

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

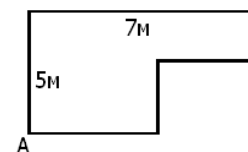
2 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Бельчонок выбежал из точки А, пробежал по маршруту (см. рисунок), и вернулся в точку А. Сколько метров он пробежал, если известны длины двух отрезков маршрута: 5 метров и 7 метров? *Объясните, как получили ответ.*



Ответ. 24.

Решение. Рассмотрим отрезки неизвестной длины. Сумма длин горизонтальных отрезков равна 7, сумма длин вертикальных отрезков равна 5. Общая длина маршрута равна $5 + 5 + 7 + 7 = 24$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 18 баллов. Рассмотрен пример, но ответ не получен – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

2. Мама, папа и сын нашли вместе 58 грибов. Папа нашёл на 6 грибов больше, чем мама и сын вместе. Сколько грибов он нашёл? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. 32.

Решение. Если бы папа нашёл столько же грибов, сколько мама и сын вместе, то втроём они нашли бы $58 - 6 = 52$ гриба. Мама и сын вместе нашли половину от этого количества, то есть 26, а папа нашёл на 6 грибов больше, то есть $26 + 6 = 32$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании одного примера, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но допущена ошибка в рассуждениях – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

3. В квадрате 4×4 поставлен один крестик. Поставьте еще 4 крестика (по одному в клетку), чтобы каждая клетка с крестиком граничила по стороне ровно с тремя пустыми клетками.

Ответ. Например, так.

		×	
×			×
	×	×	

	×		

Комментарий. Верный пример – 20 баллов. Ответ не найден, но есть анализ требуемого расположения – 7 баллов. Условие не выполняется только для одного или двух крестиков – 7 баллов, для трёх-четырёх крестиков – 5 баллов, для всех – 2 балла. На рисунке меньше 5 крестиков – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

4. Во 2-м классе 25 детей. На каникулах 18 из них посмотрели фильм «Летучий корабль», 15 посмотрели фильм «Огниво», и только двое не видели ни одного из этих фильмов. Сколько детей посмотрели оба этих фильма? Объясните, как получили ответ.

Ответ. 10.

Решение. Посмотрели хотя бы один фильм $25 - 2 = 23$ второклассника. Но $15 + 18 = 33$, что на 10 больше 23. Значит, 10 второклассников посчитаны два раза, они посмотрели и «Летучий корабль», и «Огниво».

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Дан верный ответ, но в обосновании есть пробелы – 15 баллов. Дан верный ответ, есть частичное объяснение – 10 баллов. В решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. В решении не учтены 2 человека, которые не посмотрели ни одного фильма – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

5. Кеша лжёт в воскресенье, понедельник и вторник, а в остальные дни недели говорит правду. Тоша лжёт в четверг, пятницу и субботу, а в остальные дни недели говорит правду. Однажды Тоша и Кеша встретились, и каждый сказал: «Я вчера лгал». В какой день недели это могло быть? Объясните, как получили ответ.

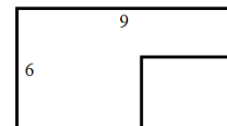
Ответ. В воскресенье.

Решение. Пусть оба солгали. Но нет дня, в который они оба бы лгали. Пусть оба сказали правду. Тоша мог это сказать в воскресенье, Кеша – в среду, дни не совпадают. Значит, один из них солгал, а второй сказал правду. Пусть правду сказал Тоша. Тогда это воскресенье. Кеша в воскресенье лгал, а в субботу говорил правду, и этот случай подходит. Пусть правду сказал Кеша. Тогда это среда. Но по средам Тоша говорит правду, а сказанное для него неправда. Этот случай не подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Даны с обоснованием два ответа, но неверный не отброшен – 18 баллов. Дан верный ответ, но в обосновании есть пробелы – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Дан ответ «Среда» с разумным обоснованием – 10 баллов, без обоснования – 4 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

Вариант 2

1. От прямоугольника со сторонами 6 и 9 отрезали прямоугольную часть (см. рисунок). Чему равна длина границ получившейся фигуры? Объясните, как получили ответ.



Ответ. 30.

Решение. Рассмотрим отрезки неизвестной длины. Сумма длин горизонтальных отрезков равна 9, сумма длин вертикальных отрезков равна 6. Общая длина границ равна $6 + 6 + 9 + 9 = 30$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 18 баллов. Рассмотрен пример, но ответ не получен – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

2. Ученики первого, второго и третьего классов сделали 27 кормушек для птиц. Второклассники сделали на 5 кормушек больше, чем ученики первого и третьего классов вместе. Сколько кормушек сделали второклассники?

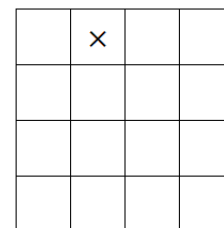
Объясните, как получили ответ.

Ответ. 16.

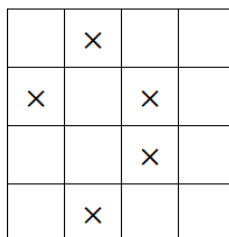
Решение. Если бы второклассники сделали столько же кормушек, сколько ученики первого и третьего классов вместе, то всего сделали бы $27 - 5 = 22$ кормушки. Ученики первого и третьего классов вместе сделали половину от этого количества, то есть 11 кормушек, а второклассники сделали на 5 кормушек больше, то есть $11 + 5 = 16$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании одного примера, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но допущена ошибка в рассуждениях – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

3. В квадрате 4×4 поставлен один крестик. Поставьте еще 4 крестика (по одному в клетку), чтобы каждая клетка с крестиком граничила по стороне ровно с тремя пустыми клетками.



Ответ. Например, так.



Комментарий. Верный пример – 20 баллов. Ответ не найден, но есть анализ требуемого расположения – 7 баллов. Условие не выполняется только для одного или двух крестиков – 7 баллов, для трёх-четырёх крестиков – 5 баллов, для всех – 2 балла. На рисунке меньше 5 крестиков – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

4. В аквариуме плавают 23 рыбки. 4 из них полностью чёрные, у 9 красные плавники, у 15 красный хвост. Сколько рыбок, у которых красные и плавники, и хвост? Объясните, как получили ответ.

Ответ. 5.

Решение. Что-нибудь красное есть у $23 - 4 = 19$ рыбок. Но $9 + 15 = 24$, что на 5 больше 19. Значит, 5 рыбок посчитаны два раза – у них и хвост красный, и плавники красные.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Дан верный ответ, но в обосновании есть пробелы – 15 баллов. Дан верный ответ, есть частичное объяснение – 10 баллов. В решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. В решении не учтены 2 человека, которые не посмотрели ни одного фильма – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

5. В сказочном лесу живут зайчата и бельчата. Зайчата лгут в среду, четверг и пятницу, а в остальные дни недели говорят правду. Бельчата лгут в субботу, воскресенье и понедельник, а в остальные дни недели говорят правду. Однажды встретились зайчонок и бельчонок, и каждый сказал: «Я вчера лгал». В какой день недели это могло быть? *Объясните, как получили ответ.*

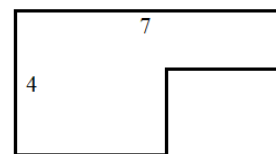
Ответ. В субботу.

Решение. Пусть оба солгали. Но нет дня, в который они оба бы лгали. Пусть оба сказали правду. Зайчонок мог это сказать в субботу, бельчонок – во вторник, дни не совпадают. Значит, один из них солгал, а второй сказал правду. Пусть правду сказал зайчонок. Тогда это суббота. Бельчонок в субботу лгал. То, что бельчонок вчера, то есть в пятницу, лгал – ложь, и этот случай подходит. Пусть правду сказал бельчонок. Тогда это вторник. Но по вторникам зайчонок говорит правду, а сказанное для него неправда. Этот случай не подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Даны с обоснованием два ответа, но неверный не отброшен – 18 баллов. Дан верный ответ, но в обосновании есть пробелы – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Дан ответ «Вторник» с разумным обоснованием – 10 баллов, без обоснования – 4 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

Вариант 3

1. От прямоугольника со сторонами 4 и 7 отрезали прямоугольную часть (см. рисунок). Чему равна длина границ получившейся фигуры? *Объясните, как получили ответ.*



Ответ. 22.

Решение. Рассмотрим отрезки неизвестной длины. Сумма длин горизонтальных отрезков равна 7, сумма длин вертикальных отрезков равна 4. Общая длина границ равна $4 + 4 + 7 + 7 = 22$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Ответ найден на основании примера – 20 баллов. При верном решении есть арифметическая ошибка – 18 баллов. Рассмотрен пример, но ответ не получен – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Три бельчонка Яша, Тоша и Кеша нашли вместе 45 шишек. Кеша нашёл на 3 шишки больше, чем Яша и Тоша вместе. Сколько шишек он нашёл? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. 24.

Решение. Если бы Кеша нашёл столько же шишек, сколько Яша и Тоша вместе, то троём они нашли бы $45 - 3 = 42$ шишки. Яша и Тоша вместе нашли половину от этого количества, то есть 21 шишку, а Кеша нашёл на 3 шишки больше, то есть $21 + 3 = 24$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании одного примера, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. В решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

3. В квадрате 4×4 поставлен один крестик. Поставьте еще 4 крестика (по одному в клетку), чтобы каждая клетка с крестиком граничила по стороне ровно с тремя пустыми клетками.

Ответ. Например, так.

	×	×	
×			×
	×		

		×	

Комментарий. Верный пример – 20 баллов. Ответ не найден, но есть анализ требуемого расположения – 7 баллов. Условие не выполняется только для одного или двух крестиков – 7 баллов, для трёх-четырёх крестиков – 5 баллов, для всех – 2 балла. На рисунке меньше 5 крестиков – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

4. В школьном спектакле хотели участвовать 18 школьников. 14 из них умеют петь, 12 умеют танцевать, 3 не умеют ни петь, ни танцевать. Сколько школьников умеет и петь, и танцевать? Объясните, как получили ответ.

Ответ. 11.

Решение. Умеют хотя бы что-то одно $18 - 3 = 15$ школьников. Но $14 + 12 = 26$, что на 11 больше 15. Значит, 11 школьников посчитаны и в числе поющих, и в числе танцующих.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Дан верный ответ, но в обосновании есть пробелы – 15 баллов. Дан верный ответ, есть частичное объяснение – 10 баллов. В решении не учтены 3 человека, которые не умеют ни петь, ни танцевать – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

5. Синие гномы лгут во вторник, среду и четверг, а в остальные дни недели говорят правду. Зелёные гномы лгут в пятницу, субботу и воскресенье, а в остальные дни недели говорят правду. Однажды встретились синий и зелёный гномы, и каждый сказал: «Я вчера лгал». В какой день недели это могло быть? Объясните, как получили ответ.

Ответ. В пятницу.

Решение. Пусть оба гнома солгали. Но нет дня, в который они оба бы лгали. Пусть оба гнома сказали правду. Синий гном мог это сказать в пятницу, зелёный – в понедельник, дни не совпадают. Значит, один гном солгал, а второй сказал правду. Пусть правду сказал синий гном. Тогда это пятница. Зелёный гном в пятницу лгал, и этот случай подходит. Пусть правду сказал зелёный гном. Тогда это понедельник. Но по понедельникам синий гном говорит правду, а сказанное для него неправда. Этот случай не подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Даны с обоснованием два ответа, но неверный не отброшен – 18 баллов. Дан верный ответ, но в обосновании есть пробелы – 15 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Дан ответ «Понедельник» с обоснованием – 10 баллов, без обоснования – 4 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

3 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

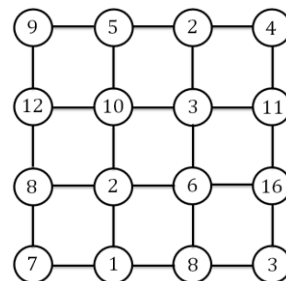
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Пройдите по линиям сетки с левого нижнего угла (цифра 7) до правого верхнего угла (цифра 4) так, чтобы сумма чисел на пройденном пути равнялась 40. Цифры 7 и 4 входят в сумму. Через каждый кружочек можно проходить только один раз. *Не забудьте перерисовать рисунок в бланк ответов и показать Ваш путь.*

Ответ. Например, $7 + 1 + 8 + 6 + 3 + 11 + 4 = 40$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный пример – 0 баллов.



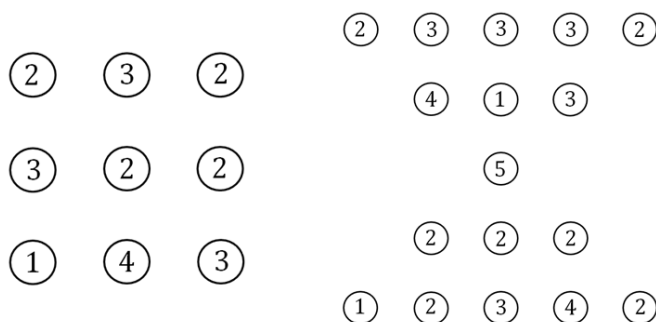
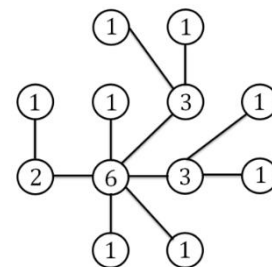
2. Эльф в карнавальных туфлях весит на 2 кг больше, чем эльф без туфель. Если поставить на весы пять одинаковых эльфов в туфлях и пять таких же эльфов без туфель, весы покажут 330 кг. Сколько весит эльф в туфлях? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. 34 кг.

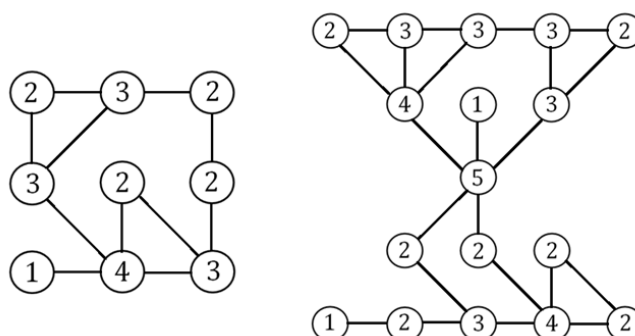
Решение. Наденем на пять эльфов туфли, тогда вес увеличится на 10 кг. Получается, что десять эльфов в туфлях весят 340 кг. Значит, один эльф в туфлях весит 34 кг.

Комментарий. Правильно найден вес эльфа в туфлях любым способом – 20 баллов. Правильно найден вес эльфа без туфель, но не найден (не указан в ответе) вес эльфа в туфлях – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но допущена ошибка в рассуждениях – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 6 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

3. Цифра в центре кружочка обозначает число отрезков, выходящее из него в другие кружочки (см. пример на рисунке справа). Отрезки не могут пересекаться, а все кружочки должны быть связаны. Нарисуйте все отрезки на двух рисунках ниже.



Ответ. См. рисунки.



Комментарий. Верные примеры – 20 баллов. Только первый – 8 баллов, только второй – 12 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

4. Четыре ученика 3-го класса Настя, Петя, Рита и Серёжа сидят за круглым столом. Они по очереди по кругу высказали следующие утверждения.

Настя: «Справа от меня сидит девочка».

Петя: «Напротив меня сидит мальчик».

Рита: «Серёжа сидит по правую руку от меня».

Серёжа: «Одна из девочек врёт».

Известно, что трое учеников ответили честно и только один соврал. Определите, в каком порядке они сидят за столом. *Объясните, как получили ответ.*

Ответ: Начиная с Насти в правую сторону от неё: Настя, Серёжа, Рита, Петя.

Решение: Если Настя говорит правду, то обе девочки за столом сидят рядом, но тогда оба мальчика также сидят рядом, и поэтому Петя лжёт. Но поскольку солгал только один ребёнок и это Петя, то утверждение Серёжи также ложно. Противоречие. Значит Настя – единственная, кто лжёт. Тогда из утверждения Пети мы понимаем, что мальчики сидят напротив друг друга, а значит и девочки сидят друг напротив друга. Тогда напротив Насти сидит Рита, справа от Риты, по её утверждению, Серёжа, а слева от Риты остаётся Петя.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении недостаточное обоснование – 15 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других вариантов нет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

5. У бельчонка есть орехи, сухофрукты и грибы – по 10 штук каждого предмета. Он может их обменивать у своего знакомого: четыре гриба на пять сухофруктов; один орех и один сухофрукт на два гриба; один сухофрукт и один гриб на два ореха. Может ли случиться так, что после нескольких обменов у бельчонка увеличится количество предметов каждого вида? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. Может.

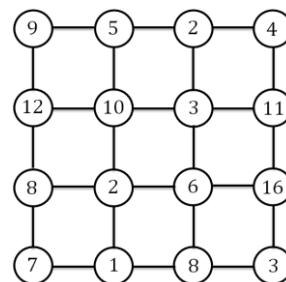
Решение. Заметим, что суммарное количество предметов увеличивает только первый обмен; повысим его эффективность: за 2 ореха и 2 сухофрукта можно получить 4 гриба, которые можно далее обменять на 5 сухофруктов. В результате этой операции у бельчонка станет на 2 ореха меньше, но на 3 сухофрукта больше. Действия бельчонка опишем таблицей:

О	С	Г	
10	10	10	Выполним пять вышеуказанных операций
0	25	10	Так как в сумме предметов стало 35, то далее можно использовать обмены второго и третьего видов, чтобы добиться нужного распределения предметов по типам. Теперь обменяем 8 грибов и 8 сухофруктов на 16 орехов
16	17	2	В завершение процесса обменяем 5 орехов и 5 сухофруктов на 10 грибов
11	12	12	Таким образом, бельчонок увеличит количество предметов каждого вида

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено нечёткое описание верного алгоритма, например, пропущены какие-то не совсем очевидные шаги – 12-16 баллов. В результате применения описанного алгоритма увеличивается количество предметов только одного или двух предметов, а количество предметов остальных цветов не изменяется – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

Вариант 2

1. Пройдите по линиям сетки с левого верхнего угла (цифра 9) до правого нижнего угла (цифра 3) так, чтобы сумма чисел на пройденном пути равнялась 57. Цифры 9 и 3 входят в сумму. Через каждый кружочек можно проходить только один раз. Не забудьте перерисовать рисунок в бланк ответов и показать Ваш путь.



Ответ. Например, $9 + 5 + 10 + 3 + 11 + 16 + 3$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный пример – 0 баллов.

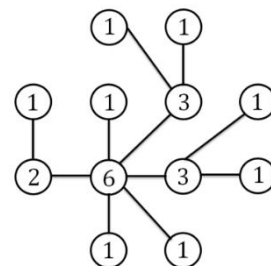
2. Эльф в карнавальных туфлях весит на 2 кг больше, чем эльф без туфель. Если поставить на весы пять одинаковых эльфов в туфлях и пять таких же эльфов без туфель, весы покажут 340 кг. Сколько весит эльф в туфлях? Объясните, как получили ответ.

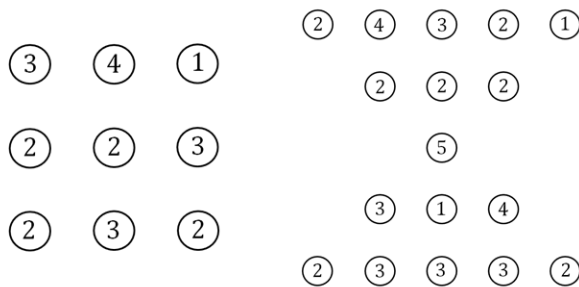
Ответ. 35 кг.

Решение. Наденем на пять эльфов туфли, тогда вес увеличится на 10 кг. Получается, что десять эльфов в туфлях весят 350 кг. Значит, один эльф в туфлях весит 35 кг.

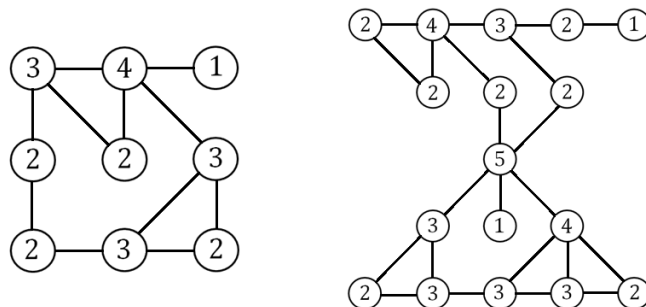
Комментарий. Правильно найден вес эльфа в туфлях любым способом – 20 баллов. Правильно найден вес эльфа без туфель, но не найден (не указан в ответе) вес эльфа в туфлях – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но допущена ошибка в рассуждениях – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 6 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

3. Цифра в центре кружочка обозначает число отрезков, выходящее из него в другие кружочки (см. пример на рисунке справа). Отрезки не могут пересекаться, а все кружочки должны быть связаны. Нарисуйте все отрезки на двух рисунках ниже.





Ответ. См. рисунки.



Комментарий. Верные примеры – 20 баллов. Только первый – 8 баллов, только второй – 12 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

4. Четыре ученика 3-го класса Катя, Миша, Поля и Федя сидят за круглым столом. Они по очереди по кругу высказали следующие утверждения.

Катя: «Справа от меня сидит девочка».

Миша: «Напротив меня сидит мальчик».

Поля: «Федя сидит по правую руку от меня».

Федя: «Одна из девочек врёт».

Известно, что трое учеников ответили честно и только один соврал. Определите, в каком порядке они сидят за столом. *Объясните, как получили ответ.*

Ответ: Начиная с Кати в правую сторону от неё: Катя, Миша, Поля, Федя.

Решение: Если Катя говорит правду, то обе девочки за столом сидят рядом, но тогда оба мальчика также сидят рядом, и поэтому Миша лжёт. Но поскольку солгал только один ребёнок и это Петя, то утверждение Феде также ложно. Противоречие.

Значит Катя – единственная, кто лжёт. Тогда из утверждения Миши мы понимаем, что мальчики сидят напротив друг друга, а значит и девочки сидят друг напротив друга. Тогда напротив Кати сидит Поля, справа от Поли, по её утверждению, Федя, а слева от Поли остаётся Миша.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении недостаточное обоснование – 15 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других вариантов нет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

5. У бельчонка есть ягоды, грибы и жёлуди – по 10 штук каждого предмета. Он может их обменивать у своего знакомого: четыре жёлудя на пять грибов; одну ягоду и один гриб на два жёлудя; один гриб и один жёлудь на две ягоды. Может ли случиться так, что после нескольких обменов у бельчонка увеличится количество предметов каждого вида? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. Может.

Решение. Заметим, что суммарное количество предметов увеличивает только первый обмен; повысим его эффективность: за 2 ягоды и 2 гриба можно получить 4 жёлудя, которые можно далее обменять на 5 грибов. В результате этой операции у бельчонка станет на 2 ягоды меньше, но на 3 гриба больше. Действия бельчонка опишем таблицей:

Я	Г	Ж	
10	10	10	Выполним пять вышеуказанных операций
0	25	10	Так как в сумме предметов стало 35, то далее можно использовать обмены второго и третьего видов, чтобы добиться нужного распределения предметов по типам. Теперь обменяем 8 желудей и 8 грибов на 16 ягод
16	17	2	В завершение процесса обменяем 5 ягод и 5 грибов на 10 желудей
11	12	12	Таким образом, бельчонок увеличит количество предметов каждого вида

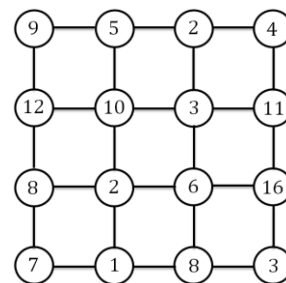
Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено нечёткое описание верного алгоритма, например, пропущены какие-то не совсем очевидные шаги – 12-16 баллов. В результате применения описанного алгоритма увеличивается количество предметов только одного или двух предметов, а количество предметов остальных цветов не изменяется – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

Вариант 3

1. Пройдите по линиям сетки с левого нижнего угла (цифра 7) до правого верхнего угла (цифра 4) так, чтобы сумма чисел на пройденном пути равнялась 38. Цифры 7 и 4 входят в сумму. Через каждый кружочек можно проходить только один раз. Не забудьте перерисовать рисунок в бланк ответов и показать Ваш путь.

Ответ. Например, $7 + 1 + 2 + 10 + 3 + 11 + 4$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный пример – 0 баллов.



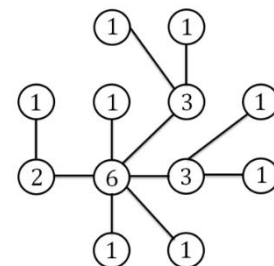
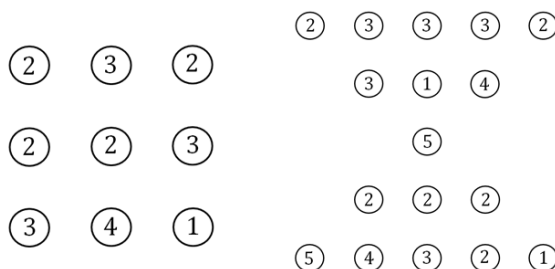
2. Эльф в карнавальных туфлях весит на 2 кг больше, чем эльф без туфель. Если поставить на весы пять одинаковых эльфов в туфлях и пять таких же эльфов без туфель, весы покажут 350 кг. Сколько весит эльф в туфлях? Объясните, как получили ответ.

Ответ. 36 кг.

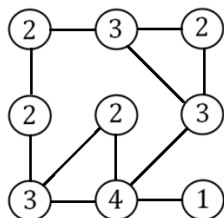
Решение. Наденем на пять эльфов туфли, тогда вес увеличится на 10 кг. Получается, что десять эльфов в туфлях весят 360 кг. Значит, один эльф в туфлях весит 36 кг.

Комментарий. Правильно найден вес эльфа в туфлях любым способом – 20 баллов. Правильно найден вес эльфа без туфель, но не найден (не указан в ответе) вес эльфа в туфлях – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но допущена ошибка в рассуждениях – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 6 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

3. Цифра в центре кружочка обозначает число отрезков, выходящее из него в другие кружочки (см. пример на рисунке справа). Отрезки не могут пересекаться, а все кружочки должны быть связаны. Нарисуйте все отрезки на двух рисунках ниже.



Ответ. Первый рисунок см. ниже.



На втором рисунке такие отрезки провести нельзя, так как сумма цифр в кружочках равна удвоенному количеству отрезков, но 47 не делится на 2.

Комментарий. Верный пример на первый рисунок – 8 баллов. Доказано, что на втором рисунке отрезки провести нельзя – 12 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

4. Четыре ученика 3-го класса Вика, Коля, Соня и Тима сидят за круглым столом. Они по очереди по кругу высказали следующие утверждения.

Вика: «Справа от меня сидит девочка».

Коля: «Напротив меня сидит мальчик».

Соня: «Тима сидит по правую руку от меня».

Тима: «Одна из девочек врёт».

Известно, что трое учеников ответили честно и только один соврал. Определите, в каком порядке они сидят за столом. *Объясните, как получили ответ.*

Ответ: Начиная с Вики в правую сторону от неё: Вика, Коля, Соня, Тима.

Решение: Если Вика говорит правду, то обе девочки за столом сидят рядом, но тогда оба мальчика также сидят рядом, и поэтому Коля лжёт. Но поскольку солгал только один ребёнок и это Коля, то утверждение Тимы также ложно. Противоречие.

Значит Вика – единственная, кто лжёт. Тогда из утверждения Коли мы понимаем, что мальчики сидят напротив друг друга, а значит и девочки сидят друг напротив друга. Тогда напротив Вики сидит Соня, справа от Сони, по её утверждению, Тима, а слева от Сони остаётся Коля.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении недостаточное обоснование – 15 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других вариантов нет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

5. У бельчонка есть яблоки, груши и бананы – по 10 штук каждого вида фрукта. Он может их обменивать у своего знакомого: четыре банана на пять груш; одно яблоко и одну грушу на два банана; одну грушу и один банан на два яблока. Может ли случиться так, что после нескольких обменов у бельчонка увеличится количество фруктов каждого вида? *Объясните, как получили ответ.*

Ответ. Может.

