha + 2\alpha = 0.$$

Тогда $f(0) = f\big(f(-2)\big) = -2f(-2) - 4 = -4$. Далее $f(-4) = f\big(f(0)\big) = 0 \cdot f(0) + 2 \cdot 0 = 0$. В результате, $f(0) = f\big(f(-4)\big) = -4f(-4) - 8 = -4 \cdot 0 - 8 = -8$. Однако $f(0) = -4$ – противоречие.