ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

2 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

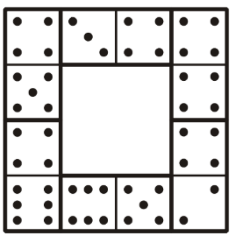
Вариант 1

1. Уберите из символов ниже ровно одну цифру так, чтобы из оставшихся цифр и символов можно было составить три верных равенства. В каждом равенстве обязательно должны быть арифметические действия.

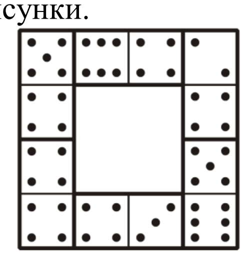
$$1\ 1\ 3\ 4\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7\ 8\ +\ +\ \times\ =\ =\ =$$

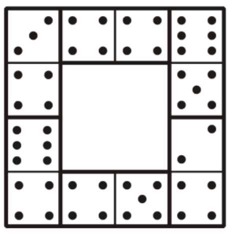
Запишите эти равенства и цифру, которую убрали.
Пример. Из символов «$0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 7\ 9\ +\ +\ \times = = =$» можно убрать 0 и составить три равенства: $2+7=9$; $3+4=7$; $1\times 1=1$.
Ответ. $1+4=5$, $3+5=8$, $1\times 6=6$.
Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Не использованы два числа, а вместо одного неиспользованного числа дополнительного ещё раз использовано какое-то число из списка – 10 баллов. Использованы другие числа – 0 баллов.*

2. Переставьте кости домино на рисунке так, чтобы сумма точек на каждой стороне квадрата равнялась 17.



Ответ. См. рисунки.





Комментарий. *Верный пример перестановки – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный пример – 0 баллов.*

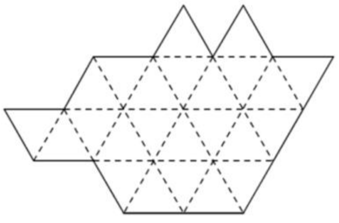
3. Вдоль беговой дорожки стоят красные и синие флажки. Флажков каждого цвета поровну. Лёня и Петя встретились у некоторого красного флажка, пошли в противоположные стороны и дошли до концов дорожки. Они считали количество флажков каждого цвета, начиная с красного, у которого встретились. Петя насчитал 10 красных и 5 синих. Лёня насчитал 7 красных и несколько синих. Сколько синих флажков насчитал Лёня?
Ответ. 11 флажков.
Решение. Всего мальчики посчитали $7 + 10 = 17$ красных флажков. Но один флажок посчитан ими обоими: тот, около которого они встретились. Значит всего красных флажков вдоль беговой дорожки 16. Значит и синих 16. Раз Петя насчитал 5, то все остальные посчитал Леня. Поэтому он насчитал $16 - 5 = 11$ флажков.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Забыли вычесть два раза посчитанный красный флажок, остальное все верно – 12 баллов. Вместо вычитания прибавили к красным флажкам один, остальное все верно – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

4. В девяти мешках лежат соответственно 1, 3, 6, 2, 4, 8, 9, 5 и 7 орехов. Бельчонок за одно действие может взять равное количество орехов из двух разных мешков и переложить их в другой мешок. Сможет ли бельчонок собрать все орехи в один мешок меньше чем за 7 действий?
Ответ. Да, сможет.
Решение. Например, так:

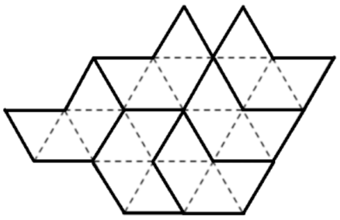
$$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$$
$$(0,2,3,4,5,6,6,8,11)$$
$$(0,2,0,4,2,6,6,8,17)$$
$$(0,0,4,4,0,6,6,8,17)$$
$$(0,8,0,0,0,6,6,8,17)$$
$$(0,8,0,0,0,0,0,8,29)$$
$$(0,0,0,0,0,0,0,0,45)$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

5. Разрежьте фигуру снизу на 6 равных фигур по линиям сетки.
Не забудьте, что фигуру необходимо перерисовать и показать разрезание в бланке ответов.



Решение. Например, так:



Комментарий. *Верный разрезание – 20 баллов. Верно указана форма фигуры, однако разрезание неверное или отсутствует – 10 баллов. Найдено количество треугольников в одной фигуре – 2 балла.*

Вариант 2

1. Уберите из символов ниже ровно одну цифру так, чтобы из оставшихся цифр и символов можно было составить три верных равенства. В каждом равенстве обязательно должны быть арифметические действия.

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 7\ 7\ 9\ +\ +\ \times = = =$$

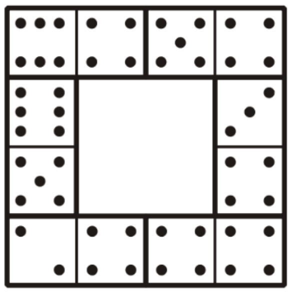
Запишите эти равенства и цифру, которую убрали.

Пример. Из символов «$0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 7\ 9\ +\ +\ \times = = =$» можно убрать 0 и составить три равенства: $2 + 7 = 9$; $3 + 4 = 7$; $1 \times 1 = 1$.

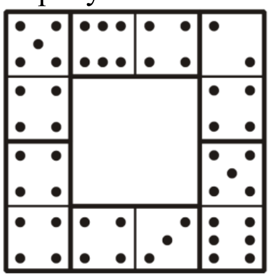
Ответ. $2 + 5 = 7$, $3 + 6 = 9$, $1 \times 7 = 7$.

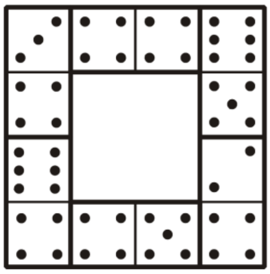
Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Не использованы два числа, а вместо одного неиспользованного числа дополнительного ещё раз использовано какое-то число из списка – 10 баллов. Использованы другие числа – 0 баллов.*

2. Переставьте кости домино на рисунке так, чтобы сумма точек на каждой стороне квадрата равнялась 17.



Ответ. См. рисунки.





Комментарий. *Верный пример перестановки – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный пример – 0 баллов.*

3. Вдоль беговой дорожки стоят красные и синие флажки. Флажков каждого цвета поровну. Митя и Рома встретились у некоторого красного флажка, пошли в противоположные стороны и дошли до концов дорожки. Они считали количество флажков каждого цвета, начиная с красного, у которого встретились. Рома насчитал 12 красных и 7 синих. Митя насчитал 9 красных и несколько синих. Сколько синих флажков насчитал Митя?

Ответ. 13 флажков.

Решение. Всего мальчики посчитали $9 + 12 = 21$ красных флажков. Но один флажок посчитан ими обоими: тот, около которого они встретились. Значит всего красных флажков вдоль беговой дорожки 20. Значит и синих 20. Раз Рома насчитал 7, то все остальные посчитал Митя. Поэтому он насчитал $20 - 7 = 13$ флажков.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Забыли вычесть два раза посчитанный красный флажок, остальное все верно – 12 баллов. Вместо вычитания прибавили к красным флажкам один, остальное все верно – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

4. В девяти мешках лежат соответственно 8, 2, 9, 3, 1, 6, 4, 7 и 5 орехов. Бельчонок за одно действие может взять равное количество орехов из двух разных мешков и переложить их в другой мешок. Бельчонок хочет собрать все орехи в один мешок. Сможет ли бельчонок собрать все орехи в один мешок меньше чем за 7 действий?

Ответ. Да, сможет.

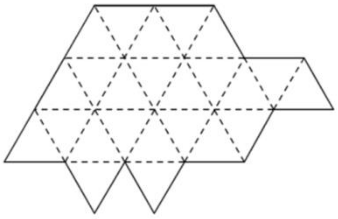
Решение. Например, так:

$$(8,2,9,3,1,6,4,7,5) \longrightarrow (8,2,11,3,0,6,4,6,5) \longrightarrow (8,2,17,0,0,6,4,6,2) \longrightarrow (8,0,17,4,0,6,4,6,0) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (8,8,17,0,0,6,0,6,0) \longrightarrow (0,0,33,0,0,6,0,6,0) \longrightarrow (0,0,45,0,0,0,0,0,0).$$

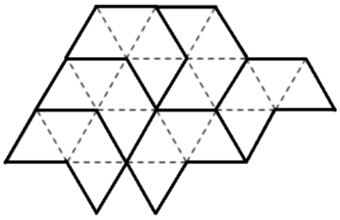
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов.*

Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.

5. Разрежьте фигуру снизу на 6 равных фигур по линиям сетки. *Не забудьте, что фигуру необходимо перерисовать и показать разрезание в бланке ответов.*



Решение. Например, так:



Комментарий. *Верный разрезание – 20 баллов. Верно указана форма фигуры, однако разрезание неверное или отсутствует – 10 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

Вариант 3

1. Уберите из символов ниже ровно одну цифру так, чтобы из оставшихся цифр и символов можно было составить три верных равенства. В каждом равенстве обязательно должны быть арифметические действия.

$$1\ 1\ 1\ 2\ 4\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ +\ \times\ \times\ =\ =\ =$$

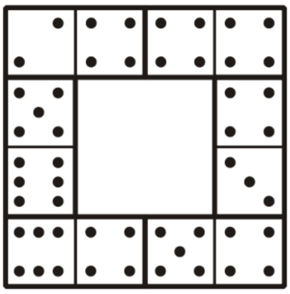
Запишите эти равенства и цифру, которую убрали.

Пример. Из символов «0 1 1 1 2 3 4 7 7 9 + + × = = =» можно убрать 0 и составить три равенства: $2+7=9$; $3+4=7$; $1\times 1=1$.

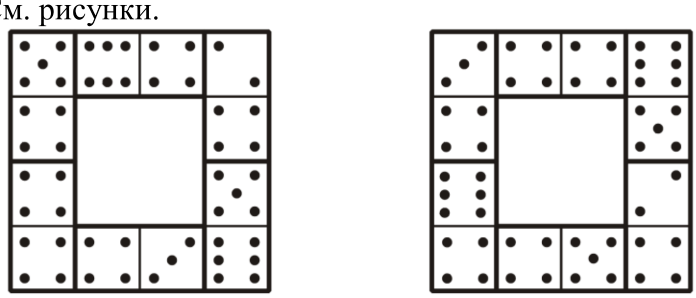
Ответ. $4+5=9$, $1\times 1=1$, $2\times 4=8$.

Комментарий. *Любой верный пример – 20 баллов. Не использованы два числа, а вместо одного неиспользованного числа дополнительного ещё раз использовано какое-то число из списка – 10 баллов. Использованы другие числа – 0 баллов.*

2. Переставьте кости домино на рисунке так, чтобы сумма точек на каждой стороне квадрата равнялась 17.



Ответ. См. рисунки.



Комментарий. *Верный пример перестановки – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный пример – 0 баллов.*

3. Вдоль беговой дорожки стоят красные и синие флажки. Флажков каждого цвета поровну. Саша и Федя встретились у некоторого красного флажка, пошли в противоположные стороны и дошли до концов дорожки. Они считали количество флажков каждого цвета, начиная с красного, у которого встретились. Федя насчитал 13 красных и 8 синих. Саша насчитал 10 красных и несколько синих. Сколько синих флажков насчитал Саша?

Ответ. 14 флажков.

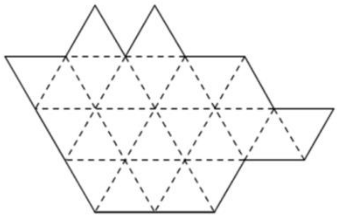
Решение. Всего мальчики посчитали $10 + 13 = 23$ красных флажков. Но один флажок посчитан ими обоими: тот, около которого они встретились. Значит всего красных флажков вдоль беговой дорожки 22. Значит и синих 22. Раз Федя насчитал 8, то все остальные посчитал Саша. Поэтому он насчитал $22 - 8 = 14$ флажков.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Забыли вычесть два раза посчитанный красный флажок, остальное все верно – 12 баллов. Вместо вычитания прибавили к красным флажкам один, остальное все верно – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

4. В девяти мешках лежат соответственно 5, 3, 9, 7, 2, 4, 1, 8 и 6 орехов. Бельчонок за одно действие может взять равное количество орехов из двух разных мешков и переложить их в другой мешок. Бельчонок хочет собрать все орехи в один мешок. Сможет ли бельчонок собрать все орехи в один мешок меньше чем за 7 действий?
Ответ. Да, сможет.
Решение. Например, так:

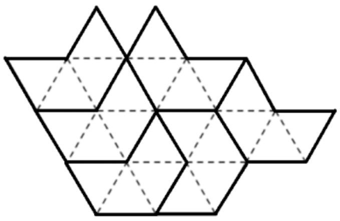
$$(5,3,9,7,2,4,1,8,6) \longrightarrow (5,3,11,6,2,4,0,8,6) \longrightarrow (2,0,17,6,2,4,0,8,6) \longrightarrow (0,0,17,6,0,4,4,8,6) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (0,0,17,6,8,0,0,8,6) \longrightarrow (0,0,29,0,8,0,0,8,0) \longrightarrow (0,0,45,0,0,0,0,0,0).$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

5. Разрежьте фигуру снизу на 6 равных фигур по линиям сетки.
Не забудьте, что фигуру необходимо перерисовать и показать разрезание в бланке ответов.



Решение. Например, так:



Комментарий. *Верный разрезание – 20 баллов. Верно указана форма фигуры, однако разрезание неверное или отсутствует – 10 баллов. Решение начато, но продвижения нет – 1 балл.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

3 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1.17 бельчат собирали грибы. Несколько бельчат нашли по одному грибу, трое нашли по 4 гриба, половина оставшихся нашла по 2 гриба, остальные ничего не нашли. Сколько всего грибов нашли бельчата?

Ответ. 26.

Решение. Трое бельчат нашли 12 грибов. Остальные 14 нашли 14 грибов, так как некоторые нашли по одному грибу, а из оставшихся половина нашла 2, половина нашла 0. $12 + 14 = 26$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании нескольких примеров, но не показано, что других вариантов нет – 18 баллов. Задача решена на основании одного примера – 15 баллов. В решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. У Деда Мороза в мешке много фруктовых, шоколадных и карамельных конфет. Дед Мороз даёт каждой девочке в хороводе по 2 конфеты. Он не глядя запускает руку в мешок и вынимает пригоршню конфет. Какое наименьшее число конфет ему надо достать, чтобы он наверняка мог дать Соне и Маше одинаковые наборы конфет (например, каждой карамельную и шоколадную, или каждой две фруктовых конфеты)?

Ответ. 6.

Решение. Деде Морозу надо, чтобы было две пары одинаковых конфет. Три первые конфеты, которые он вынул, могут быть разными. Четвёртая образует пару. Пусть это пара фруктовых конфет. Пятая конфета также может оказаться фруктовой. Теперь в худшем случае есть одна пара и три разных конфеты, и шестая конфета обязательно образует пару с одной из них.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без* *верных объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. Среди команд 3А, 3Б, 3В, 3Г, 3Д провели конкурс. Команды заняли места с 1-го по 5-е. Настя сказала: «Я думаю, на 1 месте 3А, потом 3Б, затем 3В, на четвертом месте 3Г, на последнем 3Д, в общем, АБВГД». Лиза сказала: «А я думаю, что порядок от 1-го места к 5-му такой – БГДАВ». Одна из девочек правильно назвала три места, а вторая – два. В каком порядке могли занять места команды?

Ответ.АБДГВ или БГВАД.

Решение.Ни одну из команд девочки не поставили на одно и то же место. Но $3+2=5$, значит, каждое место правильно угадано ровно одной девочкой. На первом месте или А, или Б. Если на первом месте А, то А не на 4 месте, и на 4 месте Г. Тогда на втором месте Б. Получаем АБВГД у Насти, у нее уже отгаданы три места. Значит, 3 и 5 места она расставила неверно, их отгадала Лиза: АБДГВ. Если на первом месте Б, то Б не на 2 месте, и на 2 месте Г. Тогда на 4 месте не Г, а А. У Лизы уже три отгаданных места: БГДАВ. Значит, 3 и 5 места она расставила неверно, их должна отгадать Настя: на 3 месте В, на 5 месте Д. Получается БГВАД.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Даны оба верных ответа без объяснений – 18 баллов. Дан один верный ответ без объяснений – 9 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Летела стая птиц. Шестеро детей стали угадывать, сколько птиц в стае. 1) Меньше 25. 2) Больше 35. 3) Меньше 30. 4) Больше 30. 5) Меньше 35. 6) Больше 25. Из шести этих высказываний ровно два верных. Сколько птиц могло быть в стае? (Укажите все возможные варианты).

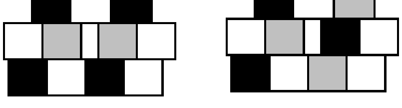
Ответ.$25, 30$ или 35.

Решение. Если птиц 25, то верны только высказывания 3), 5). Если птиц 30, то верны только высказывания 5), 6). Если птиц 35, то верны только высказывания 4), 6). Значит, значения $25, 30, 35$ подходят. Покажем, что другие значения не удовлетворяют условиям. Если птиц меньше 25, то верны высказывания 1), 3), 5), то есть три, а не два, как требуется в условии. Если птиц больше 25, но меньше 30, то верны высказывания 3), 5), 6). Если птиц больше30, но меньше 35, то верны высказывания 4), 5), 6). Если птиц больше 35, то верны высказывания 2), 4), 6).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Даны без объяснений три верных ответа – 15 баллов, даны два верных ответа – 10 баллов, дан один верный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Расположите на плоскости 11 одинаковых квадратов без наложения так, что при **любой** раскраске 11 квадратов в 3 разных цвета, обязательно найдутся два соседних квадрата одного цвета. (*Замечание. Каждый квадрат красят в один цвет. Квадраты считаются соседними, если у них есть общий отрезок стороны.)*

Решение. Например, так.



Показана раскраска, начиная с левого верхнего квадрата, который покрашен в чёрный цвет, а соседний с ним верхний – в белый. Далее квадраты слева закрашиваются однозначно, и существует два способа закрасить квадраты справа. Два последних квадрата справа нельзя покрасить в разные цвета.

Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Ответ не найден, но есть анализ требуемого расположения – 7 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

Вариант 2

1. 26 бельчат собирали в одну кучу шишки. Несколько бельчат принесли по две шишки, половина оставшихся принесла по 4 шишки, остальные ничего не принесли. Сколько всего шишек принесли бельчата?

Ответ. 52.

Решение. Рассмотрим бельчат, которые принесли по две шишки. Число шишек от них в 2 раза больше числа этих бельчат. Из остальных половина принесла по 4 шишки, а другая половина принесла 0 шишек, так что число шишек от всех остальных тоже в 2 раза больше числа остальных бельчат. Значит, всего шишек $26 \cdot 2 = 52$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании двух примеров, но не показано, что других вариантов нет – 18 баллов. Задача решена на основании одного примера – 15 баллов. В решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. В ящике лежат носки трёх разных цветов: белые, розовые, голубые. Мама не глядя запускает руку в ящик и вынимает несколько носков для своих трёх дочек. Какое наименьшее число носков ей надо достать, чтобы среди них наверняка были три пары носков одинакового цвета? У разных девочек могут быть носки и одного цвета, и разного, но у каждой должно быть два носка одного цвета.

Ответ. 8.

Решение. Три первых носка, которые вынула мама, могут быть разными. Четвёртый образует пару. Пусть это пара белых носков. Пятый носок также может оказаться белым. Теперь в худшем случае есть одна пара и три разных носка, и шестой носок обязательно образует пару с одним из них.

Итак, есть две пары носков и два носка разного цвета. Седьмой носок может быть третьего цвета. Но восьмой носок обязательно образует пару.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без верных объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. Среди команд 3А, 3Б, 3В, 3Г, 3Д провели конкурс. Команды заняли места с 1-го по 5-е. Миша сказал: «Я думаю, на 1 месте 3Д, потом 3Г, затем 3В, на четвертом месте 3Б, на последнем 3А, в общем, ДГВБА». Олег сказал: «А я думаю, что порядок от 1-го места к 5-му такой – ГБАДВ». Один из мальчиков правильно назвал три места, а второй – два. В каком порядке могли занять места команды?

Ответ. ДГАБВ или ГБВДА.

Решение. Ни одну из команд мальчики не поставили на одно и то же место. Но $3 + 2 = 5$, значит, каждое место правильно угадано ровно одним мальчиком. На первом месте или Д, или Г. Если на первом месте Д, то Д не на четвёртом месте, и на четвёртом месте Б. Тогда на втором месте Г. Получаем ДГАБВ у Миши, у него уже отгаданы три места. Значит, 3 и 5 места он расставил неверно, их отгадал Олег: ДГАБВ. Если на первом месте Г, то Г не на 2 месте, и на 2 месте Б. Тогда на 4 месте не Б, а Д. У Олега уже три отгаданных места: ГБАДВ. Значит, 3 и 5 места он расставил неверно, их должен отгадать Миша: на 3 месте В, на 5 месте А. Получается ГБВДА.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Даны оба верных ответа без объяснений – 18 баллов. Дан один верный ответ без объяснений – 9 баллов. Решение начато, есть неко-*

торое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

4. Путешественник встретил в лесу 6 гномов, и спросил каждого, сколько тут живет гномов. Первый ответил: «Меньше 15». Второй: «Больше 15». Третий: «Меньше 30». Четвёртый: «Больше 30». Пятый: «Меньше 50». Шестой: «Больше 50». Из шести этих высказываний ровно два верных. Сколько гномов может жить в лесу? (Укажите все возможные варианты).
Ответ. $15, 30$ или 50.
Решение. Если гномов 15, то верны только высказывания третьего и пятого гномов. Если гномов 30, то верны только высказывания второго и пятого гномов. Если гномов 50, то верны только высказывания второго и четвертого гномов. Значит, значения $15, 30, 50$ подходят. Покажем, что другие значения не удовлетворяют условиям. Если гномов меньше 15, то верны высказывания первого, третьего и пятого гномов, то есть три, а не два, как требуется в условии. Если гномов больше 15, но меньше 30, то верны высказывания второго, третьего и пятого гномов. Если гномов больше 30, но меньше 50, то верны высказывания второго, четвёртого и пятого гномов. Если гномов больше 50, то верны высказывания второго, четвёртого и шестого гномов.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Даны без объяснений три верных ответа – 15 баллов, два верных ответа – 10 баллов, один верный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Квадрат 4×4 разделён на 16 одинаковых клеток. Все клетки квадрата надо раскрасить в несколько цветов, причем в каждом квадрате 2×2 должны быть хотя бы две клетки одного цвета. В какое наибольшее число разных цветов можно раскрасить клетки? *В ответе напишите это число и покажите на рисунке, как надо раскрасить клетки. Разные цвета обозначайте числами:* $1, 2, \ldots$.
Ответ. 11.
Решение. Например, так:

1	2	3	4
5	5	5	5
6	7	8	9
11	7	10	9

Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. В решении есть ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. Приведён верный пример для меньшего числа цветов – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Ответ не обоснован примером – 0 баллов.*

Вариант 3

1. 15 детей катались на лыжах. Один упал 3 раза, несколько детей упали по 2 раза, половина оставшихся упала по 4 раза, остальные ни разу. Сколько всего было падений?
Ответ. 31.
Решение. 14 детей, кроме первого, упали 28 раз, так как некоторые упали по 2 раза, а из оставшихся половина упала 4 раза, половина упала 0 раз. $28 + 3 = 31$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена на основании нескольких примеров, но не показано, что других вариантов нет – 18 баллов. Задача решена на основании одного примера – 15 баллов. В решении есть ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое про-*

движение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.