Решение. Заметим, что суммарное количество фруктов увеличивает только первый обмен; повысим его эффективность: за 2 яблока и 2 груши можно получить 4 банана, которые можно далее обменять на 5 груш. В результате этой операции у бельчонка станет на 2 яблока меньше, но на 3 груши больше. Действия бельчонка опишем таблицей:

Я	Г	Б	
10	10	10	Выполним пять вышеуказанных операций
0	25	10	Так как в сумме предметов стало 35, то далее можно использовать обмены второго и третьего видов, чтобы добиться нужного распределения фруктов по типам. Теперь обменяем 8 бананов и 8 груш на 16 яблок
16	17	2	В завершение процесса обменяем 5 яблок и 5 груш на 10 бананов
11	12	12	Таким образом, бельчонок увеличит количество фруктов каждого вида

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено нечёткое описание верного алгоритма, например, пропущены какие-то не совсем очевидные шаги – 12-16 баллов. В результате применения описанного алгоритма увеличивается количество фруктов только одного или двух предметов, а количество предметов остальных фруктов не изменяется – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

4 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Бельчата Озорник, Пушистик, Длиннохвост, Рыжик три дня соревновались в прыжках в длину. Каждый день они разбивались на две пары, например, Длиннохвост с Озорником, а Пушистик с Рыжиком, и тот, кто прыгнул дальше, выигрывал. Ничьих у них не было. Все пары были разными, каждый бельчонок за три дня по разу соревновался со всеми другими бельчатами. Результаты были такие:

	1-й день	2-й день	3-й день
Озорник	выиграл	проиграл	выиграл
Пушистик	проиграл	выиграл	выиграл
Длиннохвост	выиграл	проиграл	проиграл
Рыжик	?	?	?

Определите результаты Рыжика.

Ответ. Проиграл, выиграл, проиграл.

Решение. Каждый день в поединках должно быть два выигрыша и два проигрыша. Такая ситуация возможна, что показывает следующая таблица (бельчата обозначены первой буквой имени, «п» – проиграл, «в» – выиграл).

1-й день	2-й день	3-й день
Р (п), Д (в)	Р (в), О (п)	Р (п), П (в)
П (п), О (в)	Д (п), П (в)	Д (п), О (в)

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем соревновался, для проверки, что данная ситуация возможна. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Только верный ответ – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Миша, Таня и Света по очереди берут фишки из большой кучи. Начинает Миша, он берёт 3 фишки. Затем Таня берёт 1 фишку. После этого каждый берёт столько фишек, сколько только что взяли за один раз двое других вместе: Света берёт $3 + 1 = 4$, Миша $1 + 4 = 5$, Таня $4 + 5 = 9$, и так далее. У кого из них впервые число фишек, взятых на его разных ходах, будет 3 раза оканчиваться на одну и ту же цифру (не обязательно подряд)? Укажите также эту цифру и номер хода этого игрока.

Ответ. У Светы, цифра 4 на её 4-м ходу.

Решение. Достаточно следить за последними цифрами.

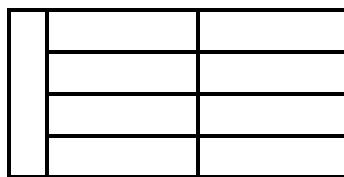
№	Миша	Таня	Света
1	3	1	4
2	5	9	4
3	3	7	0
4	7	7	4

Полная таблица для проверки:

№	Миша	Таня	Света
1	3	1	4
2	5	9	14
3	23	37	60
4	97	157	254

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Если при верном решении учитывались только последующие ходы, баллы не снижаются. При правильно найденных числах неверно выбраны победные ходы – 14 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на результат – 10 баллов. Если такая ошибка только в самом последнем числе – 15 баллов. Арифметическая ошибка, влияющая на результат – 5 баллов. Только верный ответ, решение не приведено – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Числа формируются неверным образом – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.

3. Большой прямоугольник состоит из 9 одинаковых маленьких прямоугольников (см. рисунок). Короткая сторона маленького прямоугольника равна 3 см. Найдите периметр большого прямоугольника.



Ответ. 78 см.

Решение. Длинная сторона маленького прямоугольника равна $3 \cdot 4 = 12$ (см), и это также короткая сторона большого прямоугольника. Длинная сторона большого прямоугольника равна $12 + 12 + 3 = 27$. Периметр большого прямоугольника равен $(27 + 12) \cdot 2 = 78$ см.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка при верном решении – 15 баллов. Найдены обе стороны (с обоснованием), но ответ не получен – 15 баллов. Найдена только одна сторона – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

4. В кормушку насыпали орехи. Бельчата Тоша и Кеша съели часть орехов, а потом один бельчонок убежал, а второй доел остальные орехи. Если бы убежал Тоша, то Кеша всего съел бы на 13 орехов больше, чем Тоша. Но убежал Кеша, а Тоша доел орехи и всего съел

на 5 орехов больше, чем Кеша. На сколько больше орехов съел Кеша, чем Тоша, до момента, когда Кеша убежал?

Ответ. 4.

Решение. Пусть Тоша съел сначала a орехов. Тогда Кеша съел бы $13 + a$ орехов, и всего в кормушке было $13 + 2a$ орехов. Пусть Кеша съел в начале b орехов. Тогда Тоша съел $5 + b$ орехов, и всего в кормушке было $5 + 2b$ орехов. Но эти два числа равны, $13 + 2a = 5 + 2b$. Отсюда $b - a = \frac{13-5}{2} = 4$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других вариантов нет – 18 баллов. В решении недостаточное обоснование – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ без объяснений или с неверными объяснениями – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

5. В математической игре участвовали 30 школьников. Они распределили между собой роли – одни всегда говорили правду, другие всегда лгали, третьи были хитрецами. Каждый хитрец поочередно говорил правду и лгал, причём каждый сам решал, начать с правды или со лжи. Каждому из 30 школьников задали 3 вопроса. 1) Ты правдивый? 2) Ты хитрец? 3) Ты лжец? На первый вопрос было 10 ответов «Нет», на второй вопрос – 16 ответов «Нет», на третий вопрос – 25 ответов «Нет». Все остальные ответы были «Да». Сколько среди школьников было правдивых, лжецов и хитрецов?

Ответ. 6 правдивых, 9 лжецов, 15 хитрецов.

Решение. На первый вопрос было $30 - 10 = 20$ ответов «Да». Ответить «Да» могли правдивые, лжецы и те из хитрецов, которые первым ответом лгали. Значит, хитрецов, которые на первый вопрос отвечали честно, было $30 - 20 = 10$. На второй вопрос ответили «Нет» хитрецы, которые вторым ответом лгали, их 10, и правдивые. Значит, правдивых 6. На третий вопрос ответили «Нет» правдивые, лжецы, и хитрецы, которые в этот раз говорили правду. Они говорили правду и в первый раз, и их 10. Из равенства $L + 6 + 10 = 25$ находим $L = 9$. Таким образом, правдивых 6, лжецов 9, а хитрецов $30 - 6 - 9 = 15$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верно найдено только число правдивых и лжецов – 17 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других решений нет – 15 баллов. Если при подборе нет проверки выполнения условий – не больше 5 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

Вариант 2

1. Антон, Боря, Ваня, Гриша три дня соревновались в беге. Каждый день они разбивались на две пары, например, Антон с Ваней, а Боря с Гришей, и тот, кто прибежал первым, выигрывал. Ничьих у них не было. Все пары были разными, каждый мальчик за три дня по разу соревновался со всеми другими мальчиками. Результаты были такие:

	1-й день	2-й день	3-й день
Антон	проиграл	выиграл	выиграл
Боря	?	?	?
Ваня	выиграл	проиграл	проиграл
Гриша	проиграл	выиграл	выиграл

Определите результаты Бори.

Ответ. Такая ситуация невозможна.

Решение. Каждый день в поединках должно быть два выигрыша и два проигрыша. Тогда получается, что Боря выиграл, проиграл, проиграл. Однако надо проверить, возможна ли

такая ситуация. Если в первый день Боря играл с Антоном, то Ваня играл с Гришей. Тогда во второй день Боря играл с Гришей, а Антон с Ваней. В третий день Боря должен играть с Ваней, но они оба проиграли. Если в первый день Боря играл с Гришей, то Ваня играл с Антоном. Тогда во второй день Боря играл с Антоном, а Гриша с Ваней. В третий день Боря должен играть с Ваней, но они оба проиграли.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Не сделана проверка, что данная ситуация возможна, и получен ответ «выиграл, проиграл, проиграл» – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Бельчата Альфик, Бэтик и Дэльтик по очереди берут шишки из большой кучи. Начинает Альфик, он берёт 1 шишку. Затем Бэтик берёт 2 шишки. После этого каждый берёт столько шишек, сколько только что взяли за один раз двое других вместе: Дэльтик берёт $2 + 1 = 3$, Альфик $3 + 2 = 5$, Бэтик $5 + 3 = 8$, Дэльтик $5 + 8 = 13$, и так далее. У кого из них впервые число фишек, взятых на его разных ходах, будет 3 раза оканчиваться на одну и ту же цифру (не обязательно подряд)? Укажите также эту цифру и номер хода этого игрока.

Ответ. У Дэльтика цифра 3 на его 4-м ходу.

Решение. Достаточно следить за последними цифрами.

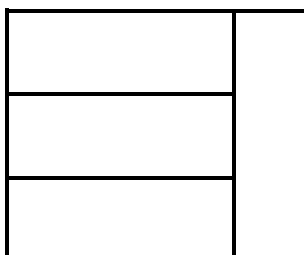
№	Альфик	Бэтик	Дэльтик
1	1	2	3
2	5	8	3
3	1	4	5
4	9	4	3

Полная таблица для проверки:

№	Альфик	Бэтик	Дэльтик
1	1	2	3
2	5	8	13
3	21	34	55
4	89	144	233

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Если при верном решении учитывались только последующие ходы, баллы не снижаются. При правильно найденных числах неверно выбраны победные ходы – 14 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на результат – 10 баллов. Если такая ошибка только в самом последнем числе – 15 баллов. Арифметическая ошибка, влияющая на результат – 5 баллов. Только верный ответ, решение не приведено – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Числа формируются неверным образом – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.

3. Большой прямоугольник состоит из 4 одинаковых маленьких прямоугольников (см. рисунок). Короткая сторона маленького прямоугольника равна 2 см. Найдите площадь большого прямоугольника.



Ответ. 48 см^2 .

Решение. Длинная сторона маленького прямоугольника равна $3 \cdot 2 = 6$ (см), и это также короткая сторона большого прямоугольника. Длинная сторона большого прямоугольника равна $6 + 2 = 8$. Площадь большого прямоугольника равна $8 \cdot 6 = 48$ (см²).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка при верном решении – 15 баллов. Найдены обе стороны (с обоснованием), но ответ не получен – 15 баллов. Найдена только одна сторона – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

4. Лиза и Оля вешали игрушки на ёлку. Они повесили часть игрушек, а потом одна девочка ушла, а вторая повесила остальные игрушки. Если бы ушла Лиза, то Оля всего повесила бы на 15 игрушек больше, чем Лиза. Но ушла Оля, а Лиза повесила все остальные игрушки, и она всего повесила на 9 игрушек больше, чем Оля. На сколько больше игрушек повесила Оля, чем Лиза до момента, когда Оля ушла?

Ответ. 3.

Решение. Пусть Лиза повесила сначала a игрушек. Тогда Оля повесила бы $15 + a$ игрушек, и всего было $15 + 2a$ игрушек. Пусть Оля повесила в начале b игрушек. Тогда Лиза повесила бы $9 + b$ игрушек, и всего было $9 + 2b$ игрушек. Но эти два числа равны, $15 + 2a = 9 + 2b$. Отсюда $b - a = \frac{15-9}{2} = 3$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других вариантов нет – 18 баллов. В решении недостаточное обоснование – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

5. Некоторые гномы лжецы, они всегда лгут. Другие гномы честные, всегда говорят правду. Остальные гномы хитрецы. Каждый хитрец поочерёдно говорит правду и ложь, причём каждый сам решает, начать с правды или со лжи. Было 27 гномов. Каждому из них задали первый вопрос: Ты честный? Было 20 ответов «Да». Потом каждому из них задали второй вопрос: Ты хитрец? Было 12 ответов «Да». Затем каждому из них задали третий вопрос: Ты лжец? Было 5 ответов «Да». Все остальные ответы на три вопроса были «Нет». Сколько среди гномов было честных, лжецов и хитрецов?

Ответ. 8 честных, 7 лжецов, 12 хитрецов.

Решение. На первый вопрос было 20 ответов «Да». Ответить «Да» могли правдивые, лжецы и те из хитрецов, которые на первый вопрос лгали. На второй вопрос ответили «Да» лжецы и хитрецы, которые говорили правду, их вместе 12. Но это те же хитрецы, которые солгали в прошлый раз. Значит, из 20 ответов «Да» 12 дали лжецы и хитрецы, то есть честных $20 - 12 = 8$. На третий вопрос ответили «Да» хитрецы, которые в этот раз лгали. По условию их 5. Они лгали и в первый раз, а во второй раз говорили правду, то есть это те же самые хитрецы, что отвечали «Да» в первый и второй раз. Из ответа на второй вопрос мы знаем, что вместо со лжецами их 12. Значит, лжецов $12 - 5 = 7$. Таким образом, честных 8, лжецов 7, а хитрецов $27 - 7 - 8 = 12$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верно найдено только число правдивых и лжецов – 17 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других решений нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

Вариант 3

1. Бельчата Рыжик, Серый, Бус и Егоза три дня соревновались в беге. Каждый день они разбивались на две пары, например, Рыжик с Бусом, а Серый с Егозой, и тот, кто прибежал первым, выигрывал. Ничьих у них не было. Все пары были разными, каждый бельчонок за три дня по разу соревновался со всеми другими бельчатами. Результаты были такие:

	1-й день	2-й день	3-й день
Рыжик	?	?	?
Серый	проиграл	выиграл	выиграл
Бус	выиграл	проиграл	проиграл
Егоза	проиграл	проиграл	выиграл

Определите результаты Рыжика.

Ответ. Выиграл, выиграл, проиграл.

Решение. Каждый день в поединках должно быть два выигрыша и два проигрыша. Такая ситуация возможна, что показывает следующая таблица (бельчата обозначены первой буквой имени, «п» – проиграл, «в» – выиграл).

1-й день	2-й день	3-й день
Р (в), С (п)	Р (в), Б (п)	Р (п), Е (в)
Б (п), Е (в)	Е (п), С (в)	Б (п), С (в)

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем соревновался, для проверки, что данная ситуация возможна. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Пираты Сильвер, Голд и Плюм по очереди берут монеты из большой кучи. Начинает Сильвер, он берёт 1 монету. Затем Голд берёт 4 монеты. После этого каждый берёт столько монет, сколько только что взяли за один раз двое других вместе: Плюм берёт $1 + 4 = 5$, Сильвер $4 + 5 = 9$, Голд $5 + 9 = 14$, и так далее. У кого из них впервые число монет, взятых на его разных ходах, будет 3 раза оканчиваться на одну и ту же цифру (не обязательно подряд)? Укажите также эту цифру и номер хода этого игрока.

Ответ. У Голда цифра 4 на его 4-м ходу.

Решение. Достаточно следить за последними цифрами.

№	Сильвер	Голд	Плюм
1	1	4	5
2	9	4	3
3	7	0	7
4	7	4	1

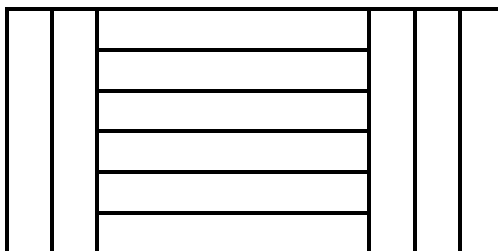
Полная таблица для проверки:

№	Сильвер	Голд	Плюм
1	1	4	5
2	9	14	23
3	37	60	97
4	157	254	411

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Если при верном решении учитывались только последующие ходы, баллы не снижаются. При правильно найденных числах неверно выбраны победные ходы – 14 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на результат – 10 баллов. Если такая ошибка только в самом последнем числе – 15 баллов. Арифметическая ошибка, влияющая на результат – 5 баллов. Только верный ответ,

решение не приведено – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Числа формируются неверным образом – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.

3. Большой прямоугольник состоит из 11 одинаковых маленьких прямоугольников (см. рисунок). Короткая сторона маленького прямоугольника равна 4 см. Найдите периметр большого прямоугольника.



Ответ. 136 см.

Решение. Длинная сторона маленького прямоугольника равна $4 \cdot 6 = 24$ (см), и это также короткая сторона большого прямоугольника. Длинная сторона большого прямоугольника равна $24 + 5 \cdot 4 = 44$. Периметр большого прямоугольника равен $(24 + 44) \cdot 2 = 136$ (см).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка при верном решении – 15-19 баллов. Найдены обе стороны (с обоснованием), но ответ не получен – 15 баллов. Найдена только одна сторона – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

4. Бельчата Тоша и Кеша залезли на кедр и сорвали часть шишек. Потом один бельчонок убежал, а второй сорвал остальные шишки. Если бы убежал Тоша, то всего Кеша сорвал бы на 19 шишек больше, чем Тоша. Но убежал Кеша, а Тоша собрал остальные шишки и всего сорвал на 7 шишек больше, чем Кеша. На сколько больше шишек собрал Кеша, чем Тоша, до момента, когда Кеша убежал?

Ответ. 6.

Решение. Пусть Тоша сорвал сначала a шишек. Тогда Кеша сорвал бы $19 + a$ шишек, и всего на кедре было $19 + 2a$ шишек. Пусть Кеша сорвал сначала b шишек. Тогда Тоша сорвал бы $7 + b$ шишек, и всего на кедре было $9 + 2b$ шишек. Но эти два числа равны, $19 + 2a = 7 + 2b$. Отсюда $b - a = \frac{19-7}{2} = 6$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других вариантов нет – 18 баллов. В решении недостаточное обоснование – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

5. Путешественник встретил на острове 35 жителей. Одни из них всегда говорили правду, другие всегда лгали, третьи были хитрецами. Каждый хитрец поочерёдно говорил правду и лгал, причём каждый сам решал, начать с правды или со лжи. Каждому из 35 жителей задали 3 вопроса. 1) Ты правдивый? 2) Ты хитрец? 3) Ты лжец? На первый вопрос было 9 ответов «Нет», на второй вопрос – 13 ответов «Нет», на третий вопрос – 16 ответов «Нет». Все остальные ответы были «Да». Сколько среди жителей было правдивых, лжецов и хитрецов?

Ответ. 4 правдивых, 3 лжеца, 28 хитрецов.

Решение. На первый вопрос было $35 - 9 = 26$ ответов «Да». Ответить «Да» могли правдивые, лжецы и те из хитрецов, которые на первый вопрос лгали. Значит, хитрецов,

которые на первый вопрос отвечали честно, было $35 - 26 = 9$. На второй вопрос ответили «Нет» хитрецы, которые лгали, их 9, и правдивые. Значит, правдивых 4. На третий вопрос ответили «Нет» правдивые, лжецы, и хитрецы, которые в этот раз говорили правду. Они говорили правду и в первый раз, и их 9. Из равенства $L + 4 + 9 = 16$ находим $L = 3$. Таким образом, правдивых 4, лжецов 3, а хитрецов $35 - 4 - 3 = 28$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верно найдено только число правдивых и лжецов – 17 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других решений нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20** баллов в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. На листочке написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в записи. Сумма этих чисел оказалась равной 100. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 23 заменили на число 32). Могла ли сумма получившихся чисел оказаться больше 400?

Ответ. Да, может.

Решение. Поскольку при перестановке цифр мы ставим вторую цифру на первое место, кажется разумным подбирать слагаемые, у которых вторая цифра большая. Например:

$$19 + 19 + 19 + 19 + 24 = 100, \quad 91 + 91 + 91 + 91 + 42 = 406.$$

Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Используются однозначные числа или числа, в записи которых есть цифра «0», при, в целом, верном примере – снимается 5 баллов.

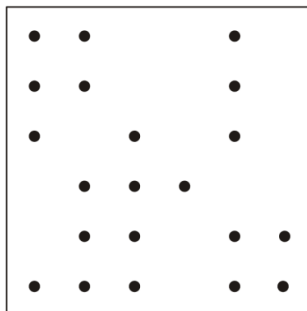
2. Бельчата выстроились в очередь в пункт сдачи орехов. У стоящих перед Вилли в сумме 25 орехов, а у стоящих за ним – 15. У стоящих перед Дилли в сумме 17 орехов, а у стоящих за ним – 19. У Вилли и Дилли вместе 12 орехов. Сколько орехов у бельчонка, стоящего перед Вилли? (В очереди нет бельчат без орехов.)

Ответ: 8.

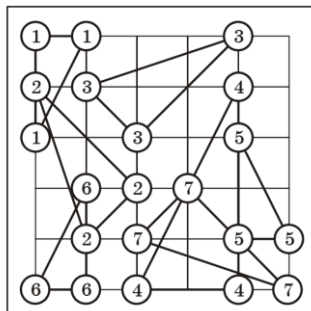
Решение. Пусть количество орехов: у Вилли – В, а у Дилли – Д. Из условия задачи следует, что $25 + В + 15 = 17 + Д + 19$, то есть $Д - В = 4$. Так как $Д + В = 12$, то $Д = 8$, $В = 4$. Заметим, что количество орехов у тех, кто стоит перед Вилли вместе с орехами Дилли в точности равно количеству орехов у тех, кто стоит перед Вилли. Следовательно, перед Вилли стоит как раз Дилли.

Комментарий. Только верный ответ – 3 балла. Используется, но не доказан, факт, что всего орехов 44 – добавляется 2 балла. Не доказано, что между Вилли и Дилли нет других бельчат, но при этом сказано, что у Вилли – 4 ореха, а у Дилли – 8 орехов – не более 5 баллов. Обоснованно получено и доказано, что у Вилли 4 ореха, а у Дилли – 8 орехов – 14 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 20 баллов.

3. Нарисуйте как можно больше треугольников, один из углов которых равен 90° , а вершины расположены в отмеченных точках. При этом каждая из отмеченных точек должна быть вершиной ровно одного треугольника. Треугольники могут пересекаться. Не забудьте перенести рисунок в бланк ответов.



Ответ.



Комментарий. Любой верный пример на 7 треугольников – 20 баллов. Любой пример на 6 треугольников – 15 баллов. Любой пример на 5 треугольников – 10 баллов. Любой пример на 4 треугольника – 5 баллов. Примеры на 3, 2, 1 и 0 треугольников – 0 баллов. В примере одна или более точек используются в нескольких треугольниках – 0 баллов.

4. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 15 жителей, среди которых был хотя бы один купец и хотя бы один разбойник. Каждому сидящему за столом задали вопрос: «Сколько среди твоих соседей купцов?» Все жители ответили одинаково. Какое число разбойников может сидеть за столом? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

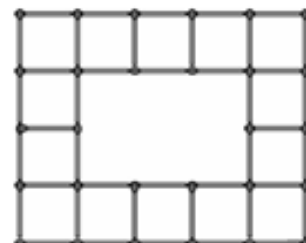
Ответ. 5, 8, 9 или 10.

Решение. Заметим, что нам не подходят варианты, когда на острове только разбойники или только купцы. Пусть на острове есть и купцы, и разбойники. Тогда был купец, сидящий рядом с разбойником, поэтому купцы не могли ответить 2. Тогда они сказали либо про 0, либо про 1 купца среди своих соседей. Если бы сказали про 0 купцов, значит, купцы сидят группами по одному, а разбойники группами не более, чем по два жителя. В таком случае разбойников не менее половины от общего числа ($7\frac{1}{2}$) и не более $\frac{2}{3}$ (10 жителей). В каждом случае от 8 до 10 разбойников в примере сначала чередуем купцов и разбойников, а потом к некоторым одиночным разбойникам подсаживаем второго разбойника. Если бы купцы сказали про 1, то за столом бы сидели циклически группы по 3 жителя (купец, купец, разбойник), т.е. было бы 5 разбойников.

Комментарий. За каждый обоснованно полученный верный ответ – 4 балла. Доказано, что других ответов нет – ещё 4 балла. Если найден один из верных ответов, но при этом не указана расстановка, то снимается по 2 балла. За каждое неверно указанное количество разбойников и неверный пример снимается 2 балла. Если вместо разбойников было указано количество купцов – снимается 2 балла.

5. У Васи есть 42 спички, из которых он может составить рамку толщиной в один квадратик, как показано на рисунке справа (внутри рамки спичек нет). Может ли Вася, используя ровно 1000 спичек, составить такую же рамку, но большего размера?

Ответ. Не сможет.



Решение. Покажем, что количество спичек в контуре всегда делится на 3. Отсюда будет следовать, что контура из 1000 спичек не существует. Действительно, начнем выкладывать клетки контура по часовой стрелке, начиная с угловой правой нижней клетки. При этом в ее контуре пока не положим верхнюю спичку: . Для каждой следующей клетки теперь потребуется ровно три новые спички, потому что одна из ее сторон уже будет выложена. Для последней клетки тоже потребуется три спички, потому что верхнюю спичку первой клетки мы не положили. Следовательно, общее количество спичек равно количеству клеток, умноженному на 3.

Комментарий. Обоснованное полное решение – 20 баллов. Присутствует идея рассмотреть делимость на 3 или на 6, но без дальнейших продвижений – до 5 баллов. Идея использовать рамку или аналогичную структуру +3 балла.

Примечание. Некоторые участники могут рассматривать увеличение исходной рамки по длине или ширине на 1 квадратик и писать, что общее количество клеток увеличивается на 6. Это решение может считаться верным, только в том случае, если доказано, что все возможные рамки толщиной в 1 квадратик получаются из исходной рамки увеличением длины или ширины.

Вариант 2

1. На листочке написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в записи. Сумма этих чисел оказалась равной 105. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 23 заменили на число 32). Могла ли сумма получившихся чисел оказаться больше 450?

Ответ. Да, может.

Решение. Поскольку при перестановке цифр мы ставим вторую цифру на первое место, кажется разумным подбирать слагаемые, у которых вторая цифра большая. Например:

$$19 + 19 + 19 + 19 + 29 = 105, \quad 91 + 91 + 91 + 91 + 92 = 456.$$

Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Используются однозначные числа или числа, в записи которых есть цифра «0», при, в целом, верном примере – снимается 5 баллов.

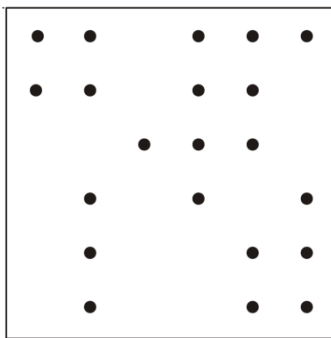
2. Бельчата выстроились в очередь в пункт сдачи орехов. У стоящих перед Вилли в сумме 33 ореха, а у стоящих за ним – 17. У стоящих перед Дилли в сумме 27 орехов, а у стоящих за ним – 20. У Вилли и Дилли вместе 9 орехов. Сколько орехов у бельчонка, стоящего перед Вилли? (В очереди нет бельчат без орехов.)

Ответ: 6.

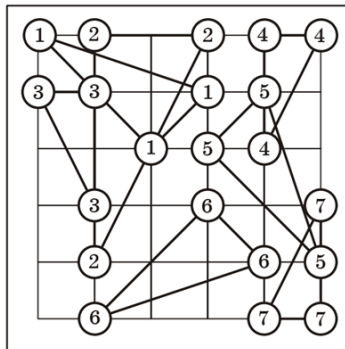
Решение. Пусть количество орехов: у Вилли – В, а у Дилли – Д. Из условия задачи следует, что $33 + В + 17 = 27 + Д + 20$, то есть $Д - В = 3$. Так как $Д + В = 9$, то $Д = 6$, $В = 3$. Заметим, что количество орехов у тех, кто стоит перед Вилли вместе с орехами Дилли в точности равно количеству орехов у тех, кто стоит перед Вилли. Следовательно, перед Вилли стоит как раз Дилли.

Комментарий. Только верный ответ – 3 балла. Используется, но не доказан, факт, что всего орехов 53 – добавляется 2 балла. Не доказано, что между Вилли и Дилли нет других бельчат, но при этом сказано, что у Вилли – 3 ореха, а у Дилли – 6 орехов – не более 5 баллов. Обоснованно получено и доказано, что у Вилли 3 ореха, а у Дилли – 6 орехов – 14 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 20 баллов.

3. Нарисуйте как можно больше треугольников, один из углов которых равен 90° , а вершины расположены в отмеченных точках. При этом каждая из отмеченных точек должна быть вершиной ровно одного треугольника. Треугольники могут пересекаться. Не забудьте перенести рисунок в бланк ответов.



Ответ.



Комментарий. Любой верный пример на 7 треугольников – 20 баллов. Любой пример на 6 треугольников – 15 баллов. Любой пример на 5 треугольников – 10 баллов. Любой пример на 4 треугольника – 5 баллов. Примеры на 3, 2, 1 и 0 треугольников – 0 баллов. В примере одна или более точек используются в нескольких треугольниках – 0 баллов.

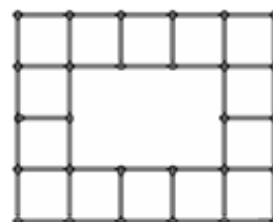
4. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 14 жителей, среди которых был хотя бы один купец и хотя бы один разбойник. Каждому сидящему за столом задали вопрос: «Сколько среди твоих соседей купцов?» Все жители ответили одинаково. Какое число разбойников может сидеть за столом? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

Ответ. 7, 8 или 9.

Решение. Заметим, что нам не подходят варианты, когда на острове только разбойники или только купцы. Пусть на острове есть и купцы, и разбойники. Тогда был купец, сидящий рядом с разбойником, поэтому купцы не могли ответить 2. Тогда они сказали либо про 0, либо про 1 купца среди своих соседей. Если бы сказали про 0 купцов, значит, купцы сидят группами по одному, а разбойники группами не более чем по два жителя. В таком случае разбойников не более половины от общего числа (7) и не менее $\frac{2}{3}$ ($9\frac{1}{3}$ жителей). В каждом случае от 7 до 9 разбойников в примере сначала чередуем купцов и разбойников, а потом к некоторым одиночным купцам подсаживаем второго разбойника. Если бы купцы сказали про 1, то за столом бы сидели циклически группы по 3 жителя (купец, купец, разбойник), т.е. число жителей делилось бы на 3.

Комментарий. За каждый обоснованно полученный верный ответ – 5 баллов. Доказано, что других ответов нет – ещё 5 балла. Если найден один из верных ответов, но при этом не указана расстановка, то снимается по 2 балла. За каждое неверно указанное количество разбойников и неверный пример снимается 2 балла. Если вместо разбойников было указано количество купцов – снимается 2 балла.

5. У Васи есть 42 спички, из которых он может составить рамку толщиной в один квадратик, как показано на рисунке справа (внутри рамки спичек нет). Может ли Вася, используя ровно 1100 спичек, составить такую же рамку, но большего размера?



Ответ. Не сможет.

Решение. Покажем, что количество спичек в контуре всегда делится на 3. Отсюда будет следовать, что контура из 1100 спичек не существует. Действительно, начнем выкладывать клетки контура по часовой стрелке, начиная с угловой правой ниж-

ней клетки. При этом в ее контуре пока не положим верхнюю спичку: . Для каждой следующей клетки теперь потребуется ровно три новые спички, потому что одна из ее сторон уже будет выложена. Для последней клетки тоже потребуется три спички, потому что верхнюю спичку первой клетки мы не положили. Следовательно, общее количество спичек равно количеству клеток, умноженному на 3.

Комментарий. Обоснованное полное решение – 20 баллов. Присутствует идея рассмотреть делимость на 3 или на 6, но без дальнейших продвижений – до 5 баллов. Идея использовать рамку или аналогичную структуру +3 балла.

Примечание. Некоторые участники могут рассматривать увеличение исходной рамки по длине или ширине на 1 квадратик и писать, что общее количество клеток увеличивается на 6. Это решение может считаться верным, только в том случае, если доказано, что все возможные рамки толщиной в 1 квадратик получаются из исходной рамки увеличением длины или ширины.

Вариант 3

1. На листочке написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в записи. Сумма этих чисел оказалась равной 115. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 23 заменили на число 32). Могла ли сумма получившихся чисел оказаться больше 450?

Ответ. Да, может.

Решение. Поскольку при перестановке цифр мы ставим вторую цифру на первое место, кажется разумным подбирать слагаемые, у которых вторая цифра большая. Например:

$$19 + 19 + 19 + 19 + 39 = 115, \quad 91 + 91 + 91 + 91 + 93 = 457.$$

Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Используются однозначные числа или числа, в записи которых есть цифра «0», при, в целом, верном примере – снимается 5 баллов.

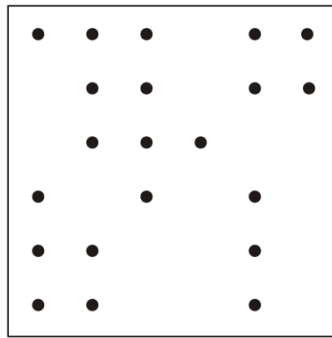
2. Бельчата выстроились в очередь в пункт сдачи орехов. У стоящих перед Вилли в сумме 23 ореха, а у стоящих за ним – 19. У стоящих перед Дилли в сумме 13 орехов, а у стоящих за ним – 24. У Вилли и Дилли вместе 15 орехов. Сколько орехов у бельчонка, стоящего перед Вилли? (В очереди нет бельчат без орехов.)

Ответ: 10.

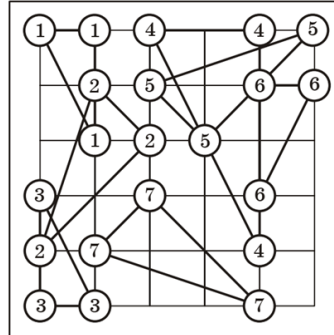
Решение. Пусть количество орехов: у Вилли – В, а у Дилли – Д. Из условия задачи следует, что $23 + В + 19 = 13 + Д + 24$, то есть $Д - В = 5$. Так как $Д + В = 15$, то $Д = 10$, $В = 5$. Заметим, что количество орехов у тех, кто стоит перед Вилли вместе с орехами Дилли в точности равно количеству орехов у тех, кто стоит перед Вилли. Следовательно, перед Вилли стоит как раз Дилли.

Комментарий. Только верный ответ – 3 балла. Используется, но не доказан, факт, что всего орехов 47 – добавляется 2 балла. Не доказано, что между Вилли и Дилли нет других бельчат, но при этом сказано, что у Вилли – 5 орехов, а у Дилли – 10 орехов – не более 5 баллов. Обоснованно получено и доказано, что у Вилли 5 орехов, а у Дилли – 10 орехов – 14 баллов. Обоснованно получен верный ответ – 20 баллов.

3. Нарисуйте как можно больше треугольников, один из углов которых равен 90° , а вершины расположены в отмеченных точках. При этом каждая из отмеченных точек должна быть вершиной ровно одного треугольника. Треугольники могут пересекаться. Не забудьте перенести рисунок в бланк ответов.



Ответ.



Комментарий. Любой верный пример на 7 треугольников – 20 баллов. Любой пример на 6 треугольников – 15 баллов. Любой пример на 5 треугольников – 10 баллов. Любой пример на 4 треугольника – 5 баллов. Примеры на 3, 2, 1 и 0 треугольников – 0 баллов. В примере одна или более точек используются в нескольких треугольниках – 0 баллов.

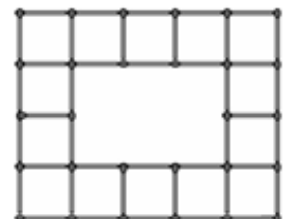
4. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 14 жителей, среди которых был хотя бы один купец и хотя бы один разбойник. Каждому сидящему за столом задали вопрос: «Сколько среди твоих соседей купцов?» Все жители ответили одинаково. Какое число купцов может сидеть за столом? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

Ответ. 5, 6 или 7.

Решение. Заметим, что нам не подходят варианты, когда на острове только разбойники или только купцы. Пусть на острове есть и купцы, и разбойники. Тогда был купец, сидящий рядом с разбойником, поэтому купцы не могли ответить 2. Тогда они сказали либо про 0, либо про 1 купца среди своих соседей. Если бы сказали про 0 купцов, значит, купцы сидят группами по одному, а разбойники группами не более чем по два жителя. В таком случае купцов не более половины от общего числа (7) и не менее $\frac{1}{3}$ ($4\frac{2}{3}$ жителей). В каждом случае от 5 до 7 купцов в примере сначала чередуем купцов и разбойников, а потом к некоторым одиночным купцам подсаживаем второго разбойника. Если бы купцы сказали про 1, то за столом бы сидели циклически группы по 3 жителя (купец, купец, разбойник), т.е. число жителей делилось бы на 3.

Комментарий. За каждый обоснованно полученный верный ответ – 5 баллов. Доказано, что других ответов нет – ещё 5 балла. Если найден один из верных ответов, но при этом не указана расстановка, то снимается по 2 балла. За каждое неверно указанное количество разбойников и неверный пример снимается 2 балла. Если вместо купцов было указано количество разбойников – снимается 2 балла.

5. У Васи есть 42 спички, из которых он может составить рамку толщиной в один квадратик, как показано на рисунке справа (внутри рамки спичек нет). Может ли Вася, используя ровно 1300 спичек, составить такую же рамку, но большего размера?



Ответ. Не сможет.

Решение. Покажем, что количество спичек в контуре всегда делится на 3. Отсюда будет следовать, что контура из 1300 спичек не существует. Действительно, начнем выкладывать клетки контура по часовой стрелке, начиная с угловой правой нижней клетки. При этом в ее контуре пока не положим верхнюю спичку: . Для каждой сле-

дующей клетки теперь потребуется ровно три новые спички, потому что одна из ее сторон уже будет выложена. Для последней клетки тоже потребуется три спички, потому что верхнюю спичку первой клетки мы не положили. Следовательно, общее количество спичек равно количеству клеток, умноженному на 3.

Комментарий. Обоснованное полное решение – 20 баллов. Присутствует идея рассмотреть делимость на 3 или на 6, но без дальнейших продвижений – до 5 баллов. Идея использовать рамку или аналогичную структуру - +3 балла.

Примечание. Некоторые участники могут рассматривать увеличение исходной рамки по длине или ширине на 1 квадратик и писать, что общее количество клеток увеличивается на 6. Это решение может считаться верным, только в том случае, если доказано, что все возможные рамки толщиной в 1 квадратик получаются из исходной рамки увеличением длины или ширины.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

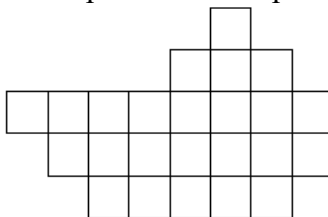
1. В наборе было 28 фигурок: треугольников, квадратов, прямоугольников. У всех фигурок вместе было 100 сторон. Сколько было треугольников?

Ответ. 12.

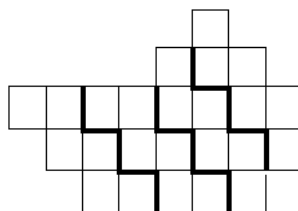
Решение. Если бы все фигуры были квадратами или прямоугольниками, у них было бы $28 \cdot 4 = 112$ сторон. 12 сторон не хватает, значит, у 12 фигур было по 3 стороны.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Разделите её по границам клеток на четыре равные части. Части считаются равными, если при наложении они совпадают. При этом части можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. Показан только вид частей, но не показано разбиение – 10 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. У бельчонка было 4 шишки высотой 6, 9, 12 и 15 сантиметров. Потом он нашёл ещё одну шишку (обозначим её высоту a), и расположил все пять шишек в ряд в порядке возрастания высоты. При каких значениях a среднее арифметическое высоты пяти шишек совпадает с высотой шишки, стоящей в середине ряда? Найдите все значения и покажите, что других нет.

Ответ. 3; 10,5; 18.

Решение. $6 + 9 + 12 + 15 = 42$. В середине ряда могут стоять числа 9, 12, a , но не 6 или 15. Надо рассмотреть 3 случая.

1) $42 + a = 5 \cdot 9 = 45, a = 3$. Среднее арифметическое 9, в середине ряда 3, 6, 9, 12, 15 также стоит число 9. Этот случай подходит.

2) $42 + a = 5 \cdot 12 = 60, a = 18$. Среднее арифметическое 12, в середине ряда 6, 9, 12, 15, 18 стоит число 12. Этот случай тоже подходит.

3) $42 + a = 5a, a = \frac{42}{4} = 10,5$. Среднее арифметическое 10,5, в середине ряда 6, 9, 10,5, 12, 15 стоит число 10,5. И этот случай подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Число $a = 10,5$ найдено, но отброшено – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена перебором целых значений, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

4. У Лизы есть свободное время, и она хочет погулять с подружками, но до этого ей надо вывести собаку и купить хлеб. Если она сначала выведет собаку, это займёт 10% оставшегося после этого свободного времени. Если она сначала купит хлеб, это займёт 21% оставшегося после этого свободного времени. Какую часть свободного времени Лиза сможет погулять с подружками?

Ответ. $\frac{89}{121}$.

Решение. Обозначим всё свободное время a , время, нужное, чтобы вывести собаку – x , время, нужное, чтобы купить хлеб – y . По условию $x = 0,1(a - x), y = 0,21(a - y)$.

Отсюда $1,1x = 0,1a, 1,21y = 0,21a$, то есть $x = \frac{a}{11}, y = \frac{21a}{121}$. $x + y = \frac{32a}{121}$. После этого останется $a - \frac{32a}{121} = \frac{89a}{121}$. Это составляет $\frac{89}{121}$ от a ($\sim 73,56\%$).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Найдена часть времени от вывода собаки и покупки хлеба, а не от всего свободного времени – 18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Условия записаны в виде верной системы – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Артём записал числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Потом он разбил все числа на пары, и вместо каждой пары записал одно неотрицательное число, равное разности чисел в этой паре. После этого получилось 4 числа. Артём повторил эту операцию ещё 2 раза, и осталось

одно число. Каким могло быть это число? Укажите все возможные значения и докажете, что других нет.

Ответ. 0, 2, 4, 6.

Решение. Число 8 не может остаться, так как оно уменьшается на первом шаге. Докажем, что нечётное число не может остаться. Изначально сумма чисел чётная. Её можно представить, как сумму двух чисел: всех уменьшаемых и всех вычитаемых чисел. Но если сумма двух чисел чётная, то и разность этих чисел чётная. Следовательно, на каждом шаге получаются числа с чётной суммой, поэтому и последнее число должно быть чётным. Покажем, что числа 0, 2, 4, 6 могут остаться.

1) Пусть бельчонок в первый раз объединил пары так: (1; 8), (2; 3), (4; 5), (6; 7). Тогда он получил число 7 и три единицы. Далее: $7, 1, 1, 1 \rightarrow 6, 0, 0, 0 \rightarrow 6, 0 \rightarrow 6$.

2) (1; 6), (2; 3), (4; 5), (7; 8) $\rightarrow 5, 1, 1, 1 \rightarrow 4, 0 \rightarrow 4$.

3) (1; 4), (2; 3), (5; 6), (7; 8) $\rightarrow 3, 1, 1, 1 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 2$.

4) (1; 2), (3; 4), (5; 6), (7; 8) $\rightarrow 1, 1, 1, 1 \rightarrow 0, 0, 0, 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. За каждый найденный ответ – 2 балла, если показано, как получить этот ответ; если не показано – 1 балл. Доказано, что не может быть нечётных чисел – 12 баллов, баллы суммируются. В верном доказательстве есть пробел – 8 баллов (из 12). Есть идея чётности числа нечётных чисел, но доказательства нет – 2 балла (из 12). Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Вариант 2

1. В наборе было 30 фигурок: треугольников, квадратов, прямоугольников. У всех фигурок вместе было 112 сторон. Сколько было треугольников?

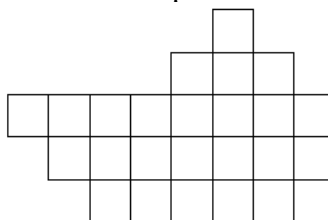
Ответ. 8.

Решение. Если бы все фигуры были квадратами или прямоугольниками, у них было бы $30 \cdot 4 = 120$ сторон. 8 сторон не хватает, значит, у 8 фигур было по 3 стороны.

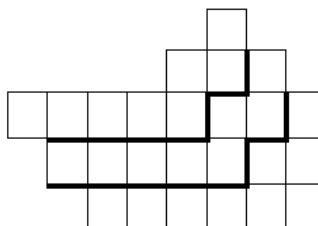
Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Разделите её по границам клеток на три равные части. Части считаются равными, если при наложении они совпадают.

При этом части можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. Показан только вид частей, но не показано разбиение – 10 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. Бельчонок нашёл 4 гриба высотой 5, 9, 12 и 18 сантиметров. Потом он нашёл ещё один гриб (обозначим его высоту a), и расположил все пять грибов в ряд в порядке возрастания высоты. При каких значениях a среднее арифметическое высоты пяти грибов совпадает с высотой гриба, стоящего в середине ряда? Найдите все значения и покажите, что других нет.

Ответ. 1; 11; 16.

Решение. $5 + 9 + 12 + 18 = 44$. В середине ряда могут стоять числа 9, 12, a , но не 5 или 18. Надо рассмотреть 3 случая. 1) $44 + a = 5 \cdot 9 = 45$, $a = 1$. Среднее арифметическое 9, в середине ряда 1, 5, 9, 12, 18 также стоит число 9. Этот случай подходит.

2) $44 + a = 5 \cdot 12 = 60$, $a = 16$. Среднее арифметическое 12, в середине ряда 5, 9, 12, 16, 18 стоит число 12. Этот случай также подходит.

3) $44 + a = 5 \cdot a = 5a$, $a = 11$. Среднее арифметическое 11, в середине ряда 5, 9, 11, 12, 18, стоит число 11. И этот случай также подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Без обоснования рассматриваются только целые значения a – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

4. В роще растут деревья трёх видов: берёзы, осины, клёны. Берёзы составляют 20% от числа деревьев двух других видов. Осины составляют 80% от числа деревьев двух других видов. Какую часть от числа всех деревьев составляют клёны?

Ответ. $\frac{7}{18}$.

Решение. Обозначим число всех деревьев a , число берёз – x , число осин – y . По условию $x = 0,2(a - x)$, $y = 0,8(a - y)$.

Отсюда $1,2x = 0,2a$, $1,8y = 0,8a$, то есть $x = \frac{a}{6}$, $y = \frac{4a}{9}$. $x + y = \frac{11a}{18}$. После этого останется $a - \frac{11a}{18} = \frac{7a}{18}$. Это составляет $\frac{7}{18}$ от a ($\sim 39\%$).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Найдена часть от деревьев двух других видов, а не от всех – 18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Миша записал числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. Потом он разбил все числа на пары, и вместо каждой пары записал одно неотрицательное число, равное разности чисел в этой паре. После этого получилось 4 числа. Миша повторил эту операцию ещё 2 раза, и осталось одно число. Каким могло быть это число? Укажите все возможные значения и докажете, что других нет.

Ответ. 0, 6, 12, 18.

Решение. Очевидно, все получаемые числа кратны 3. Число 24 не может остаться, так как оно уменьшается на первом шаге. Докажем, что нечётное число не может остаться. Изначально сумма чисел чётная. Её можно представить, как сумму двух чисел: всех уменьшаемых и всех вычитаемых чисел. Но если сумма двух чисел чётная, то и разность этих чисел чётная. Следовательно, на каждом шаге получаются числа с чётной суммой,

поэтому и последнее число должно быть чётным. Покажем, что числа 0, 6, 12, 18 могут остаться.

1) Пусть Миша в первый раз объединил пары так: (3; 24), (6; 9), (12; 15), (18; 21). Тогда он получил число 21 и три тройки. Далее: $21, 3, 3, 3 \rightarrow 18, 0, 0, 0 \rightarrow 18, 0 \rightarrow 18$.

2) (3; 18), (6; 9), (12; 15), (21; 24) $\rightarrow 15, 3, 3, 3 \rightarrow 12, 0 \rightarrow 12$.

3) (3; 12), (6; 9), (15; 18), (21; 24) $\rightarrow 9, 3, 3, 3 \rightarrow 6, 0 \rightarrow 6$.

4) (3; 6), (9; 12), (15; 18), (21; 24) $\rightarrow 3, 3, 3, 3 \rightarrow 0, 0, 0, 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. За каждый найденный ответ – 2 балла, если показано, как получить этот ответ; если не показано – 1 балл. Доказано, что не может быть нечётных чисел – 12 баллов, баллы суммируются. В верном доказательстве есть пробел – 8 баллов (из 12). Есть идея чётности числа нечётных чисел, но доказательства нет – 2 балла (из 12). Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

Вариант 3

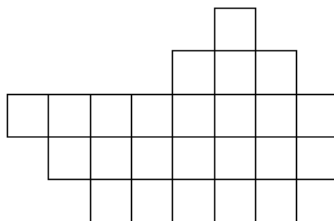
1. В наборе было 26 фигурок: треугольников, квадратов, прямоугольников. У всех фигурок вместе было 95 сторон. Сколько было треугольников?

Ответ. 9.

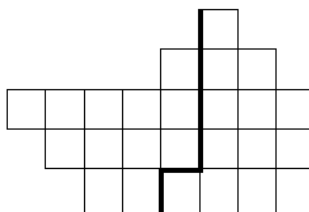
Решение. Если бы все фигуры были квадратами или прямоугольниками, у них было бы $26 \cdot 4 = 104$ стороны. 9 сторон не хватает, значит, у 9 фигур было по 3 стороны.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. Фигура составлена из одинаковых квадратных клеток. Разделите её по границам клеток на две равные части. Части считаются равными, если при наложении они совпадают. При этом части можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Например, так.



Комментарий. Любой верный пример – 20 баллов. Показан только вид частей, но не показано разбиение – 10 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. На доске были написаны числа 7, 9, 5, 18. Миша написал ещё одно целое число (обозначим его a), и расположил все пять чисел в порядке возрастания. При каких значениях a среднее арифметическое пяти чисел совпадает с числом, стоящим в середине ряда пяти чисел? Найдите все значения и покажите, что других нет.

Ответ. -4 .

Решение. $5 + 7 + 9 + 18 = 39$. В середине ряда могут стоять числа $7, 9, a$, но не 5 или 18 . Надо рассмотреть 3 случая. 1) $39 + a = 5 \cdot 7 = 35, a = -4$. Среднее арифметическое 7 , в середине ряда $-4, 5, 7, 9, 18$ также стоит число 7 . Этот случай подходит.

2) $39 + a = 5 \cdot 9 = 45, a = 6$. Среднее арифметическое 9 , но в середине ряда $5, 6, 7, 9, 18$ стоит число 7 . Этот случай не подходит.

3) $39 + a = 5 \cdot a = 5a, a = \frac{39}{4}$. Среднее арифметическое $\frac{39}{4}$, но в середине ряда $5, 7, 9, \frac{39}{4}, 18$ стоит число 9 . Этот случай не подходит.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

4. Бельчонок набрал кучу шишек – сосновых, еловых и кедровых. Сосновые шишки составляли 40% от числа шишек двух других видов. Еловые шишки составляли 60% от числа шишек двух других видов. Какую часть от числа всех шишек составляли кедровые шишки?

Ответ. $\frac{19}{56}$.

Решение. Обозначим число всех шишек a , число сосновых шишек – x , число еловых шишек – y . По условию $x = 0,4(a - x)$, $y = 0,6(a - y)$.

Отсюда $1,4x = 0,4a$, $1,6y = 0,6a$, то есть $x = \frac{4a}{14}$, $y = \frac{6a}{16}$. $x + y = \frac{32a + 42a}{112} = \frac{74a}{112} = \frac{37a}{56}$.

После этого останется $a - \frac{37a}{56} = \frac{19a}{56}$. Это составляет $\frac{19}{56}$ от a ($\sim 34\%$).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Найдена часть от шишек двух других видов, а не от всех – 18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца, или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Условия записаны в виде верной системы – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Костя записал числа $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$. Потом он разбил все числа на пары, и вместо каждой пары записал одно неотрицательное число, равное разности чисел в этой паре. После этого получилось 4 числа. Костя повторил эту операцию ещё 2 раза, и осталось одно число. Каким могло быть это число? Укажите все возможные значения и докажете, что других нет.

Ответ. $0, 10, 20, 30$.

Решение. Очевидно, все получаемые числа кратны 5. Число 40 не может остаться, так как оно уменьшается на первом шаге. Докажем, что нечётное число не может остаться. Изначально сумма чисел чётная. Её можно представить, как сумму двух чисел: всех уменьшаемых и всех вычитаемых чисел. Но если сумма двух чисел чётная, то и разность этих чисел чётная. Следовательно, на каждом шаге получаются числа с чётной суммой, поэтому и последнее число должно быть чётным. Покажем, что числа $0, 10, 20, 30$ могут остаться.

1) Пусть Костя в первый раз объединил пары так: $(5; 40), (10; 15), (20; 25), (30; 35)$. Тогда он получил число 35 и три пятёрки. Далее: $35, 5, 5, 5 \rightarrow 30, 0, 0, 0 \rightarrow 30, 0 \rightarrow 30$.

2) $(5; 30), (10; 15), (20; 25), (35; 40) \rightarrow 25, 5, 5, 5 \rightarrow 20, 0 \rightarrow 20$.

3) $(5; 20), (10; 15), (25; 30), (35; 40) \rightarrow 15, 5, 5, 5 \rightarrow 10, 0 \rightarrow 10$.

4) $(5; 10), (15; 20), (25; 30), (35; 40) \rightarrow 5, 5, 5, 5 \rightarrow 0, 0, 0, 0 \rightarrow 0, 0 \rightarrow 0$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. За каждый найденный ответ – 2 балла, если показано, как получить этот ответ; если не показано – 1 балл. Доказано, что не может быть чисел, оканчивающихся на 5 – 12 баллов, баллы суммируются. В верном доказательстве есть пробел – 8 баллов (из 12). Есть идея чётности числа нечётных чисел, но доказательства нет – 2 балла (из 12). Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

7 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. На кольцевом треке длиной 550 метров одновременно из одной точки в разные стороны стартовали два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста равна 6 м/с, скорость второго – 5 м/с. Через некоторое время велосипедисты встретились в первый раз, а ещё через некоторое время встретились во второй раз. Какое расстояние проехал первый велосипедист к моменту их второй встречи?

Ответ. 600 метров.

Решение. Заметим, что в первый раз велосипедисты встретятся, когда они проедут суммарно один круг. Далее ситуация повторится, т.е. к моменту второй встречи они проедут суммарно два круга. Их скорость сближения равна 11 м/с, т.е. время до второй встречи равно $\frac{550 \cdot 2}{11} = 100$ секунд. Значит, первый велосипедист проедет 600 метров.

Комментарий. Только верный ответ – 2 балла. Указано, что скорость сближения велосипедистов равна 11 м/с, без дальнейших продвижений – 3 балла. Обоснованно получено, что время до первой встречи равно 50 секундам – 10 баллов. Обоснованно получено, что время до второй встречи равно 100 секундам – 15 баллов. Получен ответ для второго велосипедиста – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 3 балла.