2. В пакете лежат детали конструктора, одинаковые по форме, но трёх разных цветов: белые, красные, синие, каждых по 10 штук. Артём не глядя запускает руку в пакет и вынимает несколько деталей. Какое наименьшее число деталей ему надо достать, чтобы среди них наверняка были две пары деталей одинакового цвета, например, 4 красные или 2 белые и 2 синие?

Ответ. 6.

Решение. Три первые вынутые детали могут быть разными. Четвёртая образует пару. Пусть это пара белых деталей. Пятая деталь также может оказаться белой. Теперь в худшем случае есть одна пара и три разных детали, и шестая деталь обязательно образует пару с одной из них.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточные пояснения – 18 баллов. Дан верный ответ без правильных объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. Среди команд 3А, 3Б, 3В, 3Г, 3Д провели конкурс. Команды заняли места с 1-го по 5-е. Таня сказала: «Я думаю, на 1 месте 3В, потом 3Б, затем 3А, на четвертом месте 3Г, на последнем 3Д, в общем, ВБАГД». Маша сказала: «А я думаю, что порядок от 1-го места к 5-му такой – БГДВА». Одна из девочек правильно назвала три места, а вторая – два. В каком порядке могли занять места команды?

Ответ. ВБДГА или БГАВД.

Решение. Ни одну из команд девочки не поставили на одно и то же место. Но $3 + 2 = 5$, значит, каждое место правильно угадано ровно одной девочкой. На первом месте или В, или Б. Если на первом месте В, то В не на 4 месте, и на 4 месте Г. Тогда на втором месте Б. Получаем ВБАГД у Тани, у нее уже отгаданы три места. Значит, 3 и 5 места она расставила неверно, их отгадала Маша: ВБДГА. Если на первом месте Б, то Б не на 2 месте, и на 2 месте Г. Тогда на 4 месте не Г, а В. У Маши уже три отгаданных места: БГДВА. Значит, 3 и 5 места она расставила неверно, их должна отгадать Таня: на 3 месте А, на 5 месте Д. Получается БГВАД.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Даны оба верных ответа – 18 баллов. Дан один верный ответ без достаточных объяснений – 9 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Шестеро бельчат увидели кучу шишек. Первый сказал: «шишек в куче больше 40». Второй сказал: «тут меньше 20 шишек». Третий: «меньше 45». Четвёртый: «больше 20». Пятый: «меньше 40». Шестой: «больше 45». Из шести этих высказываний ровно два верных. Сколько шишек могло быть в куче? (Укажите все возможные варианты).

Ответ. $20, 40$ или 45.

Решение. Если шишек 20, то верны только высказывания третьего и пятого бельчат. Если шишек 40, то верны только высказывания третьего и четвертого бельчат. Если шишек 45, то верны только высказывания первого и четвертого бельчат. Значит, значения $20, 40, 45$ подходят. Покажем, что другие значения не удовлетворяют условиям. Если шишек меньше 20, то верны высказывания второго, третьего и пятого бельчат, то есть три, а не два, как требуется в условии. Если шишек больше 20, но меньше 40, то верны высказывания третьего, четвёртого и пятого бельчат. Если шишек больше 40, но меньше 45, то верны высказывания первого, четвёртого и пятого бельчат. Если шишек больше 45, то верны высказывания первого, четвёртого и шестого бельчат.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Даны без объяснений три верных ответа – 15 баллов, два верных ответа – 10 баллов, один верный ответ – 5 баллов. Решение* *начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

5. Квадрат 8×8 разделён на 64 одинаковые клетки. Все клетки квадрата надо раскрасить в несколько цветов, так, чтобы каждая клетка граничила по сторонам хотя бы с двумя клетками одного цвета. В какое наибольшее число разных цветов можно раскрасить клетки? *В ответе напишите это число и покажите на рисунке, как надо раскрасить клетки. Разные цвета обозначайте числами:* $1, 2, \dots$.

Ответ. 32.

Решение. Например, так.

17	18	32	31	9	10	8	7
18	17	31	32	10	9	7	8
19	20	30	29	11	12	5	6
20	19	29	30	12	11	6	5
21	22	28	27	13	14	4	3
22	21	27	28	14	13	3	4
23	24	26	25	15	16	1	2
22	23	25	26	16	15	2	1

Комментарий. *Верный пример раскраски для не менее, чем* 16 *цветов – 20 баллов. Верный ответ с ошибкой в раскраске – 15 баллов. Ответ и пример для 15 цветов – 15 баллов. В решении есть ошибка, влияющая на ответ – 10 баллов. Приведён верный пример для меньшего числа цветов – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Ответ не обоснован примером – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

4 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

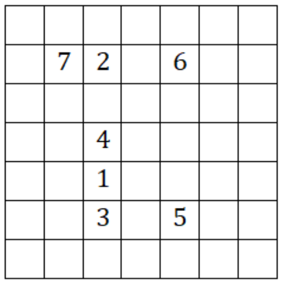
Вариант 1

1. Найдите наибольшее натуральное число, которое составлено из цифр $2, 3, 4, 5, 7, 8, 0$ и делится на 25. Цифры в записи числа не повторяются.
Ответ. 8743250.
Решение. Так как число делится на 25, то оно должно заканчиваться на 25, 50 или 75. В любом случае среди последних двух цифр будет цифра 5. Число тем больше, чем большая цифра стоит в более левом разряде. Поэтому нужно, чтобы вместе с цифрой 5 осталась самая маленькая возможная цифра. А это цифра 0. Из оставшихся карточек составляется начало числа. Слева направо ставятся карточки в порядке убывания. В итоге получаем ответ: 8743250.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ без обоснования – 8 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

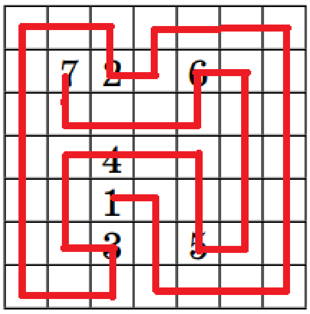
2. Вова поехал в школу на велосипеде со скоростью 12 км/ч. Когда он проехал треть пути, он понял, что так он успеет только к началу второго урока и поехал с удвоенной скоростью. Но когда Вова проехал $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипед сломался, и дальше ему пришлось пойти пешком. В итоге он пришел в школу ровно к началу второго урока. С какой скоростью Вова шел пешком?
Ответ. 8 км/ч.
Решение. Допустим, что Вова проезжает весь путь со скорость 12 км/ч за время $6t$. Первую треть пути он проехал за $2t$ времени. Когда Вова проехал треть пути, ему оставалось ехать еще $4t$ времени. Увеличив скорость вдвое, Вова на вторую треть пути потратил время t, вместо $2t$. Следовательно, последнюю треть пути он шел $3t$. А значит, он шел втрое медленнее, чем 24 км/ч, то есть, со скоростью 8 км/ч.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 12 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 8 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. Бельчонок сидит в клетке с номером 1. Он умеет перепрыгивать только в соседнюю по стороне клетку и хочет построить маршрут посещения клеток с номерами 2, 3, 4, 5, 6, 7 в порядке возрастания так, чтобы не оказаться в одной клетке более одного раза. Постройте бельчонку нужный маршрут.



Ответ. См. рисунок.



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

4. В тетради записаны по одному разу все натуральные числа от 154 до 257. Затем к каждому числу прибавили его сумму цифр, и 104 полученных результата записали на доску. Сколько чётных чисел записано на доске?
Ответ. 56 чисел.
Решение. Если на доске было число $\overline{abc}$, то после прибавления суммы цифр на доске будет написано $\overline{abc} + a + b + c = 101a + 11b + 2c$, чётность которого совпадает с чётностью суммы первых двух цифр $a + b$. В нашем диапазоне сумма первых двух цифр чётная, если число начинается на 15, 17, 19, 20, 22 или 24. На 15 начинается 6 чисел, а на все другие пары цифр – по 10, поэтому всего будет написано $6 + 10 \cdot 5 = 56$ чётных чисел.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что после прибавления на доске будет записано число, чётность которого совпадает с чётностью суммы первых двух цифр – 12 баллов; из этого найдено количество чётных чисел – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5. В некотором уезде 100 жителей: купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. У каждого жителя глаза одного из четырёх цветов: карие, голубые, зелёные или серые. Сначала всех спросили «У вас карие глаза?» и получили 26 ответов «да». Затем всех спросили «У вас голубые глаза?» и получили 30 ответов «да». Затем всех спросили «У вас зелёные глаза?» и получили 35 ответов «да». Наконец, всех спросили «У вас серые глаза?» и получили 47 ответов «да». Сколько разбойников в уезде?
Ответ. 19 разбойников.
Решение. Заметим, что каждый купец ответил положительно на один вопрос, а каждый разбойник – на 3 вопроса. Пусть на острове было l разбойников и $r = 100 - l$ купцов. Тогда всего положительных ответов будет $r + 3l = 26 + 30 + 35 + 47 = 138$. Решая уравнение, имеем $100 - l + 3l = 138$; $2l = 38$; $l = 19$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Верно составлено уравнение для количества положительных ответов – 14 баллов. Из уравнения верно найдено количество разбойников – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

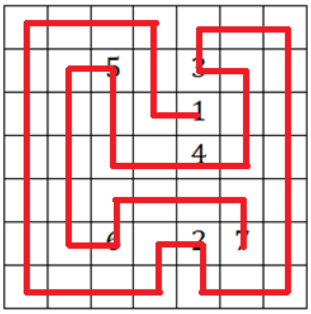
Вариант 2

1. Найдите наибольшее натуральное число, которое составлено из цифр 2, 3, 4, 5, 7, 9, 0 и делится на 25. Цифры в записи числа не повторяются.
Ответ. 9743250.
Решение. Так как число делится на 25, то оно должно заканчиваться на 25, 50 или 75. В любом случае среди последних двух цифр будет цифра 5. Число тем больше, чем большая цифра стоит в более левом разряде. Поэтому нужно, чтобы вместе с цифрой 5 осталась самая маленькая возможная цифра. А это цифра 0. Из оставшихся карточек составляется начало числа. Слева направо ставятся карточки в порядке убывания. В итоге получаем ответ: 9743250.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ без обоснования – 8 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. Вова поехал в школу на велосипеде со скоростью 15 км/ч. Когда он проехал треть пути, он понял, что так он успеет только к началу второго урока и поехал с удвоенной скоростью. Но когда Вова проехал $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипед сломался, и дальше ему пришлось пойти пешком. В итоге он пришел в школу ровно к началу второго урока. С какой скоростью Вова шел пешком?
Ответ. 10 км/ч.
Решение. Допустим, что Вова проезжает весь путь со скорость 15 км/ч за время $6t$. Первую треть пути он проехал за $2t$ времени. Когда Вова проехал треть пути, ему оставалось ехать еще $4t$ времени. Увеличив скорость вдвое, Вова на вторую треть пути потратил время t, вместо $2t$. Следовательно, последнюю треть пути он шел $3t$. А значит, он шел втрое медленнее, чем 30 км/ч, то есть, со скоростью 10 км/ч.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 12 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 8 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. Бельчонок сидит в клетке с номером 1. Он умеет перепрыгивать только в соседнюю по стороне клетку и хочет построить маршрут посещения клеток с номерами 2, 3, 4, 5, 6, 7 в порядке возрастания так, чтобы не оказаться в одной клетке более одного раза. Постройте бельчонку нужный маршрут.
Ответ. См. рисунок.

		5		3		
				1		
				4		
		6		2	7	



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

4. В тетради записаны по одному разу все натуральные числа от 164 до 267. Затем к каждому числу прибавили его сумму цифр, и 104 полученных результата записали на доску. Сколько чётных чисел записано на доске?

Ответ. 58 чисел.

Решение. Если на доске было число $\overline{abc}$, то после прибавления суммы цифр на доске будет написано $\overline{abc} + a + b + c = 101a + 11b + 2c$, чётность которого совпадает с чётностью суммы первых двух цифр $a + b$. В нашем диапазоне сумма первых двух цифр чётная, если число начинается на 17, 19, 20, 22, 24 или 26. На 26 начинается 8 чисел, а на все другие пары цифр – по 10, поэтому всего будет написано $8 + 10 \cdot 5 = 58$ чётных чисел.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что после прибавления на доске будет записано число, чётность которого совпадает с чётностью суммы первых двух цифр – 12 баллов; из этого найдено количество чётных чисел – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5. В некотором уезде 90 жителей: купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. У каждого жителя глаза одного из четырёх цветов: карие, голубые, зелёные или серые. Сначала всех спросили «У вас карие глаза?» и получили 26 ответов «да». Затем всех спросили «У вас голубые глаза?» и получили 30 ответов «да». Затем всех спросили «У вас зелёные глаза?» и получили 35 ответов «да». Наконец, всех спросили «У вас серые глаза?» и получили 47 ответов «да». Сколько разбойников в уезде?

Ответ. 24 разбойника.

Решение. Заметим, что каждый купец ответил положительно на один вопрос, а каждый разбойник – на 3 вопроса. Пусть на острове было l разбойников и $r = 90 - l$ купцов. Тогда всего положительных ответов будет $r + 3l = 26 + 30 + 35 + 47 = 138$. Решая уравнение, имеем $90 - l + 3l = 138$; $2l = 48$; $l = 24$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Верно составлено уравнение для количества положительных ответов – 14 баллов. Из уравнения верно найдено количество разбойников – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Найдите наибольшее натуральное число, которое составлено из цифр 2, 3, 4, 5, 8, 9, 0 и делится на 25. Цифры в записи числа не повторяются.

Ответ. 9843250.

Решение. Так как число делится на 25, то оно должно заканчиваться на 25, 50 или 75. В любом случае среди последних двух цифр будет цифра 5. Число тем больше, чем большая цифра стоит в более левом разряде. Поэтому нужно, чтобы вместе с цифрой 5 осталась самая маленькая возможная цифра. А это цифра 0. Из оставшихся карточек составляется начало числа. Слева направо ставятся карточки в порядке убывания. В итоге получаем ответ: 9843250.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ без обоснования – 8 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. Вова поехал в школу на велосипеде со скоростью 18 км/ч. Когда он проехал треть пути, он понял, что так он успеет только к началу второго урока и поехал с удвоенной скоростью. Но когда Вова проехал $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипед сломался, и дальше ему пришлось пойти пешком. В итоге он пришел в школу ровно к началу второго урока. С какой скоростью Вова шел пешком?

Ответ. 12 км/ч.

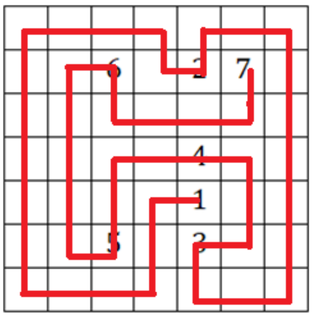
Решение. Допустим, что Вова проезжает весь путь со скорость 18 км/ч за время $6t$. Первую треть пути он проехал за $2t$ времени. Когда Вова проехал треть пути, ему оставалось ехать еще $4t$ времени. Увеличив скорость вдвое, Вова на вторую треть пути потратил время t, вместо $2t$. Следовательно, последнюю треть пути он шел $3t$. А значит, он шел втрое медленнее, чем 36 км/ч, то есть, со скоростью 12 км/ч.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 12 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 8 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. Бельчонок сидит в клетке с номером 1. Он умеет перепрыгивать только в соседнюю по стороне клетку и хочет построить маршрут посещения клеток с номерами 2, 3, 4, 5, 6, 7 в порядке возрастания так, чтобы не оказаться в одной клетке более одного раза. Постройте бельчонку нужный маршрут.

		6		2	7	
				4		
				1		
		5		3		

Ответ. См. рисунок.



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

4. В тетради записаны по одному разу все натуральные числа от 174 до 277. Затем к каждому числу прибавили его сумму цифр, и 104 полученных результата записали на доску. Сколько чётных чисел записано на доске?

Ответ. 56 чисел.

Решение. Если на доске было число $\overline{abc}$, то после прибавления суммы цифр на доске будет написано $\overline{abc} + a + b + c = 101a + 11b + 2c$, чётность которого совпадает с чётностью суммы первых двух цифр $a + b$. В нашем диапазоне сумма первых двух цифр чётная, если число начинается на 17, 19, 20, 22, 24 или 26. На 17 начинается 6 чисел, а на все другие пары цифр – по 10, поэтому всего будет написано $6 + 10 \cdot 5 = 56$ чётных чисел.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что после прибавления на доске будет записано число, чётность которого совпадает с чётностью суммы первых двух цифр – 12 баллов; из этого найдено количество чётных чисел – 8 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5. В некотором уезде 100 жителей: купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. У каждого жителя глаза одного из четырёх цветов: карие, голубые, зелёные или серые. Сначала всех спросили «У вас карие глаза?» и получили 30 ответов «да». Затем всех спросили «У вас голубые глаза?» и получили 35 ответов «да». Затем всех спросили «У вас зелёные глаза?» и получили 37 ответов «да». Наконец, всех спросили «У вас серые глаза?» и получили 42 ответа «да». Сколько разбойников в уезде?

Ответ. 22 разбойника.

Решение. Заметим, что каждый купец ответил положительно на один вопрос, а каждый разбойник – на 3 вопроса. Пусть на острове было l разбойников и $r = 100 - l$ купцов. Тогда всего положительных ответов будет $r + 3l = 30 + 35 + 37 + 42 = 144$. Решая уравнение, имеем $100 - l + 3l = 144$; $2l = 44$; $l = 22$.

Комментарий.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

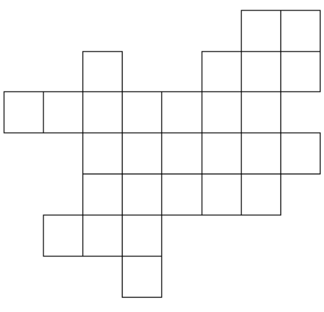
1.Петя, Вася, Сережа и Миша катались с горки. Фамилия одного из мальчиков была Петров, другого Васильев, у остальных – Сергеев и Михайлов. Петя скатился с горки на два раза больше, чем Петров. Вася скатился с горки на два раза больше, чем Васильев, Сережа скатился с горки на два раза больше, чем Сергеев. Кто скатился с горки больше, и на сколько раз, Миша или Михайлов?

Ответ. Михайлов скатился с горки на 6 раз больше, чем Миша.

Решение. Петя, Вася, Сережа и Миша скатились вместе столько же раз, сколько Петров, Васильев, Сергеев и Михайлов вместе, потому что это одни и те же люди. Одну и ту же сумму мы представили двумя способами, в первом случае слагаемые брали по именам, а во втором по фамилиям. Но по условию каждое из первых трёх слагаемых первой суммы на 2 больше соответствующего слагаемого второй суммы. Значит, чтобы суммы уравнялись, последнее слагаемое первой суммы должно быть на 6 меньше.

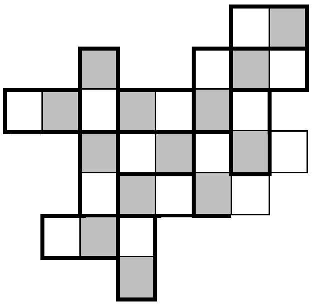
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



Ответ.13.

Решение. Всего клеток 28. Закрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке ниже. Любая плашка закрывает ровно одну закрашенную клетку, а всего закрашенных клеток 13, поэтому 14 плашек разместить нельзя. 13 плашек можно разместить, например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: есть утверждение, что нельзя разместить 14 плашек – 5 баллов; это утверждение доказано – 8 баллов; дан пример размещения – 7 баллов, баллы суммируются. Доказательство, что нельзя разместить 14 плашек, опирается на частные случаи – 5 баллов за эту часть. Таким образом, частичное доказательство и есть пример размещения – 17 баллов, если нет доказательства, есть пример – 12 баллов, есть доказательство, нет примера – 13 баллов, доказательство частичное и нет примера – 10 баллов. Размещение показано только частично – 5 баллов за эту часть. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Запишите в каждую клетку одно из чисел 2, 3, 6, 7, 16, 73, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{677}$$

Ответ. Например, так: $(16-7)\times(73+2)+6:3=677$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Аня, Боря и Ваня сосчитали, сколько у них карандашей.

Аня сказала: 1) У меня 8 карандашей. 2) У меня на 2 карандаша меньше, чем у Бори. 3) У меня на один карандаш больше, чем у Вани.

Боря сказал: 1) Число карандашей у меня и Вани отличается на 3. 2) Не у меня карандашей меньше всех. 3) У Вани 11 карандашей.