2. В клетках таблицы 2×2 записаны четыре различные ненулевые цифры. Софья прочитала слева направо два двузначных числа в строках, сложила их и получила 61. Ульяна же прочитала сверху вниз два двузначных числа в столбцах, сложила их и получила 133. Какие цифры написаны в таблице?

Ответ. Первая строка – 4 и 9, вторая строка – 1 и 2.

Решение. Пусть слева направо в первой строке стоят цифры a и b , а во второй строке – c и d , причём каждая цифра отлична от нуля. Запишем данные равенства в виде системы:

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = 61, \\ \overline{ac} + \overline{bd} = 133 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b + 10c + d = 61, \\ 10a + c + 10b + d = 133. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое: $9(b - c) = 72$, откуда $b - c = 8$. Учитывая, что c не может быть нулём, получим, что $b = 9$, $c = 1$. Подставим полученные значения, например, в первое равенство: $10a + d = 42$. Тогда $a = 4$, $d = 2$.

Комментарий. Только верный ответ – 5 баллов. Ответ получен не полным перебором вариантов – 5 баллов. Обоснованно получено, что $b - c = 8$ – 10 баллов. Обоснованно получено, что $b = 9$, $c = 1$ – 14 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов. При верном решении не учитывается условие, что цифры ненулевые – снимается 2 балла.

3. На турнир по армрестлингу в одном зале собрались 100 спортсменов, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. После первого дня из турнира вылетели 60 спортсменов, которые по одному выходили с соревновательной площадки. Покидая зал, каждый заявил корреспонденту: «Среди оставшихся там спортсменов правдивых меньше, чем лжецов». Сколько всего лжецов могло быть среди участников соревнования? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 50.

Решение 1. Если первым вышел рыцарь, то из его фразы следует, что осталось не менее 50 лжецов. Вторым выйти рыцарь уже не может, т.к. в зале количество лжецов начнёт превышать количество рыцарей уже хотя бы на 2 и к моменту выхода первого лжеца (такой будет среди 60, что больше количества всех рыцарей) количество лжецов будет больше количества рыцарей и лжец скажет правду – противоречие. Значит, вторым вышел лжец и из его лживой фразы следует, что после этого из 98 оставшихся будет не более половины (49) лжецов, т.е. всего лжецов изначально было не более 50. Значит, лжецов было ровно 50, и рыцари с лжецами выходили по очереди.

Если первым вышел лжец, то лжецов не больше, чем рыцарей. Так как в зале осталось 99 человек, то лжецов строго меньше, чем рыцарей, и лжецов в зале меньше 50. В этом случае рыцарь не может выйти из зала, так как лжецов хотя бы на 1 меньше, поэтому этот случай невозможен.

Решение 2. Предположим, что изначально рыцарей больше, чем лжецов, тогда первым может выйти только лжец, тогда лжецов стало ещё меньше, чем рыцарей и каждый выходящий спортсмен является лжецом. Но так как вышедших спортсменов 60, а лжецов меньше 50, то этот случай невозможен.

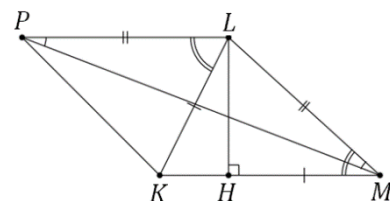
Предположим, что изначально рыцарей меньше, чем лжецов, тогда первым может выйти только рыцарь, тогда рыцарей стало ещё меньше, чем лжецов и каждый выходящий спортсмен является рыцарем. Но так как вышедших спортсменов 60, а рыцарей меньше 50, то этот случай также невозможен.

Единственный возможный вариант – это равенство лжецов и рыцарей. Остаётся проверить, что он верен. В этом случае рыцари и лжецы должны выходить по очереди, начиная с рыцаря.

Комментарий. Только верный ответ – 4 балла. Замечено, но не доказано, что лжецов и рыцарей должно быть поровну – 4 балла. Без доказательства используется факт, что рыцари и лжецы должны выходить по очереди – 4 балла. Обоснованно получено, что рыцарей и лжецов должно быть поровну, но не приведён пример, что данный случай возможен – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов.

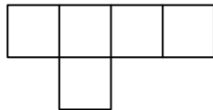
4. В остроугольном треугольнике KLM проведена высота LH . Оказалось, что $KL = HM$. Вне треугольника отмечена точка P так, что $\angle LPM = \angle LMP$ и $\angle KLP = \angle KML$. Докажите, что $KP \perp KL$.

Решение. Поскольку $\angle LPM = \angle LMP$, треугольник LPM равнобедренный и $LP = LM$. Кроме того, $\angle KLP = \angle KML = \angle HML$ и $KL = HM$, поэтому треугольники KLP и HML равны, откуда $\angle LKP = \angle MHL = 90^\circ$, что эквивалентно утверждению задачи.



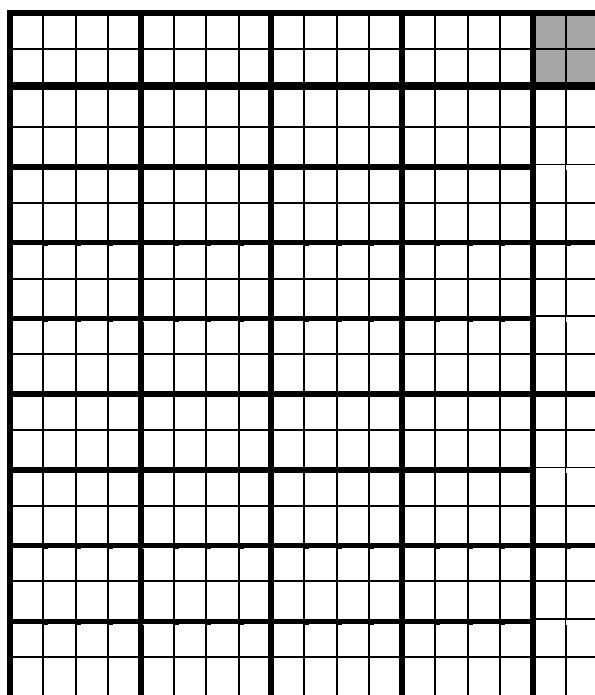
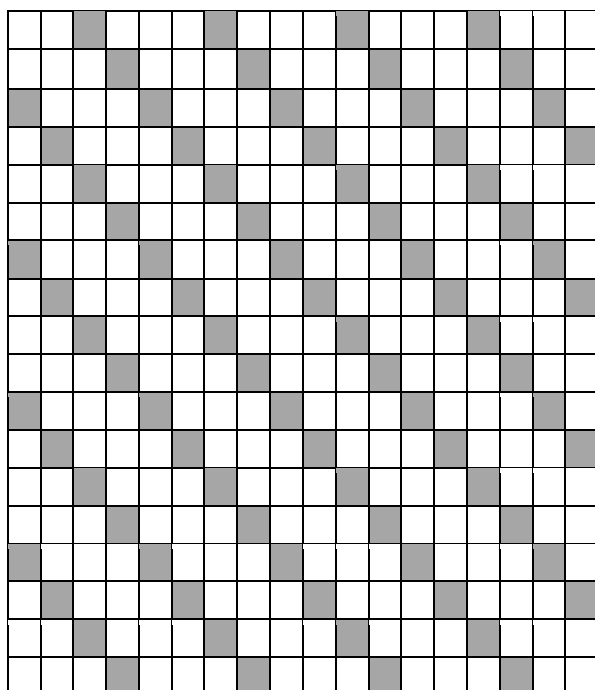
Комментарий. Доказано, что треугольник PLM равнобедренный – 4 балла. Сказано, но не доказано, что треугольники KLP и HML равны +4 балла. Доказано, что треугольники KLP и HML равны – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов.

5. Какое наименьшее число клеток нужно отметить на клетчатой доске 18×18 так, чтобы фигуркой на рисунке нельзя было накрыть 5 неотмеченных клеток? Фигурку можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. 80.

Решение. Выберем одну из главных диагоналей и отметим клетки всех параллельных ей диагоналей длин, кратных 4 (рис. слева). Всего там $2(4 + 8 + 12 + 16) = 80$ клеток. Теперь даже прямоугольник 1×4 накроет отмеченную клетку.



С другой стороны, на доске можно разместить 40 неперекрывающихся прямоугольников 2×4 (рис. справа). Если отмечено не более 79 клеток, то в каком-то прямоугольнике отмечено не более одной клетки. Тогда в него можно положить фигурку, не накрыв эту клетку.

Комментарий. Только ответ – 2 балла. Используется диагональная раскраска, в которой более 80 отмеченных клеток – 4 балла. Явно сказано, что в прямоугольнике 2×4 нужно отметить 2 клетки – 6 баллов. Построен верный пример на 80 отмеченных клеток – 8 баллов. Получена оценка, что нужно отметить не менее 80 клеток – 12 баллов.

Вариант 2

1. На кольцевом треке длиной 500 метров одновременно из одной точки в разные стороны стартовали два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста равна 7 м/с, скорость второго – 3 м/с. Через некоторое время велосипедисты встретились в первый раз, а ещё через некоторое время встретились во второй раз. Какое расстояние проехал первый велосипедист к моменту их второй встречи?

Ответ. 700 метров.

Решение. Заметим, что в первый раз велосипедисты встретятся, когда они проедут суммарно один круг. Далее ситуация повторится, т.е. к моменту второй встречи они проедут

суммарно два круга. Их скорость сближения равна 10 м/с, т.е. время до второй встречи равно $\frac{500 \cdot 2}{10} = 100$ секунд. Значит, первый велосипедист проедет 700 метров.

Комментарий. Только верный ответ – 2 балла. Указано, что скорость сближения велосипедистов равна 10 м/с, без дальнейших продвижений – 3 балла. Обоснованно получено, что время до первой встречи равно 50 секундам – 10 баллов. Обоснованно получено, что время до второй встречи равно 100 секундам – 15 баллов. Получен ответ для второго велосипедиста – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 3 балла.

2. В клетках таблицы 2×2 записаны четыре различные ненулевые цифры. Софья прочитала слева направо два двузначных числа в строках, сложила их и получила 56. Ульяна же прочитала сверху вниз два двузначных числа в столбцах, сложила их и получила 128. Какие цифры написаны в таблице?

Ответ. Первая строка – 3 и 9, вторая строка – 1 и 7.

Решение. Пусть слева направо в первой строке стоят цифры a и b , а во второй строке – c и d , причём каждая цифра отлична от нуля. Запишем данные равенства в виде системы:

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = 56, \\ \overline{ac} + \overline{bd} = 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b + 10c + d = 56, \\ 10a + c + 10b + d = 128. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое: $9(b - c) = 72$, откуда $b - c = 8$. Учитывая, что c не может быть нулём, получим, что $b = 9$, $c = 1$. Подставим полученные значения, например, в первое равенство: $10a + d = 37$. Тогда $a = 3$, $d = 7$.

Комментарий. Только верный ответ – 5 баллов. Ответ получен не полным перебором вариантов – 5 баллов. Обоснованно получено, что $b - c = 8$ – 10 баллов. Обоснованно получено, что $b = 9$, $c = 1$ – 14 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов. При верном решении не учитывается условие, что цифры ненулевые – снимается 2 балла.

3. На турнир по армрестлингу в одном зале собрались 150 спортсменов, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. После первого дня из турнира вылетели 80 спортсменов, которые по одному выходили с соревновательной площадки. Покидая зал, каждый заявил корреспонденту: «Среди оставшихся там спортсменов правдивых меньше, чем лжецов». Сколько всего лжецов могло быть среди участников соревнования? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 75.

Решение 1. Если первым вышел рыцарь, то из его фразы следует, что осталось не менее 75 лжецов. Вторым выйти рыцарь уже не может, т.к. в зале количество лжецов начнёт превышать количество рыцарей уже хотя бы на 2 и к моменту выхода первого лжеца (такой будет среди 80, что больше количества всех рыцарей) количество лжецов будет больше количества рыцарей и лжец скажет правду – противоречие. Значит, вторым вышел лжец и из его лживой фразы следует, что после этого из 148 оставшихся будет не более половины (74) лжецов, т.е. всего лжецов изначально было не более 75. Значит, лжецов было ровно 75, и рыцари с лжецами выходили по очереди.

Если первым вышел лжец, то лжецов не больше, чем рыцарей. Так как в зале осталось 149 человек, то лжецов строго меньше, чем рыцарей, и лжецов в зале меньше 75. В этом случае рыцарь не может выйти из зала, так как лжецов хотя бы на 1 меньше, поэтому этот случай невозможен.

Решение 2. Предположим, что изначально рыцарей больше, чем лжецов, тогда первым может выйти только лжец, тогда лжецов стало ещё меньше, чем рыцарей и каждый выходящий спортсмен является лжецом. Но так как вышедших спортсменов 80, а лжецов меньше 75, то этот случай невозможен.

Предположим, что изначально рыцарей меньше, чем лжецов, тогда первым может выйти только рыцарь, тогда рыцарей стало ещё меньше, чем лжецов и каждый выходящий спортсмен является рыцарем. Но так как вышедших спортсменов 80, а рыцарей меньше 75, то этот случай также невозможен.

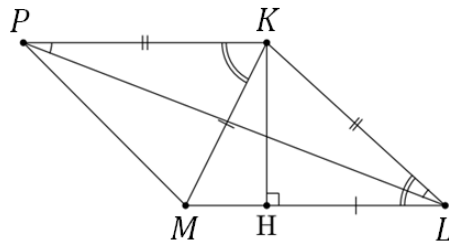
Единственный возможный вариант – это равенство лжецов и рыцарей. Остаётся проверить, что он верен. В этом случае рыцари и лжецы должны выходить по очереди, начиная с рыцаря.

Комментарий. Только верный ответ – 4 балла. Замечено, но не доказано, что лжецов и рыцарей должно быть поровну – 4 балла. Без доказательства используется факт, что рыцари и лжецы должны выходить по очереди – 4 балла. Обоснованно получено, что рыцарей и лжецов должно быть поровну, но не приведён пример, что данный случай возможен – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов.

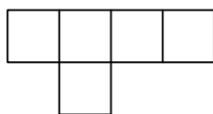
4. В остроугольном треугольнике KLM проведена высота KH . Оказалось, что $KM = LH$. Вне треугольника отмечена точка P так, что $\angle LPK = \angle KLP$ и $\angle MKP = \angle MLK$. Докажите, что $MP \perp KM$.

Решение. Поскольку $\angle LPK = \angle KLP$, треугольник KLP равнобедренный и $KP = LK$. Кроме того, $\angle MKP = \angle MLK = \angle HLK$ и $KM = HL$, поэтому треугольники KMP и HLK равны, откуда $\angle KMP = \angle LHK = 90^\circ$, что эквивалентно утверждению задачи.

Комментарий. Доказано, что треугольник PLK равнобедренный – 4 балла. Сказано, но не доказано, что треугольники KMP и HLK равны +4 балла. Доказано, что треугольники KMP и HLK равны – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов.

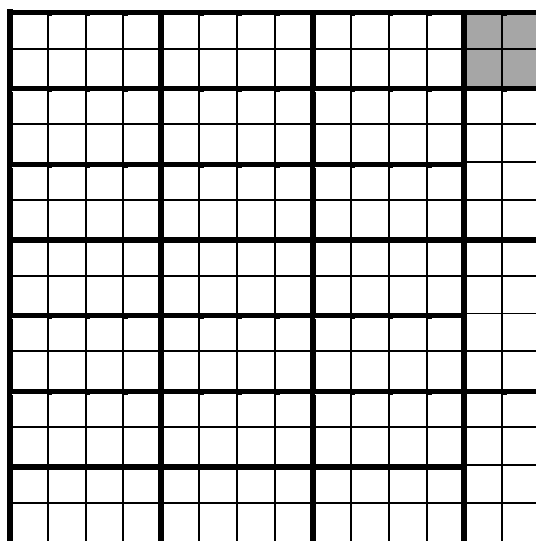
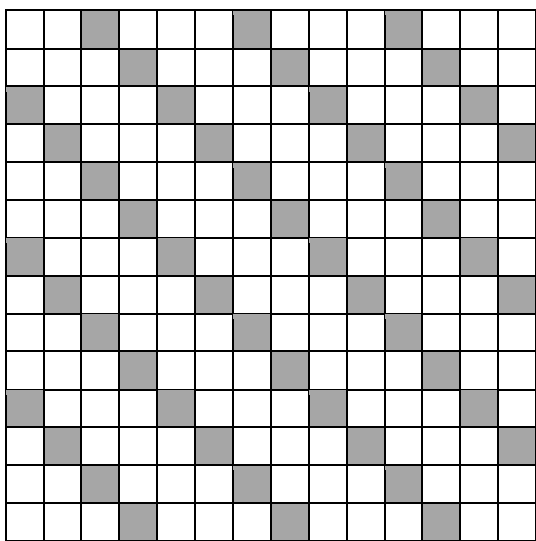


5. Какое наименьшее число клеток нужно отметить на клетчатой доске 14×14 так, чтобы фигуркой на рисунке нельзя было накрыть 5 неотмеченных клеток? Фигурку можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. 48.

Решение. Выберем одну из главных диагоналей и отметим клетки всех параллельных ей диагоналей длин, кратных 4 (рис. слева). Всего там $2(4 + 8 + 12) = 48$ клеток. Теперь даже прямоугольник 1×4 накроет отмеченную клетку.



С другой стороны, на доске можно разместить 24 неперекрывающихся прямоугольника 2×4 (рис. справа). Если отмечено не более 47 клеток, то в каком-то прямоугольнике отмечено не более одной клетки. Тогда в него можно положить фигурку, не накрыв эту клетку.

Комментарий. Только ответ – 2 балла. Используется диагональная раскраска, в которой более 48 отмеченных клеток – 4 балла. Явно сказано, что в прямоугольнике 2×4 нужно отметить 2 клетки – 6 баллов. Построен верный пример на 48 отмеченных клеток – 8 баллов. Получена оценка, что нужно отметить не менее 48 клеток – 12 баллов.

Вариант 3

1. На кольцевом треке длиной 600 метров одновременно из одной точки в разные стороны стартовали два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста равна 4 м/с, скорость второго – 2 м/с. Через некоторое время велосипедисты встретились в первый раз, а ещё через некоторое время встретились во второй раз. Какое расстояние проехал первый велосипедист к моменту их второй встречи?

Ответ. 800 метров.

Решение. Заметим, что в первый раз велосипедисты встретятся, когда они проедут суммарно один круг. Далее ситуация повторится, т.е. к моменту второй встречи они проедут суммарно два круга. Их скорость сближения равна 6 м/с, т.е. время до второй встречи равно $\frac{600 \cdot 2}{6} = 200$ секунд. Значит, первый велосипедист проедет 800 метров.

Комментарий. Только верный ответ – 2 балла. Указано, что скорость сближения велосипедистов равна 6 м/с, без дальнейших продвижений – 3 балла. Обоснованно получено, что время до первой встречи равно 100 секундам – 10 баллов. Обоснованно получено, что время до второй встречи равно 200 секундам – 15 баллов. Получен ответ для второго велосипедиста – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 3 балла.

2. В клетках таблицы 2×2 записаны четыре различные ненулевые цифры. Софья прочитала слева направо два двузначных числа в строках, сложила их и получила 53. Ульяна же прочитала сверху вниз два двузначных числа в столбцах, сложила их и получила 125. Какие цифры написаны в таблице?

Ответ. Первая строка – 3 и 9, вторая строка – 1 и 4.

Решение. Пусть слева направо в первой строке стоят цифры a и b , а во второй строке – c и d , причём каждая цифра отлична от нуля. Запишем данные равенства в виде системы:

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = 53, \\ \overline{ac} + \overline{bd} = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b + 10c + d = 53, \\ 10a + c + 10b + d = 125. \end{cases}$$

Вычтем из второго равенства первое: $9(b - c) = 72$, откуда $b - c = 8$. Учитывая, что c не может быть нулём, получим, что $b = 9$, $c = 1$. Подставим полученные значения, например, в первое равенство: $10a + d = 34$. Тогда $a = 3$, $d = 4$.

Комментарий. Только верный ответ – 5 баллов. Ответ получен не полным перебором вариантов – 5 баллов. Обоснованно получено, что $b - c = 8$ – 10 баллов. Обоснованно получено, что $b = 9$, $c = 1$ – 14 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов. При верном решении не учитывается условие, что цифры ненулевые – снимается 2 балла.

3. На турнир по армрестлингу в одном зале собрались 200 спортсменов, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. После первого дня из турнира вылетели 130 спортсменов, которые по одному выходили с соревновательной площадки. Покидая зал, каждый заявил корреспонденту: «Среди оставшихся там спортсменов правдивых меньше, чем лжецов». Сколько всего рыцарей могло быть среди участников соревнования? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 100.

Решение. Если первым вышел рыцарь, то из его фразы следует, что осталось не менее 100 лжецов. Вторым выйти рыцарь уже не может, т.к. в зале количество лжецов начнёт превышать количество рыцарей уже хотя бы на 2 и к моменту выхода первого лжеца (такой будет среди 130, что больше количества всех рыцарей) количество лжецов будет больше

количества рыцарей и лжец скажет правду – противоречие. Значит, вторым вышел лжец и из его лживой фразы следует, что после этого из 198 оставшихся будет не более половины (99) лжецов, т.е. всего лжецов изначально было не более 100. Значит, лжецов было ровно 100, и рыцари с лжецами выходили по очереди.

Если первым вышел лжец, то лжецов не больше, чем рыцарей. Так как в зале осталось 199 человек, то лжецов строго меньше, чем рыцарей, и лжецов в зале меньше 100. В этом случае рыцарь не может выйти из зала, так как лжецов хотя бы на 1 меньше, поэтому этот случай невозможен.

Решение 2. Предположим, что изначально рыцарей больше, чем лжецов, тогда первым может выйти только лжец, тогда лжецов стало ещё меньше, чем рыцарей и каждый выходящий спортсмен является лжецом. Но так как вышедших спортсменов 130, а лжецов меньше 100, то этот случай невозможен.

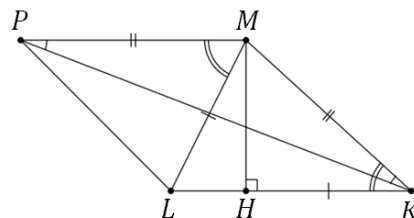
Предположим, что изначально рыцарей меньше, чем лжецов, тогда первым может выйти только рыцарь, тогда рыцарей стало ещё меньше, чем лжецов и каждый выходящий спортсмен является рыцарем. Но так как вышедших спортсменов 130, а рыцарей меньше 100, то этот случай также невозможен.

Единственный возможный вариант – это равенство лжецов и рыцарей. Остаётся проверить, что он верен. В этом случае рыцари и лжецы должны выходить по очереди, начиная с рыцаря.

Комментарий. Только верный ответ – 4 балла. Замечено, но не доказано, что лжецов и рыцарей должно быть поровну – 4 балла. Без доказательства используется факт, что рыцари и лжецы должны выходить по очереди – 4 балла. Обоснованно получено, что рыцарей и лжецов должно быть поровну, но не приведён пример, что данный случай возможен – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов.

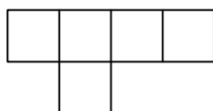
4. В остроугольном треугольнике KLM проведена высота MH . Оказалось, что $LM = KN$. Вне треугольника отмечена точка P так, что $\angle KPM = \angle MKP$ и $\angle LMP = \angle LKM$. Докажите, что $LP \perp LM$.

Решение. Поскольку $\angle MPK = \angle MKP$, треугольник PMK равнобедренный и $PM = MK$. Кроме того, $\angle LMP = \angle LKM = \angle HKM$ и $LM = KN$, поэтому треугольники PLM и MHK равны, откуда $\angle MHP = \angle PLM = 90^\circ$, что эквивалентно утверждению задачи.



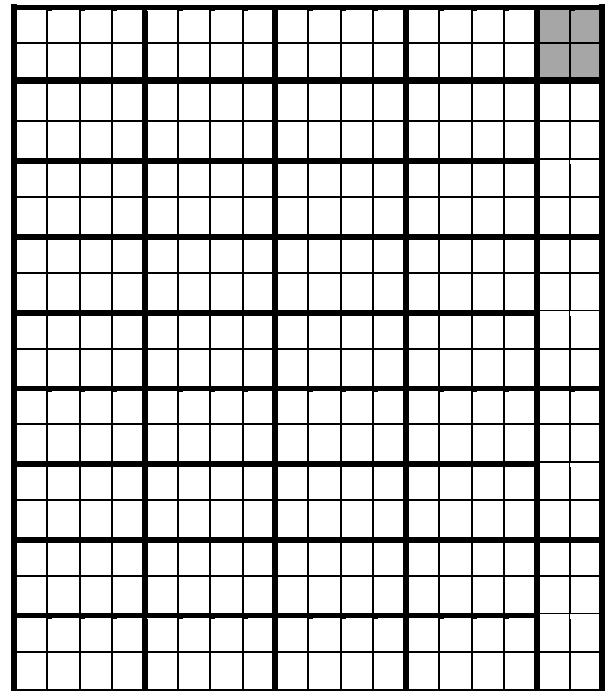
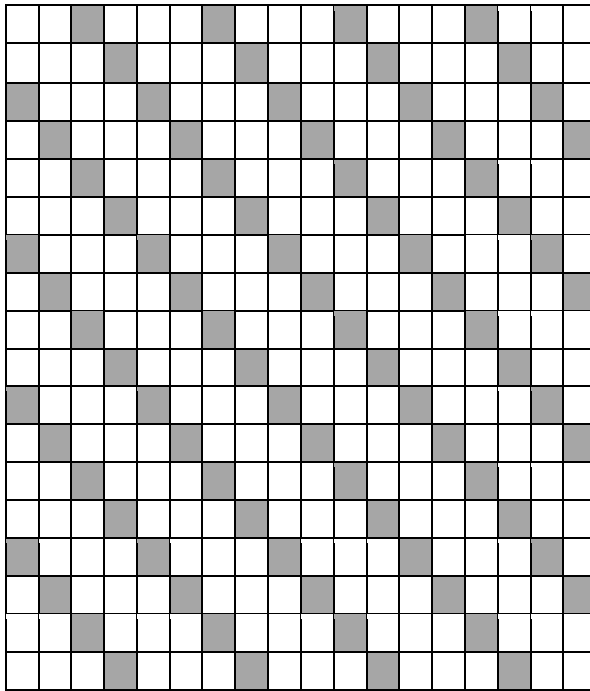
Комментарий. Доказано, что треугольник PMK равнобедренный – 4 балла. Сказано, но не доказано, что треугольники LMP и MHK равны +4 балла. Доказано, что треугольники LMP и MHK равны – 16 баллов. Полное обоснованное решение – 20 баллов.

5. Какое наименьшее число клеток нужно отметить на клетчатой доске 18×18 так, чтобы фигуркой на рисунке нельзя было накрыть 5 неотмеченных клеток? Фигурку можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. 80.

Решение. Выберем одну из главных диагоналей и отметим клетки всех параллельных ей диагоналей длин, кратных 4 (рис. слева). Всего там $2(4 + 8 + 12 + 16) = 80$ клеток. Теперь даже прямоугольник 1×4 накроет отмеченную клетку.



С другой стороны, на доске можно разместить 40 неперекрывающихся прямоугольников 2×4 (рис. справа). Если отмечено не более 79 клеток, то в каком-то прямоугольнике отмечено не более одной клетки. Тогда в него можно положить фигурку, не накрыв эту клетку.

Комментарий. Только ответ – 2 балла. Используется диагональная раскраска, в которой более 80 отмеченных клеток – 4 балла. Явно сказано, что в прямоугольнике 2×4 нужно отметить 2 клетки – 6 баллов. Построен верный пример на 80 отмеченных клеток – 8 баллов. Получена оценка, что нужно отметить не менее 80 клеток – 12 баллов.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. На одну и ту же сумму денег можно купить или 20 зелёных груш, или 12 жёлтых. Сколько в среднем груш можно купить на эту сумму денег?