Ваня сказал: 1) У меня карандашей меньше, чем у Ани. 2) У Бори карандашей на 3 больше, чем у Ани. 3) У Ани 9 карандашей.

Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько карандашей у каждого из них?

Ответ. У Ани 9 , у Бори 11, у Вани 8 карандашей.

Решение. Пусть у Ани 8 карандашей. Тогда Ваня солгал, говоря «У Ани 9 карандашей», и правда, что у Бори 11 карандашей. Значит, слова Ани «У меня на 2 карандаша меньше, чем у Бори» – ложь, а утверждение, что у Ани на один карандаш больше, чем у Вани – правда. Отсюда следует, что у Вани 7 карандашей. Тогда у Бори первое и третье утверждения неверны. Значит, первое высказывание Ани – ложь, а другие два – правда. Слова Вани: «У Бори на 3 карандаша больше, чем у Ани» противоречат правдивому высказыванию Ани, значит, правда, что у Ани 9 карандашей. Тогда у Бори 11 карандашей, у Вани 8 карандашей. Неверные высказывания: у Ани 1), у Бори 3), у Вани 2).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Ошибки в рассмотрении вариантов – 10 баллов. Решение нача-*

то, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов.

5. Бельчата Рыжик и Пух по очереди берут орехи из кучи. За один раз можно взять не больше половины оставшихся орехов. Орехи берут целиком, на части делить их нельзя. Тот, кто сможет взять последним, выиграет. Первым берет Рыжик. Кто из них может выиграть при любых действиях другого, если сначала в куче было 40 орехов? Напишите, как должен действовать победитель.
Ответ. Выиграет Рыжик. Он должен оставлять Пуху $31, 15, 7, 3, 1$ орех.
Решение. Проиграет тот бельчонок, которому останется 0 или 1 орех. Но 0 орехов остаться не может, ведь предыдущий взял не больше половины. А чтобы остался 1 орех, у предыдущего должно быть 2 ореха. 2 получаются, если из 3 взять не больше половины, то есть 1. 3 ореха у предыдущего получаются, если перед его ходом было 4 или 5 или 6. Значит, нужно, чтобы перед этим было 7 орехов, что можно получить, если было от 8 до 14. Значит, перед ходом у бельчонка должно быть 15 орехов, а еще на ход назад – 31 (как и раньше, удваиваем и прибавляем 1). Запишем это в таблицу.

Рыжик взял	9	Чтобы осталось 15	Чтобы осталось 7	Чтобы осталось 3	1
Осталось	31	15	7	3	1
Пух взял	$1–15$	$1 - 7$	$1 - 3$	1	0
Осталось	$16 - 30$	$8 - 14$	$4 - 6$	2	

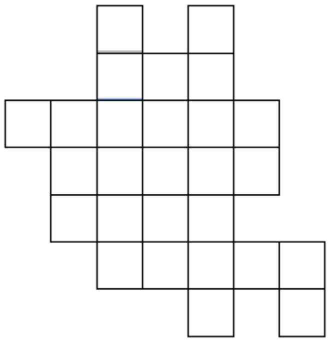
Теперь видно, что выиграет бельчонок, который начинает, то есть Рыжик. Первым ходом он оставит Пуху 31 орех, то есть возьмёт 9 орехов. Вторым ходом оставит 15 орехов, третьим – 7, четвёртым – 3. Пух на первых трёх ходах может брать разное число орехов, но не может помешать Рыжику. На своём четвёртом ходу Пух из 3 орехов может взять только 1. Рыжик из оставшихся двух орехов возьмёт 1, и Пух не сможет взять не больше половины.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть часть стратегии – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

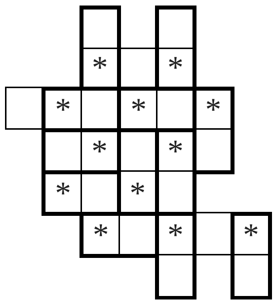
1. На арену цирка вышли четыре клоуна. Их звали Май, Бам, Зонг, Слон. На них были парики разного цвета – малиновый, белый, зелёный, синий. Каждый клоун кидал публике воздушные шарики. Май кинул на 2 шарика больше, чем клоун в малиновом парике. Бам кинул на 1 шарик больше, чем клоун в белом парике. Зонг кинул на 4 шарика больше, чем клоун в зелёном парике. Кто кинул больше шариков, и на сколько, Слон или клоун в синем парике?
Ответ. Клоун в синем парике кинул на 7 шариков больше, чем Слон.
Решение. Май, Бам, Зонг, Слон кинули вместе столько же шариков, сколько клоуны в малиновом, белом, зелёном, синем париках вместе, потому что это одни и те же клоуны. Одну и ту же сумму мы представили двумя способами, в первом случае слагаемые брали по именам, а во втором по парикам. Но по условию каждое из первых трёх слагаемых первой суммы больше соответствующего слагаемого второй суммы (на 2, на 1, на 4). Значит, чтобы суммы уравнялись, последнее слагаемое первой суммы должно быть на $2 + 1 + 4 = 7$ меньше.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



Ответ. 12.
Решение. Всего клеток 27. Отметим клетки в шахматном порядке как на рисунке ниже. Любая плашка закрывает ровно одну отмеченную клетку, а всего отмеченных клеток 12, поэтому 13 плашек разместить нельзя. 12 плашек можно разместить, например, так.



Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: есть утверждение, что нельзя разместить 13 плашек – 5 баллов; это утверждение доказано – 8 баллов; дан пример размещения – 7 баллов, баллы суммируются. Доказательство, что нельзя разместить 13 плашек, опирается на частные случаи – 5 баллов за эту часть. Таким образом, частичное доказательство и есть пример размещения – 17 баллов, если нет доказательства, есть пример – 12 баллов, есть доказательство, нет примера – 13 баллов, доказательство частичное и нет примера – 10 баллов. Размещение показано только частично – 5 баллов за эту часть. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.

3. Запишите в каждую клетку одно из чисел 3, 4, 4, 11, 13, 18, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$ можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{487}$$

Ответ. Например, так: $(11 - 4) \times \left((13 \times 4) + 18\right) - 3 = 487$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Галя, Дима и Женя сосчитали, сколько пятёрок по математике они получили за месяц. Галя сказала: 1) У меня 7 пятёрок. 2) У меня на 4 пятёрки меньше, чем у Димы. 3) У меня на одну пятёрку больше, чем у Жени.

Дима сказал: 1) Число пятёрок у меня и Жени отличается на 5. 2) Не у меня пятёрок меньше всех. 3) У Жени 10 пятёрок.
Женя сказал: 1) У меня пятёрок меньше, чем у Гали. 2) У Димы пятёрок на 3 больше, чем у Гали. 3) У Гали 8 пятёрок.
Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько пятёрок у каждого из них?
Ответ. У Гали 8 , у Димы 12, у Жени 7 пятёрок.
Решение. Пусть у Гали 7 пятёрок. Тогда Женя солгал, говоря «У Гали 8 пятёрок», и правда, что у Димы 10 пятёрок. Значит, слова Гали «У меня на 4 пятёрки меньше, чем у Димы» – ложь, а утверждение, что у Гали на одну пятёрку больше, чем у Жени – правда. Отсюда следует, что у Жени 6 пятёрок. Тогда у Димы первое и третье утверждения неверны. Значит, первое высказывание Гали – ложь, а другие два – правда. Слова Жени: «У Димы на 3 пятёрки больше, чем у Гали» противоречат правдивому высказыванию Гали, значит, правда, что у Гали 8 пятёрок. Тогда у Димы 12 пятёрок, у Жени 7 пятёрок. Неверные высказывания: у Гали 1), у Димы 3), у Жени 2).
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Ошибки в рассмотрении вариантов – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов.*

5. Бельчата Тоша и Кеша по очереди берут орехи из кучи. За один раз можно взять не больше половины оставшихся орехов. Орехи берут целиком, на части делить их нельзя. Тот, кто сможет взять последним, выиграет. Первым берет Тоша. Кто из них может выиграть при любых действиях другого, если сначала в куче было 50 орехов? Напишите, как должен действовать победитель.
Ответ. Тоша.
Решение. Проиграет тот бельчонок, которому останется 0 или 1 орех. Но 0 орехов остаться не может, ведь предыдущий взял не больше половины. А чтобы остался 1 орех, у предыдущего должно быть 2 ореха. 2 получаются, если из 3 взять не больше половины, то есть 1. 3 ореха у предыдущего получаются, если перед его ходом было 4 или 5 или 6. Значит, нужно, чтобы перед этим было 7 орехов, что можно получить, если было от 8 до 14. Значит, перед ходом у бельчонка должно быть 15 орехов, а еще на ход назад – 31 (как и раньше, удваиваем и прибавляем 1). Запишем это в таблицу.

Тоша взял	19	Чтобы осталось 15	Чтобы осталось 7	Чтобы осталось 3	1
Осталось	31	15	7	3	1
Кеша взял	$1{-}15$	$1-7$	$1-3$	1	0
Осталось	$16-30$	$8-14$	$4-6$	2	

Теперь видно, что выиграет бельчонок, который начинает, то есть Тоша. Первым ходом он оставит Кеше 31 орех, то есть возьмёт 19 орехов. Вторым ходом оставит 15 орехов, третьим – 7, четвёртым – 3. Кеша на первых трёх ходах может брать разное число орехов, но не может помешать Тоше. На своём четвёртом ходу Кеша из 3 орехов может взять только 1. Тоша из оставшихся двух орехов возьмёт 1, и Кеша не сможет взять не больше половины.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть часть стратегии – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

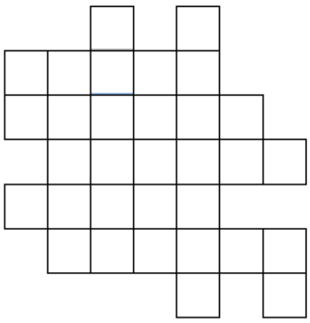
1. Маша, Ира, Катя, Лена, Света делали соломенных куколок для школьной ярмарки. Фамилия одной из девочек была Матвеева, другой Иванова, у остальных – Кузнецова, Лапина и Соколова. Маша сделала на три куколки больше, чем Матвеева. Ира сделала на четыре куколки больше, чем Иванова. Катя сделала на одну куколку больше, чем Кузнецова. Света сделала на две куколки больше, чем Соколова. Кто сделал больше куколок, и на сколько, Лена или Лапина?

Ответ. Лапина сделала на 10 куколок больше, чем Лена.

Решение. Маша, Ира, Катя, Лена, Света сделали вместе столько же куколок, сколько Матвеева, Иванова, Кузнецова, Лапина и Соколова вместе, потому что это одни и те же девочки. Одну и ту же сумму мы представили двумя способами, в первом случае слагаемые брали по именам, а во втором по фамилиям. Но по условию каждое из первых четырёх слагаемых первой суммы больше соответствующего слагаемого второй суммы (на 3, на 4, на 1, на 2). Значит, чтобы суммы уравнялись, последнее слагаемое первой суммы должно быть на $3 + 4 + 1 + 2 = 10$ меньше.

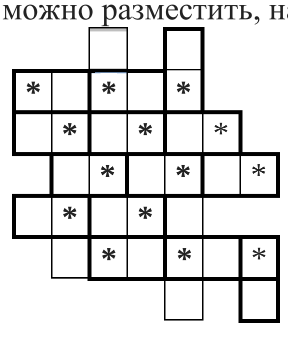
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



Ответ. 14.

Решение. Отметим клетки в шахматном порядке как на рисунке ниже. Любая плашка закрывает ровно одну отмеченную клетку, а всего отмеченных клеток 14, поэтому 15 плашек разместить нельзя. 14 плашек можно разместить, например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: есть утверждение, что нельзя разместить 15 плашек – 5 баллов; это утверждение доказано – 8 баллов; дан пример размещения – 7 баллов, баллы суммируются. Доказательство, что нельзя разместить 15 плашек, опирается на частные случаи – 5 баллов за эту часть. Таким образом, частичное доказательство и есть пример размещения – 17 баллов, если нет доказательства, есть пример – 12 баллов, есть доказательство, нет примера – 13 баллов, доказательство частичное и нет примера – 10 баллов. Размещение показано только частично – 5 баллов за эту часть. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. Запишите в каждую клетку одно из чисел 3, 6, 6, 12, 12, 100, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{309}$$

Ответ.$(6-3)\times\big((12:12)+100\big)+6=309.$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

4. Три бельчонка, которых звали Ах, Бах и Вах, сосчитали найденные ими шишки.
Ах сказал: 1) У меня 6 шишек. 2) У меня на 2 шишки меньше, чем у Баха. 3) У меня на одну шишку больше, чем у Ваха.
Бах сказал: 1) Число шишек у меня и Ваха отличается на 3. 2) Не у меня шишек меньше всех. 3) У Ваха 10 шишек.
Вах сказал: 1) У меня шишек меньше, чем у Аха. 2) У Баха на три шишки больше, чем у Аха. 3) У Аха 8 шишек.
Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько шишек у каждого бельчонка?
Ответ. У Аха 8, у Баха 10, у Ваха 7 шишек.
Решение. Пусть у Аха 6 шишек. Тогда Вах солгал, говоря «У Аха 8 шишек», и правда, что у Баха 9 шишек. Значит, слова А «У меня на 2 шишки меньше, чем у Баха» – ложь, а утверждение, что у Аха на одну шишку больше, чем у Ваха – правда. Отсюда следует, что у Ваха5 шишек. Тогда у Баха первое и третье утверждения неверны. Значит, первое высказывание Аха – ложь, а другие два – правда. Слова Ваха: «У Баха на три шишки больше, чем у Аха» противоречат правдивому высказыванию Аха, значит, правда, что у Аха 8 шишек. Тогда у Баха 10 шишек, у Ваха 7 шишек. Неверные высказывания: у Аха 1), у Баха 3), у Ваха 2).
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, но есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Ошибки в рассмотрении вариантов – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов.*

5. За один ход число, написанное на доске, заменяют на меньшее натуральное число, которое не меньше половины имеющегося числа. Например, если написано число 47, то можно заменить его на любое число от 24 до 46 включительно, а если записано число 42, то можно заменить его на любое число от 21 до 41 включительно. Старое число стирают. Вася и Петя делают ходы по очереди, начинает Вася и записывает число 60. Тот, кто сможет сделать ход последним, выиграет. Кто из них может выиграть при любых действиях другого? Напишите, как должен действовать победитель.
Ответ. Петя.
Решение. Проиграет тот мальчик, перед ходом которого на доске будет число 1. Чтобы появилось число 1, должно быть предыдущее число 2. 2 получается, если из 3 взять не больше половины, то есть 1. 3 у предыдущего получается, если перед его ходом было 4 или 5 или 6. Значит, нужно, чтобы перед этим было 7 , что можно получить, если было от 8 до 14. Значит, перед этим ходом на доске должно быть 15, а еще на ход назад – 31 (как и раньше, удваиваем и прибавляем 1). Запишем это в таблицу.

Вася	60	$16-30$	$8-14$	$4-6$	2
Петя	31	15	7	3	1

Теперь видно, что выиграет Петя. Своим первым ходом он напишет число 31. Вторым ходом число 15, третьим – 7, четвёртым – 3. Вася на своих ходах может записывать разные числа (см. таблицу), но не может помешать Пете. На своём пятом ходу Вася может заменить число 3 только на 2. Петя заменит 2 на 1 и выиграет.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть часть стратегии – 10-15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Бельчата Сёма и Юра побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к $12:00$, но бельчата перепутали. Сёма прибежал, когда до $14:00$ оставалось вдвое меньше, чем прошло после $12:00$. А Юра – когда до $14:00$ оставалось вдвое больше, чем прошло после $13:00$. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?

Ответ. Оба пришли в $13:20$.

Решение. Выясним, когда пришёл Сёма к Тимоше. Между полуднем и двумя часами дня 120 минут. Этот промежуток времени необходимо разделить на 3 части, т.к. до прихода Сёмы прошло в 2 раза больше, чем от встречи до $14:00$. Получаем, что Сёма пришел на $(120:3)\cdot 2 = 80$ минут позже указанного Тимошей времени, т.е. в $13:20$. Теперь узнаем, когда Юра пришёл к Тимоше. Промежуток между $13:00$ и $14:00$ – это 60 минут. Одна часть – это время от часа дня до прихода Юра, время от Юриного времени до $14:00$ составляет 2 части, поэтому $60:3 = 20$. Следовательно, Юра пришел в $13:20$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получено, что один из бельчат пришёл в 13:20 – 10 баллов. Только ответ – 2 балла.*

2. Лена загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Маше, что это число делится на 2, 3, 5, 10 и 15. Однако Маша узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Лена?

Ответ. $10, 15, 20, 40, 45, 50, 70, 75, 80$.

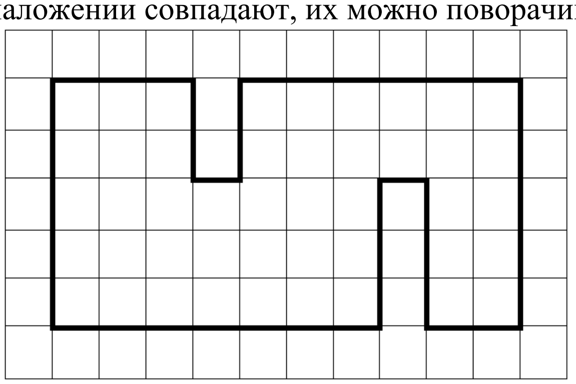
Решение. Если число не делится на 5, то оно не делится ни на 10, ни на 15, и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 5. Если число делится на 5 и на 2, то оно делится и на 10 тоже, значит, в этом случае неверны утверждения про делимость на 3 и 15. Если же число не делится на 2, то оно не делится на 10, и утверждения про делимость на 3 и 15 должны быть, наоборот верны.

В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 10, но не делятся на 3. Таких двузначных чисел ровно шесть: 10, 20, 40, 50, 70, 80. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 15, но не делятся на 2. Таких чисел три: 15, 45 и 75.

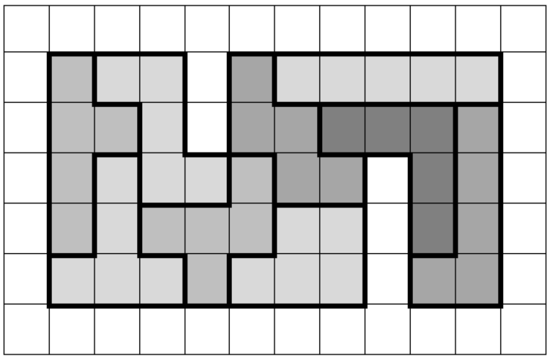
Всего получается 9 чисел: 10, 15, 20, 40, 45, 50, 70, 75, 80.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе отсутствуют одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа и отсутствует одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 12 баллов. Полностью рассмотрены оба случая (когда неверны утверждения про делимость на 3 и 15 и на 2 и 10), но не доказано, что других нет – 12 баллов. Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 3 и 15 или на 2 и 10) – 10 баллов (с верным примером). Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 3 и 15 или на 2 и 10) – 8 баллов (без верного примера). Верный ответ, без обоснования – 6 баллов. Верный ответ за исключением чисел 15, 45, 75, без обоснования – 4 балла. Неверный ответ, при одном, частично верном рассмотренном случае – 4 балла. Неверный ответ без обоснования – 0 баллов.*

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



Решение.



Комментарий. *Любой верный пример с различными фигурами – 20 баллов. Если в примере присутствует хотя бы две равные фигуры – 0 баллов.*

4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 100 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчонком в шапочке того же цвета. При этом 58 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

Ответ. 20.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих бельчат в одноцветных шапочках, при этом «крайние» бельчата группы стоят рядом с бельчатами в шапочках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп. При этом в каждой группе есть хотя бы два бельчонка, иначе в ней только один бельчонок, тогда он стоит рядом с двумя бельчатами в шапочках другого цвета, что противоречит условию. Давайте попросим 58 бельчат, каждый из которых стоит между бельчатами в шапочках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 42 бельчонка, при этом в каждой группе осталось 2 бельчонка. Рассмотрим группы в красных шапочках. Заметим, что все бельчата, которые

сейчас в них состоят, и есть те бельчата, которые имели соседа в не красной шапочке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп. Всего осталась $21 = 42{:}\,2$ группа. Если хотя бы 11 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 10, то есть максимальное количество бельчат в красных шапочках, которые стоят рядом с бельчонком в не красной шапочке, равно 20.
Приведем пример, когда это возможно. В таком примере должно быть 10 групп бельчат в красных шапочках и 11 других групп. Так и сделаем: возьмем 10 групп бельчат в красных шапочках и 11 групп бельчат 11 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных бельчат не стояли рядом (достаточно сначала расположить 10 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 60 бельчат, а остальные – из двух.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 20 бельчат в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 16 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 21 бельчонок в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 12 баллов. Приведён пример, что ровно 20 бельчат в красной шапочке могут иметь соседей не в красной шапочке – 6 баллов. Явно сказано, что 42 бельчонка имеют соседа в не красной шапочке – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*
Примечание*. Любые рассуждения о том, как должны быть расставлены бельчата «оптимальным образом», «выгоднее всего», «парами», «все вместе», «чередоваться» и т.д. оцениваются максимум 6 баллами при наличии верного примера расстановки.*

5. Однажды за большим круглым столом собрались 80 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?
Ответ. 40 или 0 разбойников.
Решение. Если за столом есть разбойник, тогда справа от него сидит торговец или купец. В такой ситуации оба они скажут правду, значит, следующий после них – снова разбойник. Получаем, что разбойники и не разбойники чередуются, т.е. разбойников ровно половина. Если же разбойников за столом нет, то купцов тоже нет (потому что справа от купца должен быть разбойник) и за столом одни торговцы.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получен ответ «40 разбойников», но не разобран случай отсутствия купцов и разбойников – 12 баллов. Рассмотрен случай чередования разбойников и купцов/торговцев, без обоснования – 6 баллов (если дополнительно рассмотрен случай отсутствия разбойников, то +2 балла). Приведён ответ «0 или 40 разбойников» – 4 балла. Приведён только ответ «0 разбойников» или ответ «40 разбойников» – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Бельчата Миша и Саша побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к $13{:}\,00$, но бельчата перепутали. Миша прибежал, когда до $15{:}\,00$ оставалось вдвое меньше, чем прошло после $13{:}\,00$. А Саша – когда до $15{:}\,00$ оставалось вдвое больше, чем прошло после $14{:}\,00$. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?
Ответ. Оба пришли в $14{:}\,20$.
Решение. Выясним, когда пришёл Миша к Тимоше. Между полуднем и двумя часами дня 120 минут. Этот промежуток времени необходимо разделить на 3 части, т.к. до прихода Миши прошло в 2 раза больше, чем от встречи до $15{:}\,00$. Получаем, что Миша пришел на $(120{:}\,3) \cdot 2 = 80$ минут позже указанного Тимошей времени, т.е. в $14{:}\,20$. Теперь узнаем, когда Саша пришёл к Тимоше. Промежуток между $14{:}\,00$ и $15{:}\,00$ – это 60 минут. Одна

часть – это время от часа дня до прихода Саши, время от Сашиного времени до $15:00$ составляет 2 части, поэтому $60:3=20$. Следовательно, Саша пришел в $14:20$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получено, что один из бельчат пришёл в 14:20 – 10 баллов. Только ответ – 2 балла.*

2. Катя загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Насте, что это число делится на 2, 3, 4, 5 и 6. Однако Настя узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Катя?