Ответ. 15.

Решение. Обозначим данную сумму денег S . На 60 зелёных груш потребуется потратить $3S$, а на 60 жёлтых груш – $5S$. Итак, за $8S$ можно купить 120 груш, а за $S - \frac{120}{8} = 15$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Известно, что $xy = 9$ и $11x - 7y + 3xy^2 + x^2y = 160$. Найдите $x^3 + y^3$.

Ответ. 296.

Решение. Подставим $xy = 9$: $11x - 7y + 27y + 9x = 20(x + y) = 160$. Отсюда $x + y = 8$.

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 64 - 18 = 46.$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 8 \cdot (46 - 9) = 296.$$

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Ошибка в формуле – 10 баллов. Найдено только $x + y$ – 5 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. Белке надо было перенести двух бельчат в соседний лес, находящийся на расстоянии 2,8 км. Белка понесла одного бельчонка, а второй пошёл следом. Когда соседний лес показался, белка ссадила первого бельчонка, который пошёл дальше пешком, а сама вернулась за вторым, и когда встретила, понесла его. Все трое попали в соседний лес в одно и то же время. Белка скачет со скоростью 4 км/час (с бельчонком или без). Бельчата идут со скоростью 1 км/час. Сколько времени им понадобилось, чтобы одновременно попасть в соседний лес?

Ответ. 78 минут.

Решение. Обозначим время до высадки первого бельчонка x (ч). За это время белка с ним пробежала $4x$, а второй бельчонок прошёл x (км). Между ними расстояние $3x$, и поскольку белка бежала навстречу второму бельчонку, они сближались со скоростью $1 + 4 = 5$ км/час. Они встретились через время $\frac{3x}{5}$ часов. Это время второй бельчонок шёл пешком, то есть всего он прошёл пешком $x + \frac{3x}{5}$. Заметим, что оба бельчонка должны были идти пешком одинаковое время, и одинаковое время их несла белка, иначе один добрался бы до леса быстрее. Значит, с момента высадки первый бельчонок прошёл пешком также $x + \frac{3x}{5}$, и попал в соседний лес. Но до момента высадки он преодолел расстояние $4x$. Значит, $4x + x + \frac{3x}{5} = 2,8$ (км). Находим $x = 0,5$ (ч) = 30 (мин). После этих 30 минут первый бельчонок пошёл пешком и добрался до леса за $30 + \frac{3 \cdot 30}{5} = 48$ (мин). Всего потребовалось $30 + 48 = 78$ (мин).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. У Матвея есть N квадратных плиток размером 1×1 . Он может выложить из всех плиток прямоугольник, у которого короткая сторона больше 1, а длинная сторона на 11 длиннее короткой стороны. Матвей попробовал выложить из всех плиток квадрат, но у него осталось 8 плиток. Чему может равняться число плиток N ?

Ответ. 1452 и 152.

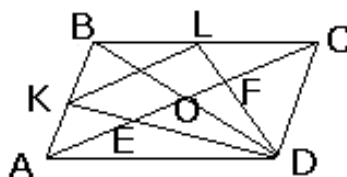
Решение. Обозначим сторону квадрата n , меньшую сторону прямоугольника m . Тогда $n^2 + 8 = m(m + 11)$, $n^2 = m^2 + 11m + \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 8 - \left(\frac{11}{2}\right)^2$, $n^2 = \left(m + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{153}{4}$. Таким образом, $\left(m + \frac{11}{2}\right)^2 - n^2 = \frac{153}{4}$. Разложим на множители: $\left(m + \frac{11}{2} - n\right) \left(m + \frac{11}{2} + n\right) = \frac{153}{4}$. Домножив на 4, получим $(2m + 11 - 2n)(2m + 11 + 2n) = 153$. Поскольку множители – целые числа, рассмотрим разложение числа 153 на два множителя: $153 = 1 \cdot 153 = 3 \cdot 51 = 9 \cdot 17$. Если $2m + 11 + 2n = 153$, $2m + 11 - 2n = 1$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 22 = 154$, $m = 33$, всего плиток $33 \cdot 44 = 1452$. Если $2m + 11 + 2n = 51$, $2m + 11 - 2n = 3$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 22 = 54$, $m = 8$, всего плиток $8 \cdot 19 = 152$. Если $2m + 11 + 2n = 17$, $2m + 11 - 2n = 9$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 22 = 26$, $m = 1$, но по условию короткая сторона больше 1.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 152 – 5 баллов, найден ответ 1452 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 12 и разделена точками E и F на три равные части. Прямые DE и DF пересекают стороны AB и BC соответственно в точках K и L . Найдите длину KL .

Ответ. 6.

Решение. Проведем диагональ BD .



Точка пересечения диагоналей O делит обе диагонали пополам: $AO = AE + EO = OF + FC$. Но $AE = FC = \frac{AC}{3}$, следовательно, $EO = OF = \frac{AC}{6}$. Отрезок CO – медиана треугольника BCD , а $CF : FO = 2 : 1$, то есть F – точка пересечения медиан треугольника BCD . Поэтому отрезок DL , проходящий через точку F , также является медианой этого треугольника, а потому точка L – середина стороны BC . Аналогично, точка K – середина стороны AB . Поэтому KL – средняя линия треугольника ABC , следовательно, $KL = \frac{12}{2} = 6$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1-2 балла. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

Вариант 2

1. У одного продавца можно купить 6 кг картофеля за 300 рублей, а у другого на ту же сумму денег можно купить 4 кг картофеля. Сколько в среднем картофеля можно купить на 300 рублей?

Ответ. 4,8 кг.

Решение. На 12 кг картофеля у первого продавца потребуется потратить 600 рублей, а у второго – 900 рублей. Итак, за 1500 рублей можно купить 24 кг картофеля. Поскольку $1500 = 300 \cdot 5$, на 300 рублей можно купить $\frac{24}{5} = 4,8$ (кг).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Известно, что $xy = 8$ и $9x - 7y + 3xy^2 + x^2y = 340$. Найдите $x^2 + y^2$.

Ответ. 384.

Решение. Подставим $xy = 8$: $9x - 7y + 24y + 8x = 17(x + y) = 340$. Отсюда $x + y = 20$. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 400 - 16 = 384$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Ошибка в формуле – 10 баллов. Найдено только $x + y$ – 5 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. У бельчонка есть N квадратных плиток размером 1×1 . Он может выложить из всех плиток прямоугольник, у которого короткая сторона больше 2, а длинная сторона на 7 длиннее короткой стороны. Бельчонок попробовал выложить из всех плиток квадрат, но у него осталось 17 плиток. Чему может равняться число плиток N ?

Ответ. 98 и 858.

Решение. Обозначим сторону квадрата n , меньшую сторону прямоугольника m . Тогда $n^2 + 17 = m(m + 7)$, $n^2 = m^2 + 7m + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 17 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$, $n^2 = \left(m + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{117}{4}$.

Таким образом, $\left(m + \frac{7}{2}\right)^2 - n^2 = \frac{117}{4}$. Разложим на множители: $\left(m + \frac{7}{2} - n\right) \left(m + \frac{7}{2} + n\right) = \frac{117}{4}$. Домножив на 4, получим $(2m + 7 - 2n)(2m + 7 + 2n) = 117$. Поскольку множители – целые числа, рассмотрим разложение числа 117 на множители: $117 = 1 \cdot 117 = 3 \cdot 39 = 9 \cdot 13$. Если $2m + 7 + 2n = 39$, $2m + 7 - 2n = 3$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 14 = 42$, $m = 7$, всего плиток $7 \cdot 14 = 98$. Если $2m + 7 + 2n = 13$, $2m + 7 - 2n = 9$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 14 = 22$, $m = 2$, но по условию короткая сторона больше 2. Если $2m + 7 + 2n = 117$, $2m + 7 - 2n = 1$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 14 = 118$, $m = 26$, всего плиток $26 \cdot 33 = 858$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 98 – 5 баллов, найден ответ 858 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Принцессам Эльзе и Жасмин надо было одновременно попасть из Тридевятого королевства в Тридешатое, расстояние между королевствами составляет 80 км. Волк решил им помочь, но везти сразу двух принцесс он не мог. Волк повёз на себе Эльзу, а Жасмин пошла пешком. Через некоторое время волк ссадил Эльзу, которая пошла дальше пешком, а сам вернулся за Жасмин, и когда встретил её, повёз на себе. Все трое попали в Тридешатое королевство в одно и то же время. Волк скакал со скоростью 20 км/час (с принцессой или без). Принцессы пешком шли со скоростью 4 км/час. Сколько времени им понадобилось, чтобы одновременно попасть в Тридешатое королевство?

Ответ. 8 часов.

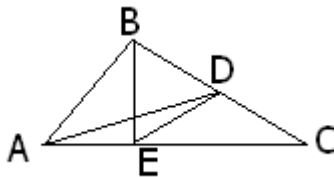
Решение. Обозначим время до высадки Эльзы x . За это время волк с Эльзой пробежал $20x$, а Жасмин прошла пешком $4x$. Между ними расстояние $16x$, и поскольку волк бежал навстречу Жасмин, они сближались со скоростью $4 + 20 = 24$ км/час. Они встретились через время $\frac{16x}{24} = \frac{2x}{3}$ часов. Это время Жасмин шла пешком, то есть всего она прошла пешком $4x + \frac{2x}{3} \cdot 4 = 4x + \frac{8x}{3}$. Заметим, что обе принцессы должны были идти пешком одинаковое время, и одинаковое время ехать на волке, иначе одна добралась бы быстрее. Значит, с момента высадки Эльза прошла пешком также $4x + \frac{8x}{3}$, и добралась до цели. Но до момента высадки Эльза на волке преодолела расстояние $20x$. Таким образом, $20x + 4x + \frac{8x}{3} = 80$ (км). Находим $x = 3$ (ч). После этих 3 часов Эльза пошла пешком и добралась в королевство за $\frac{1}{4} \left(4 \cdot 3 + \frac{8 \cdot 3}{3}\right) = 5$ (ч). Всего потребовалось $5 + 3 = 8$ (ч).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. В треугольнике ABC угол $C = 30^\circ$, точка D – середина стороны BC , $\angle BDA = 45^\circ$. Найдите $\angle BAD$.

Ответ. 30° .

Решение. Найдём на прямой AC такую точку E , что $ED = DB$.



По условию $ED = DB = DC$. Тогда треугольник DCE равнобедренный, $ED = DC$, и $\angle DEC = \angle ECD = 30^\circ$, а $\angle EDC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$. Из условия следует, что $\angle ADC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Найдём угол ADE : $\angle ADE = \angle ADC - \angle EDC = 135^\circ - 120^\circ = 15^\circ$. Найдём угол EAD : $\angle EAD = \angle CAD = 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Тогда $\angle BDE = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$. В треугольнике EBD есть по построению две равных стороны, $ED = DB$. Значит, это равнобедренный треугольник с углом 60° , то есть равносторонний треугольник, $ED = DB = BE$. Тогда $\angle BEC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ = \angle BEA$. Заметим, что треугольник ADE равнобедренный (так как углы при основании AD равны 15°). Поэтому $AE = ED$, и так как $ED = EB$, $AE = EB$. Таким образом, треугольник ABE – прямоугольный равнобедренный, и $\angle BAE = 45^\circ$. Тогда $\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

Вариант 3

1. Федя покупал корм для собаки. В одном магазине он купил 3 кг корма за 400 рублей, а в другом на ту же сумму денег купил 5 кг корма. Сколько в среднем корма можно купить на 400 рублей?

Ответ. 3,75 кг.

Решение. На 15 кг корма в первом магазине потребуется потратить 2000 рублей, а во втором – 1200 рублей. Итак, за 3200 рублей можно купить 30 кг корма. Поскольку $3200 = 400 \cdot 8$, за 400 рублей можно купить $\frac{30}{8} = 3,75$ (кг).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть неточность – 18 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2 Известно, что $xy = 12$ и $6x + 6y - 3xy^2 + 2x^2y = 150$. Найдите $x^2 + y^2$.

Ответ. 49.

Решение. Подставим $xy = 8$: $6x + 6y - 36y + 24x = 30(x - y) = 150$. Отсюда $x - y = 5$. $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 25 + 24 = 49$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 18 баллов. Ошибка в формуле – 10 баллов. Найдено только $x + y$ – 5 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. У бельчонка есть N квадратных плиток размером 1×1 . Он может выложить из всех плиток прямоугольник, у которого короткая сторона больше 2, а длинная сторона на 19 длиннее короткой стороны. Бельчонок попробовал выложить из всех плиток квадрат, но ему не хватило 7 плиток. Чему может равняться число плиток N ?

Ответ. 722 и 6882.

Решение. Обозначим сторону квадрата n , меньшую сторону прямоугольника m . Тогда $n^2 - 7 = m(m + 19)$, $n^2 = m^2 + 19m + \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 7 - \left(\frac{19}{2}\right)^2$, $n^2 = \left(m + \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{333}{4}$.

Таким образом, $\left(m + \frac{19}{2}\right)^2 - n^2 = \frac{333}{4}$. Разложим на множители: $\left(m + \frac{19}{2} - n\right)\left(m + \frac{19}{2} + n\right) = \frac{333}{4}$. Домножив на 4, получим $(2m + 19 - 2n)(2m + 19 + 2n) = 333$. Поскольку множители – целые числа, рассмотрим разложение числа 333 на множители: $333 = 1 \cdot 333 = 3 \cdot 111 = 9 \cdot 37$. Если $2m + 19 + 2n = 333$, $2m + 19 - 2n = 1$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 38 = 334$, $m = 74$, всего плиток $74 \cdot 93 = 6882$. Если $2m + 19 + 2n = 111$, $2m + 19 - 2n = 3$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 38 = 114$, $m = 19$, всего плиток $19 \cdot 38 = 722$. Если $2m + 19 + 2n = 37$, $2m + 19 - 2n = 9$, то, складывая эти равенства, найдём $4m + 38 = 46$, $m = 2$, но по условию короткая сторона больше 2.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 722 – 5 баллов, найден ответ 6882 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Атосу, Арамису и Портосу надо было добраться до крепости Ля Рошель, которая находилась на расстоянии 63 км, но только у Портоса был конь. Портос с Атосом поехали на коне, а Арамис пошёл следом. Через некоторое время Портос ссадил Атоса, который пошёл дальше пешком, а сам на коне поехал назад, и когда встретил Арамиса, посадил его к себе на коня, и они поскакали в крепость. Все трое попали в крепость в одно и то же время. Портос скакал на коне со скоростью 18 км/час (с пассажиром или без). Мушкетёры шли пешком со скоростью 6 км/час. Сколько времени им понадобилось, чтобы одновременно попасть в крепость?

Ответ. 5 часов 50 минут.

Решение. Обозначим время до высадки Атоса x часов. За это время Портос с Атосом проехали $18x$, а Арамис прошёл $6x$. Между ними в этот момент расстояние $12x$, и поскольку Портос поехал навстречу Арамису, они сближались со скоростью $6 + 18 = 24$ км/час. Они встретились через время $\frac{12x}{24} = 0,5x$ часов. Это время Арамис всё ещё шёл пешком, то есть всего он прошёл пешком $6x + 0,5x \cdot 6 = 9x$. Заметим, что Атос и Арамис должны были идти пешком одинаковое время, и одинаковое время они ехали на коне, иначе один добрался бы до крепости быстрее. Значит, Атос после момента высадки прошёл пешком также $9x$, и попал в крепость. Но до момента высадки он преодолел расстояние $18x$. Таким образом, $18x + 9x = 63$ (км). Находим $x = \frac{7}{3}$ (ч). После этого Атос пошёл пешком и добрался до крепости за $\frac{1}{6}\left(9 \cdot \frac{7}{3}\right) = \frac{7}{2}$ (ч). Всего потребовалось $\frac{7}{3} + \frac{7}{2} = 5 \frac{5}{6}$ (ч), то есть 5 часов 50 минут.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD параллельно BC , $AD > BC$. Середины оснований AD и BC обозначены соответственно K и M , середины диагоналей AC и BD обозначены соответственно L и N . Оказалось, что $KM = LN$. Докажите, что угол $ABD > 90^\circ$.

Решение. Соединим точки K, L, M, N . Отрезок LM – средняя линия треугольника ABC , поэтому $LM \parallel AB$, $LM = \frac{AB}{2}$. KN – средняя линия треугольника ABD , поэтому $LM \parallel AB$, $LM = \frac{AB}{2}$. Следовательно, $KLMN$ – параллелограмм. Его диагонали $KM = LN$, значит, $KLMN$ – прямоугольник. $\angle ABD = \angle KND$. Если $\angle KND \leq 90^\circ$, то $\angle KND + \angle MNK \leq 180^\circ$ (так как $\angle MNK = 90^\circ$, как угол прямоугольника). Тогда дополняющий до 360° $\angle MND \geq 180^\circ$. Это невозможно, так как $\angle MND$ – угол между средней линией и стороной треугольника.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При верном решении есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

Вариант 4

1. Квадратная таблица 3×3 заполнена 9 целыми неотрицательными числами (среди которых могут быть равные) так, что все 6 чисел, равные суммам по строкам и столбцам, различны. Какова наименьшая возможная сумма 9 чисел в таблице?

Ответ. 8.

Решение. Если сложить 6 сумм по строкам и столбцам, получим удвоенную сумму всех чисел в таблице. Она будет наименьшей, когда наименьшими будут слагаемые. Наименьшие возможные различные 6 сумм по строкам и столбцам – это 0, 1, 2, 3, 4, 5. Их сумма равна 15, а сумма по строкам равна сумме по столбцам и не меньше $15/2 = 7,5$. Поскольку числа целые, сумма всех чисел в таблице не меньше 8.

Пример.

0	0	0
4	0	2
0	1	1

Суммы по строкам и столбцам равны 0, 1, 2, 3, 4, 6.

Комментарий. Доказано, что сумма не может быть меньше 8 – 5 баллов; любой верный пример – 15 баллов. Эти баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Бельчонок Вася нашёл корни уравнения $x^2 - 4x + a = 0$, потом увеличил на 1 свободный член, и нашёл корни нового уравнения. Оказалось, что модуль разности между корнями увеличился на 0,5. Чему равняется a ?

Ответ. Таких a не существует.

Решение. Модуль разности между корнями первого уравнения равен $\frac{2\sqrt{16-4a}}{2} = 2\sqrt{4-a}$, а

для второго уравнения этот модуль равен $\frac{2\sqrt{16-4(a+1)}}{2} = 2 \cdot \sqrt{4-a-1} = 2\sqrt{3-a}$.

Получаем уравнение $\sqrt{3-a} - \sqrt{4-a} = 0,25$. Но $\sqrt{3-a} < \sqrt{4-a}$, поэтому таких a не существует.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Решена задача с условием: «модуль разности между корнями уменьшился на 0,5», и получен ответ $\left(-\frac{33}{64}\right)$ – 20 баллов. Есть

существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Вычислены дискриминанты – 5 баллов. Решение начато с незначительным продвижением – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. Числа a и b – натуральные, и $a < b$. От прямоугольника размером $a \times b$ отрезали квадрат со стороной a . От оставшегося прямоугольника отрезали квадрат со стороной, равной меньшей стороне оставшегося прямоугольника. Эту операцию повторяли до тех пор, пока весь прямоугольник не был разрезан на квадраты с целыми сторонами. Известно, что при разрезании получились квадраты 10 разных размеров. Найдите наименьшие размеры исходного прямоугольника.

Ответ. 89×144 .

Решение. Чтобы прямоугольник был наименьшим, квадраты также должны быть наименьшими и по возможности различными. Пусть самый последний квадрат будет иметь размеры (1×1) . Наименьший прямоугольник, из которого его можно вырезать, – (1×2) . При этом получаются два квадрата (1×1) . Прямоугольник (1×2) остался, когда вырезали квадрат нового размера, то есть (2×2) , значит, наименьший предыдущий прямоугольник – (2×3) . Он остался, когда вырезали квадрат (3×3) , то есть наименьший предыдущий прямоугольник – (3×5) . Он остался, когда вырезали квадрат нового размера, то есть (5×5) . Таким образом, сторона каждого нового квадрата равна сумме сторон двух предыдущих квадратов. Запишем в таблицу.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прям-к	1×2	2×3	3×5	5×8	8×13	13×21	21×34	34×55	55×89	89×144
Квадрат	1×1	2×2	3×3	5×5	8×8	13×13	21×21	34×34	55×55	89×89

Замечание. Сторона квадрата с номером n является числом Фибоначчи F_{n-1} .

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Найден ответ 722 – 5 баллов, найден ответ 6882 – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 5 баллов; баллы суммируются. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Жители города участвовали в лыжном забеге. На трассе стояли наблюдатели. Мимо первого наблюдателя пробежал лыжник № 1, через время T – № 2, ещё через время T – № 3. Мимо второго наблюдателя эти лыжники пробежали также через одинаковые промежутки времени T , но в другом порядке: № 1, № 3, № 2. Известно, что у лыжника № 3 скорость 18 км/ч, а у лыжника № 2 скорость 9 км/ч. Найдите скорость лыжника № 1.

Ответ. 12 км/ч.

Решение 1. Пусть в тот момент, когда № 1 пробежал мимо первого наблюдателя, № 2 оставалось x км до первого наблюдателя. Это означает, что за время T № 2 пробегает x км. № 3 движется вдвое быстрее № 2 и пробегает за это же время $2x$ км. Столько же он пробежал и за следующее время T . Значит, в тот момент, когда мимо первого наблюдателя пробежал № 1, № 3 был от наблюдателя на расстоянии $4x$. Когда же №1 пробежал мимо второго наблюдателя, и № 3, и № 2 были позади него рядом на расстоянии $2x$ м. Стало быть, пока №1 ехал от первого до второго наблюдателя, № 3 догнал №2, ликвидировав отставание в $4x - x = 3x$ км. За это же время № 3 сократил отставание от №1 на $4x - 2x = 2x$ км. Это значит, что скорость, с которой № 3 догоняет № 1, составляет $\frac{2}{3}$ от скорости, с которой он догоняет № 2. Но скорость, с которой № 3 догоняет № 2, равна разности их скоростей, то есть $18 - 9 = 9$ км/ч. Значит, № 3 догоняет № 1 со скоростью $9 \cdot \frac{2}{3} = 6$ км/ч, значит, скорость № 1 равна $18 - 6 = 12$ км/ч.

Решение 2. Пусть S – расстояние между наблюдателями, t – время, за которое № 1 прошёл этот путь, v – скорость № 1, x определено как в решении 1.

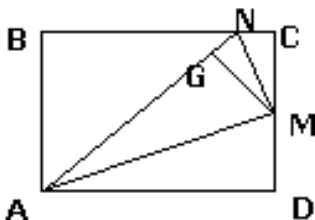
Очевидно, $S = vt$. Из первой части решения 1 следует, что $S + 2x = 18t$, $S - x = 9t$. Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым: $3S = 36t$, то есть $S = 12t$. Подставим в уравнение $S = vt$: $12t = vt$, откуда $v = 12$ (км/ч).

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка, не влияющая на рассуждения – 18 баллов. Задача решена подбором – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 4-5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны CD . На стороне BC выбрана точка N так, что AM является биссектрисой угла NAD . Найдите угол AMN .

Ответ. 90° .

Решение. Опустим из точки M перпендикуляр MG на AN .



$\triangle AMG = \triangle AMD$, так как эти треугольники прямоугольные, имеют равные острые углы ($\angle GAM = \angle MAD$), и общую сторону AM . Следовательно, $\angle GMA = \angle DMA$, $MG = MD$. Прямоугольные треугольники GNM и CNM равны по катету и гипотенузе (так как $MG = MD = MC$). Следовательно, $\angle GMN = \angle CMN$. $\angle AMN = \angle AMG + \angle GMN = \angle DMA + \angle CMN$. Но в сумме эти 4 угла составляют развёрнутый угол: $\angle AMG + \angle GMN + \angle DMA + \angle CMN = 2 \cdot (\angle AMG + \angle GMN) = 180^\circ$. Отсюда $\angle AMN = 90^\circ$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается Жюри из **20** баллов в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 1001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наименьшее количество купцов могло сидеть за столом?

Ответ. 502.

Решение. Из условия следует, что купец не может сидеть между двумя купцами или двумя разбойниками, а разбойник не может сидеть между двумя разбойниками. Таким образом, при обходе вокруг стола купцы будут встречаться нам по двое подряд, а разбойники – по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому разбойнику можно найти в пару по купцу (и после этого еще останутся купцы, не вошедшие ни в одну пару). Значит, купцов за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 502.

Пример рассадки 502 купцов и 499 разбойников, удовлетворяющий условию: сначала посадим 248 групп вида «купец, купец, разбойник, разбойник», затем – ещё три группы вида «купец, купец, разбойник».

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Допущены незначительные ошибки или рассмотрены не все случаи при доказательстве минимальности 502 купцов – 16 баллов. Доказано, что меньше 502 купцов нельзя, но нет примера – 15 баллов. Пример расстановки с 502 купцами без обоснования минимальности – 10 баллов. Показано, что купцов не меньше, чем разбойников – 6 баллов. Показано, что купцы и разбойники должны чередоваться по определённым правилам – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

2. Внутри угла KLM отмечена точка Q . Известно, что $KL = 2$, $MQ = 3$, $LM = 4$, $\angle KLM = \angle LMQ = 60^\circ$. Точка P – середина отрезка LQ . Найдите KP .

Ответ. $KP = \frac{1}{2}$.

Решение. Продолжим отрезки LK и MQ до пересечения в точке T . В треугольнике LMT два угла равны по 60° , поэтому он равносторонний. Значит, $LT = MT = LM = 4$, откуда следует, что $QT = MT - MQ = 1$. Кроме того, $KT = LT - LK = 4 - 2 = 2 = LK$, т.е. KP – средняя линия треугольника LQT . Таким образом, $KP = \frac{1}{2}QT = \frac{1}{2}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2}$, где $n = 1, 2, \dots, 100$?

Ответ. 98.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 2}{k^2 - k + 2} = \frac{m^2 - 2}{m^2 - m + 2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 4k^2 - 4m^2 - 2k + 2m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 4(k + m) + 2) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 4(k + m) + 2 = 0 \Leftrightarrow (k - 4)(m - 4) = 14 = 2 \cdot 7.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(5, 18)$, $(18, 5)$, $(6, 11)$, $(11, 6)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_5 = a_{18}$ и $a_6 = a_{11}$. Значит, у нас будет $100 - 2 = 98$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске изначально написано 11 чисел:

$$-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.$$

За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 16 операций.

Ответ. 174.

Решение. Посмотрим, насколько сумма квадратов чисел на доске после операции отличается от суммы квадратов до операции. Операция заменяет числа k и $k + 1$ на числа $k - 1$ и $k + 2$, а остальные девять чисел остаются неизменными. Тогда сумма квадратов всех одиннадцати чисел изменяется на

$$\Delta S = (k + 2)^2 + (k - 1)^2 - k^2 - (k + 1)^2 = 4.$$

Выходит, что сумма квадратов за каждую операцию увеличивается на 4. Изначально сумма квадратов равна

$$(-5)^2 + \dots + 5^2 = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 2 \cdot 55 = 110.$$

Тогда через 16 операций сумма квадратов будет равна $110 + 16 \cdot 4 = 174$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без обоснования – 2 балла.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×10 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Ответ. 60^5 способов.

Решение. Пусть короткая сторона горизонтальна. При разрезании два уголка, примыкающие к короткой стороне, образуют прямоугольную часть 3×2 (две строки, три столбца). Соответственно, исходный прямоугольник разбивается на такие части, а каждая часть – на два уголка.