Ответ. 18, 20, 40, 42, 54, 66, 78, 80.

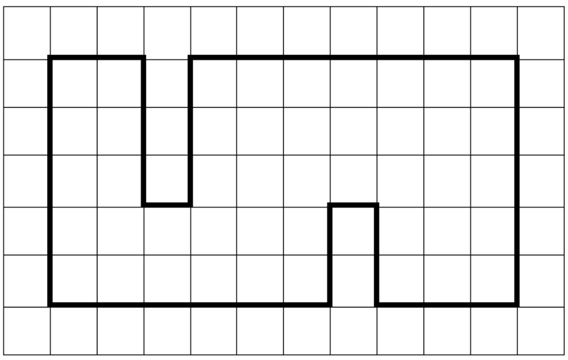
Решение. Если число не делится на 2, то оно не делится ни на 4, ни на 6, и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 2. Если чётное число делится на 3, то оно делится и на 6 тоже, значит, в этом случае неверны утверждения про делимость на 4 и 5. Если же число не делится на 3, то оно не делится на 6, и утверждения про делимость на 4 и 5 должны быть, наоборот верны.

В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 6, но не делятся на 4, ни на 5. Таких двузначных чисел ровно пять: 18, 42, 54, 66, 78. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 20, но не делятся на 3. Таких чисел три: 20, 40 и 80.

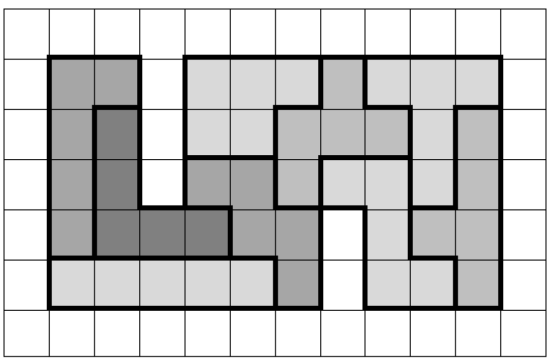
Всего получается 8 чисел: 18, 20, 40, 42, 54, 66, 78, 80.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе отсутствуют одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа и отсутствует одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 12 баллов. Полностью рассмотрены оба случая (когда неверны утверждения про делимость на 4 и 5 и на 3 и 6), но не доказано, что других нет – 12 баллов. Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 4 и 5 или на 3 и 6) – 10 баллов (с верным примером). Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 4 и 5 или на 3 и 6) – 8 баллов (без верного примера). Верный ответ, без обоснования – 6 баллов. Верный ответ за исключением чисел 20, 40, 80, без обоснования – 4 балла. Неверный ответ, при одном, частично верном рассмотренном случае – 4 балла. Неверный ответ без обоснования – 0 баллов.*

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



Решение.



Комментарий. *Любой верный пример с различными фигурами – 20 баллов. Если в примере присутствует хотя бы две равные фигуры – 0 баллов.*

4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 95 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчонком в шапочке того же цвета. При этом 49 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

Ответ. 22.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих бельчат в одноцветных шапочках, при этом «крайние» бельчата группы стоят рядом с бельчатами в шапочках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп. При этом в каждой группе есть хотя бы два бельчонка, иначе в ней только один бельчонок, тогда он стоит рядом с двумя бельчатами в шапочках другого цвета, что противоречит условию. Давайте попросим 49 бельчат, каждый из которых стоит между бельчатами в шапочках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 46 бельчат, при этом в каждой группе осталось 2 бельчонка. Рассмотрим группы в красных шапочках. Заметим, что все бельчата, которые сейчас в них состоят, и есть те бельчата, которые имели соседа в не красной шапочке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп. Всего осталось $23 = 46 : 2$ группы. Если хотя бы 12 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 11, то есть максимальное количество бельчат в красных шапочках, которые стоят рядом с бельчонком в не красной шапочке, равно 22.

Приведем пример, когда это возможно. В таком примере должно быть 11 групп бельчат в красных шапочках и 12 других групп. Так и сделаем: возьмем 11 групп бельчат в красных шапочках и 12 групп бельчат 12 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных бельчат не стояли рядом (достаточно сначала расположить 11 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 51 бельчонка, а остальные – из двух.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 22 бельчонка в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 16 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 23 бельчонка в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 12 баллов. Приведён пример, что ровно 22 бельчонка в красной шапочке могут иметь соседей не в красной шапочке – 6 баллов. Явно сказано, что 46 бельчонка имеют соседа в не красной шапочке – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Примечание*. Любые рассуждения о том, как должны быть расставлены бельчата «оптимальным образом», «выгоднее всего», «парами», «все вместе», «чередоваться» и т.д. оцениваются максимум 6 баллами при наличии верного примера расстановки.*

5. Однажды за большим круглым столом собрались 100 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Ответ. 50 или 0 разбойников.

Решение. Если за столом есть разбойник, тогда справа от него сидит торговец или купец. В такой ситуации оба они скажут правду, значит, следующий после них – снова разбойник. Получаем, что разбойники и не разбойники чередуются, т.е. разбойников ровно половина. Если же разбойников за столом нет, то купцов тоже нет (потому что справа от купца должен быть разбойник) и за столом одни торговцы.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получен ответ «50 разбойников», но не разобран случай отсутствия купцов и разбойников – 12 баллов. Рассмотрен случай чередования разбойников и купцов/торговцев, без обоснования – 6 баллов (если дополнительно рассмотрен случай отсутствия разбойников, то +2 балла).*

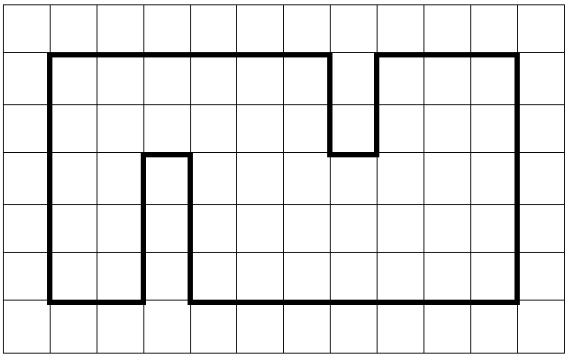
Приведён ответ «0 или 50 разбойников» – 4 балла Приведён только ответ «0 разбойников» или ответ «50 разбойников» – 0 баллов.

Вариант 3

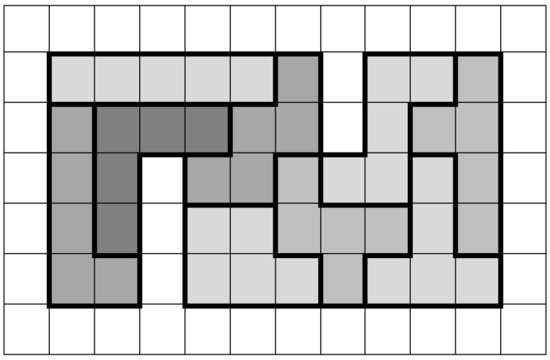
1. Бельчата Боря и Гена побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к $14:00$, но бельчата перепутали. Боря прибежал, когда до $16:00$ оставалось вдвое меньше, чем прошло после $14:00$. А Гена – когда до $16:00$ оставалось вдвое больше, чем прошло после $15:00$. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?
Ответ. Оба пришли в $15:20$.
Решение. Выясним, когда пришёл Боря к Тимоше. Между полуднем и двумя часами дня 120 минут. Этот промежуток времени необходимо разделить на 3 части, т.к. до прихода Сёмы прошло в 2 раза больше, чем от встречи до $16:00$. Получаем, что Боря пришел на $(120:3)\cdot 2 = 80$ минут позже указанного Тимошей времени, т.е. в $15:20$. Теперь узнаем, когда Гена пришёл к Тимоше. Промежуток между $15:00$ и $16:00$ – это 60 минут. Одна часть – это время от часа дня до прихода Гены, время от Гениного времени до $16:00$ составляет 2 части, поэтому $60:3 = 20$. Следовательно, Гена пришел в $15:20$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получено, что один из бельчат пришёл в 15:20 – 10 баллов. Только ответ – 2 балла.*

2. Даша загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Оле, что это число делится на 2, 3, 5, 6 и 9. Однако Оля узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Даша?
Ответ. $12, 24, 42, 45, 48, 66, 78, 84, 96$.
Решение. Если число не делится на 3, то оно не делится ни на 6, ни на 9, и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 3. Если число делится на 3 и на 2, то оно делится и на 6 тоже, значит, в этом случае неверны утверждения про делимость на 5 и 9. Если же число не делится на 2, то оно не делится на 6, и утверждения про делимость на 5 и 9 должны быть, наоборот верны.
В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 6, но не делятся на 5, ни на 9. Таких двузначных чисел ровно восемь: $12, 24, 42, 48, 66, 78, 84, 96$. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 45, но не делятся на 2. Таких чисел ровно одно: 45.
Всего получается 9 чисел: $12, 24, 42, 45, 48, 66, 78, 84, 96$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе отсутствуют одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 16 баллов. В ответе присутствуют посторонние числа и отсутствует одно или несколько верных чисел, при верном рассуждении – 12 баллов. Полностью рассмотрены оба случая (когда неверны утверждения про делимость на 5 и 9 и на 3 и 6), но не доказано, что других нет – 12 баллов. Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 5 и 9 или на 2 и 6) – 10 баллов (с верным примером). Полностью рассмотрен один из двух случаев (когда неверны утверждения про делимость на 5 и 9 или на 2 и 6) – 8 баллов (без верного примера). Верный ответ, без обоснования – 6 баллов. Верный ответ за исключением числа 45, без обоснования – 4 балла. Неверный ответ, при одном, частично верном рассмотренном случае – 4 балла. Неверный ответ без обоснования – 0 баллов.*

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



Решение.



Комментарий. *Любой верный пример с различными фигурами – 20 баллов. Если в примере присутствует хотя бы две равные фигуры – 0 баллов.*

4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 105 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчонком в шапочке того же цвета. При этом 67 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

Ответ. 18.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих бельчат в одноцветных шапочках, при этом «крайние» бельчата группы стоят рядом с бельчатами в шапочках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп. При этом в каждой группе есть хотя бы два бельчонка, иначе в ней только один бельчонок, тогда он стоит рядом с двумя бельчатами в шапочках другого цвета, что противоречит условию. Давайте попросим 67 бельчат, каждый из которых стоит между бельчатами в шапочках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 38 бельчат, при этом в каждой группе осталось 2 бельчонка. Рассмотрим группы в красных шапочках. Заметим, что все бельчата, которые сейчас в них состоят, и есть те бельчата, которые имели соседа в не красной шапочке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп. Всего осталось $19 = 38{:}\,2$ групп. Если хотя бы 10 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 9, то есть максимальное количество бельчат в красных шапочках, которые стоят рядом с бельчонком в не красной шапочке, равно 18.

Приведем пример, когда это возможно. В таком примере должно быть 9 групп бельчат в красных шапочках и 10 других групп. Так и сделаем: возьмем 9 групп бельчат в красных шапочках и 10 групп бельчат 10 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных бельчат не стояли рядом (достаточно сначала расположить 9 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 69 бельчат, а остальные – из двух.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 18 бельчат в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 16 баллов. Обосновано получена оценка, что максимум 19 бельчонок в красной шапочке имеют соседей не в красной шапочке – 12 баллов. Приведён пример, что ровно 18 бельчат в красной шапочке могут иметь соседей не в красной шапочке – 6 баллов. Явно сказано,* *что 38 бельчонка имеют соседа в не красной шапочке – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Примечание. *Любые рассуждения о том, как должны быть расставлены бельчата «оптимальным образом», «выгоднее всего», «парами», «все вместе», «чередоваться» и т.д. оцениваются максимум 6 баллами при наличии верного примера расстановки.*

5. Однажды за большим круглым столом собрались 120 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Ответ. 60 или 0 разбойников.

Решение. Если за столом есть разбойник, тогда справа от него сидит торговец или купец. В такой ситуации оба они скажут правду, значит, следующий после них – снова разбойник. Получаем, что разбойники и не разбойники чередуются, т.е. разбойников ровно половина. Если же разбойников за столом нет, то купцов тоже нет (потому что справа от купца должен быть разбойник) и за столом одни торговцы.

Комментарий.

Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получен ответ «60 разбойников», но не разобран случай отсутствия купцов и разбойников – 12 баллов. Рассмотрен случай чередования разбойников и купцов/торговцев, без обоснования – 6 баллов (если дополнительно рассмотрен случай отсутствия разбойников, то +2 балла). Приведён ответ «0 или 60 разбойников» - 4 балла. Приведён только ответ «0 разбойников» или ответ «60 разбойников» – 0 баллов.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

7 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Кабина лифта вмещает или 15 гимнастов, или 12 борцов. Если в кабину зашли 8 борцов, сколько гимнастов может ещё зайти в кабину?

Ответ.5.

Решение.Если в кабину зашли 8 борцов, кабина заполнена на $^2/_3$. Оставшуюся $^1/_3$ может заполнить треть гимнастов, то есть 5.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Артём, Боря и Саша красили забор. Если бы Боря выкрасил столько, сколько Артём и Саша вместе, они бы закончили в этот день. А так им осталось на завтра столько, сколько выкрасил Артём сегодня. Но всё-таки сегодня один из них выкрасил столько, сколько двое других вместе. Какую часть забора выкрасил каждый из них?

Ответ.$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$.

Решение. Из высказывания про Борю ясно, что $a + c = \frac{1}{2}$. Из высказывания про завтрашний день: $2a + b + c = 1\ (*)$. Последнее высказывание допускает два варианта: 1) $a = b + c$или 2) $c = a + b$.

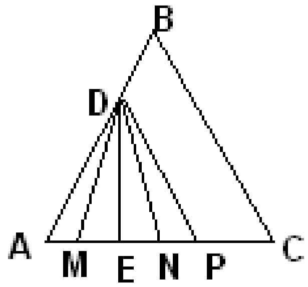
Подставим $a + c = \frac{1}{2}$ в $2a + b + c = 1$: $a + b = \frac{1}{2}$, $b = c$. Тогда 2) $c = a + b$ невозможно, и верно утверждение 1) $a = b + c = 2b$. Таким образом, части равны $2b, b, b$и из условия($*$)находим: $6b = 1, b = \frac{1}{6}$. Получаем ответ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Ответ найден подбором, не доказано, что других ответов нет – 18 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного* *продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точки M и N (M ближе к A) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 4, AM = 1$. Найдите NC.

Ответ. 5.

Решение. Отложим от точки N отрезок NP, равный AM. Отрезок DE – серединный перпендикуляр отрезка AP, поэтому $AD = DP$. Треугольник ADP равнобедренный с углом $60°$, значит, он равносторонний. Отсюда $BD = PC$. Тогда $NC = NP + PC = AM + BD = 4 + 1 = 5$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В доказательстве есть ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или содержит грубые ошибки – 0 баллов.*

4. В деревне живёт несколько семей. У всех в каждой семье одинаковая фамилия, а в разных семьях фамилии разные. В каждой семье больше 3 человек. Для каждого жителя деревни есть 30 жителей, у которых другая фамилия. Например, для каждого Иванова или Ивановой есть 30 жителей, которые не Ивановы. Сколько разных фамилий может быть в этой деревне?

Ответ. 2, 3, 4, 6, 7.

Решение. Рассмотрим двух людей из разных семей, например, Петрова и Иванова. Для Петрова есть 30 людей – Ивановых и остальных, не Петровых и не Ивановых. Для Иванова тоже есть 30 людей – Петровых и остальных, не Петровых и не Ивановых. Отсюда следует, что число Ивановых равно числу Петровых. Это относится ко всем семьям. Значит, 30 людей составляют несколько равных групп-семей, то есть число членов каждой семьи одинаково и является делителем 30. Делители 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. По условию, в каждой семье больше 3 человек. Если в каждой семье по 5 человек, всего семей (а значит, и разных фамилий), $6 + 1 = 7$. Если в каждой семье по 6 человек, всего семей $5 + 1 = 6$. Если в каждой семье по 10 человек, всего семей $3 + 1 = 4$. Если в каждой семье по 15 человек, всего семей $2 + 1 = 3$. Если в каждой семье по 30 человек, всего семей $1 + 1 = 2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При числе ответов меньше 5, за каждый верный обоснованный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Лесные бельчата или честные (всегда говорят правду), или лжецы (всегда лгут). На поляне собрались 6 бельчат из одного леса и 6 бельчат из другого леса. Все бельчата из одного леса знают, кто из них лжец, а кто честный, а бельчата из разных лесов не знают друг про друга. Каждый бельчонок сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $12 \cdot 11 = 132$ фразы. При этом каждый бельчонок каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это честный бельчонок из нашего леса», 2) «Это лжец из нашего леса», 3)

«Не знаю, кто он». Никакие два бельчонка не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Ответ.36 или 30 раз.

Решение.Честные бельчата из одного леса должны были сказать друг про друга фразу 1, а из разных лесов – фразу 3. Поскольку никакие два бельчонка не сказали друг про друга одинаковые фразы, честных не больше одного. Пусть честный бельчонок один. Тогда он сказал про бельчат из своего леса фразу 2, а про бельчат из другого леса фразу 3 (6 раз). Бельчата из его леса могли сказать про него фразу 2 или 3, но поскольку фразы должны быть разные, они сказали фразу 3 (5 раз). Бельчата из другого леса могли сказать про него фразу 1 или 2. Остальные бельчата из одного и того же леса в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 3, всего фраз было сказано $6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 50$, половина из них – фраза 3. Остальные бельчата из разных лесов – лжецы, поэтому в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 2 .Всего фраза 3 прозвучала $6 + 5 + 25 = 36$ раз.

Если все бельчата были лжецами, то про бельчат из своего леса они говорили фразы 1 и 3 ($6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$ раз), половина из них – фраза 3, а про бельчат из другого леса фразы 1 и 2.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 15 баллов. Верно рассмотрен существенный случай – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Бумажный пакет вмещает или 20 одинаковых яблок, или 16 одинаковых груш. Если в пакет положили 5 яблок, сколько груш можно ещё положить в пакет?

Ответ.12.

Решение.Если в пакет положили 5 яблок, пакет заполнен на четверть. Оставшиеся три четверти можно заполнить тремя четвертями 16 груш, то есть можно положить 12 груш.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. В роще живут серые и черные бельчата, $\frac{2}{5}$ всех бельчат черные, остальные серые. $\frac{1}{4}$ всех бельчат – путешественники (они любят далеко бегать). Доля путешественников среди чёрных бельчат в 2 раза превышает долю путешественников среди серых бельчат. Какая часть чёрных бельчат – путешественники?

Ответ.${}^{5}/_{14}$.

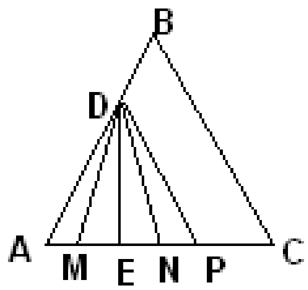
Решение.Пусть всего бельчат a, тогда ${}^{2a}/_{5}$ бельчат черные, ${}^{3a}/_{5}$ бельчат серые, ${}^{a}/_{4}$ бельчат – путешественники. Пусть число чёрных бельчат-путешественников равно b. Тогда b найдём из соотношения b: ${}^{2a}/_{5} = 2 \cdot ({}^{a}/_{4} - b)$: ${}^{3a}/_{5}$, откуда $b = {}^{a}/_{7}$. Поэтому ${}^{a}/_{7} : {}^{2a}/_{5} = {}^{5}/_{14}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точкиM и N (M ближе кA) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 6, AM = 2$. Найдите NC.

Ответ.8.

Решение.Отложим от точки Nотрезок NP, равный AM. Отрезок DE – серединный перпендикуляр отрезка AP, поэтому $AD = DP$. Треугольник ADPравнобедренный с углом 60°, значит, он равносторонний. Отсюда $BD = PC$. Тогда $NC = NP + PC = AM + BD = 6 + 2 = 8$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В доказательстве есть ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или содержит грубые ошибки – 0 баллов.*

4. 1 сентября школьники принесли в школу цветы, и составили из них общий букет. Среди цветов была хотя бы одна астра, и хотя бы один георгин, и для каждого цветка в букете было 10 цветков других видов (или одного другого вида). Например, для каждой астры в букете было 10 цветков, которые не являются астрами. Сколько цветков могло быть в букете?

Ответ.$11, 12, 15, 20$.

Решение.Рассмотрим все астры, и возьмём одну из них. Для неё есть 10 цветков – георгинов и остальных, не астр и не георгинов. Теперь возьмем один георгин. Для него есть 10 цветков – астр и остальных, не астр и не георгинов. Отсюда следует, что число астр равно числу георгинов. Это относится и к цветам любого вида. Значит, 10 цветков состоят из нескольких равных групп цветов разного вида, то есть число цветов каждого вида одинаково и является делителем10. Делители $10: 1, 2, 5, 10$. Если каждого вида по одному цветку, всего цветков 11. Если каждого вида по два цветка, всего цветков 12. Если каждого вида по 5 цветков, всего цветков 15. Если каждого вида по 10 цветков, всего цветков 20.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За каждый верный обоснованный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Собрались однажды вместе 5 жителей одной деревни и 5 жителей другой деревни. Каждый житель или рыцарь (всегда говорит правду), или лжец (всегда лжёт). Все жители из одной деревни знают, кто из них лжец, а кто рыцарь, а жители из разных деревень не знают друг про друга. Каждый житель сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $10 \cdot 9 = 90$ фраз. При этом каждый житель каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это рыцарь из нашей деревни», 2) «Это лжец из нашей деревни», 3) «Не знаю, кто он». Никакие два жителя не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Ответ.25 или 20 раз.

Решение. Рыцари из одной деревни должны были сказать друг про друга фразу 1, а из разных деревень – фразу 3. Поскольку никакие два человека не сказали друг про друга одинаковые фразы, честных не больше одного. Пусть рыцарь один. Тогда он сказал про людей из своей деревни фразу 2, а про людей из другой деревни фразу 3 (5 раз). Люди из его деревни могли сказать про него фразу 2 или 3, но поскольку фразы должны быть разные, они сказали фразу 3 (4 раза). Люди из другой деревни могли сказать про него фразу 1 или 2. Остальные люди из одной и той же деревни в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 3, всего фраз было сказано $5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 32$, половина из них – фраза 3.

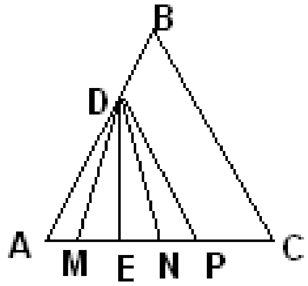
Остальные люди из разных деревень – лжецы, поэтому в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 2 .Всего фраза 3 прозвучала $5+4+16=25$ раз.
Если все люди были лжецами, то про людей из своей деревни они говорили фразы 1 и 3 ($5\cdot 4 + 5\cdot 4 = 40$ раз), половина из них – фраза 3, а про людей из другой деревни фразы 1 и 2.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 15 баллов. Верно рассмотрен существенный случай – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

Вариант 3

1. В библиотеку поступили книги «Маленький принц» и «Робинзон Крузо». Полка вмещает или 15 экземпляров книги «Робинзон Крузо», или 36 экземпляров книги «Маленький принц». Если на полку поставили 12 книг «Маленький принц», сколько книг «Робинзон Крузо» можно ещё туда поставить?
Ответ.10.
Решение. Если на полку поставили 12 книг «Маленький принц», полка заполнена на ${}^{1}/_{3}$. Оставшиеся ${}^{2}/_{3}$ могут заполнить две трети книг «Робинзон Крузо», то есть 10.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

2. Среди бельчат, участвовавших в соревнованиях по прыжкам, $\frac{2}{7}$ были рыжими, остальные серыми. $\frac{1}{6}$ всех бельчат-прыгунов участвовала также в соревнованиях по бегу, назовём их «бегуны». Доля бегунов среди рыжих бельчат в 2 раза превышает долю бегунов среди серых бельчат. Какая часть рыжих бельчат – бегуны?
Ответ.${}^{7}/_{27}$.
Решение.Пусть всего бельчат a, тогда ${}^{2a}/_{7}$ бельчат рыжие, ${}^{5a}/_{7}$ бельчат серые, ${}^{a}/_{6}$ бельчат – бегуны. Пусть число рыжих бельчат-бегунов равно b. Тогда b найдём из соотношения:b: ${}^{2a}/_{7} = 2\cdot\left({}^{a}/_{6} - b\right) : {}^{5a}/_{7}$, откуда $b = {}^{2a}/_{27}$. Бегуны среди рыжих бельчат составляют ${}^{2a}/_{27} : {}^{2a}/_{7} = {}^{7}/_{27}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов. Только неверный ответ – 0 баллов.*

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точки M и N (M ближе кA) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 10,\ AM = 3$. Найдите NC.
Ответ.13.
Решение.Отложим от точки Nотрезок NP, равный AM. Отрезок DE – серединный перпендикуляр отрезка AP, поэтому $AD = DP$. Треугольник ADPравнобедренный с углом 60°, значит, он равносторонний. Отсюда $BD = PC$. Тогда $NC = NP + PC = AM + BD = 10 + 3 = 13$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Недостаточные обоснования – 15 баллов. В доказательстве есть ошибка – 8-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение отсутствует или содержит грубые ошибки – 0 баллов.*

4. К празднику приготовили цветные шарики. Среди шариков был хотя бы один красный, и хотя бы один зелёный, и для каждого шарика было 15 шариков других цветов (или одного другого цвета). Например, для каждого красного шарика было 15 шариков, которые не красные. Сколько шариков могло быть?

Ответ. $16, 18, 20, 30$.

Решение.Рассмотрим все красные шарики, и возьмём один из них. Для него есть 15 шариков – зелёных и остальных, не красных и не зелёных. Теперь возьмем один зелёный шарик. Для него есть 15 шариков – красных и остальных, не красных и не зелёных. Отсюда следует, что число красных шариков равно числу зелёных шариков. Это относится и к шарикам любого цвета. Значит, 15 шариков состоят из нескольких равных групп шариков разного цвета, то есть число шариков каждого цвета одинаково и является делителем15. Делители $15: 1, 3, 5, 15$. Если каждого цвета по одному шарику, всего шариков 16. Если каждого цвета по три шарика, всего шариков 18. Если каждого цвета по 5 шариков, всего шариков 20. Если каждого цвета по 15 шариков, всего шариков 30.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За каждый верный обоснованный ответ – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

5. Лесные гномы или честные (всегда говорят правду), или лжецы (всегда лгут). На поляне собрались 7 гномов из одного леса и 7 гномов из другого леса. Все гномы из одного леса знают, кто из них лжец, а кто честный, а гномы из разных лесов не знают друг про друга. Каждый гном сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $14 \cdot 13 = 182$ фразы. При этом каждый гном каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это честный гном из нашего леса», 2) «Это лжец из нашего леса», 3) «Не знаю, кто он». Никакие два гнома не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Ответ.49 раз или 42 раза.

Решение. Честные гномы из одного леса должны были сказать друг про друга фразу 1, а из разных лесов – фразу 3. Поскольку никакие два гнома не сказали друг про друга одинаковые фразы, честных не больше одного. Пусть честный гном один. Тогда он сказал про гномов из своего леса фразу 2, а про гномов из другого леса фразу 3 (7 раз). Гномы из его леса могли сказать про него фразу 2 или 3, но поскольку фразы должны быть разные, они сказали фразу 3 (6 раз). Гномы из другого леса могли сказать про него фразу 1 или 2. Остальные гномы из одного и того же леса в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 3, всего фраз было сказано $7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = 72$, половина из них – фраза 3. Остальные гномы из разных лесов – лжецы, поэтому в каждой паре сказали друг про друга фразы 1 и 2. Всего фраза 3 прозвучала $7 + 6 + 36 = 49$ раз.

Если все гномы были лжецами, то про гномов из своего леса они говорили фразы 1 и 3 ($7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 84$ раз), половина из них – фраза 3, а про гномов из другого леса фразы 1 и 2.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка – 15 баллов. Верно рассмотрен существенный случай – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Дан верный ответ без объяснений – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Только неверный ответ – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

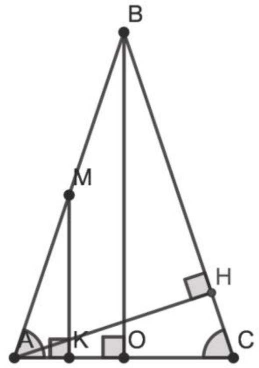
Вариант 1

1. На доске написаны числа $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. Вася стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.
Ответ. 91.
Решение. Сумма чисел от 4 до 14 равна 99. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 95. Давайте последовательно перебирать варианты.
• Если сумма 95, то стереть Вася мог только число 4; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 19: $14 + 5 = 13 + 6 = 12 + 7 = 11 + 8 = 10 + 9$.
• Если сумма 94, то стереть Вася мог только число 5; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 47: $14 + 13 + 12 + 8 = 11 + 10 + 9 + 7 + 6 + 4$.
• Если сумма 93, то стереть Вася мог только число 6; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 31: $14 + 13 + 4 = 12 + 11 + 8 = 10 + 9 + 7 + 5$.
• Если сумма 92, то стереть Вася мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 46: $14 + 13 + 11 + 8 = 12 + 10 + 9 + 6 + 5 + 4$.
• Если Вася стёр число 8, то на доске остались числа с суммой 91: их можно было бы разбить или на 7 групп с суммой 13 или на 13 групп с суммой 7, или на 91 группы с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 14, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 14; значит, в этом случае разбить числа на группы с одинаковой суммой не получится.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, основанный на рассуждении, что число* $91 = 7 \cdot 13$, *а в наборе чисел присутствует число 14 – 5 баллов. Только верный ответ – 3 балла. Следующие 8 критериев могут суммироваться: доказано, что сумма не может равняться 95 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 94 – 4 балла; показано, что сумма не может равняться 93 –*

4 балла; показано, что сумма не может равняться 92 – 4 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 95 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 94 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 93 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 92 – 2 балла.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 10$.

Ответ. 200.



Решение. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведём высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK: KO = AM: MB$, значит $AO = 2AK = 20$. Тогда $AC = 2AO = 40$, $AB = 2AC = 80$. Значит, периметр равен $80 + 80 + 40 = 200$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдено, что $AC = 40$ – 14 баллов. Доказано, что треугольники MAK и AHC равны – 8 баллов. Замечено, но не доказано, что треугольники MAK и AHC равны – 4 балла.*

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 103 до 202. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ. Нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 202: $151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199$. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 202. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что в некоторой строчке или столбце есть хотя бы 2 числа из набора 11 простых чисел, но не сказано, что от 103 до 202 нет чисел кратных данным – 16 баллов. В решении присутствует идея использовать 11 простых чисел или аналогичная без дальнейших продвижений – 10 баллов. В решении присутствует идея использовать простые числа без дальнейших продвижений – 4 балла. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен частный случай расстановки чисел – 0 баллов.*

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: А, Б, В, И, О, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

Ответ. 2646 слов.

Решение 1. Сначала перечислим грубые скелеты слов, обозначив места гласных через Г, а места групп согласных – через С: ГСГ, ГСГС, СГСГ, СГСГС. Сделаем скелеты более подробными, чтобы видеть число букв в слове. Место гласной обозначим через *г*, согласной – через *с*. Группа С может быть заменена на *с* или *сс*. Так, из СГСГ получим 4 подробных скелета: *сгсг, сгссг, ссгсг* и *ссгссг*. В всего получится $2+4+4+8=18$ подробных скелетов: *гсг, гссг*; *гсгс, -, гсссгс, гссгсс*; *сгсг, сгссг, ссгсг, ссгссг*; *сгсгс, сгсгсс, сгссгс, сгссгсс, ссгсгс, ссгсгсс, ссгссгс, ссгссгсс*. Сгруппируем по длинам: длины 3, 4, 5, 6, 7, 8 встречаются соответственно 1, 3, 5, 5, 3, 1 раз. Осталось заметить, что число слов для каждого подробного скелета одинаково. Например, в 6 –буквенном есть две гласные и 4 согласные буквы. Для каждой гласной есть 3 варианта, для каждой согласное – 2 варианта, выбор независим, поэтому для данного скелета есть всего $3^2 \cdot 2^4 = 144$ слова. А всего 6 –буквенных слов будет $5 \cdot 144$. Так, вычисляя и суммируя по всем размерам, получим

$$1 \cdot 3^2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 3^2 \cdot 2^6 = 2646.$$

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ из-за одной или нескольких арифметических ошибок – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены случаи повтора гласных или согласных букв – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены некоторые скелеты слов – до 10 баллов. Доказано, что существует ровно 18 скелетов слов – 8 баллов. Найдены все 18 скелетов слов, но не доказано, что других нет – 6 баллов. Найдены менее 18 скелетов слов – 4 балла. Замечено, что минимальная длина слова – 3, а максимальная – 8 – 2 балла. Есть небольшие продвижения в решении – 2 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Решение 2. Известно, что гласных букв всегда две, тогда наше слово можно представить в виде (1)Г(2)Г(3), где на местах (1), (2), (3) могут стоять согласные буквы. Различных расстановок гласных букв $3 \cdot 3 = 9$. На позиции (2) может стоять 1 или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки равно $2 + 2 \cdot 2 = 6$. Далее на местах (1) и (3) могут стоять 0, 1 или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки на каждой из этих позиций равно $1 + 2 + 2 \cdot 2 = 7$. Отметим, что количество способов расставить согласные буквы на 0 мест равно 1. Тогда общее количество различных слов равно $9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 = 2646$.

5. Натуральные числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 + xy$ делится на $xy(x-y)$. Докажите, что наименьшее общее кратное чисел x и y является точным квадратом.

Решение. Пусть d – наибольший общий делитель чисел x и y. Положим $x = dx_1$ и $y = dy_1$. Тогда числа x_1 и y_1 взаимно просты, НОК$(x,y) = dx_1y_1$, а делимость $x^3 + y^3 + xy$ на $xy(x-y)$ влечёт делимость числа $n = dx_1^3 + dy_1^3 + x_1y_1$ на $dx_1y_1(x_1 - y_1)$ и, в частности, делимость на d. Следовательно, x_1y_1 делится на d. Заметим, что n делится на x_1 и, значит, dy_1^3 делится на x_1. Но поскольку числа x_1 и y_1 взаимно просты, d делится на x_1. Аналогично, проверяется, что d делится на y_1. Снова используя взаимную простоту чисел x_1 и y_1, получаем, что d делится на x_1y_1. Таким образом, $d = x_1y_1$. Стало быть, НОК$(x,y) = dx_1y_1 = d^2$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что d делится на x_1 или на y_1 – 15 баллов. Доказано, что dy_1^3 делится на x_1 или dx_1^3 делится на y_1, или аналогичное утверждение – 10 баллов. Доказано, что x_1y_1 делится на d или аналогичное утверждение – 5 баллов. Рассмотрен пример конкретных чисел x и y – 0 баллов.*

Вариант 2

1. На доске написаны числа $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$. Петя стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.

Ответ. 121.

Решение. Сумма чисел от 4 до 16 равна 130. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 126. Давайте последовательно перебирать варианты.

• Если сумма 126, то стереть Петя мог только число 4; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 63: $16 + 15 + 14 + 13 + 5 = 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6$.

• Если сумма 125, то стереть Петя мог только число 5; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 25: $16 + 9 = 15 + 10 = 14 + 11 = 13 + 12 = 8 + 7 + 6 + 4$.

• Если сумма 124, то стереть Петя мог только число 6; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 62: $16 + 15 + 14 + 13 + 4 = 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 5$.

• Если сумма 123, то стереть Петя мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 41: $16 + 15 + 10 = 14 + 13 + 9 + 5 = 12 + 11 + 8 + 6 + 4$.

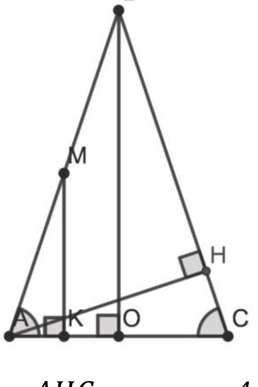
• Если сумма 122, то стереть Петя мог только число 8; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 61: $16 + 15 + 14 + 12 + 4 = 13 + 11 + 10 + 9 + 7 + 6 + 5$.

• Если Петя стёр число 9, то число на доске остались числа с суммой 121: их можно было бы разбить или на 11 групп с суммой 11 или на 121 групп с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 16, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 16; значит, в этом случае разбить числа на группы с одинаковой суммой не получится.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, основанный на рассуждении, что число* $121 = 11 \cdot 11$, *а в наборе чисел присутствует число 16 – 5 баллов. Только верный ответ – 3 балла. Следующие 10 критериев могут суммироваться: доказано, что сумма не может равняться 126 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 125 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 124 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 123 – 3 балла; доказано, что сумма не может равняться 122 – 3 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 126 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 125 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 124 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 123 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 122 – 2 балла.*

2. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 12$.

Ответ. 240.



Решение. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведём высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK{:}KO = AM{:}MB$, значит $AO = 2AK = 24$. Тогда $AC = 2AO = 48$, $AB = 2AC = 96$. Значит, периметр равен $96 + 96 + 48 = 240$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдено, что* $AC = 48$ *– 14 баллов. Доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 8 баллов. Замечено, но не доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 4 балла.*

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 104 до 203. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ. Нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 203: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 203. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что в некоторой строчке или столбце есть хотя бы 2 числа из набора 11 простых чисел, но не сказано, что от 104 до 203 нет чисел кратных данным – 16 баллов. В решении присутствует идея использовать 11 простых чисел или аналогичная без дальнейших продвижений – 10 баллов. В решении присутствует идея использовать простые числа без дальнейших продвижений – 4 балла. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен частный случай расстановки чисел – 0 баллов.*

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: Е, Г, Д, У, Ю, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

Ответ. 2646 слов.

Решение. Сначала перечислим грубые скелеты слов, обозначив места гласных через Г, а места групп согласных – через С: ГСГ, ГСГС, СГСГ, СГСГС. Сделаем скелеты более подробными, чтобы видеть число букв в слове. Место гласной обозначим через *г*, согласной – через *с*. Группа С может быть заменена на *с* или *сс*. Так, из СГСГ получим 4 подробных скелета: *сгсг, сгссг, ссгсг* и *ссгссг*. В всего получится $2+4+4+8=18$ подробных скелетов: *гсг, гссг*; *гсгс, гсгсс, гссгс, гссгсс*; *сгсг, сгссг, ссгсг, ссгссг*; *сгсгс, сгсгсс, сгссгс, сгссгсс, ссгсгс, ссгсгсс, ссгссгс, ссгссгсс*. Сгруппируем по длинам: длины 3, 4, 5, 6, 7, 8 встречаются соответственно 1, 3, 5, 5, 3, 1 раз. Осталось заметить, что число слов для каждого подробного скелета одинаково. Например, в 6 –буквенном есть две главнсые и 4 согласные буквы. Для каждой гласной есть 3 варианта, для каждой согласное – 2 варианта, выбор независим, поэтому для данного скелета есть всего $3^2 \cdot 2^4 = 144$ слова. А всего 6 –буквенных слов будет $5 \cdot 144$. Так, вычисляя и суммируя по всем размерам, получим

$$1 \cdot 3^2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 3^2 \cdot 2^6 = 2646.$$

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ из-за одной или нескольких арифметических ошибок – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены случаи повтора гласных или согласных букв – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены некоторые скелеты слов – до 10 баллов. Доказано, что существует ровно 18 скелетов слов – 8 баллов. Найдены все 18 скелетов слов, но не доказано, что других нет – 6 баллов. Найдены менее 18 скелетов слов – 4 балла. Замечено, что минимальная длина слова – 3, а максимальная – 8 – 2 балла. Есть небольшие продвижения в решении – 2 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Решение 2. Известно, что гласных букв всегда две, тогда наше слово можно представить в виде $(1)\Gamma(2)\Gamma(3)$, где на местах $(1),(2),(3)$ могут стоять согласные буквы. Различных расстановок гласных букв $3\cdot 3=9$. На позиции (2) может стоять 1 или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки равно $2+2\cdot 2=6$. Далее на местах (1) и (3) могут стоять $0,1$ или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки на каждой из этих позиций равно $1+2+2\cdot 2=7$. Отметим, что количество способов расставить согласные буквы на 0 мест равно 1. Тогда общее количество различных слов равно $9\cdot 6\cdot 7\cdot 7=2646$.

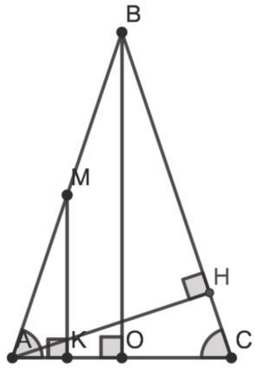
5. Целые числа k, m и n удовлетворяют равенству
$$(k-5)^2+(m-12)^2-(n-13)^2=k^2+m^2-n^2.$$
Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.
Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $10k+24m-26n=0$. Тогда
$$13^2(k^2+m^2-n^2)=(13k)^2+(13m)^2-(5k+12m)^2=(12k-5m)^2.$$
Следовательно, $12k-5m$ делится на 13, т.е. $12k-5m=13a$ для некоторого целого a и
$$k^2+m^2-n^2=\frac{(12k-5m)^2}{13^2}=a^2.$$
Комментарий. *Верное обоснованное доказательство – 20 баллов. Доказано, что левая или правая части является полным квадратом – 16 баллов. Получено выражение* $10k+24m-26n=0$ *или аналогичное – 5 баллов.*

Вариант 3

1. На доске написаны числа $7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17$. Саша стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.
Ответ. 121.
Решение. Сумма чисел от 7 до 17 равна 132. Если стереть хотя бы одно число, то сумма оставшихся чисел не превосходит 125. Давайте последовательно перебирать варианты.
• Если сумма 125, то стереть Саша мог только число 7; тогда оставшиеся числа можно разбить на пять групп с суммой 26: $8+17=9+16=10+15=11+14=12+13$.
• Если сумма 124, то стереть Саша мог только число 8; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 62: $17+16+15+14=13+12+11+10+9+7$.
• Если сумма 123, то стереть Саша мог только число 9; тогда оставшиеся числа можно разбить на три группы с суммой 41: $17+16+8=15+14+12=13+11+10+7$.
• Если сумма 122, то стереть Саша мог только число 10; тогда оставшиеся числа можно разбить на две группы с суммой 61: $17+16+14+13=14+12+11+9+8+7$.
• Если Саша стёр число 11, то число на доске остались числа с суммой 121: их можно было бы разбить или на 11 групп с суммой 11 или на 121 групп с суммой 1; но в какую-то группу попадёт число 17, поэтому сумма в этой группе будет хотя бы 17; значит, в этом случае разбить числа на группы с одинаковой суммой не получится.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Получен верный ответ, основанный на рассуждении, что число* $121=11\cdot 11$, *а в наборе чисел присутствует число 16 – 5 баллов. Только верный ответ – 3 балла. Следующие 8 критериев могут суммироваться: доказано, что сумма не может равняться 125 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 124 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 123 – 4 балла; доказано, что сумма не может равняться 122 – 4 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 125 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 124 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 123 – 2 балла; без доказательства сказано, что сумма не может равняться 122 – 2 балла.*

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 14$.