Посчитаем число способов раскрыть часть. Если разбиение части известно, то каждый уголок красится $3! = 6$ способами, а разбитая часть – $6^2 = 36$ способами. Каждая часть разбивается на уголки двумя способами, поэтому есть $2 \cdot 36 = 72$ раскраски. Но некоторые из них *особые*: они подходят при обоих разбиениях, поэтому посчитаны дважды. Посчитаем число особых раскрасок. Левый столбец входит в уголки целиком, поэтому его клетки разного цвета; аналогично для правого столбца. Раскрасим левый столбец. Каждая

клетка среднего столбца при каком-то из разрезов попадает в уголок с левым столбцом, поэтому её цвет определён однозначно; значит, обе средние клетки одинакового цвета. И наоборот: если в раскраске части средние клетки одинакового цвета, а в левом и правом столбцах – двух других цветов, то это особая раскраска. Выбирая тремя способами средний цвет и раскрашивая левую и правую пару двумя способами, получим 12 особых раскрасок. Значит, всего существует $36 + 36 - 12 = 60$ раскрасок части. Исходный прямоугольник разбивается на 5 частей, каждую раскрашиваем независимо, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но не доказано, что «особых» случаев именно 12 – 18 баллов. Верное решение, но не учтены «особые» случаи – 10 баллов. Незначительные продвижения (частные случаи раскрасок) – 2 балла. Только ответ – 2 балла.

Вариант 2

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 2001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наибольшее количество разбойников могло сидеть за столом?

Ответ. 999.

Решение. Из условия следует, что купец не может сидеть между двумя купцами или двумя разбойниками, а разбойник не может сидеть между двумя разбойниками. Таким образом, при обходе вокруг стола купцы будут встречаться нам по двое подряд, а разбойники – по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому разбойнику можно найти в пару по купцу (и после этого еще останутся купцы, не вошедшие ни в одну пару). Значит, разбойников за столом меньше половины от общего числа сидящих и к тому же нечётное число, то есть не более 999.

Пример рассадки 1002 купцов и 999 разбойников, удовлетворяющий условию: сначала посадим 498 групп вида «купец, купец, разбойник, разбойник», затем – ещё три группы вида «купец, купец, разбойник».

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Допущены незначительные ошибки или рассмотрены не все случаи при доказательстве максимальной 999 разбойников – 16 баллов. Доказано, что больше 999 разбойников нельзя, но нет примера – 15 баллов. Пример расстановки с 999 разбойниками без обоснования максимальной – 10 баллов. Показано, что купцов не меньше, чем разбойников – 6 баллов. Показано, что купцы и разбойники должны чередоваться по определённым правилам – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

2. Внутри угла KLM отмечена точка Q . Известно, что $KL = 4$, $KQ = 1$, $LM = 8$, $\angle QKL = \angle KLM = 60^\circ$. Точка P на луче LQ такова, что $LQ = QP$. Найдите PM .

Ответ. 6.

Решение. Продолжим отрезок KQ до пересечения с отрезком LM в точке T . В треугольнике LTK два угла равны по 60° , поэтому он равносторонний. Значит, $LT = KT = KL = 4$, откуда следует, что $QT = KT - KQ = 3$. Кроме того, $MT = LM - LT = 8 - 4 = 4 = LT$, т.е. TQ – средняя линия треугольника LMP . Таким образом, $PM = 2QT = 6$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2 - 22}{n^2 - n - 16}$, где $n = 2, 3, \dots, 100$?

Ответ. 97.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 22}{k^2 - k - 16} = \frac{m^2 - 22}{m^2 - m - 16}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 6k^2 - 6m^2 - 22k + 22m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 6(k + m) + 22) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 6(k + m) + 22 = 0 \Leftrightarrow (k - 6)(m - 6) = 14 = 2 \cdot 7.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(7, 20)$, $(20, 7)$, $(8, 13)$, $(13, 8)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_7 = a_{20}$ и $a_8 = a_{13}$. Значит, у нас будет $99 - 2 = 97$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске изначально написано 11 чисел:

$$-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.$$

За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 17 операций.

Ответ. 178.

Решение. Посмотрим, насколько сумма квадратов чисел на доске после операции отличается от суммы квадратов до операции. Операция заменяет числа k и $k + 1$ на числа $k - 1$ и $k + 2$, а остальные девять чисел остаются неизменными. Тогда сумма квадратов всех одиннадцати чисел изменяется на

$$\Delta S = (k + 2)^2 + (k - 1)^2 - k^2 - (k + 1)^2 = 4.$$

Выходит, что сумма квадратов за каждую операцию увеличивается на 4. Изначально сумма квадратов равна

$$(-5)^2 + \dots + 5^2 = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 2 \cdot 55 = 110.$$

Тогда через 17 операций сумма квадратов будет равна $110 + 17 \cdot 4 = 178$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без обоснования – 2 балла.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×12 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Ответ. 60^6 способов.

Решение. Пусть короткая сторона горизонтальна. При разрезании два уголка, примыкающие к короткой стороне, образуют прямоугольную часть 3×2 (две строки, три столбца). Соответственно, исходный прямоугольник разбивается на такие части, а каждая часть – на два уголка.

Посчитаем число способов раскрыть часть. Если разбиение части известно, то каждый уголок красится $3! = 6$ способами, а разбитая часть – $6^2 = 36$ способами. Каждая часть разбивается на уголки двумя способами, поэтому есть $2 \cdot 36 = 72$ раскраски. Но некоторые из них *особые*: они подходят при обоих разбиениях, поэтому посчитаны дважды. Посчитаем число особых раскрасок. Левый столбец входит в уголки целиком, поэтому его клетки разного цвета; аналогично для правого столбца. Раскрасим левый столбец. Каждая клетка среднего столбца при каком-то из разрезаний попадает в уголок с левым столбцом, поэтому её цвет определён однозначно; значит, обе средние клетки одинакового цвета. И наоборот: если в раскраске части средние клетки одинакового цвета, а в левом и правом столбцах – двух других цветов, то это особая раскраска. Выбирая тремя способами средний цвет и раскрашивая левую и правую пару двумя способами, получим 12 особых раскрасок. Значит, всего существует $36 + 36 - 12 = 60$ раскрасок части. Исходный прямоугольник разбивается на 6 частей, каждую раскрашиваем независимо, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но не доказано, что «особых» случаев именно 12 – 18 баллов. Верное решение, но не учтены «особые» случаи – 10 баллов. Незначительные продвижения (частные случаи раскрасок) – 2 балла. Только ответ – 2 балла.

Вариант 3

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Однажды за круглым столом собралась компания из 4001 жителя. Оказалось, что рядом с каждым купцом сидит ровно один разбойник, а рядом с каждым разбойником найдётся купец. Какое наименьшее количество купцов могло сидеть за столом?

Ответ. 2002.

Решение. Из условия следует, что купец не может сидеть между двумя купцами или двумя разбойниками, а разбойник не может сидеть между двумя разбойниками. Таким образом, при обходе вокруг стола купцы будут встречаться нам по двое подряд, а разбойники – по одному или по двое подряд. Из этого следует, что каждому разбойнику можно найти в пару по купцу (и после этого еще останутся купцы, не вошедшие ни в одну пару). Значит, купцов за столом больше половины от общего числа сидящих и к тому же чётное число, то есть хотя бы 2002.

Пример рассадки 2002 купцов и 1999 разбойников, удовлетворяющий условию: сначала посадим 998 групп вида «купец, купец, разбойник, разбойник», затем – ещё три группы вида «купец, купец, разбойник».

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Допущены незначительные ошибки или рассмотрены не все случаи при доказательстве минимальности 2002 купцов – 16 баллов. Доказано, что меньше 2002 купцов нельзя, но нет примера – 15 баллов. Пример расстановки с 2002 купцами без обоснования минимальности – 10 баллов. Показано, что купцов не меньше, чем разбойников – 6 баллов. Показано, что купцы и разбойники должны чередоваться по определённым правилам – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

2. Внутри угла XYZ отмечена точка S . Известно, что $XY = 2$, $ZS = 3$, $YZ = 4$, $\angle XYZ = \angle YZS = 60^\circ$. Точка T – середина отрезка YS . Найдите XT .

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Решение. Продолжим отрезки ZS и YX до пересечения в точке F . В треугольнике FYZ два угла равны по 60° , поэтому он равносторонний. Значит, $FY = YZ = FZ = 4$, откуда следует, что $FS = FZ - SZ = 1$. Кроме того, $FX = FY - XY = 4 - 2 = 2 = XY$, т.е. XT – средняя линия треугольника FYS . Таким образом, $XT = \frac{1}{2}SF = \frac{1}{2}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2-6}{n^2-n-2}$, где $n = 3, 4, \dots, 100$?

Ответ. 96.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 6}{k^2 - k - 2} = \frac{m^2 - 6}{m^2 - m - 2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 4k^2 - 4m^2 - 6k + 6m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 4(k + m) + 6) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 4(k + m) + 6 = 0 \Leftrightarrow (k - 4)(m - 4) = 10 = 2 \cdot 5.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(5, 14)$, $(14, 5)$, $(6, 9)$, $(9, 6)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_5 = a_{14}$ и $a_6 = a_9$. Значит, у нас будет $98 - 2 = 96$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске изначально написано 11 чисел:

−5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5.

За одну операцию разрешается выбрать два числа n и $n + 1$ с разницей 1, стереть их и записать на доску числа $n - 1$ и $n + 2$. Найдите все значения, которые может принимать сумма квадратов чисел на доске после 18 операций.

Ответ. 182.

Решение. Посмотрим, насколько сумма квадратов чисел на доске после операции отличается от суммы квадратов до операции. Операция заменяет числа k и $k + 1$ на числа $k - 1$ и $k + 2$, а остальные девять чисел остаются неизменными. Тогда сумма квадратов всех одиннадцати чисел изменяется на

$$\Delta S = (k + 2)^2 + (k - 1)^2 - k^2 - (k + 1)^2 = 4.$$

Выходит, что сумма квадратов за каждую операцию увеличивается на 4. Изначально сумма квадратов равна

$$(-5)^2 + \dots + 5^2 = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 2 \cdot 55 = 110.$$

Тогда через 18 операций сумма квадратов будет равна $110 + 18 \cdot 4 = 182$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без обоснования – 2 балла.

5. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 3×14 в три данных цвета так, чтобы его можно было разрезать на трёхцветные трёхклеточные уголки?

Ответ. 60^7 способов.

Решение. Пусть короткая сторона горизонтальна. При разрезании два уголка, примыкающие к короткой стороне, образуют прямоугольную часть 3×2 (две строки, три столбца). Соответственно, исходный прямоугольник разбивается на такие части, а каждая часть – на два уголка.

Посчитаем число способов раскрыть часть. Если разбиение части известно, то каждый уголок красится $3! = 6$ способами, а разбитая часть – $6^2 = 36$ способами. Каждая часть разбивается на уголки двумя способами, поэтому есть $2 \cdot 36 = 72$ раскраски. Но некоторые из них *особые*: они подходят при обоих разбиениях, поэтому посчитаны дважды. Посчитаем число особых раскрасок. Левый столбец входит в уголки целиком, поэтому его клетки разного цвета; аналогично для правого столбца. Раскрасим левый столбец. Каждая клетка среднего столбца при каком-то из разрезов попадает в уголок с левым столбцом, поэтому её цвет определён однозначно; значит, обе средние клетки одинакового цвета. И наоборот: если в раскраске части средние клетки одинакового цвета, а в левом и правом столбцах – двух других цветов, то это особая раскраска. Выбирая тремя способами средний цвет и раскрашивая левую и правую пару двумя способами, получим 12 особых раскрасок. Значит, всего существует $36 + 36 - 12 = 60$ раскрасок части. Исходный прямоугольник разбивается на 7 частей, каждую раскрашиваем независимо, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но не доказано, что «особых» случаев именно 12 – 18 баллов. Верное решение, но не учтены «особые» случаи – 10 баллов. Незначительные продвижения (частные случаи раскрасок) – 2 балла. Только ответ – 2 балла.

Вариант 4

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды в ряд встали 100 жителей уезда. Каждый заявил, что если он уйдёт, то в оставшемся ряду у каждого купца будет сосед разбойник. При каком наибольшем количестве купцов такое возможно?

Ответ. 66 купцов.

Решение. Оценка. Поскольку мы ищем наибольшее количество купцов, будем сразу считать, что их больше трёх. Далее можно рассуждать по-разному.

Способ 1. Разобьём ряд на 34 блока: крайние будут состоять из двух человек, остальные – из трёх. Заметим, что если бы какой-то блок состоял только из купцов, то любой купец из другого блока соврал бы. Действительно, при его уходе в крайнем блоке у крайнего купца

не было бы соседа разбойника, а любом другом блоке – у среднего. Следовательно, разбойников в ряду не меньше 34, а купцов не больше $100 - 34 = 66$.

Способ 2. Рядом с каждым купцом должен стоять хотя бы один разбойник, иначе любой купец, не являющийся соседом этого купца, соврал бы. Разбойник может стоять рядом максимум с двумя купцами, поэтому если бы разбойников было не больше 33, то купцов было бы не больше 66, а всего в ряду стояло бы не более 99 человек. Следовательно, разбойников в ряду не меньше 34, а купцов не больше $100 - 34 = 66$.

Пример. Пусть жители острова стоят в порядке РКРККК...РКРК. Тогда у каждого купца есть сосед разбойник, и при уходе любого купца это сохранится. А если уйдёт разбойник, то у купца, стоящего рядом с ним, больше не будет соседа разбойника.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение с незначительными недочётами – 18 баллов. Пример только правильный пример расстановки – 10 баллов. Допущены ошибки, приведшие к ответу 67 – 4 балла. Получен правильный ответ, но в доказательстве грубые ошибки – 4 балла. Только ответ – 0 баллов.

2. Точка P – середина основания KN трапеции $KLMN$. Отрезки LN и MP пересекаются в точке Q . Известно, что $KQ \perp LN$ и $LM = 5$. Найдите QM .

Ответ. 5.

Решение. По свойству медианы прямоугольного треугольника $PQ = PN$, следовательно, $\angle PNQ = \angle PQN$. Заметим, что $\angle PNQ = \angle QLM$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых KN и LM , $\angle PQN = \angle LQM$ как вертикальные. Таким образом, в треугольнике KQM углы L и Q равны, значит, $QM = LM = 5$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ – 0 баллов.

3. Сколько различных чисел среди членов последовательности $a_n = \frac{n^2 - 21}{n^2 - n - 15}$, где $n = 5, 6, \dots, 100$?

Ответ. 94.

Решение. Предположим, что для некоторых различных натуральных чисел k и m выполнено $a_k = a_m$. Тогда

$$\frac{k^2 - 21}{k^2 - k - 15} = \frac{m^2 - 21}{m^2 - m - 15}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем

$$km^2 - mk^2 + 6k^2 - 6m^2 - 21k + 21m = 0 \Leftrightarrow (m - k)(km - 6(k + m) + 21) = 0.$$

Так как $k \neq m$, то

$$km - 6(k + m) + 21 = 0 \Leftrightarrow (k - 6)(m - 6) = 15 = 3 \cdot 5.$$

У данного уравнения 4 решения в натуральных числах (k, m) , удовлетворяющих условию задачи: $(7, 21)$, $(21, 7)$, $(9, 11)$, $(11, 9)$. Поэтому из всех чисел a_k равны между собой только $a_7 = a_{21}$ и $a_9 = a_{11}$. Значит, у нас будет $96 - 2 = 94$ различных чисел.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В целом верное решение, но найдена только одна пара равных чисел – 10 баллов. Верный ответ без обоснования – 2 балла. Любые попытки доказать, что все числа различны – 0 баллов.

4. На доске написаны числа: две «2», три «3», четыре «4», ..., девять «9». Разрешается стереть любые два числа m и n и записать вместо них на доску число $\frac{mn}{m+n}$ (оно может оказаться нецелым). После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно? Укажите все возможные варианты и докажете, что других нет.

Ответ. Последнее число всегда будет равно $\frac{1}{8}$.

Решение. Рассмотрим сумму обратных величин всех чисел. Для исходного набора чисел она равна

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \dots + 9 \cdot \frac{1}{9} = 8.$$

Когда мы стираем числа m и n и записываем вместо них число $\frac{mn}{m+n}$, рассматриваемая сумма не меняется: при стирании она уменьшается на $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, а при дописывании увеличи-

вається на $\frac{1}{\frac{mn}{m+n}} = \frac{m+n}{mn} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, то єсть на ту же саму величину. В концє, когдa останеться єдинственне число x , сума обратных величин будєт равна $\frac{1}{x}$. Значит, $x = \frac{1}{8}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Только ответ без доказательства – 0 баллов.

5. Сколькими способами можно клетчатый прямоугольник 3×20 разбить на 4 вертикальных и 26 горизонтальных домино?

Ответ. $4C_{12}^4 = 1980$ способов.

Решение. Рассмотрим сначала разбиение средней горизонтали (полосы). Каждое вертикальное домино пересекается с ней по одной клетке. Поэтому полоса разбита на 4 отдельные клетки и 8 домино, т.е. на 12 частей. Пронумеровав части слева направо, видим, что разбиение полосы однозначно задаётся выбором номеров одиноких клеток. Значит, есть C_{12}^4 разбиение полосы.

Посчитаем число разбиений прямоугольника, дающих данное разбиение полосы. Если вторая половинка вертикального домино лежит ниже или выше полосы, обозначим такое положение соответственно Н или В. Идя по полосе слева направо и выписывая эти буквы, получим слово из 4 букв. Разбиение прямоугольника однозначно определяется этим словом и разбиением полосы. Докажем, что всегда возможны слова НННН, ВВВВ, ВВНН, ННВВ и только они. Действительно, в этих случаях каждая буква Н разбивает полосу на части чётной длины: каждая часть состоит из целых домино и из 0 или 2 одиноких клеток; то же верно и для В. Положив в прямоугольнике вертикальные Н-домино, мы и нижнюю горизонталь разобьём на части чётной длины, а они однозначно разбиваются на горизонтальные домино; аналогично для В-домино и верхней горизонтали.

При любом другом слове найдется пара разных букв с краю. Пусть, например, слово имеет вид ВН **. Тогда слева от этой буквы Н находится нечётное число клеток и на нижней горизонтали слева от этого Н-домино будет нечётное число клеток. Значит, эту часть на горизонтальные домино не разбить.

Мы доказали, что для каждого разбиения полосы есть 4 разбиения прямоугольника, откуда и следует ответ.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верное решение, но допущены незначительные ошибки – 18 баллов. Только ответ без доказательства – 2 балла.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Три бельчонка Петя, Захар и Дима играли в настольный футбол. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Петя сыграл 6 раз, Захар 5 раз, Дима 3 раза. Кто проиграл во второй партии?

Ответ. Дима.

Решение. Сложим количества сыгранных партий: $5 + 3 + 6 = 14$. В каждой партии участвовало двое, значит, мы посчитали каждую партию 2 раза, и всего партий было 7. Любой игрок не может пропустить больше одной партии подряд, потому что иначе двое играли бы подряд два раза. Значит, самое малое, игрок может играть через раз. Дима играл 3 раза. Если он играл в первой партии, то он должен был играть ещё в третьей, пятой и седьмой, получается 4 раза – противоречие. Если он начал играть со второй партии, то играл ещё в четвёртой и шестой. Все свои партии он проиграл, поскольку выбывал, иначе у него были бы игры подряд, и получилось бы больше 3 игр. Поэтому Дима проиграл и вторую игру. Покажем, как могла складываться игра. Обозначим имена начальными буквами. Пример.

№ партии	1	2	3	4	5	6	7
Играли	З, П	П, Д	П, З	З, Д	З, П	П, Д	П, З
Выиграл	П	П	З	З	П	П	З

Во второй строке таблицы записано, кто с кем играл. Буква П встречается там 6 раз, буква З – 5 раз, буква Д – 3 раза.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем играл, для проверки, что выполнение условий возможно. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 16 баллов. Маленькие пробелы в обосновании –

18 баллов. Задача решена на основании нескольких (но не всех возможных) примеров – 15 баллов; на основании одного примера – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Федя записал дробь $\frac{4}{11}$, Лена записала дробь $\frac{7}{19}$, а Даня записал дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $(\frac{4}{11}; \frac{7}{19})$. Каково наименьшее возможное значение b ?

Ответ. 30.

Решение. Запишем условие в виде $\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{7}{19}$. Отсюда $11a - 4b > 0$, $7b - 19a > 0$. Но это целые числа, поэтому $11a - 4b \geq 1$, $7b - 19a \geq 1$. Найдём разность $\frac{7}{19} - \frac{4}{11} = \frac{1}{209}$. Но $\frac{7}{19} - \frac{4}{11} = (\frac{7}{19} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - \frac{4}{11}) = \frac{7b-19a}{19b} + (\frac{11a-4b}{11b}) \geq \frac{1}{19b} + \frac{1}{11b} = \frac{30}{209b}$. Таким образом, $\frac{1}{209} \geq \frac{30}{209b}$, откуда $b \geq 30$. Покажем, что для $b = 30$ существует подходящее a . При $a = 11$: $\frac{4}{11} < \frac{11}{30} < \frac{7}{19}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Найдена дробь $\frac{11}{30}$, но не доказана минимальность знаменателя – 15 баллов. Найдён неоптимальный пример дроби, находящейся в данном интервале – 5 баллов. Получена оценка $b \geq 30$ – 13 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. На окружности случайным образом поставлены 8 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех этих отрезков равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?

Ответ. $\frac{8}{117}$.

Решение 1. Отрезков всего $C_8^2 = 28$. Найдём вероятность того, что первые 3 красных отрезка образуют треугольник. По теореме умножения $P(A) = \frac{28}{28} \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{1}{26}$ (так как к первому отрезку примыкают 12 отрезков, а третий отрезок определяется однозначно). Но в качестве трёх первых отрезков могли быть выбраны из четырёх отрезков четыре разные тройки, для каждой вероятность такая же, поэтому по теореме сложения $P = 4 \cdot \frac{28}{28} \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{1}{26} = \frac{8}{117} (\approx 0,068376)$.

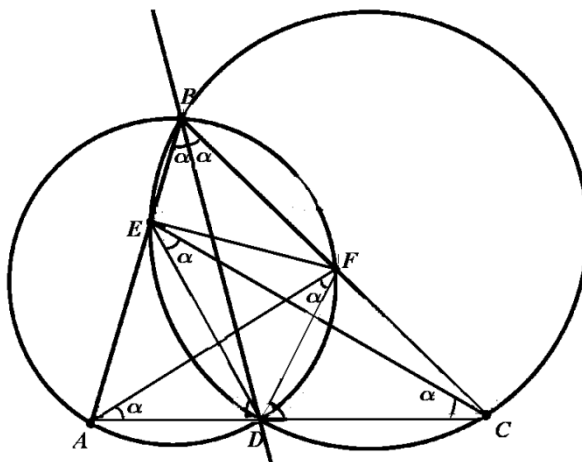
Решение 2. Отрезков всего $C_8^2 = 28$. Число способов выбора 4 отрезков из 28 равно $C_{28}^4 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{4!}$. Число благоприятных наборов трёх красных отрезков равно $\frac{28 \cdot 12 \cdot 1}{3!}$, четвёртым отрезком может быть выбран любой из 25 оставшихся. Всего благоприятных наборов четырёх красных отрезков $\frac{28 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 25}{3!}$. Вероятность равна $\frac{28 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 25 \cdot 24}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 6} = \frac{8}{117}$.

Решение 3. Отрезков всего $C_8^2 = 28$. Число способов выбора 4 отрезков из 28 равно $C_{28}^4 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{4!}$. Число возможных треугольников равно $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. Заметим, что 4 отрезка могут образовать только 1 треугольник. Значит, число благоприятных способов покрасить 4 отрезка в красный цвет, равно $56 \cdot 25$. Вероятность равна $\frac{56 \cdot 25 \cdot 24}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 13} = \frac{8}{117}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D . Около треугольников BDC и ABD описаны окружности соответственно w_1 и w_2 . Окружность w_1 пересекает сторону AB в точке E , а окружность w_2 пересекает сторону BC в точке F . Известно, что $\angle ABD = \angle DBC$. Докажите, что $AE = CF$.

Решение. Пусть $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$.



Тогда $\angle AFD = \alpha$, так как этот угол опирается на ту же дугу AD окружности w_2 , что и $\angle ABD$. $\angle ECD = \angle EBD$, как опирающиеся на одну дугу ED окружности w_1 . Но $\angle ABD = \angle EBD$, поэтому $\angle ECD = \alpha$. $\angle CED = \angle CBD = \alpha$, как опирающиеся на одну дугу CD окружности w_1 . В треугольнике AFD углы при основании AF равны α, α . $\angle FDC = 2\alpha$, как внешний угол треугольника AFD . В треугольнике EDC углы при основании EC равны α, α . $\angle EDA = 2\alpha$, как внешний угол треугольника EDC . Таким образом, $\angle FDC = \angle EDA$. Поскольку треугольники EDC и AFD равнобедренные, $ED = DC$, $AD = DF$. Следовательно, $\triangle EDA = \triangle DFC$. Отсюда равны и третьи стороны треугольников: $AE = CF$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение $x^4 - xy + y^3 = 0$.

Ответ. $(x, y) = (0, 0)$.

Решение. Если $x = 0$, то $y = 0$ и наоборот. Пусть x и y имеют наибольший общий делитель d : $x = d \cdot x_1$, $y = d \cdot y_1$. Тогда $d^4 x_1^4 - d^2 x_1 y_1 + d^3 y_1^3 = 0$, или $d^2 x_1^4 - x_1 y_1 + d y_1^3 = 0$. Отсюда $d y_1^3$ делится на x_1 . Поскольку x_1 и y_1 взаимно просты, d должно делиться на x_1 . Пусть $d = u x_1$. Подставим в полученное уравнение: $(u x_1)^2 x_1^4 - x_1 y_1 + (u x_1) y_1^3 = 0$, или $u^2 x_1^5 - y_1 + u y_1^3 = 0$. Отсюда y_1 делится на u^2 . Пусть $y_1 = v u^2$. Подставляя, получаем $u^2 x_1^5 - v u^2 + u^7 v^3 = 0$, или $x_1^5 - v + u^5 v^3 = 0$. Из этого равенства следует, что x_1^5 делится на v . Но x_1 и v взаимно просты, поэтому $v \in \{-1, 1\}$. Тогда последнее равенство превращается в $x_1^5 \mp 1 \pm u^5 = 0$. Очевидно, двух ненулевых пятых степеней, отличающихся на единицу, не существует.

Комментарий. Найден только ответ $(0, 0)$ – 1 балл, доказано, что других ответов нет – 19 баллов, баллы суммируются. Решение начато, есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2 балла (из 19). В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 2

1. Бельчата Миша, Лена и Света играли в настольный теннис. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Миша сыграл 6 раз, Лена 4 раза, Света 8 раз. Кто проиграл в шестой партии?

Ответ. Лена.

Решение. Сложим количества сыгранных партий: $6 + 4 + 8 = 18$. В каждой партии участвовало двое, значит, мы посчитали каждую партию 2 раза, и всего партий было 9. Любой игрок не может пропустить больше одной партии подряд, так как иначе двое играли бы подряд два раза. Значит, самое малое, игрок может играть через раз. Лена играла 4 раза. Если она играла в первой партии, то она должна была играть в третьей, пятой, седьмой, девятой, получается 5 раз – противоречие. Если она начала играть со второй партии, то играла ещё в четвёртой, шестой, восьмой. Все свои партии она проиграла, поскольку выбывала, иначе у неё были игры подряд, и получилось бы больше 4 игр. Поэтому Лена проиграла и шестую игру. Покажем, как могла складываться игра. Обозначим имена начальными буквами. Пример.

№ партии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Играли	М, С	С, Л	С, М	М, Л	М, С	С, Л	С, М	С, Л	М, С
Выиграл	С	С	М	М	С	С	С	М	С

Во второй строке таблицы записано, кто играл. Буква М встречается там 6 раз, буква Л – 4 раза, буква С – 8 раз.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем играл, для проверки, что выполнение условий возможно. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 16 баллов. Маленькие пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена на основании нескольких (но не всех возможных) примеров – 15 баллов. на основании одного примера – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Федя записал дробь $\frac{7}{17}$, Катя записала дробь $\frac{5}{12}$, а Лиза записала дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $(\frac{7}{17}; \frac{5}{12})$. Каково наименьшее возможное значение b ?