Ответ. 280.



Решение. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведём высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK{:}\,KO = AM{:}\,MB$, значит $AO = 2AK = 28$. Тогда $AC = 2AO = 56$, $AB = 2AC = 112$. Значит, периметр равен $112 + 112 + 56 = 280$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Найдено, что* $AC = 56$ *– 14 баллов. Доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 8 баллов. Замечено, но не доказано, что треугольники* MAK *и* AHC *равны – 4 балла.*

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 105 до 204. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 204: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 204. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что в некоторой строчке или столбце есть хотя бы 2 числа из набора 11 простых чисел, но не сказано, что от 105 до 204 нет чисел кратных данным – 16 баллов. В решении присутствует идея использовать 11 простых чисел или аналогичная без дальнейших продвижений – 10 баллов. В решении присутствует идея использовать простые числа без дальнейших продвижений – 4 балла. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен частный случай расстановки чисел – 0 баллов.*

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: О, К, М, Е, Я, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

Ответ. 2646 слов.

Решение. Сначала перечислим грубые скелеты слов, обозначив места гласных через Г, а места групп согласных – через С: ГСГ, ГСГС, СГСГ, СГСГС. Сделаем скелеты более подробными, чтобы видеть число букв в слове. Место гласной обозначим через *г*, согласной – через *с*. Группа С может быть заменена на *с* или *сс*. Так, из СГСГ получим 4 подробных скелета: *сгсг, сгссг, ссгсг* и *ссгссг*. В всего получится $2+4+4+8=18$ подробных скелетов: *гсг, гссг*; *гсгс, гсгсс, гссгс, гссгсс*; *сгсг, сгссг, ссгсг, ссгссг*; *сгсгс, сгсгсс, сгссгс, сгссгсс, ссгсгс, ссгсгсс, ссгссгс, ссгссгсс*. Сгруппируем по длинам: длины 3, 4, 5, 6, 7, 8 встречаются соответственно 1, 3, 5, 5, 3, 1 раз. Осталось заметить, что число слов для каждого подробного скелета одинаково. Например, в 6 −буквенном есть две главнсые и 4 согласные буквы. Для каждой гласной есть 3 варианта, для каждой согласное – 2 варианта, выбор независим, поэтому для данного скелета есть всего $3^2\cdot 2^4=144$ слова. А всего 6 −буквенных слов будет $5\cdot 144$. Так, вычисляя и суммируя по всем размерам, получим

$$1\cdot 3^2\cdot 2^1+3\cdot 3^2\cdot 2^2+5\cdot 3^2\cdot 2^3+5\cdot 3^2\cdot 2^4+3\cdot 3^2\cdot 2^5+1\cdot 3^2\cdot 2^6=2646.$$

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ из-за одной или нескольких арифметических ошибок – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены случаи повтора гласных или согласных букв – 16 баллов. При верном рассуждении получен неверный ответ, так как не учтены некоторые скелеты слов – до 10 баллов. Доказано, что существует ровно 18 скелетов слов – 8 баллов. Найдены все 18 скелетов слов, но не доказано, что других нет – 6 баллов. Найдены менее 18 скелетов слов – 4 балла. Замечено, что минимальная длина слова – 3, а максимальная – 8 – 2 балла. Есть небольшие продвижения в решении – 2 балла. Только верный ответ – 0 баллов.*

Решение 2. Известно, что гласных букв всегда две, тогда наше слово можно представить в виде $(1)\Gamma(2)\Gamma(3)$, где на местах $(1),(2),(3)$ могут стоять согласные буквы. Различных расстановок гласных букв $3\cdot 3=9$. На позиции (2) может стоять 1 или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки равно $2+2\cdot 2=6$. Далее на местах (1) и (3) могут стоять $0,1$ или 2 согласные буквы, тогда количество вариантов для их расстановки на каждой из этих позиций равно $1+2+2\cdot 2=7$. Отметим, что количество способов расставить согласные буквы на 0 мест равно 1. Тогда общее количество различных слов равно $9\cdot 6\cdot 7\cdot 7=2646$.

5. Целые числа k, m и n удовлетворяют равенству

$$(k+3)^2+(m+4)^2-(n+5)^2=k^2+m^2-n^2.$$

Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.

Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $6k+8m-10n=0$. Тогда

$$5^2(k^2+m^2-n^2)=(5k)^2+(5m)^2-(3k+4m)^2=(4k-3m)^2.$$

Следовательно, $4k-3m$ делится на 5, т.е. $4k-3m=5a$ для некоторого целого a и

$$k^2+m^2-n^2=\frac{(4k-3m)^2}{5^2}=a^2.$$

Комментарий. *Верное обоснованное доказательство – 20 баллов. Доказано, что левая или правая части является полным квадратом – 16 баллов. Получено выражение* $6k+8m-10n=0$ *или аналогичное – 5 баллов.*

Вариант 4

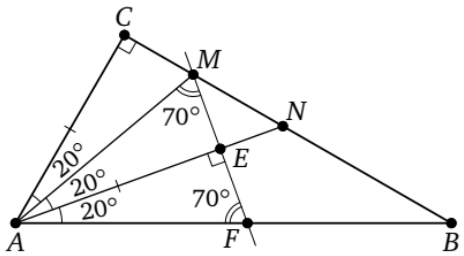
1. Две неубывающие последовательности неотрицательных целых чисел начинаются с разных чисел, и каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Десятые члены этих последовательностей совпадают. Найдите наименьшее возможное значение десятого члена.

Ответ. 1870.

Решение. Поскольку $a_3=a_1+a_2$, то $a_4=a_2+a_3=a_1+2a_2$, $a_5=a_3+a_4=2a_1+3a_2$, $a_6=3a_1+5a_2$, …, $a_{10}=21a_1+34a_2$. Аналогично, $b_{10}=21b_1+34b_2$. Пусть $a_1<b_1$. Возьмем для минимизации выражения $21a_1+34a_2$ число $a_1=0$. Тогда $34a_2=21b_1+34b_2$, и b_1 должно делиться на 34, при этом $b_1\neq a_1=0$. Поэтому минимальное

возможное значение $b_1 = 34$. Получаем $34a_2 = 21 \cdot 34 + 34b_2$, или $a_2 = 21 + b_2$. Число b_2 мы выбираем наименьшим, но не меньше b_1, то есть b_2 =34. Тогда значение десятого члена равно $21 \cdot 34 + 34 \cdot 34 = 1870$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Обоснованно получено, что* $b_2 = 34$ *– 16 баллов. Обоснованно получено, что* $a_1 = 0$, *а* $b_1 = 34$ *или наоборот – 8 баллов. Обоснованно получено, что* $b_{10} = 21b_1 + 34b_2$ *или* $a_{10} = 21a_1 + 34a_2$ *– 6 баллов. Только верный ответ – 2 балла.*

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. На катете BC отмечены точки M и N так, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$. Пусть E и F – точки пересечения прямой, проходящей через точку M и отрезков AN и AB соответственно. Найдите AB, если известно, что $AE = 10$, $\angle ANB = 130^\circ$ и $\angle BFM = 110^\circ$.
Ответ. 20.
Решение. Из условия следует, что $\angle ANC = 50^\circ$. Тогда в прямоугольном треугольнике ANC имеем $CAN = 40^\circ$. Отсюда следует, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB = 20^\circ$. Так как $\angle BFM = 110^\circ$, получаем, что $\angle AFM = 70^\circ$. Но тогда в треугольнике MAF получаем $\angle AMF = 70^\circ$. Значит, треугольник MAF равнобедренный и его биссектриса AE является высотой. Но тогда прямоугольные треугольники AME и AMC равны (AM – общая гипотенуза, $\angle CAM = MAE$). Поэтому $AC = a$. Наконец, поскольку в прямоугольном треугольнике ABC угол CAB равен 60°, гипотенуза равна $AB = 2AC = 2a$.



Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Следующие 4 критерия могут суммироваться: Найдено, что* $\angle CAB = 60°$ *- 4 балла. Доказано, что* $AE = AC$ *– 4 балла. Доказано, что треугольник* MAF *равнобедренный – 5 баллов. Доказано, что* $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB = 20^\circ$ *- 5 баллов.*

3. Вася придумал новую шахматную фигуру X, которая может бить фигуру, которая находится на растоянии 5 сантиметров от неё (расстояние между фигурами – это расстояние между центрами клеток, в которых находятся фигуры). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга фигур X можно расставить на квадратной клетчатой доске 8×8 со стороной клетки, равной одному сантиметру?
Ответ. 32.
Решение. Заметим, что при шахматной раскраске доски фигура X бьёт только клетки цвета, противоположного цвету клетки, на которой стоит он сам.
Примечание. Идея использовать шахматную раскраску сама по себе не является оценкой.
Оценка. Разметим поле следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	D	E	F	G	H
I	J	K	L	M	O	P	Q
R	S	T	U	V	W	X	Z
5	6	7	8	1	2	3	4
E	F	G	H	A	B	C	D
M	O	P	Q	I	J	K	L
V	W	X	Z	R	S	T	U

На каждой паре клеток, помеченной одинаковыми символами, может стоять максимум одна фигура X.
Пример. Покрасим доску в шахматном порядке и расставим фигуры X на клетках чёрного цвета.

Комментарий. *Верное решение, содержащее в себе оценку+пример – 20 баллов. Получена верная оценка, что максимум 32 фигуры X – может быть на доске – 14 баллов. Замечено, что при шахматной раскраске фигура X бьёт только клетки противоположного цвета – 6 баллов (+ 4 балла за приведённый пример). Только пример на расстановку 32 фигур – 4 балла. Замечено, что фигура X может совершать шаги на* $(3;\ 4), (0;\ 5)$ *или аналогичные – 2 балла.*

4. На клетчатой доске 21×21 фишку двигали из одного угла в другой, делая ходы только вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Ходов в каждом направлении было поровну. Найдите число возможных маршрутов, если известно, что фишку не могли двигать два хода подряд по диагонали.

Ответ. $C_{20}^{10} \cdot C_{21}^{10}$.

Решение. Очевидно, что фишка двигалась из левого нижнего угла в правый верхний. Она сдвинулась на 20 клеток вправо и на 20 вверх, итого на 40. Ход по диагонали увеличивал суммарный сдвиг на 2, остальные ходы – на 1. Если в каждом направлении было сделано x ходов, то получаем уравнение $x + x + 2x = 40$, откуда находим $x = 10$. Обозначая ходы буквами П (вправо), В (вверх) и Д (по диагонали) закодируем каждый маршрут словами из 30 букв, где всех букв по 10. Соответствие однозначное. Сначала составим скелет: слово их 10 букв П и 10 букв В, это можно сделать C_{20}^{10} способами. Затем расставим 10 букв Д по 21 месту (19 промежутков и 2 края). Это можно сделать C_{21}^{10} способами. Ответ равен произведению: $C_{20}^{10} \cdot C_{21}^{10}$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Доказано, что по вертикали и горизонтали можно сделать* C_{20}^{10} *путей – 12 баллов. Получено, что в каждом направлении было сделано по 10 ходов – 5 баллов. Замечено, что всего движений было 40 – 2 балла. Только верный ответ – 2 балла.*

5. Натуральные числа k, m и n таковы, что $(k - m)$ – простое число и $3n^2 = n(k + m) + km$. Докажите, что число $8n + 1$ является точным квадратом.

Решение. Обозначим $p = k - m$, $q = k + m$. Тогда имеем $12n^2 = 4nq + q^2 - p^2$. Откуда

$$p^2 = q^2 + 4nq - 12n^2 = (q - 2n)(q + 6n).$$

Поскольку p – простое число, то $q + 6n = p^2$, $q - 2n = 1$, откуда получаем, что $8n + 1 = p^2$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 20 баллов. Замечено, что одно из чисел* $(q - 2n), (q + 6n)$ *равно* 1*, а другое* p^2*- 14 баллов. Доказано, что* $(k - m)^2 = (q - 2n)(q + 6n)$ *– 8 баллов. Введена замена* $p = k - m$, $q = k + m$ *без дальнейших продвижений – 4 балла.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

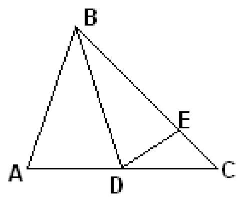
Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

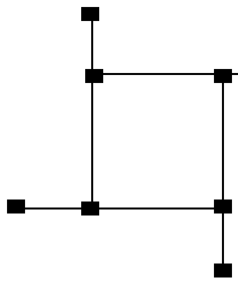
1. Для $x = \sqrt{7} + 1$ найдите значение выражения $x^5 - 5x^4 + 36x$.
Ответ.-108.
Решение.$x = \sqrt{7} + 1, (x-1)^2 = 7, x^2 - 2x = 6$.
$x^5 - 5x^4 + 36x = x^3(x^2 - 2x) - 3x^4 + 36x = 6x^3 - 3x^4 + 36x = 3x^2(2x - x^2) + 36x = -18x^2 + 36x = -18(x^2 - 2x) = -108$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. В треугольнике ABC точкаD лежит на стороне $AC, \angle ABD = \angle CBD, AB = BD = 5$, $BC = 9$. Найдите CD.
Ответ.6.
Решение.Отложим на стороне BC отрезок BE, равный BD. Тогда $EC = 9 - 5 = 4$.Треугольники ABD и DBE равны, следовательно, $\angle ADB = \angle DEB$, и $\angle BDC = \angle CED$. в треугольникахBDC и DEC угол C общий, $\angle BDC = \angle CED$(как смежные с равными углами), следовательно, треугольники BDC и DEC подобны. Тогда $\frac{CD}{BC} = \frac{EC}{CD}$, откуда $CD^2 = BC \cdot EC = 9 \cdot 4 = 36. CD = 6$.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верное решение не закончено – 10 баллов. Без доказательства использовано утверждение «$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot CD$» или формула длины биссектрисы – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. На ровной площадке сидят 8 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 6 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).
Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложенная схема размещения правдоподобна, но не имеет описания, и изображена неточно – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. На плоскости поставили 70 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 500 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета. *Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.*
Решение. Обозначим максимальное число точек одного цвета a. Найдется не менее 18 точек одного цвета, так как $17 \cdot 4 = 68 < 70$, то есть $a \geq 18$.Соединяя точки данного цвета, получаем $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}$ треугольников. Каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам. Действительно, предположим, что какой-то отрезок служит основанием трём равнобедренным треугольникам. Тогда третьи вершины этих трёх треугольников лежат на серединном перпендикуляре отрезка, то есть на одной прямой, что противоречит условию. Итак, равнобедренных треугольников с вершинами в точках данного цвета не больше, чем $2 \cdot \frac{a\cdot(a-1)}{2} = a \cdot (a-1)$. Тогда неравнобедренных треугольников с вершинами данного цвета не менее A= $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6} - a \cdot (a-1) = a \cdot (a-1)\left(\frac{a-2}{6} - 1\right) = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-8)}{6}$. При $a = 18$ число $A = 510 > 500$. При $a > 18$ число $A > 510 > 500$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечен факт, что каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам, но строгого доказательства нет – 10 баллов. Вместо этого факта используются оценки, полученные из примеров – не больше 10 баллов. Рассмотрен частный случай размещения точек – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Целое число n делится на 7 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k, что $\frac{n}{7} = 3m^2 + k^2$.

Решение. Пусть $n = 7c$, тогда $7c = 3a^2 + b^2 = 7a^2 + (b-2a)(b+2a)$. Следовательно, $(b-2a)(b+2a)$ делится на 7. Пусть $b - 2a = 7d$, тогда $\frac{n}{7} = a^2 + d(b+2a) = a^2 + d(7d+4a) = 7d^2 + a^2 + 4ad = (a+2d)^2 + 3d^2$. Таким образом, $m = d, k = a + 2d$, где $d = \frac{b-2a}{7}$. Если $b + 2a = 7d$, то $\frac{n}{7} = a^2 + d(7d - 4a) = 7d^2 + a^2 - 4ad = (a-2d)^2 + 3d^2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть некоторое продвижение – до 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

Вариант 2

1. Для $x = \sqrt{11} - 1$ найдите значение выражения $x^5 + 7x^4 + 100x$.

Ответ. 500.

Решение. $x = \sqrt{11} - 1, (x+1)^2 = 11, x^2 + 2x = 10.$

$$x^5 + 7x^4 + 100x = x^3(x^2+2x) + 5x^4 + 100x = 10x^3 + 5x^4 + 100x = 5x^2(2x + x^2) + 100x = 50x^2 + 100x = 50(x^2+2x) = 500.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. Внутри равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB < CD = 10$ см, $BC = AD$) выбрана точка E, отстоящая от вершин A, B, C, D соответственно на $3, 4, 6, 5$ см. Найдите длину AB.

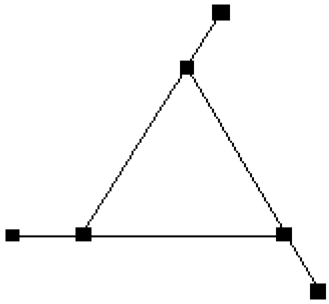
Ответ. $\frac{70}{11}$

Решение. Проведём ось симметрии трапеции, и опустим из точки E перпендикуляр EF на ось симметрии. Обозначим a длину EF, а расстояния от точки F до AB и CD обозначим соответственно b и c. Пусть длина AB равна $2x$. Тогда $(x-a)^2 + b^2 = 9, (x+a)^2 + b^2 = 16$. Вычитая, получаем $4ax = 7$. Аналогично, $(5-a)^2 + c^2 = 25, (5+a)^2 + c^2 = 36$. Вычитая, получаем $20a = 11$. Отсюда $a = \frac{11}{20}$ и $x = \frac{35}{11}, AB = \frac{70}{11}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Без доказательства использовано утверждение «$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot CD$» или формула длины биссектрисы – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. На ровной площадке сидят 6 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 4 бельчонка. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).

Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложенная схема размещения правдоподобна, но не имеет описания, и изображена неточно – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. На листе бумаги поставили 75 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 620 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета. *Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.*

Решение.Обозначим максимальное число точек одного цвета a. Найдется не менее 19 точек одного цвета, так как $18 \cdot 4 = 72 < 75,$ то есть $a \geq 19$.Соединяя точки данного цвета, получаем $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}$ треугольников. Каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам. Действительно, предположим, что какой-то отрезок служит основанием трём равнобедренным треугольникам. Тогда третьи вершины этих трёх треугольников лежат на серединном перпендикуляре отрезка, то есть на одной прямой, что противоречит условию. Итак, равнобедренных треугольников с вершинами в точках данного цвета не больше, чем $2 \cdot \frac{a\cdot(a-1)}{2} = a \cdot (a-1)$. Тогда неравнобедренных треугольников с вершинами данного цвета не менее A= $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6} - a \cdot (a-1) = a \cdot (a-1)\left(\frac{a-2}{6} - 1\right) = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-8)}{6}$. При $a = 19$ число $A = 627 > 620$. При $a > 19$ число $A > 627 > 620$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечен факт, что каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам, но строгого доказательства нет – 10 баллов. Рассмотрен частный случай размещения точек – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Целое число nделится на19и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа mи k, что $\frac{n}{19} = 3m^2 + k^2$.

Решение. Пусть $n = 19c$, тогда $19c$ =$3a^2 + b^2$ =$19a^2 + (b-4a)(b+4a)$. Следовательно, $(b-4a)(b+4a)$ делится на 19. Пусть $b - 4a = 19d$, тогда $\frac{n}{19} = a^2 + d(b+4a) = a^2 + d(19d + 8a) = 19d^2 + a^2 + 8ad = (a+4d)^2 + 3d^2$. Таким образом, $m = d, k = a + 4d$, где $d = \frac{b-4a}{19}$.

Если $b + 4a = 19d$, то $\frac{n}{19} = a^2 + d(b-4a) = a^2 + d(19d - 8a) = 19d^2 + a^2 - 8ad = (a-4d)^2 + 3d^2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

Вариант 3

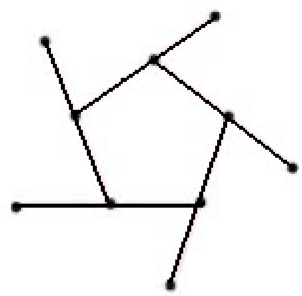
1. Для $x = \sqrt{6} + 1$ найдите значение выражения $2x^5 - 9x^4 + 50x$.
Ответ. -125.
Решение.$x = \sqrt{6} + 1, (x-1)^2 = 6, x^2 - 2x = 5.$

$$2x^5 + x^4 + 50x = 2x^3(x^2 - 2x) - 5x^4 + 50x = 10x^3 - 5x^4 + 50x = 5x^2(2x - x^2) + 50x = -25x^2 + 50x = -25(x^2 - 2x) = -125.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. В треугольнике ABCточкаD лежит на стороне $AC, \angle ABD = \angle CBD$, $AB = 5$, $BC = 16$. Докажите, что $BD < 9$.
Решение.Проведём через точкуD прямую под углом к прямой BD, равным углу BAC. Точку, в которой прямая пересекает BC, обозначим E. Заметим, что E внутренняя точка стороны BC, так как $\angle BDC > \angle BAC$ ($\angle BDC$ – внешний смежный угол и равен $\angle BAC$ $+\angle DBA$). Треугольники BDE и BAD подобны, так как $\angle ABD = \angle EBD$ по условию, $\angle BAD = \angle BDE$ по построению.Следовательно, $\frac{BE}{BD} = \frac{BD}{AB}$, то есть $BD^2 = AB \cdot BE < AB \cdot BC = 5 \cdot 16 = 80$. Тогда $BD < \sqrt{80} < 9$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Без доказательства использовано утверждение «$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot CD$» или формула длины биссектрисы – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. На ровной площадке сидят 10 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 8 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).
Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложенная схема размещения правдоподобна, но не имеет описания, и изображена неточно – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. На листе бумаги поставили 82 точки так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 900 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета. *Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.*
Решение.Обозначим максимальное число точек одного цвета a. Найдется не менее 21 точек одного цвета, так как $20 \cdot 4 = 80 < 82$, то есть $a \geq 21$.Соединяя точки данного цвета,

получаем $\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}$ треугольников. Каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам. Действительно, предположим, что какой-то отрезок служит основанием трём равнобедренным треугольникам. Тогда третьи вершины этих трёх треугольников лежат на серединном перпендикуляре отрезка, то есть на одной прямой, что противоречит условию. Итак, равнобедренных треугольников с вершинами в точках данного цвета не больше, чем $2\cdot\frac{a\cdot(a-1)}{2}=a\cdot(a-1)$. Тогда неравнобедренных треугольников с вершинами данного цвета не менее $A=\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}-a\cdot(a-1)=a\cdot(a-1)\left(\frac{a-2}{6}-1\right)=\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-8)}{6}$. При $a=21$ число $A=910>900$. При $a>21$ число $A>910>900$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Замечен факт, что каждый отрезок может служить основанием не более чем двум равнобедренным треугольникам, но строгого доказательства нет – 10 баллов. Рассмотрен частный случай размещения точек – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Целое число n делится на 67 и может быть представлено в виде $n=3a^2+b^2$, где a,b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k, что $\frac{n}{67}=3m^2+k^2$.

Решение. Пусть $n=67c$, тогда $67c=3a^2+b^2=67a^2+(b-8a)(b+8a)$. Следовательно, $(b-8a)(b+8a)$ делится на 67. Пусть $b-8a=67d$, тогда $\frac{n}{67}=a^2+d(b+8a)=a^2+d(67d+16a)=67d^2+a^2+16ad=(a+8d)^2+3d^2$. Таким образом, $m=d, k=a+8d$, где $d=\frac{b-2a}{7}$. Если $b+8a=67d$, то $\frac{n}{67}=a^2+d(b-8a)=a^2+d(67d-16a)=67d^2+a^2-16ad=(a-8d)^2+3d^2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $S=(x^2-3x+1)(2y^2-6y+5)$, если известно, что $x^2+y^2=8,\ x+y=3$.

Ответ. 2.

Решение. Поскольку $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy,\ xy=\frac{9-8}{2}=\frac{1}{2}$. По теореме Виета числа x,y являются корнями квадратного уравнения $z^2-3z+\frac{1}{2}=0$. Поэтому $x^2-3x+1=\left(x^2-3x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ 2y^2-6y+5=2\left(y^2-3y+\frac{1}{2}\right)+4=4,\ \frac{1}{2}\cdot 4=2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle B=\angle C,\ \angle D=90°,\ AB=2CD$. Найдите угол между биссектрисой $\angle ACB$ и CD.

Ответ. 90°.

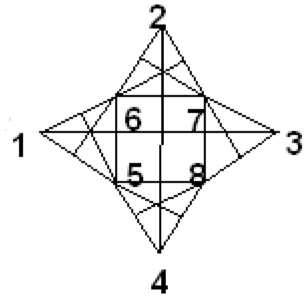
Решение. Пусть биссектриса $\angle ACB$ пересекает сторону AB в точке K, и пусть L – середина стороны AB. Продолжим стороны BC и AD до пересечения в точке M. $LBCD$ – равнобедренная трапеция (равные боковые стороны и углы при основании). Значит, LD параллельно BM и LD является средней линией треугольника ABM. $AD=DM$, то есть CD– медиана треугольника ACM, но CDи высота этого треугольника. Следовательно, треугольник ACM равнобедренный иCD является также биссектрисой. Получаем равенства: $\angle DCK = \angle DCA + \angle ACK = \frac{\angle \mathrm{ACM}}{2} + \frac{\angle \mathrm{ACB}}{2} = \frac{180^{\circ}}{2} = 90°$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

3. Можно ли посадить на ровной площадке 8 бельчат так, что на каждом серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему двух бельчат, сидят не менее двух бельчат?

Ответ.Да.

Решение. Построим квадрат, и на каждой стороне квадрата построим вовне равносторонний треугольник (см. рисунок). 8 вершин треугольников являются точками, в которые можно посадить бельчат. Далее запись(a,b)– c,dбудет обозначать, что серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки a и b, проходит через точки c и d. $(1,2)$– $6,8$; $(1,3)$– $2,4$; $(1,4)$– $5,7$; $(1,5)$– $6,2$. В последнем случае рассмотрим серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки 1 и 5. Он проходит через точку 6, и образует с отрезком, соединяющим точки 2 и 6, угол, равный $30° + 90° + 60° = 180°$. Отрезкиколлинеарны и имеют общую точку, то есть лежат на одной прямой. Аналогично $(1,6)$– $5,4$. $(1,7)$– $4,6$. В последнем случае рассмотрим серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки 1 и 7. Треугольник с вершинами 1, 6, 7 является равнобедренным, поэтому серединный перпендикуляр $(1,7)$проходит через точку 6. Докажем, что отрезок между точками 1 и 4 равен отрезку между точками 4 и 7. Треугольники с вершинами$1,4,5$ и $4,7,8$ равны, так как у каждого из них есть две стороны, равны 1, а угол между ними равен $360° - 60° - 90° - 60° = 150°$ для треугольника со сторонами $1,4,5$ и $60° + 90° = 150°$для треугольника со сторонами $4,7,8$. Значит, треугольник с вершинами 1,4, 7 является равнобедренным, поэтому серединный перпендикуляр $(1,7)$проходит через точку 4. Аналогично $(1,8)$– $2,5$. Мы рассмотрели случаи, когда хотя бы одна из точек является вершиной треугольника. Остались очевидные случаи, когда обе точки – вершины квадрата. $(5,6)$– $1,3$; $(5,7)$– $6,8$; $(5,8)$– $2,4$. Ввиду симметрии фигуры утверждение, что на каждом серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему две занумерованные точки, находятся две занумерованные точки, справедливо.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Записано 60 натуральных чисел, каждое из которых не больше 60. Сумма записанных чисел равна 120. Всегда ли можно разделить записанные числа на две группы с равной суммой?

Ответ.Да.

Решение.Если все числа равны между собой, то их можно разделить на 2 группы по 30 чисел с равной суммой. Пусть есть неравные числа, возьмём два из них и обозначим их b_1 и b_2 ($b_1 < b_2$). Остальные числа занумеруем в произвольном порядке. Составим последовательность $b_1, b_2, b_1 + b_2,\ b_1 + b_2 + b_3, \dots ,\ b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{60}$. В последовательности 61 число, и хотя бы у двух чисел должны совпадать остатки от деления на 60 (так как остатков всего 60: $0, 1, \dots 59$). Заметим, что последовательность частичных сумм возрастающая, и в ней нет равных членов. Значит, остатки от деления на 60 равны у двух чисел, отличающихся на 60: $b_1 + \cdots + b_k = b_1 + \cdots + b_i + 60$. Тогда $b_{i+1} + \cdots + b_k = 60$, а остальные числа составляют вторую группу.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть рассуждения о возможных количествах единиц и двоек, чётных и нечётных чисел, и возможности их переноса, но нет строгого доказательства – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

5. Решите уравнение $(xy+1)^2 = x^3 + y$ в натуральных числах.

Ответ. $(x, y) = (2, 1)$.

Решение. Если $y \geq \sqrt{x}$, то $x^3 = (xy+1)^2 - y = x^2y^2 + (2x-1)y + 1 > x^2y^2 \geq x^3$, что невозможно. Значит, $y < \sqrt{x}$. В исходном уравнении все члены, кроме 1 слева и y справа, делятся на x. Значит, 1 и y имеют одинаковые остатки при делении на x,
$y \equiv 1\ (mod x)$, откуда $y = 1$ или $y \geq x + 1$. Однако неравенство $x + 1 < \sqrt{x}$ невозможно (так как неравенство $x^2 + x + 1 < 0$ не имеет решений). Следовательно, $y = 1$, и тогда $(x+1)^2 = x^3 + 1$, то есть $(x+1)^2 = (x+1)(x^2 - x + 1), (x+1)(x^2 - 2x) = 0$. Поскольку x натуральное число, $x = 2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Найден верный ответ, но не доказано, что нет других – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла. Только верный ответ без какого-либо решения – 1 балл.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,5. Какова вероятность, что 14 марта будет хорошая погода, если 10 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

Ответ.$\frac{21}{32}$.

Решение 1. Обозначим P_nвероятность хорошей погоды в в день n, считая 10 марта за первый день. Тогда $P_{n+1} = P_n \cdot 0{,}5 + (1 - P_n) \cdot 1 = 1 - 0{,}5P_n$. По условию $P_1 = \frac{1}{2}$. Находим последовательно $P_2 = \frac{3}{4},\ P_3 = \frac{5}{8},\ P_4 = \frac{11}{16},\ P_4 = \frac{21}{32}$.

Решение 2. Будем обозначатьдень с плохой погодой П, день с хорошей погодой Х, хороший первый день $Х_1$. День с хорошей погодой, следующий за днем с плохой погодой, будем помечать $Х_П$. Рассмотрим все возможные цепочки:

$$Х_1ХХХХ, Х_1ПХ_ПХХ,\ Х_1ПХ_ППХ_П, Х_1ХПХ_ПХ,\ Х_1ХХПХ_П, ПХ_ПХХХ,\ ПХ_ППХ_ПХ, ПХ_ПХПХ_П.$$

Найдем вероятность, учитывая, что $P(Х) = P(П) = \frac{1}{2}, P(Х_П) = 1$.

$$P = \frac{1}{32} + \frac{4}{16} + \frac{3}{8} = \frac{21}{32}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15-18 баллов. Более одной ошибки – 5 баллов. Пропущен один вариант – 15 баллов. Пропущено более одного варианта – не больше 5 баллов. Небольшая ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 10 баллов. Существенная ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3$ имеет корни a, b, c, d. Многочлен $Q(x) = x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x + 7$. Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

Ответ. 2.

Решение. Поделим $Q(x)$ на $P(x)$: $Q(x) = P(x)(x^2 - 3) + x^2 - 2x - 2$. Поскольку $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$, $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(a + b + c + d) - 8$. $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $a + b + c + d = -2$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = -1$. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 4 - 2 \cdot (-1) = 6$. Отсюда $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = 6 + 4 - 8 = 2$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Арифметическая ошибка – 15 баллов. Многочлен $Q(x)$ упрощён с использованием $P(x)$ – 10 баллов. Использована теорема Виета – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

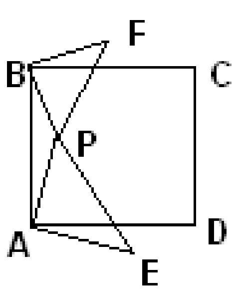
3. Сколько трёхзначных натуральных чисел нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \dots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

Ответ. 1.

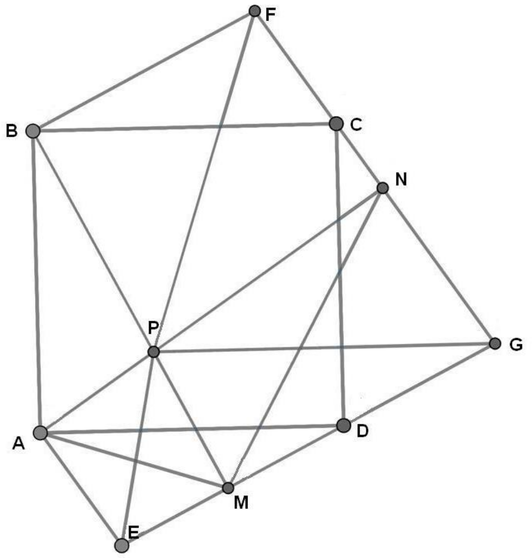
Решение. Если число n палиндром, то числа $n, n+1, n+2, \dots, n+9$ допускают нужное представление. Поэтому числа от 100 до 110 могут быть представлены нужным образом: $100 = 99 + 1$, $101 = 101 + 0$, $102 = 101 + .1..$, $110 = 101 + 9$. Если число n трёхзначно, является палиндромом, и число десятков не равно 9, то число $n + 10$ также палиндром и может быть представлено как $(n + 10) + 0$. Например, если $n = 373$, $n + 10 = 383 = 383 + 0$. Поскольку разность между трёхзначным полиномом, у которого число десятков не равно 9, и ближайшим справа палиндромом, равна 10 (поскольку $(\overline{ab+1a} - \overline{aba} = 10)$, это означает, что все такие числа допускают нужное представление. Осталось рассмотреть числа вида $n + 10$, где n палиндром, в котором цифра десятков равна 9, то есть числа $201, 302, 403, 504, 605, 706, 807, 908$. Числа $302, 403, 504, 605, 706, 807, 908$ могут быть представлены в нужном виде по схеме $a = 111 + (a - 111)$, например, $302 = 111 + (302 - 111) = 111 + 191$. Осталось рассмотреть число 201. Пусть число $201 = a + b$. Одно из слагаемых должно быть трёхзначным, тогда первая цифра в нём 1, значит и последняя тоже 1, и второе слагаемое начинается с цифры 0. Но это невозможно. Число 201 нельзя представить как сумму двух палиндромов.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: сформулировано утверждение «Все числа, кроме* 201, *можно представить в виде суммы двух палиндромов» – 5 баллов. Доказано, что число* 201 *нельзя представить в требуемом виде – 5 баллов. Доказано, что все остальные числа, кроме* 201, *можно представить в требуемом виде – 10 баллов. Баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. Внутри квадрата $ABCD$ произвольно выбрана точка P, и построены равнобедренные прямоугольные треугольники PAE и PBF, $\angle PAE = \angle PBF = 90°$ (см. рисунок). Прямые ED и FC пересекаются в точке G. Докажите, что GP перпендикулярно AB.



Решение. Докажем, что треугольники APB и AEDравны.



По условию, $BA = AD, PA = EA. \angle EAD = 90° - \angle PAD, \angle PAB = 90° - \angle PAD$,следовательно, $\angle EAD = \angle PAB$ и $\Delta APB = \Delta AED$. Обозначим Mточкупересечения BPи ED, Nточкупересечения APи FC.Отсюда $\angle BPA = \angle AEM$, и $\angle AEM + \angle APM = 180°$. Значит, $AEMP$вписанный. Рассмотрим углы $PAE = 90°$, и PMD, $\angle PMD = 180° - \angle PAE = 90°$, но и $\angle BAD = 90°$. Равные углы BADи BMD опираются на отрезок BD, значит, точка Mлежит на окружности, описанной около квадрата $ABCD$. Аналогично, $BFNP$ является вписанным, и точка Nлежит на окружности, описанной около квадрата $ABCD$. Кроме этого, $PNGM$вписанный, так как $\angle PMG = 90° = \angle PNG$ (поскольку смежный с PNG угол равен $180° - \angle FBP = 180° - 90° = 90°$). $\angle PGD = \angle PGM = \angle PNM$ (как вписанные углы, опирающиеся на отрезок PMво вписанном четырехугольнике $PNGM$). $\angle PNM = \angle ANM = \angle ABM$(как вписанные углы),$\angle ABM = \angle ABP = \angle ADE$ (как соответствующие углы равных треугольников). Объединяя цепочки равенств, получаем $\angle PGD = \angle ADE$, что означает параллельность GP и AD, то есть GPперпендикулярно AB.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y} + \frac{y}{2} + \frac{2}{x}$, где x и y – произвольные натуральные числа.

Ответ.$\{3, 5, 6, 41\}$.

Решение.Пусть $x/y + y/2 + 2/x = m$– натуральное число. Тогда

$$2x^2 + y^2x + 4y = 2mxy.$$

Еслиx не делится на 2, то y делится на 2. Но в таком случае все члены равенства, кроме $2x^2$, делятся на 4, а $2x^2$ делится только на 2, что невозможно. Значит, x делится на 2, то есть$x = 2z$ для некоторого натурального числа z. Имеем

$$4z^2 + y^2z + 2y = 2myz,$$

откуда yделится на 2 илиzделится на 2.

а) Пусть $y = 2w$.Тогда

$$z^2 + w^2z + w = mwz,$$

откуда w делится на z. Но в таком случае w делится и на z^2, то есть $w = z^2u$ для некоторого натурального u. Теперь имеем

$$1 + z^3u^2 + u = mzu,$$

откуда $u = 1$.Ясно, что число $z^2 + \frac{2}{z}$будет целым только при $z \in \{1, 2\}$, при этом $m \in \{3, 5\}$.

б) Пусть $z = 2w$.Тогда$8w^2 + y^2w + y = 2myw$.Как и выше, отсюда следует, чтоyделится на w^2,то есть $y = w^2u$ для некоторого натуральногоu. Теперь имеем

$$8 + w^3u^2 + u = 2mwu,$$

откуда u делит 8, то есть $u \in \{1,2,4,8\}$.При $u=2, u=4$ получаем равенства $2^3+w^3 2^2+2=2^2 mw, 2^3+w^3 2^4+2^2=2^3 mw$ соответственно, но они невозможны. При $u=1$ число $m=\frac{9+w^3}{2w}$будет целым только при $w \in \{1,3,9\}$,и тогда $m \in \{5,6,41\}$.Наконец, при u =8 число $m=\frac{1+4w^3}{w}$будет целым только при $w=1$ (и тогда $m=5$).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Указаны все верные значения, но не показано, как они выбраны, и не доказано, что нет других – по 1 баллу за значение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла.*

Вариант 2

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,4. Какова вероятность, что 7 марта будет хорошая погода, если 3 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

Ответ.0,6088.

Решение 1.Обозначим P_nвероятность хорошей погоды в день n, считая 3 марта за первый день. Тогда $P_{n+1}=P_n \cdot 0{,}4+(1-P_n)\cdot 1=1-0{,}6P_n$. По условию $P_1=\frac{1}{2}$. Находим последовательно $P_2=0{,}7,\ P_3=0{,}58,\ P_4=0{,}652,\ P_4=0{,}6088$.

Решение 2.Будем обозначатьдень с плохой погодой П, день с хорошей погодой Х, хороший первый день $Х_1$. День с хорошей погодой, следующий за днем с плохой погодой, будем помечать $Х_П$. Рассмотрим все возможные цепочки:

$$Х_1ХХХХ, Х_1ПХ_ПХХ,\ Х_1ПХ_ППХ_П, Х_1ХПХ_ПХ,\ Х_1ХХПХ_П, ПХ_ПХХХ,\ ПХ_ППХ_ПХ, ПХ_ПХПХ_П.$$

Найдем вероятность, учитывая, что $P(Х_1)=P(П_1)=0{,}5, P(Х)=0{,}4, P(П)=0{,}6, P(Х_П)=1$.

$$P=0{,}5\cdot(0{,}4)^4+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 1\cdot(0{,}4)^2+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 1\cdot 0{,}6\cdot 1+\ 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 1\cdot 0{,}4+$$
$$0{,}5\cdot(0{,}4)^2\cdot 0{,}6\cdot 1+\ 0{,}5\cdot 1\cdot\ (0{,}4)^3\ +0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}6\cdot 1\cdot 0{,}4+\ 0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=\ 0{,}6088.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15-18 баллов. Более одной ошибки – 5 баллов. Пропущен один вариант – 15 баллов. Пропущено более одного варианта – не больше 5 баллов. Небольшая ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 10 баллов. Существенная ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Многочлен $P(x)=x^4-x^3-x^2-1$ имеет корни a,b,c,d. Многочлен $Q(x)=x^6-x^5-2x^4+x^3+x^2-x+3$. Найдите $Q(a)+Q(b)+Q(c)+Q(d)$.

Ответ.10.

Решение.Поделим $Q(x)$ на $P(x)$: $Q(x)=P(x)(x^2-1)+x^2-x+2$.Поскольку $P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=0, Q(a)+Q(b)+Q(c)+Q(d)=a^2+b^2+c^2+d^2-(a+\ b+\ c+\ d)+8$. $P(x)=x^4-x^3-x^2-1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $a+\ b+\ c+\ d=1,\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-1$. $a^2+b^2+c^2+d^2=(a+\ b+\ c+\ d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=1-2\cdot(-1)=3$. Отсюда $Q(a)+Q(b)+Q(c)+Q(d)=3-1+8=10$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Арифметическая ошибка – 15 баллов. Многочлен $Q(x)$ упрощён с использованием $P(x)$ – 10 баллов. Использована теорема Виета – 10 баллов. Ошибка в теореме Виета – не больше 10 баллов за всё решение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

3. Сколько двузначных натуральных чисел нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \ldots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

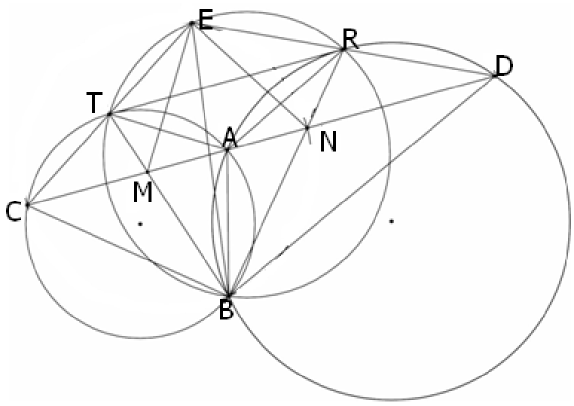
Ответ.8.