Ответ. 29.

Решение. Запишем условие в виде $\frac{7}{17} < \frac{a}{b} < \frac{5}{12}$. Отсюда $17a - 7b > 0$, $5b - 12a > 0$. Но это целые числа, поэтому $17a - 7b \geq 1$, $5b - 12a \geq 1$. Найдём разность $\frac{5}{12} - \frac{7}{17} = \frac{1}{204}$. Но $\frac{5}{12} - \frac{7}{17} = (\frac{5}{12} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - \frac{7}{17}) = \frac{5b-12a}{12b} + \frac{17a-7b}{17b} \geq \frac{1}{12b} + \frac{1}{17b} = \frac{29}{204b}$. Таким образом, $\frac{1}{204} \geq \frac{29}{204b}$, откуда $b \geq 29$. Покажем, что для $b = 29$ существует подходящее a . При $a = 12$: $\frac{7}{17} < \frac{12}{29} < \frac{5}{12}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Найдена дробь $\frac{12}{29}$, но не доказана минимальность знаменателя – 15 баллов. Найден неоптимальный пример дроби, находящейся в данном интервале – 5 баллов. Получена оценка $b \geq 29$ – 13 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. На окружности случайным образом поставлены 9 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех полученных отрезков (оба конца которых лежат на

окружности) равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?

Ответ. $\frac{4}{85}$.

Решение 1. Отрезков всего $C_9^2 = 36$. Найдём вероятность того, что первые 3 красных отрезка образуют треугольник. По теореме умножения $P(A) = \frac{36}{36} \cdot \frac{14}{35} \cdot \frac{1}{34}$ (так как к первому отрезку примыкают 14 отрезков, а третий отрезок определяется однозначно). Но в качестве трёх первых отрезков могли быть выбраны из четырёх отрезков четыре разные тройки, для каждой вероятность такая же, поэтому по теореме сложения $P = 4 \cdot \frac{36}{36} \cdot \frac{14}{35} \cdot \frac{1}{34} = \frac{4}{85}$.

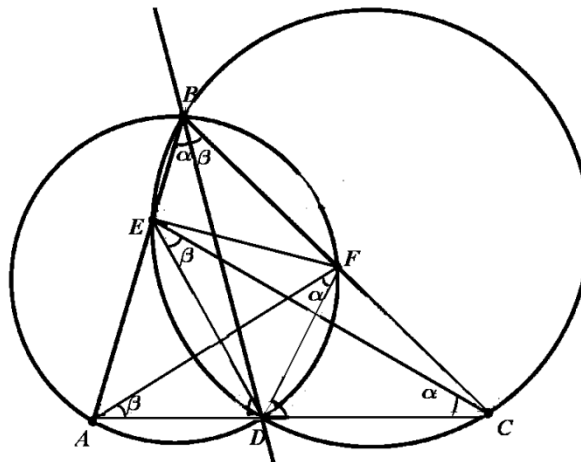
Решение 2. Отрезков всего $C_9^2 = 36$. Число способов выбора 4 отрезков из 36 равно $C_{36}^4 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!}$. Число благоприятных наборов трёх красных отрезков равно $\frac{36 \cdot 14 \cdot 1}{3!}$, четвёртым отрезком может быть выбран любой из 33 оставшихся. Всего благоприятных наборов четырёх красных отрезков $\frac{36 \cdot 14 \cdot 1 \cdot 33}{3!}$. Вероятность равна $\frac{36 \cdot 14 \cdot 1 \cdot 33 \cdot 24}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 6} = \frac{14 \cdot 4}{35 \cdot 34} = \frac{4}{85} \approx 0,0470588$.

Решение 3. Отрезков всего $C_9^2 = 36$. Число способов выбора 4 отрезков из 36 равно $C_{36}^4 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{4!} = 58905$. Число возможных треугольников равно $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$. Заметим, что 4 отрезка могут образовать только 1 треугольник. Значит, число благоприятных способов покрасить 4 отрезка в красный цвет, равно $84 \cdot 33$. Вероятность равна $\frac{C_9^3 \cdot 33}{C_{36}^4} = \frac{84 \cdot 33 \cdot 24}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{4}{85}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D . Около треугольников BDC и ABD описаны окружности, соответственно w_1 и w_2 . Окружность w_1 пересекает сторону AB в точке E , а окружность w_2 пересекает сторону BC в точке F . Известно, что $AE = CF$. Докажите, что $\angle ABD = \angle DBC$.

Решение. Пусть $\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$.



Тогда $\angle AFD = \angle ABD = \alpha$, так как этот угол опирается на ту же дугу AD окружности w_2 , что и $\angle ABD$. $\angle ABD = \angle EBD = \angle ECD = \alpha$, как опирающиеся на одну дугу ED окружности w_1 . Аналогично, $\angle FAD = \angle FBD = \angle DBC = \beta$, как опирающиеся на одну дугу FD окружности w_2 . Но в окружности w_1 $\angle DBC$ опирается на дугу CD , как и $\angle DEC$, поэтому $\angle DEC = \angle DBC = \beta$. В треугольнике DEC известны два угла: α, β . Поэтому внешний угол

этого треугольника $\angle EDA = \alpha + \beta$. Аналогично $\angle FDC = \alpha + \beta$. Четырёхугольник $ABFD$ – вписанный, поэтому $\angle BAD + \angle BFD = 180^\circ$ и $\angle EAD = \angle BAD = 180^\circ - \angle BFD = \angle CFD$. В треугольниках ADE и CDF есть две пары равных углов: $\angle EDA = \angle FDC$, $\angle EAD = \angle CFD$. Значит, и третьи углы равны. Поскольку $AE = CF$, $\triangle EDA = \triangle CDF$. Следовательно, $ED = DC$, треугольник EDC равнобедренный, $\angle DEC = \angle ECD$. Но $\angle DEC = \beta$, $\angle ECD = \alpha$. Отсюда $\alpha = \beta$, и $\angle ABD = \angle DBC$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Докажите, что уравнение $x^4 + xy + y^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, кроме $(x, y) = (0, 0)$.

Решение. Если $x = 0$, то $y = 0$ и наоборот. Пусть x и y имеют наибольший общий делитель d : $x = d \cdot x_1$, $y = d \cdot y_1$. Тогда $d^4 x_1^4 + d^2 x_1 y_1 + d^3 y_1^3 = 0$, или $d^2 x_1^4 + x_1 y_1 + d y_1^3 = 0$. Отсюда $d y_1^3$ делится на x_1 . Поскольку x_1 и y_1 взаимно просты, d должно делиться на x_1 . Пусть $d = u x_1$. Подставим в полученное уравнение: $(u x_1)^2 x_1^4 + x_1 y_1 + (u x_1) y_1^3 = 0$, или $u^2 x_1^5 + y_1 + u y_1^3 = 0$. Отсюда y_1 делится на u^2 . Пусть $y_1 = v u^2$. Подставляя, получаем $u^2 x_1^5 + v u^2 + u^7 v^3 = 0$, или $x_1^5 + v + u^5 v^3 = 0$. Из этого равенства следует, что x_1^5 делится на v . Но x_1 и v взаимно просты, поэтому $v \in \{-1, 1\}$. Тогда последнее равенство превращается в $x_1^5 \pm 1 \pm u^5 = 0$. Очевидно, двух ненулевых пятых степеней, отличающихся на единицу, не существует.

Комментарий. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2-5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 3

1. Бельчата Арина, Коля и Тимур играли в настольный хоккей. В каждой партии играли двое, проигравший уступал своё место третьему игроку. Арина сыграла 5 раз, Коля 3, Тимур 6. Кто проиграл в четвёртой партии?

Ответ. Коля.

Решение. Сложим количества сыгранных партий: $5 + 3 + 6 = 14$. В каждой партии участвовало двое, значит, мы посчитали каждую партию 2 раза, и всего партий было 7. Любой игрок не может пропустить больше одной партии подряд, потому что иначе двое играли бы подряд два раза. Значит, самое малое, игрок может играть через раз. Коля играл 3 раза. Если он играл в первой партии, то он должен был играть в третьей, пятой и седьмой, получается 4 раза – противоречие. Если он начал играть со второй партии, то играл ещё в четвёртой и шестой. Все свои партии он проиграл, поскольку выбывал, иначе у него были игры подряд, и получилось бы больше 3 игр. Поэтому Коля проиграл и четвёртую игру. Покажем, как могла складываться игра. Обозначим имена начальными буквами. Пример.

№ партии	1	2	3	4	5	6	7
Играли	А, Т	Т, К	Т, А	А, К	А, Т	Т, К	Т, А
Выиграл	Т	Т	А	А	Т	Т	А

Во второй строке таблицы записано, кто играл. Буква Т встречается там 6 раз, буква А – 5 раз, буква К – 3 раза.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При этом обязательно должно быть показано, кто с кем играл, для проверки, что выполнение условий возможно. Если такой проверки нет, но получен верный ответ – 16 баллов. Маленькие пробелы в обосновании – 18 баллов. Задача решена на основании примера, но не показано, что других ответов быть не может – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Федя записал дробь $\frac{9}{16}$, Лена записала дробь $\frac{4}{7}$, а Миша записал дробь $\frac{a}{b}$, которая находится в интервале $(\frac{9}{16}; \frac{4}{7})$. Каково наименьшее возможное значение b ?

Ответ. 23.

Решение. Запишем условие в виде $\frac{9}{16} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$. Отсюда $16a - 9b > 0$, $4b - 7a > 0$. Но это целые числа, поэтому $16a - 9b \geq 1$, $4b - 7a \geq 1$. Найдём разность $\frac{4}{7} - \frac{9}{16} = \frac{1}{112}$. Но $\frac{4}{7} - \frac{9}{16} = (\frac{4}{7} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - \frac{9}{16}) = \frac{4b-7a}{7b} + \frac{16a-9b}{16b} \geq \frac{1}{7b} + \frac{1}{16b} = \frac{23}{112b}$. Таким образом, $\frac{1}{112} \geq \frac{23}{112b}$, откуда $b \geq 23$. Покажем, что для $b = 23$ существует подходящее a . При $a = 13$: $\frac{9}{16} < \frac{13}{23} < \frac{4}{7}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Найдена дробь $\frac{13}{23}$, но не доказана минимальность знаменателя – 15 баллов. Найден неоптимальный пример дроби, находящейся в данном интервале – 5 баллов. Получена оценка $b \geq 23$ – 13 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. На окружности случайным образом поставлены 10 точек. Каждая пара этих точек соединена отрезком. Из всех этих отрезков равновероятно выбирают 4 отрезка, и красят их в красный цвет. Какова вероятность, что найдётся красный треугольник, вершины которого лежат на окружности?

Ответ. $\frac{16}{473}$.

Решение 1. Отрезков всего $C_{10}^2 = 45$. Найдём вероятность того, что первые 3 красных отрезка образуют треугольник. По теореме умножения $P(A) = \frac{45}{45} \cdot \frac{16}{44} \cdot \frac{1}{43}$ (так как к первому отрезку примыкают 16 отрезков, а третий отрезок определяется однозначно). Но в качестве трёх первых отрезков могли быть выбраны из четырёх отрезков четыре разные тройки, для каждой вероятность такая же, поэтому по теореме сложения $P = 4 \cdot \frac{45}{45} \cdot \frac{16}{44} \cdot \frac{1}{43} = \frac{16}{473}$.

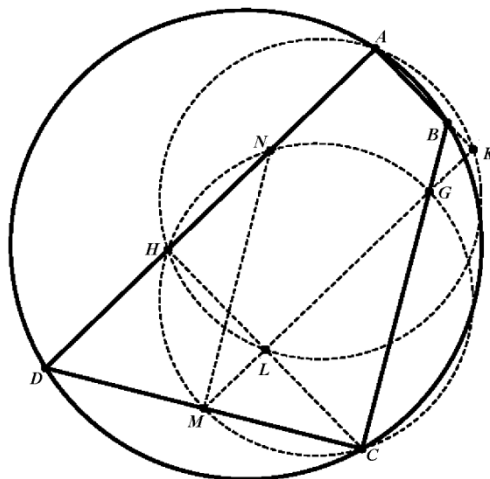
Решение 2. Отрезков всего $C_{10}^2 = 45$. Число способов выбора 4 отрезков из 45 равно $C_{45}^4 = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{4!}$. Число благоприятных наборов трёх красных отрезков равно $\frac{45 \cdot 16 \cdot 1}{3!}$, четвёртым отрезком может быть выбран любой из 42 оставшихся. Всего благоприятных наборов четырёх красных отрезков $\frac{45 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 42}{3!}$. Вероятность равна $\frac{45 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 42 \cdot 24}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 6} = \frac{16}{473}$.

Решение 3. Отрезков всего $C_{10}^2 = 45$. Число способов выбора 4 отрезков из 45 равно $C_{45}^4 = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{4!}$. Число возможных треугольников равно $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$. Заметим, что 4 отрезка могут образовать только 1 треугольник. Значит, число благоприятных способов покрасить 4 отрезка в красный цвет, равно $120 \cdot 42$. Вероятность равна $\frac{120 \cdot 42 \cdot 24}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42} = \frac{120 \cdot 24}{45 \cdot 44 \cdot 43} = \frac{8 \cdot 2}{11 \cdot 43} = \frac{16}{473} (\approx 0,0338266)$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны DC . Через точку M проведена прямая, перпендикулярная DC , и пересекающая сторону AD в точке N . Описанная окружность треугольника CMN вторично пересекает сторону AD в точке H , а прямую CB в точке G , $G \neq B$. Прямая MG пересекает прямую AB в точке K , а прямую CH в точке L . Докажите, что четырехугольник $KLHA$ является вписанным.

Решение. Докажем, что $\angle HAK + \angle HLK = 180^\circ$.



$\angle HLK = \angle MLC$. $\angle MLC = \angle MHL + \angle HML$ (как внешний угол). Обозначим $\angle MHL = \alpha$, $\angle HML = \beta$. Тогда $\angle MLC = \alpha + \beta$.

Четырехугольник $NHMC$ вписанный, поэтому $\angle NHC = \angle NMC$, но по условию $\angle NMC = 90^\circ$. $\angle MHL = \angle MHC = \angle MNC = \alpha$ (как вписанные, опирающиеся на дугу MC). Но треугольник DNC равнобедренный, так как MN – медиана и высота. Следовательно, $\angle HNM = \angle DNM = \angle CNM = \alpha$, и $\angle HCM = \alpha$ (как вписанные, опирающиеся на дугу HM). $\angle HMG = \angle HCG = \beta$ (как вписанные, опирающиеся на дугу HG).

В четырехугольнике $ABCD$ имеем: $\angle DCB = \angle HCM + \angle HCG = \alpha + \beta$. Но $ABCD$ – вписанный четырехугольник, поэтому $\alpha + \beta + \angle DAB = 180^\circ$. Поскольку $\angle HLK = \alpha + \beta$, $\angle DAB = \angle DAK$, получаем равенство $\angle HLK + \angle DAK = 180^\circ$, что означает вписанность четырехугольника $KLHA$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение $x^4 - xy - y^3 = 0$.

Ответ. $(x, y) = (0, 0)$.

Решение. Если $x = 0$, то $y = 0$ и наоборот. Пусть x и y имеют наибольший общий делитель d : $x = d \cdot x_1$, $y = d \cdot y_1$. Тогда $d^4 x_1^4 - d^2 x_1 y_1 - d^3 y_1^3 = 0$, или $d^2 x_1^4 - x_1 y_1 - d y_1^3 = 0$. Отсюда $d y_1^3$ делится на x_1 . Поскольку x_1 и y_1 взаимно просты, d должно делиться на x_1 . Пусть $d = u x_1$. Подставим в полученное уравнение: $(u x_1)^2 x_1^4 - x_1 y_1 - (u x_1) y_1^3 = 0$, или $u^2 x_1^5 - y_1 - u y_1^3 = 0$. Отсюда y_1 делится на u^2 . Пусть $y_1 = v u^2$. Подставляя, получаем $u^2 x_1^5 - v u^2 - u^7 v^3 = 0$, или $x_1^5 - v - u^5 v^3 = 0$. Из этого равенства следует, что x_1^5 делится на v . Но x_1 и v взаимно просты, поэтому $v \in \{-1, 1\}$. Тогда последнее равенство

превращается в $x_1^5 \pm 1 \pm u^5 = 0$. Очевидно, двух ненулевых пятых степеней, отличающихся на единицу, не существует.

Комментарий. Найдено только ответ $(0,0)$ – 1 балл, доказано, что других ответов нет – 19 баллов, баллы суммируются. Решение начато, есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2 балла (из 19). В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 4

1. Маша и Петя сыграли по несколько партий в шашки, и между собой, и с другими ребятами. Петя играл 6 раз, в одной игре была ничья, в двух выигрыш, в трех проигрыш. Маша сыграла 5 раз, у неё было три ничьих и два раза она выиграла. Какое наименьшее число игр с другими ребятами могли сыграть Маша и Петя?

Ответ. 5.

Решение. Наименьшее число игр с другими ребятами будет, когда число игр между Машей и Петей наибольшее. Всего в условии говорится про 11 игр: $5 + 6 = 11$. Но игры, в которых Маша и Петя играли между собой, посчитаны два раза, и как игры Маши, и как игры Пети. Если Маша и Петя играли между собой, то Маша выиграла, а Петя проиграл, или они сделали ничью. Маша выиграла 2 партии, а Петя проиграл 3. Значит, они могли 2 партии сыграть между собой, а одну игру Петя проиграл кому-то еще. Кроме того, у каждого из них была ничья, эта игра тоже могла быть между ними. Итак, самое большое число игр между Машей и Петей равно 3. Тогда общее число игр, сыгранных Машей и Петей, равно $11 - 3 = 8$. Из этих 8 игр 3 игры между Машей и Петей, а остальные $8 - 3 = 5$ игр – с другими ребятами.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. При верном решении записан неверный ответ – 19 баллов. Маленькие пробелы в обосновании – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

2. Четыре бельчонка изучали арифметику. Каждому из них назвали одинаковую пару ненулевых чисел (a, b) . Первый бельчонок поделил a на b , второй перемножил свою пару чисел, третий вычел b из a , четвертый сложил свои числа. Оказалось, что полученные ими результаты образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке). Найдите все возможные пары чисел (a, b) .

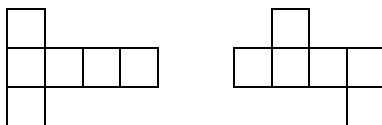
Ответ. $(a, b) = \left(-\frac{9}{8}, -\frac{3}{5}\right)$.

Решение. Запишем полученные числа: $\frac{a}{b}, ab, a - b, a + b$. Разность прогрессии равна $a + b - (a - b) = 2b$. Тогда второй член равен $ab = a - b - 2b = a - 3b$, первый член равен $\frac{a}{b} = a - b - 4b = a - 5b$. Заметим, что $b \neq 1$, так как при $b = 1$ среди членов прогрессии были бы одинаковые ($\frac{a}{b} = ab$). Выразим из первого соотношения a : $a = \frac{3b}{1-b}$, и подставим во второе: $\frac{3b}{b(1-b)} = \frac{3b}{1-b} - 5b$. Получаем квадратное уравнение $5b^2 - 2b - 3 = 0$. Находим его корни $b_1 = 1, b_2 = -\frac{3}{5}$. Отбрасываем первый корень, а второй подставляем в выражение для a : $a = \frac{3b}{1-b} = -\frac{9}{8}$. Члены последовательности: $\frac{15}{8}, \frac{27}{40}, -\frac{21}{40}, -\frac{69}{40}$.

Комментарий. Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Задача верно решена, но в неверных условиях ($b - a$ вместо $a - b$) – 15 баллов. Допущена одна арифметическая ошибка – 10 баллов, но если в самом конце верного решения – 15 баллов. Решение найдено подбором, не доказано, что других решений нет – 10 баллов. При подборе проверяется единственная пара значений, дающая верный ответ – 5 баллов.

Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.

3. У двух школьников есть по развёртке куба. Обе развёртки состоят из 6 единичных квадратов (см. рисунок).



Каждый школьник равновероятно красит каждый единичный квадрат своей развёртки в зелёный или красный цвет. Потом они сворачивают развёртки в кубы покрашенными гранями наружу. Какова вероятность, что у них получатся кубы с одинаковой раскраской? Раскраски, совпадающие при повороте кубов, считаются одинаковыми.

Ответ. $\frac{147}{1024}$.

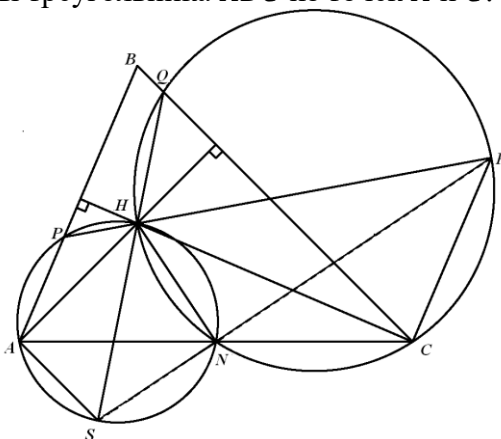
Решение. Пусть все грани у обоих кубов красные, это возможно в $1 \cdot 1 = 1$ случае. Пусть одна грань красная, таких возможностей 6^2 . Пусть в красный цвет покрашены две грани с общим ребром, таких возможностей 12^2 (так как каждая грань соприкасается с 4 другими, $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$). Пусть в красный покрашены две противоположные грани, это даёт ещё 3^2 возможностей. Если три грани красные, и они сходятся в вершине, таких случаев может быть 8 на каждом кубе, всего 8^2 . Три грани могут также образовывать цепочку, средняя грань в ней выбирается 6 способами, крайние – 2 способами, всего 12 способов. Если красных граней 4, 5, или 6, то зелёных 2, 1, или 0, поэтому соответствующее число способов удваивается. Всего вариантов раскраски одного куба $2^6 = 64$, двух – 64^2 . Окончательно получаем

$$P = 2 \cdot \frac{1^2 + 6^2 + 12^2 + 3^2}{64^2} + \frac{8^2 + 12^2}{64^2} = \frac{147}{1024}.$$

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Арифметическая ошибка в конце верного решения – 19 баллов. Решение в основном верное, но не всё учтено – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот обозначена H . Точка N – середина AC . Через точки A, H, N проведена окружность w_1 , а через точки C, H, N проведена окружность w_2 . Прямая AB пересекает окружность w_1 в точке P , прямая BC пересекает окружность w_2 в точке Q . Прямые PH и QH пересекают окружности w_2 и w_1 в точках R и S соответственно. Докажите 1) точки R, S, N лежат на одной прямой; 2) треугольники ARS и CRS имеют одинаковую площадь.

Решение. Проведём высоты треугольника ABC из точек A и C .



1) Найдём $\angle HNS$. $\angle HNS = 180^\circ - \angle HSN - \angle SHN$. $\angle HSN = \angle HAN$, как опирающиеся на одну дугу HN окружности w_1 . $\angle SHN = 180^\circ - \angle QHN$, как смежные углы. Итак, $\angle HNS = 180^\circ - \angle HAN - (180^\circ - \angle QHN)$. $\angle HAN$ можно записать как $\angle CAN$, а $180^\circ - \angle QHN = \angle QCN$, поскольку по условию H, Q, C, N лежат на окружности w_2 . Получаем $\angle HNS = 180^\circ - \angle CAN - \angle QCN$. $\angle CAN$ – острый угол прямоугольного треугольника, поэтому он равен $90^\circ - \angle BCA$. Но $\angle QCN = \angle BCA$. Следовательно, $\angle HNS = 180^\circ - (90^\circ - \angle BCA) - \angle BCA = 90^\circ$. Аналогично найдём $\angle HNR$. $\angle HNR = 180^\circ - \angle HRN - \angle RHN = 180^\circ - \angle HCN - (180^\circ - \angle PHN) = 180^\circ - \angle HCA - (180^\circ - \angle BAC) = 180^\circ - (90^\circ - \angle BAC) - \angle BCA = 90^\circ$. Итак, $\angle SNR = \angle HNS + \angle HNR = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Таким образом, точка $N \in RS$.

2) $\Delta ARS = \Delta ARN + \Delta ANS$, $\Delta CRS = \Delta CRN + \Delta CNS$. Очевидно, что $S_{ARN} = S_{CRN}$, $S_{ANS} = S_{CNS}$, так как в обоих случаях пары треугольников имеют равные высоты и основания.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Наибольший общий делитель натуральных чисел n, m равен d ($\text{НОД}(n, m) = d$). Известно, что $n + m^2 + d^2 = dnm$. Найдите n и m .

Ответ. $(n, m) = (5, 2), (5, 3)$.

Решение. По условию $n = d \cdot x$, $m = d \cdot y$, где x, y – натуральные взаимно простые числа. Тогда $dx + d^2y^2 + d^2 = d^3xy$, или $x + dy^2 + d = d^2xy$. Отсюда x делится на d . Пусть $x = kd$. Подставим в полученное уравнение: $kd + dy^2 + d = d^3ky$, или $k + y^2 + 1 = d^2ky$. Отсюда $k + 1$ делится на y . Пусть $k + 1 = ay$, то есть $k = ay - 1$. Подставляя, получаем $ay + y^2 = d^2y(ay - 1)$, или $a + y = d^2(ay - 1)$. Если $d \geq 2$, то $a + y \geq 4(ay - 1)$, следовательно, $y + 4 \geq a(4y - 1) \geq (4y - 1)$. Отсюда получаем $5 \geq 3y$. Тогда $y = 1$, $5 \geq 3a$, $a = 1$. Подставляя эти значения в равенство $k = ay - 1$, находим $k = 0$ и $x = 0$. Но x – натуральное число. Противоречие. Следовательно, $d < 2$, то есть $d = 1$. Уравнение $n + m^2 + 1 = nmt$ равносильно уравнению $m^2 + 1 = n(m - 1)$, значит, $m^2 + 1$ делится на $m - 1$. Тогда на $m - 1$ делится и $m^2 + 1 - (m^2 - m) = m + 1$. Но это означает, что и $m + 1 - (m - 1) = 2$ кратно $m - 1$, то есть $m - 1 = 1$ или 2 , $m = 2$ или 3 . При $m = 2$ исходное уравнение превращается в $n + 4 + 1 = 2n$, откуда $n = 5$. При $m = 3$ имеем $n + 9 + 1 = 3n$, откуда $n = 5$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 15 баллов. Ответы найдены подбором – по 3 балла за каждый ответ, доказано, что других ответов нет – 14 баллов, баллы суммируются. Есть некоторые разумные рассуждения, но доказательства нет – 2 балла (из 14). Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1-2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20** баллов в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 2x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$.

Ответ. $-21 \pm 5\sqrt{26}$.

Решение. Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3$, $f(x_4) = x_4$. Поэтому исходное выражение

$$A = (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4.$$

Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе.

Пусть $B = -x_1^3 x_4 - x_2^3 x_3$. Заметим, что

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_3 x_4 = -1; & x_1 + x_2 &= 2, & x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8 + 6 = 14, \\ x_3^2 + x_4^2 &= (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 9 + 2 = 11, \\ x_1^6 + x_2^6 &= (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3 x_2^3 = 196 + 2 = 198. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} A + B &= -(x_1^3 + x_2^3)(x_3 + x_4) = -14 \cdot 3 = -42, \\ AB &= (x_1^6 + x_2^6)x_3 x_4 + x_1^3 x_2^3 (x_3^2 + x_4^2) = -98 - 11 = -209. \end{aligned}$$

Поэтому A и B – корни квадратного уравнения $x^2 + 42x - 209 = 0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $-21 + 5\sqrt{26}$ и $-21 - 5\sqrt{26}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $f(x)$: x_1 через x_2 , а x_2 через x_1 , то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражения A может принимать оба указанных выше значения.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение

начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.

2. Петя выписал на доску два числа: сначала 4, затем 6. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 100-м?

Ответ. 5150.

Решение. Докажем, что n -й элемент последовательности после третьего (равного 9) можно задать формулой $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$. Действительно, 9 и 14 проверяются вручну, а следующие элементы задаются по предыдущим, так как

$$\begin{aligned} \frac{(n+k+3)(n+k+4)}{2} - 1 &= \\ &= 2 \cdot \left(\frac{(n+k+2)(n+k+3)}{2} - 1 \right) - \left(\frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2} - 1 \right) + 1. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что каждый следующий элемент x_n действительно равен $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, так как $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$ представляется как произведение двух натуральных чисел $\frac{1}{2}n(n+3)$, а значит, составное. В итоге $x_{100} = \frac{1}{2}(100+1)(100+2) - 1 = 5150$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верно получен n -й элемент последовательности с некоторого номера, однако имеются небольшие недочёты в доказательстве формулы – 14 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1001 среди чисел есть равные?

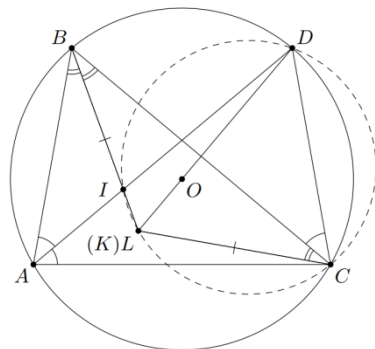
Ответ. $C_{500}^2 = 124750$ наборов.

Решение. Пусть (k, k, a, b) – такой набор. Так как $a + b = 1001 - 2k$ нечётно, то числа a и b разной чётности и между собой не равны. Пусть a чётно. Упорядоченной парой (a, b) набор однозначно определяется, поскольку k вычисляется однозначно, а двух пар равных чисел в наборе нет ввиду нечётности суммы. Сопоставим набору строку $(2k, a, b + 1)$. В ней все слагаемые чётны, а их сумма равна 1002. По такой строке набор тоже однозначно восстанавливается. Число таких строк можно посчитать так: выложим ряд из 501 двухрублёвой монет, в который в два разных промежутка вставлены две перегородки. Числа $2k, a$ и $b + 1$ будут равны сумме монет (в рублях) до первой перегородки, между перегородками и после второй перегородки соответственно. Так как между монетами 500 промежутков, есть ровно C_{500}^2 способов выбрать два из них.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник ABC . Луч AI пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке D . Окружность, проходящая через точки C, D и I , вторично пересекает луч BI в точке K . Докажите, что $BK = CK$.

Решение. Пусть O – центр описанной окружности $\triangle ABC$. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Обозначим $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Проведём через точки D и O прямую, и пусть L – точка пересечения этой прямой с лучом BI . Поскольку AI – биссектриса угла BAC , то $\angle BAD = \angle DAC$, и, следовательно, прямая DO – серединный перпендикуляр к отрезку BC . Поэтому $BL = CL$, т.е. треугольник BLC равнобедренный и $\angle LBC = \angle LCB = \frac{\beta}{2}$ (BI – биссектриса угла ABC). Тогда



$$\angle ILC = \angle BLC = 180^\circ - (\angle LBC + \angle LCB) = 180^\circ - \beta.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \angle CDI &= \angle CDA = 180^\circ - (\angle DAC + \angle ACD) = \\ &= [\angle DCB = \angle DAB = \angle DAC = 0,5\alpha, \quad \angle ACB = \gamma, \quad \angle ACD = \angle ACB + \angle DCB = \gamma + 0,5\alpha] = \\ &= 180^\circ - (0,5\alpha + \gamma + 0,5\alpha) = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, $\angle ILC + \angle CDI = 180^\circ$. Это означает, что точки I, D, C и L лежат на одной окружности (проходящей через точки I, D, C). Следовательно, точки K и L совпадают. Поэтому $CK = CL = BL = BK$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел, для которых

$$a^3 + b^3 = (abc - 1)^2.$$

Ответ. $(a, b, c) \in \{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$.

Решение. Из-за симметрии можно считать, что $a \geq b$. Положим $t = bc$ и перепишем уравнение в виде $F(a) = 0$, где $F(a) = a^3 - t^2 a^2 + 2ta + b^3 - 1$. Если $a \geq t^2$, то

$$F(a) = a^2(a - t^2) + 2ta + b^3 - 1 > 0.$$

Если $b \leq a \leq t^2 - 1$ (а значит, $t \geq 2$), то при $t \geq 4$ будет верно неравенство

$$F(a) < 0.$$

Действительно, точка локального максимума

$$a_0 = \frac{t^2 - \sqrt{t^4 - 6t}}{3} < 1$$

функции $F(a)$ не лежит на отрезке $[b, t^2 - 1]$, поэтому максимальное значение на данном отрезке $F(a)$ принимает на его концах. Вместе с тем, имеем

$$F(b) = -t^2 b^2 + 2tb - 1 = -c^2 b^4 + 2b^3 + 2cb^2 - 1 = -b^2(b^2 c^2 - 2b - 2c) - 1 < 0,$$

поскольку $b^2 c^2 - 2b - 2c > 0$ при $bc \geq 4$, а также

$$\begin{aligned} F(t^2 - 1) &= -t^4 + 2t^3 + b^3 + 2t^2 - 2t - 2 \leq -t^4 + 3t^3 + 2t^2 - 2t - 2 = \\ &= -t^2(t^2 - 3t - 2) - 2t - 2 < 0 \end{aligned}$$

при $t \geq 4$. Остаётся случай $2 \leq t \leq 3$, где находим тройку $(2, 1, 2)$.

Комментарий. Найдены оба ответа – 2 балла, доказано, что других ответов нет – 18 баллов, баллы суммируются. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 2

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 3x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 4x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$.

Ответ. $-72 \pm 10\sqrt{65}$.

Решение. Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3$, $f(x_4) = x_4$. Поэтому исходное выражение

$$A = (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4.$$

Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе.

Пусть $B = -x_1^3 x_4 - x_2^3 x_3$. Заметим, что

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_3 x_4 = -1; & x_1 + x_2 &= 3, & x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) &= 27 + 9 &= 36, \end{aligned}$$

$$x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 = 16 + 2 = 18,$$

$$x_1^6 + x_2^6 = (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3x_2^3 = 1296 + 2 = 1298.$$

Далее,

$$A + B = -(x_1^3 + x_2^3)(x_3 + x_4) = -36 \cdot 4 = -144,$$

$$AB = (x_1^6 + x_2^6)x_3x_4 + x_1^3x_2^3(x_3^2 + x_4^2) = -1298 - 18 = -1316.$$

Поэтому A и B – корни квадратного уравнения $x^2 + 144x - 1316 = 0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $-72 + 10\sqrt{65}$ и $-72 - 10\sqrt{65}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $f(x)$: x_1 через x_2 , а x_2 через x_1 , то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражения A может принимать оба указанных выше значения.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.

2. Петя выписал на доску два числа: сначала 2, затем 3. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1} , x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 99-м?

Ответ. 4950.

Решение. Докажем, что n -й элемент последовательности после третьего (равного 6) можно задать формулой $\frac{1}{2}n(n+1)$. Действительно, 6 и 10 проверяются вручную, а следующие элементы задаются по предыдущим, так как

$$\frac{(n+k+2)(n+k+3)}{2} = 2 \cdot \left(\frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2} \right) - \left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{2} \right) + 1.$$

Осталось заметить, что каждый следующий элемент x_n действительно равен $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, так как $\frac{1}{2}n(n+1)$ представляется как произведение двух натуральных чисел, а значит, составное. В итоге $x_{99} = \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot (99+1) = 4950$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верно получен n -й элемент последовательности с некоторого номера, однако имеются небольшие недочёты в доказательстве формулы – 14 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1003 среди чисел есть равные?

Ответ. $C_{501}^2 = 125250$ наборов.

Решение. Пусть (k, k, a, b) – такой набор. Так как $a + b = 1003 - 2k$ нечётно, то числа a и b разной чётности и между собой не равны. Пусть a чётно. Упорядоченной парой (a, b) набор однозначно определяется, поскольку k вычисляется однозначно, а двух пар равных чисел в наборе нет ввиду нечётности суммы. Сопоставим набору строку $(2k, a, b+1)$. В ней все слагаемые чётны, а их сумма равна 1004. По такой строке набор тоже однозначно восстанавливается. Число таких строк можно посчитать так: выложим ряд из 502 двухрублёвой монет, в который в два разных промежутка вставлены две перегородки. Числа $2k$, a и $b+1$ будут равны сумме монет (в рублях) до первой перегородки, между перегородками и после второй перегородки соответственно. Так как между монетами 501 промежутков, есть ровно C_{501}^2 способов выбрать два из них.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник XYZ . Луч XI пересекает окружность, описанную около треугольника XYZ , в точке S . Окружность, проходящая через точки Z, S и I , вторично пересекает луч YI в точке T . Докажите, что $YT = ZT$.

Решение. Пусть O – центр описанной окружности ΔXYZ . Обозначим $\angle YXZ = \alpha$. Обозначим $\angle XYZ = \beta$, $\angle XZY = \gamma$. Проведём через точки S и O прямую, и пусть P – точка пересечения этой прямой с лучом YI . Поскольку XI – биссектриса угла YXZ , то $\angle YIS = \angle ZIS$, и, следовательно, прямая SO – серединный перпендикуляр к отрезку YZ . Поэтому $YP = ZP$, т.е. треугольник YPZ равнобедренный и $\angle PYZ = \angle PZY = \frac{\beta}{2}$ (YI – биссектриса угла XYZ). Тогда

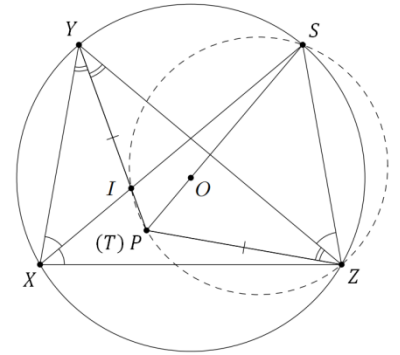
$$\angle IPZ = \angle YPZ = 180^\circ - (\angle POZ + \angle PZY) = 180^\circ - \beta.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \angle ZSI &= \angle ZSX = 180^\circ - (\angle SXZ + \angle XZS) = \\ &= [\angle SZY = \angle SXY = \angle SXZ = 0,5\alpha, \quad \angle XZY = \gamma, \quad \angle XZS = \angle XZY + \angle SZY = \gamma + 0,5\alpha] = \\ &= 180^\circ - (0,5\alpha + \gamma + 0,5\alpha) = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, $\angle IPZ + \angle ZSI = 180^\circ$. Это означает, что точки I, S, Z и P лежат на одной окружности (проходящей через точки I, S, Z). Следовательно, точки T и P совпадают. Поэтому $ZT = ZP = YP = YT$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.



5. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел, для которых

$$a^3 + b^3 = (abc + 1)^2.$$

Ответ. $(a, b, c) \in \{(1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$.

Решение. Из-за симметрии можно считать, что $a \geq b$. Положим $t = bc$ и перепишем уравнение в виде $F(a) = 0$, где $F(a) = a^3 - t^2 a^2 - 2ta + b^3 - 1$. Если $a \geq t^2 + 1$, то

$F(a) = a^2(a - t^2) - 2ta + b^3 - 1 \geq a^2 - 2ta + b^3 - 1 = a(a - 2t) + b^3 - 1 > 0$, кроме случая $a = 2, t = b = 1$, где находим тройку $(a, b, c) = (2, 1, 1)$. Если $b \leq a \leq t^2$, то верно неравенство

$$F(a) < 0.$$

Действительно, точка локального максимума

$$a_0 = \frac{t^2 - \sqrt{t^4 + 6t}}{3} < 0$$

функции $F(a)$ не лежит на отрезке $[b, t^2]$, поэтому максимальное значение на данном отрезке $F(a)$ принимает на его концах. Вместе с тем, имеем

$F(b) = -t^2 b^2 + 2b^3 - 2tb - 1 \leq -b^4 + 2b^3 - 2b^2 - 1 = -b^3(b - 2) - 2b^2 - 1 < 0$, а также

$$F(t^2) = -2t^3 + b^3 - 1 \leq -b^3 - 1 < 0.$$

Таким образом, других троек (a, b, c) нет.

Комментарий. Найдены оба ответа – 2 балла, доказано, что других ответов нет – 18 баллов, баллы суммируются. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 3

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 4x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 5x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4)$.

Ответ. $-190 \pm 17\sqrt{145}$.

Решение. Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1, g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3, f(x_4) = x_4$. Поэтому исходное выражение

$$A = (g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4) = -x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4.$$

Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе.

Пусть $B = -x_1^3 x_4 - x_2^3 x_3$. Заметим, что

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_3 x_4 = -1; & x_1 + x_2 &= 4, & x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 64 + 12 = 76, \\ x_3^2 + x_4^2 &= (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 25 + 2 = 27, \\ x_1^6 + x_2^6 &= (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3 x_2^3 = 5776 + 2 = 5778. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} A + B &= -(x_1^3 + x_2^3)(x_3 + x_4) = -76 \cdot 5 = -380, \\ AB &= (x_1^6 + x_2^6)x_3 x_4 + x_1^3 x_2^3 (x_3^2 + x_4^2) = -5778 - 27 = -5805. \end{aligned}$$

Поэтому A и B – корни квадратного уравнения $x^2 + 380x - 5805 = 0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $-190 + 17\sqrt{145}$ и $-190 - 17\sqrt{145}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $f(x)$: x_1 через x_2 , а x_2 через x_1 , то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражения A может принимать оба указанных выше значения.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.

2. Петя выписал на доску два числа: сначала 5, затем 7. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 98-м?

Ответ. 4949.

Решение. Докажем, что n -й элемент последовательности после четвертого (равного 14) можно задать формулой $\frac{1}{2}n(n+3)$. Действительно, 14 и 20 проверяются вручную, а следующие элементы задаются по предыдущим, так как

$$\frac{(n+k+3)(n+k+4)}{2} = 2 \cdot \left(\frac{(n+k+2)(n+k+3)}{2} \right) - \left(\frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2} \right) + 1.$$

Осталось заметить, что каждый следующий элемент x_n действительно равен $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, так как $\frac{1}{2}n(n+3)$ представляется как произведение двух натуральных чисел, а значит, составное. В итоге $x_{98} = \frac{1}{2} \cdot 98 \cdot (98+3) = 4949$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Верно получен n -й элемент последовательности с некоторого номера, однако имеются небольшие недочёты в доказательстве формулы – 14 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1005 среди чисел есть равные?

Ответ. 125751 набор.

Решение. Пусть (k, k, a, b) – такой набор. Так как $a + b = 1005 - 2k$ нечётно, то числа a и b разной чётности и между собой не равны. Пусть a чётно. Упорядоченной парой (a, b) набор однозначно определяется, поскольку k вычисляется однозначно, а двух пар равных чисел в наборе нет ввиду нечётности суммы. Сопоставим набору строку $(2k, a, b + 1)$. В ней все слагаемые чётны, а их сумма равна 1006. По такой строке набор тоже однозначно восстанавливается. Число таких строк можно посчитать так: выложим ряд из 503 двухрублёвой монет, в который в два разных промежутка вставлены две перегородки. Числа $2k, a$ и $b + 1$ будут равны сумме монет (в рублях) до первой перегородки, между перегородками и после второй перегородки соответственно. Так как между монетами 502 промежутков, есть ровно C_{502}^2 способов выбрать два из них.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравносторонний треугольник KLM . Луч KI пересекает окружность, описанную около треугольника KLM , в точке P . Окружность, проходящая через точки M, P и I , вторично пересекает луч LI в точке Q . Докажите, что $LQ = MQ$.

Решение. Пусть O – центр описанной окружности ΔKLM . Обозначим $\angle LKM = \alpha$. Обозначим $\angle KLM = \beta$, $\angle KML = \gamma$. Проведём через точки P и O прямую, и пусть S – точка пересечения этой прямой с лучом LI . Поскольку KI – биссектриса угла LKM , то $\angle LKP = \angle PMK$, и, следовательно, прямая PO – серединный перпендикуляр к отрезку LM . Поэтому $LS = MS$, т.е. треугольник LSM равнобедренный и $\angle SLM = \angle SML = \frac{\beta}{2}$ (LI – биссектриса угла KLM). Тогда

$$\angle ISM = \angle LSM = 180^\circ - (\angle SLM + \angle SML) = 180^\circ - \beta.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \angle MPI &= \angle MPK = 180^\circ - (\angle PKM + \angle KMP) = \\ &= [\angle PMB = \angle PKL = \angle PKM = 0,5\alpha, \quad \angle KML = \gamma, \quad \angle KMP = \angle KML + \angle PML = \gamma + 0,5\alpha] \\ &= \\ &= 180^\circ - (0,5\alpha + \gamma + 0,5\alpha) = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, $\angle ISC + \angle CPI = 180^\circ$. Это означает, что точки I, P, M и S лежат на одной окружности (проходящей через точки I, P, M). Следовательно, точки Q и S совпадают. Поэтому $MQ = MS = LS = LQ$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^3 - b^3 = (abc - 1)^2$. Докажите, что $a = b = c = 1$.

Решение. Положим $t = bc$ и перепишем уравнение в виде

$$a^3 - t^2 a^2 + 2ta - b^3 - 1 = 0.$$

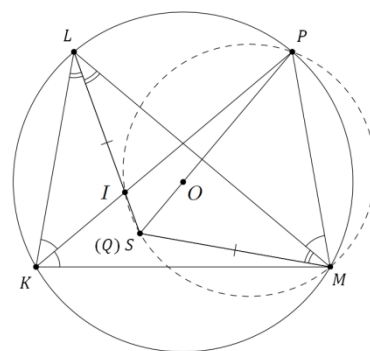
Если $a \geq t^2$, то

$$a^3 - t^2 a^2 + 2ta - b^3 - 1 = a^2(a - t^2) + 2ta - b^3 - 1 \geq 2t^3 - b^3 - 1 \geq b^3 - 1 > 0,$$

кроме случая $t = b = 1$, где получаем $a = b = c = 1$. Если же $a \leq t^2 - 1$ (что возможно только при $t \geq 2$), то

$$a^3 - t^2 a^2 + 2ta - b^3 - 1 = a(a^2 - t^2 a + 2t) - b^3 - 1 < 0$$

при $t \geq 3$. Действительно, $f(a) = a^2 - t^2 a + 2t < 0$, так как корни $f(a)$ суть



$$a_{\pm} = \frac{t^2 \pm \sqrt{t^4 - 8t}}{2},$$

при этом имеем $a_- < 1 \leq a \leq t^2 - 1 < a_+$ (крайние неравенства эквивалентны неравенству $\sqrt{t^4 - 8t} > t^2 - 2$, которое при $t \geq 3$ проверяется возведением в квадрат). Остаётся случай $t = 2$, где решений нет.

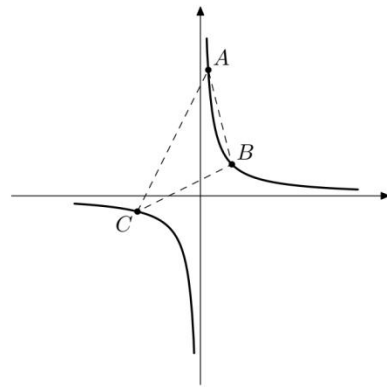
Комментарий. Найдены оба ответа – 2 балла, доказано, что других ответов нет – 18 баллов, баллы суммируются. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

Вариант 4

1. Точка C с абсциссой -2 принадлежит гиперболе $y = \frac{1}{x}$. Через C проведены две прямые с угловыми коэффициентами 2 и $\frac{1}{2}$, пересекающие гиперболу в точках A и B (отличных от точки C) соответственно. Найдите координаты центра описанной окружности треугольника ABC .

Ответ. $(-\frac{11}{8}; 2)$.

Решение. Уравнение указанных прямых имеют вид $y = 2(x + 2) - \frac{1}{2}$ и $y = \frac{x+2}{2} - \frac{1}{2}$, т.е. $y = 2x + \frac{7}{2}$ и $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Соответственно. Абсциссы a и b точек A и B находятся из уравнений $\frac{1}{x} = 2x + \frac{7}{2}$ и $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; они равны $a = \frac{1}{4}$ и $b = 1$.



Пусть центр окружности, описанной около треугольника ABC , имеет координаты $(\alpha; \beta)$, и пусть R – радиус этой окружности. Тогда уравнение окружности имеет вид $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$. Подставив в это уравнение $y = \frac{1}{x}$, после преобразований получаем уравнение $x^4 - 2\alpha x^3 + Dx^2 - 2\beta x + 1 = 0$, где через D обозначено выражение $\alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Поскольку точки A, B и C принадлежат этой окружности, то их абсциссы удовлетворяют этому уравнению. Подставляя последовательно $x = -2, 1$ и $\frac{1}{4}$, получаем систему

$$\begin{cases} 16 + 16\alpha + 4D + 4\beta + 1 = 0, \\ 1 - 2\alpha + D - 2\beta + 1 = 0, \\ 1 - 8\alpha + 16D - 128\beta + 256 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $D = 2(\alpha + \beta) - 2$. Подставляя это выражение в первое и третье уравнения системы, приходим к

$$\begin{cases} 16 + 16\alpha + 8(\alpha + \beta) - 8 + 4\beta + 1 = 0, \\ 1 - 8\alpha + 32(\alpha + \beta) - 32 - 128\beta + 256 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 4\beta = -3, \\ 8\alpha - 32\beta = -75. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $\beta = 2$ и $\alpha = -\frac{11}{8}$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.

2. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ возьмём $x_n = n^2 + 300$ и $y_n = \text{НОД}(x_n, x_{n+1})$. Чему равно максимально возможное значение y_n ?

Ответ. 1201.

Решение. Будем пользоваться соотношениями

$$\text{НОД}(u, v) = \text{НОД}(u \pm v, v), \quad \text{НОД}(u, 2v + 1) = \text{НОД}(2u, 2v + 1).$$

Запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\text{НОД}(n^2 + 300, (n + 1)^2 + 300) &= \text{НОД}(n^2 + 300, 2n + 1) = \text{НОД}(2n^2 + 600, 2n + 1) = \\ &= \text{НОД}(600 - n, 2n + 1) = \text{НОД}(1200 - 2n, 2n + 1) = \text{НОД}(1201, 2n + 1).\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что последняя величина не превосходит 1201, и равенство достигается при $n = 600$.

Комментарий. Полное обоснованное решение – 20 баллов. Получена оценка – 14 баллов, приведён пример – 6 баллов, баллы суммируются. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

3. Собрав 1001 орех, бельчата Боря, Вася и Петя решили разделить их. Каждый должен что-то получить, все – разное число орехов, Боря – больше всех. Сколькими способами можно так поделить орехи?

Ответ. 166000 наборов.

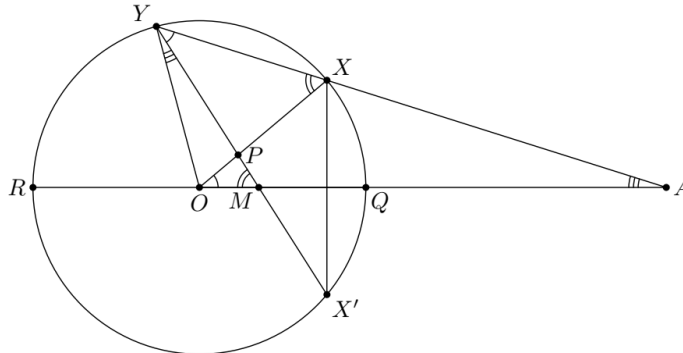
Решение. Сосчитаем способы без учёта ограничений на повторы и максимум у Бори. Метод шаров и перегородок даёт $C_{1000}^2 = 499500$ способов деления. Теперь вычтем способы с повторами. Так как 1001 не кратно 3, число орехов может совпасть только у двоих. Это число n может быть любым от 1 до 500. Для каждого возможного n есть 3 способа распределить n , n и $1000 - 2n$ орехов между троими. Значит, число способов с повторами равно $500 \cdot 3 = 1500$, а без повторов – $499500 - 1500 = 498000$. Пусть теперь бельчата делят «случайно», так, что каждый получает разное число. Однако дальше они распределение «исправляют»: тот, кто получит больше всех, меняется своей долей с Борей. Тогда одно и то же «исправленное» распределение получается из трёх «случайных»: Боря мог получить максимум 1) сразу; 2) поменявшись с Васей; 3) поменявшись с Петей. Тогда «исправленных» распределений втрое меньше, чем «случайных», т.е. $498000 : 3 = 166000$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

4. Дана окружность с центром O и точка A вне её. Секущая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках X и Y . Пусть X' – точка окружности, симметричная точке X относительно прямой OA . Докажите, что точка пересечения прямых OA и $X'Y$ не зависит от выбора секущей.

Решение. Пусть R – радиус окружности. Соединим центр окружности O с точками X и Y . Тогда $OX = OY = R$. Пусть $\alpha = \angle XOY$, $\beta = \angle XOY$. Так как точка X' симметрична точке X относительно прямой OA , а значит, и относительно диаметра RQ , то

$$\alpha = \angle XOQ = \angle X'Q = 0,5 \angle XX' = \angle YX'.$$



Тогда $\angle XAO = \beta - \alpha$ (теорема о внешнем угле треугольника OXA). Поэтому из теоремы синусов для треугольника OXA имеем

$$\frac{R}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{OA}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{OA}{\sin \beta}. \quad (*)$$

Так как $\angle YPX = \angle OPM$ (как вертикальные), то $\angle YMO = \angle YXO = \beta$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике YQX углы при основании YX равны, и, следовательно, $\angle OYM = \beta - \alpha$. Из теоремы синусов для треугольника YOM получаем

$$\frac{OM}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{R}{\sin \beta}.$$

Учитывая (*), находим $OM = \frac{R^2}{OA}$, что и означает независимость точки M от выбора секущей. Заметим, что расположение точек X и Y не влияет на решение.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.

5. Натуральные числа $m > n$ таковы, что дробь $\frac{3^m+2}{3^n+2}$ есть целое число. Докажите, что $m > n^2$.

Решение. Имеем $m = nq + r$, где $0 \leq r < n$ и $q \geq 1$. Из $3^n \equiv -2 \pmod{3^n + 2}$ следует

$$0 \equiv 3^m + 2 = (3^n)^q 3^r + 2 = (-2)^q 3^r + 2 \pmod{3^n + 2},$$

т.е. $(-2)^q 3^r + 2$ делится на $3^n + 2$.

а) Пусть q – чётно. Тогда $2^q 3^r + 2 = k(3^n + 2)$. Для некоторого натурального k . Имеем $2 \equiv 2k \pmod{3^n}$, откуда $k = 3^r l + 1$ для некоторого натурального l . Значит, $2^q 3^r + 2 = (3^r l + 1)(3^n + 2)$ или $2^q = 3^n l + 3^{n-r} + 2l > 3^n$, откуда следует $q > n$. Но тогда $m = nq + r > n^2$, что и требовалось.

б) Пусть q – нечётно. Тогда $2^q 3^r - 2 = k(3^n + 2)$ для некоторого натурального k . Имеем $-2 \equiv 2k \pmod{3^n}$, откуда $k = 3^r l - 1$ для некоторого натурального l . Значит, $2^q 3^r - 2 = (3^r l - 1)(3^n + 2)$ или $2^q = 3^n l - 3^{n-r} + 2l$. Если $l \geq 2$, то $2^q > 3^n$ и $q > n$. Если же $l = 1$, то $r \geq 1$ и тогда $2^q = 3^n - 3^{n-r} + 2 \geq 3^n - 3^{n-1} + 2$, откуда снова $q > n$. Далее, как и выше, получаем требуемое неравенство $m > n^2$.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.