Решение. Если число nпалиндром, то числа $n, n+1, n+2, \ldots, n+9$допускают нужное представление. Поэтому числа от 10 до 20могут быть представлены нужным образом: $10 = 9 + 1, 11 = 11 + 0, 12 = 11 + 1.., 20 = 11 + 9$.Если число nдвузначно иявляется палиндромом, то число $n + 11$ также палиндром, и может быть представлено как $(n + 11) + 0$. Например, если $n = 55, n + 11 = 66 = 66 + 0$. Поскольку разность между соседними двузначными полиномами равна 11, это означает, что все такие числадопускают нужное представление. Осталось рассмотреть числа вида $n + 10$, где nпалиндром, то есть числа $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$. Пусть число $n + 10 = a + b$. Если и a иb двузначные, то правая часть делится на 11, а левая нет. Одно из слагаемых должно быть однозначным, то есть числом из набора $0, 1, \ldots 9$. Но разность 10 и любого числа из набора не кратна 11. Числа $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$ нельзя представить как сумму двух палиндромов.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: сформулировано утверждение «Все числа, кроме* $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$, *можно представить в виде суммы двух палиндромов» – 5 баллов. Доказано, что числа* $21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$ *нельзя представить в требуемом виде – 5 баллов. Доказано, что все остальные числа, кроме указанных, можно представить в требуемом виде – 10 баллов. Баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. Окружности w_1 и w_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l расположена ближе к A, чем к B, и является общей касательной окружностей w_1 и w_2,касаясь их соответственно в точках T и R. Через точку A проведена параллельно касательной l прямая, пересекающая w_1 в точке C, w_2 в точке D. TC и RD пересекаются в точке E. Докажите, что $TBRE$ вписанный четырехугольник.

Решение. Докажем, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок общей касательной к ним между точками касания.



Пусть прямые ABи TR пересекаются в точке K. Тогда по свойству касательной и секущей$KT^2 = KA \cdot KB, KR^2 = KA \cdot KB$, откуда $KT = KR$.По теореме о пропорциональных отрезках прямая AB делит пополам отрезок MN, то есть MA=AN. $\angle ETR = \angle ECD$, а $\angle ECD = \angle ATR$ (так как эти углы измеряются дугой TA окружности w_1). Аналогично, $\angle ERT = \angle EDC = \angle ART$. Заметим, что $\angle TBA = \angle ATR$, обозначим$\angle TBA = \angle ATR = \angle ETR = \alpha$.Обозначимтакже $\angle RBA = \angle TRA = \angle TRE = \beta$. Отсюда $\angle TER + \angle TBR = (180° - \alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = 180°$.Следовательно, $TBRE$вписанный четырехугольник.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y}+\frac{y}{3}+\frac{3}{x}$, где x и y– произвольные натуральные числа.

Ответ.$\{3, 5, 6, 66\}$.

Решение.Пусть $x/y+y/3+3/x=m$– натуральное число. Тогда

$$3x^2+y^2x+9y=3mxy.$$

Еслиx не делится на 3, то y делится на 3. Но в таком случае все члены равенства, кроме $3x^2$, делятся на 9, а $3x^2$ делится только на 3, что невозможно. Значит, x делится на 3, то есть$x=3z$для некоторого натурального числа z. Имеем

$$9z^2+y^2z+3y=3myz,$$

откуда yделится на 3 илиzделится на 3.

а) Пусть $y=3w$.Тогда

$$z^2+w^2z+w=mwz,$$

откуда w делится на z. Но в таком случае w делится и на z^2, то есть $w=z^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем $1+z^3u^2+u=mzu$,откуда $u=1$.Ясно, что число $z^2+\frac{2}{z}$будет целым только при $z\in\{1,2\}$, при этом $m\in\{3,5\}$.

б) Пусть $z=3w$.Тогда$27w^2+y^2w+y=3myw$.Как и выше, отсюда следует, чтоyделится на w^2,то есть $y=w^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем
$27+w^3u^2+u=3mwu$,откуда u делит 27, то есть $u\in\{1,3,9,27\}$.При $u=3, u=9, u=27$ получаем невозможные равенства $3^3+w^33^2+3=3^2mw, 3^3+w^33^4+3^2=3^3mw,\ 2\cdot3^3+w^33^6=3^4mw$соответственно.При $u=1$ число $m=\frac{28+w^3}{3w}$, откуда w– делитель 28, при этом $28+w^3\equiv w^3+1\equiv 0 \pmod 3$, то есть $w\equiv -1 \pmod 3$. Следовательно, $w\in\{2,14\}$,и тогда $m\in\{6,66\}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Указаны все верные значения, но не показано, как они выбраны, и не доказано, что нет других – по 1 баллу за значение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что 5 марта будет хорошая погода, если 1 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

Ответ.0,8328.

Решение.Обозначим P_nвероятность хорошей погоды в в день n, считая 1 марта за первый день. Тогда $P_{n+1}=P_n\cdot 0{,}8+(1-P_n)\cdot 1=1-0{,}2P_n$. По условию $P_1=0{,}5$. Находим последовательно $P_2=0{,}9,\ P_3=0{,}82,\ P_4=0{,}836,\ P_4=0{,}8328$.

Решение.Будем обозначатьдень с плохой погодой П, день с хорошей погодой Х, хороший первый день Х_1. День с хорошей погодой, следующий за днем с плохой погодой, будем помечать $\text{Х}_\text{П}$. Рассмотрим все возможные цепочки: $\text{Х}_1\text{ХХХХ}, \text{Х}_1\text{ПХ}_\text{П}\text{ХХ}$, $\text{Х}_1\text{ПХ}_\text{П}\text{ПХ}_\text{П}, \text{Х}_1\text{ХПХ}_\text{П}\text{Х},\ \text{Х}_1\text{ХХПХ}_\text{П}, \text{ПХ}_\text{П}\text{ХХХ},\ \text{ПХ}_\text{П}\text{ПХ}_\text{П}\text{Х}, \text{ПХ}_\text{П}\text{ХПХ}_\text{П}$.Найдем вероятность, учитывая, что $P(\text{Х}_1)=P(\text{П}_1)=0{,}5, P(\text{Х})=0{,}8, P(\text{П})=0{,}2, P(\text{Х}_\text{П})=1$.

$$P=0{,}5\cdot(0{,}8)^4+0{,}5\cdot0{,}2\cdot1\cdot(0{,}8)^2+0{,}5\cdot0{,}2\cdot1\cdot0{,}2\cdot1+\ 0{,}5\cdot0{,}8\cdot0{,}2\cdot1\cdot0{,}8+$$
$$0{,}5\cdot(0{,}8)^2\cdot0{,}2\cdot1+\ 0{,}5\cdot1\cdot\ (0{,}8)^3\ +0{,}5\cdot1\cdot0{,}2\cdot1\cdot0{,}8+\ 0{,}5\cdot1\cdot0{,}8\cdot0{,}2=0{,}8328.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Одна арифметическая ошибка – 15-18 баллов. Более одной ошибки – 5 баллов. Пропущен один вариант – 15 баллов. Пропущено более одного варианта – не больше 5 баллов. Небольшая ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 10 баллов. Существенная ошибка в методе нахождения вероятности – не больше 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов.*

Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.

2. Многочлен $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1$ имеет корни a, b, c, d. Многочлен $Q(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 4$. Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

Ответ.$-66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 597$.

Решение.Поделим $Q(x)$ на $P(x)$: $Q(x) = P(x)(x^2 - 6x + 22) - 66x^3 + 39x^2 - 6x + 18.$ Поскольку $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$.Тогда $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = -66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 39(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 6(a + b + c + d) + 4 \cdot 18.$ Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $a + b + c + d = -3$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = -2$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 9 - 2 \cdot (-2) = 13$. Отсюда $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d) = -66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 39 \cdot 13 - 6 \cdot (-3) + 72 = -66(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 597$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Арифметическая ошибка – 15 баллов. Многочлен $Q(x)$ упрощён с использованием $P(x)$ – 10 баллов. Использована теорема Виета – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

3. Сколько среди натуральных чисел от 50 до 250 включительно таких, которые нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \dots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

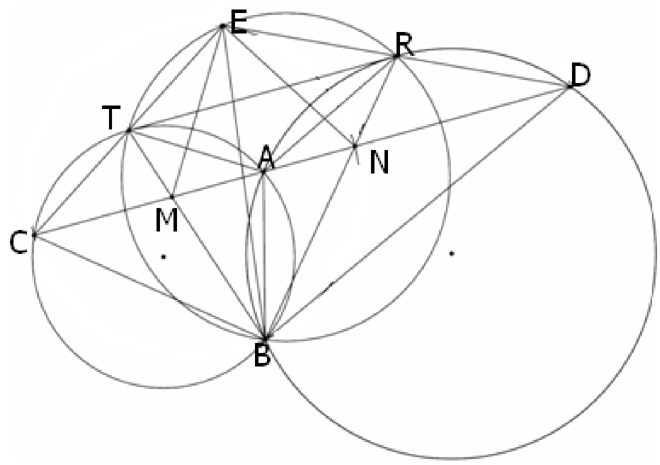
Ответ.6.

Решение.Если число nпалиндром, то числа $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 9$допускают нужное представление. Если число nдвузначно и является палиндромом, то число $n + 11$ также палиндром, и может быть представлено как $(n + 11) + 0$. Например, если $n = 55, n + 11 = 66 = 66 + 0$. Поскольку разность между соседними двузначными полиномами равна 11, это означает, что все такие числадопускают нужное представление. Осталось рассмотреть двузначные числа вида $n + 10$, где nпалиндром, то есть числа $54, 65, 76, 87, 98$. Пусть число $n + 10 = a + b$. Если и aиb двузначные, то правая часть делится на 11, а левая нет. Одно из слагаемых должно быть однозначным, то есть числом из набора $0, 1, \dots 9$. Но разность 10 и любого числа из набора не кратна 11. Числа $54, 65, 76, 87, 98$ нельзя представить как сумму двух палиндромов. Если число nтрёхзначно, является палиндромом, и число десятков не равно 9, то число $n + 10$ также палиндром и может быть представлено как $(n + 10) + 0$.Поскольку разность между трёхзначным полиномом, у которого число десятков не равно 9, и ближайшим справа палиндромом, равна 10 (поскольку $\overline{ab + 1a} - \overline{aba} = 10$), это означает, что все такие числадопускают нужное представление. Осталось рассмотреть трёхзначные числа вида $n + 10$, где nпалиндром, в котором цифра десятков равна 9,от 50 до 250 одно такое число, это 201 $(201 = 191 + 10)$. Пусть число $201 = a + b$. Одно из слагаемых должно быть трёхзначным, тогда первая цифра в нём 1, значит и последняя тоже 1, и второе слагаемое начинается с цифры 0. Но это невозможно. Число 201 нельзя представить как сумму двух палиндромов. Таким образом, в заданном интервале существует 6 чисел, которые нельзя представить в виде суммы двух палиндромов: $54, 65, 76, 87, 98, 201$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: сформулировано утверждение «Все числа, кроме* $54, 65, 76, 87, 98, 201$, *можно представить в виде суммы двух палиндромов» – 5 баллов. Доказано, что числа* $54, 65, 76, 87, 98, 201$ *нельзя представить в требуемом виде – 5 баллов. Доказано, что все остальные числа, кроме 201, можно представить в требуемом виде – 10 баллов. Баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. Окружности w_1 и w_2пересекаются в точках A и B. Прямая l расположена ближе к A, чем к B, и является общей касательной окружностей w_1 и w_2, касаясь их соответственно в точках T и R. Через точку A проведена параллельно касательной l прямая, пересекающая w_1 в точке C, w_2 в точке D. Прямые TC и RD пересекаются в точке E. Докажите, что BE – биссектриса угла CBD.

Решение.Пусть прямые TB и CD пересекаются в точке M; прямые RB и CD пересекаются в точке N.Докажем, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок общей касательной к ним между точками касания.



Пусть прямые ABи TR пересекаются в точке K. Тогда по свойству касательной и секущей$KT^2 = KA \cdot KB, KR^2 = KA \cdot KB,$ откуда $KT = KR$.По теореме о пропорциональных отрезках прямая AB делит пополам отрезок MN, то есть MA=AN. $\angle ETR = \angle ECD$, а $\angle ECD = \angle ATR$ (так как эти углы измеряются половиной дугиTA окружности w_1). Аналогично, $\angle ERT = \angle EDC = \angle ART$. Заметим, что $\angle TBA = \angle ATR,$ обозначим$\angle TBA = \angle ATR = \angle ETR = \alpha$.Обозначимтакже $\angle RBA = \angle TRA = \angle TRE = \beta$.
Отсюда $\angle TER + \angle TBR = (180° - \alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = 180°$.Следовательно, TBR–вписанный четырехугольник. Тогда $\angle RBE = \angle RTE = \alpha$. Поскольку $\angle RBD = \angle RAD = \beta$,получаем, что$\angle EBD = \propto + \beta$. Аналогично получаем$\angle CBE = \angle CBT + \angle TBE$. При этом$\angle CBT = \angle CAT$ (опираются на одну дугу), $\angle CAT = \angle RTA$(как соответственные), $\angle RTA = \angle RTE$следовательно, $\angle CBT = \angle RTE = \propto . \angle TRE = \beta$.Таким образом, $\angle DBE = \propto + \beta = \angle CBE$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y} + \frac{y}{5} + \frac{5}{x}$, где x и y– произвольные натуральные числа.

Ответ.$\{3, 5, 19, 41\}$.

Решение.Пусть $x/y + y/5 + 5/x = m$– натуральное число. Тогда

$$5x^2 + y^2x + 25y = 5mxy.$$

Еслиx не делится на 5, то y делится на 5. Но в таком случае все члены равенства, кроме $5x^2$, делятся на 25, а $5x^2$ делится только на 5, что невозможно. Значит, x делится на 5, то есть$x = 5z$для некоторого натурального числа z. Имеем

$$25z^2 + y^2z + 5y = 5myz,$$

откуда yделится на 5 илиzделится на 5.

а) Пусть $y = 5w$.Тогда

$$z^2 + w^2z + w = mwz,$$

откуда w делится на z. Но в таком случае w делится и на z^2, то есть $w = z^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем

$$1 + z^3u^2 + u = mzu,$$

откуда $u = 1$.Ясно, что число $z^2 + \frac{2}{z}$будет целым только при $z \in \{1, 2\}$, при этом $m \in \{3, 5\}$.
б) Пусть $z = 5w$.Тогда$125w^2 + y^2w + y = 5myw$.
Как и выше, отсюда следует, чтоyделится на w^2,то есть $y = w^2u$для некоторого натуральногоu.Теперь имеем

$$125 + w^3u^2 + u = 5mwu,$$

откуда u делит 125, то есть $u \in \{1, 5, 25, 125\}$.При $u = 5, u = 25, u = 125$ получаем невозможные равенства
$5^3 + w^35^2 + 5 = 5^2mw, 5^3 + w^35^4 + 5^2 = 5^3mw,\ 2 \cdot 5^3 + w^35^6 = 5^4mw$ соответственно.
При $u = 1$ число $m = \frac{126+w^3}{5w}$, откуда w – делитель 126, при этом $126 + w^3 \equiv w^3 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, то есть $w \equiv -1 \pmod 5$. Следовательно, $w \in \{9, 14\}$,и тогда $m \in \{19, 41\}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Обоснование только частичное – 10 баллов. Указаны все верные значения, но не показано, как они выбраны, и не доказано, что нет других – по 1 баллу за значение. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение верно начато – 2 балла. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Три человека независимо задумали по одному целому числу от 1 до 9. Какова вероятность, что произведение этих трёх чисел делится на 10?
Ответ.$P = \frac{52}{243}$.
Решение 1. Обозначим событие $A =$\{Произведение 3 чисел не делится на 10\}, $B =$ \{Среди3 чисел нет 5\}, $C =$ \{Среди 3 чисел нет чётного\}. Тогда$A = B + C, P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC) = \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \left(\frac{5}{9}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^3$.Вероятность искомого события равна $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 - \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{52}{243}$.
Решение 2. Рассматриваем событие \{Произведение 3 чисел делится на 10\}.Число всех исходов равно 9^3. Число благоприятных исходов равно $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 156$. Первое слагаемое – количество наборов с двумя числами, кратными 5, и одним, кратным 2. Второе слагаемое – количество наборов с одним числом, кратным 5, и двумя, кратным 2.Третье слагаемое – количество наборов ровно с одним числом, кратным 5, и ровно одним, кратным 2. $P = \frac{156}{729} = \frac{52}{243}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть ошибка – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Известно, что числа a, b, c, $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$ – целые. Обязательно ли являются целыми все три числа $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$?
Ответ. Да.
Решение.Рассмотрим многочлен $P(x) = \left(x - \frac{ab}{c}\right)\left(x - \frac{ac}{b}\right)\left(x - \frac{bc}{a}\right)$.
$P(x) = x^3 - x^2\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right) + x(a^2 + b^2 + c^2) - abc$.Все его коэффициенты – целые числа. Многочлен $P(x) = \left(x - \frac{ab}{c}\right)\left(x - \frac{ac}{b}\right)\left(x - \frac{bc}{a}\right)$ имеет корни $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$, которые рациональны как отношения целых чисел. Но рациональные корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами являются целыми числами. Действительно, предположив, что существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$, являющаяся корнем $P(x)$. Получаем $\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^2 +$

$a_2\left(\frac{p}{q}\right)+a_3=0$,или $\frac{p^3}{q}+a_1p^2+a_2p^2q+a_3q^2=0$. Поскольку первое слагаемое – несократимая дробь, а три следующих слагаемых – целые числа, такое равенство невозможно.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. За пробелы в доказательстве снимается от 1 до 5 баллов. Есть рассуждения о возможных количествах единиц и двоек, чётных и нечётных чисел, и возможности их переноса, но нет строгого доказательства – 5 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. За рассмотрение примеров баллы не начисляются.*

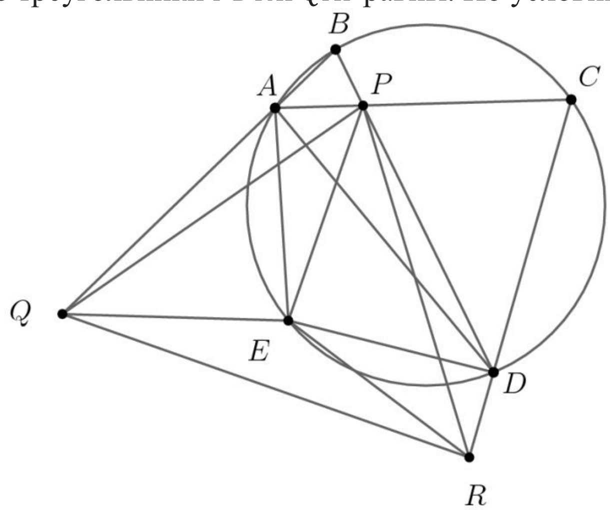
3. По кругу растёт шесть деревьев. Утром на каждом дереве сидел один бельчонок. Вечером опять на каждом дереве сидел один из тех же шести бельчат, но ни один бельчонок не сидел на том же самом дереве, и не сидел на дереве, которое было соседним с тем, которое он занимал утром. Сколькими способами это можно было сделать?
Ответ.20.
Решение 1. Каждый бельчонок должен сесть на одно из трёх определённых мест подряд, поэтому этот вопрос ничем не отличается от подсчёта случаев, когда каждый либо остается на месте, либо перемещаетсяна одно место влево или вправо.Предположим, что утром бельчата сидели в порядке $ABCDEF$.
1) Все остаются на своих местах. Тогда есть только один случай ($ABCDEF$). Если A перемещается вправо на местоB, у B есть два варианта действий. B может переместиться влево (на место A) или переместиться вправо на место C.
2) Рассмотрим движение по кругу. Если B перемещается на место C, то единственный способ для –переход кD, переход D к E, переход E к F и переход F к A, в результате чего достигается $FABCDE$. Каждый бельчонок может также двигаться влево($BCDEF$A). Таким образом, тут два случая.
3)Некоторые бельчата из соседних пар AB, CD, EF меняются местами, оставаясь в той же паре. Если A перемещается на место B, B перемещается на место A. C может остаться на месте, или переместиться на D,Eможет остаться на месте, или переместиться на F. Это даёт$2\cdot 2\cdot 2 = 8$ случаев, но бельчата не могут все оставаться на месте, поскольку мы уже посчитали такую возможность в случае 1, и, следовательно, здесь 7 случаев. Кроме этого, могут быть пары $BC, DE,\ F$A, что даёт еще 7 случаев.
4)Меняются местами не в соседних парах, а в парах, разделённых одним бельчонком. Если бы A и B поменялись местами, D и E могли бы поменяться местами, и это не было бы учтено предыдущими группировками. При этом два бельчонка, разделяющие пары, сидят на прежних местах. Это может происходить в трёх случаях (A и D не движутся, B и E не движутся,C и F не движутся). Всего случаев $1+2+7+7+3\ =\ 20.$
Решение 2.Предположим, что утром бельчата сидели в порядке $ABCDEF$. Составим таблицу для возможных новых позиций для A, B, C, D, E, F (пустые клетки обозначают невозможные позиции.

		A	A	A	
			B	B	B
C				C	C
D	D				D
E	E	E			
	F	F	F		

1) На первом месте C. Пусть на первом и втором местах Cи D. Тогда на последнем месте B, на предпоследнем A. Получается всего одна комбинация: $CDEFAB$. Пусть на первом и втором местах Cи E, тогда на третьем F или A, получаются три комбинации: $CEFABD, CEFBAD, CEAFBD.$ Пусть на первом и втором местах Cи F, тогда на третьем E или A, получаются две комбинации: $CFEABD, CFEBAD$,итого 6 комбинаций.

2) На первом месте D. Пусть на первом и втором местах Dи E. Возможны комбинации $DEAFBC, DEAFCB, DEFABC, DEFACB, DEFBAC$. Пусть на первом и втором местах Dи F. Возможны комбинации$DFEABC, DFEACB, DFEBAC$. В этом случае 8 комбинаций.
3) На первом месте E. Пусть на первом и втором местах E и D. Возможны комбинации$EDAFBC, EDAFCB$, $EDFBAC, EDFABC$, $EDFACB$. Пусть на первом и втором местах E и F. Возможна только одна комбинация$EFABCD$.Всего 6 комбинаций. Итого $6 + 8 + 6 = 20$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном (в основном) решении есть ошибка – 15 баллов. Не учтено небольшое количество способов – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. На окружности по часовой стрелке поставлены точки A, B, C, D, E. Известно, что$AE = DE$. Пересечение отрезков AC и BD обозначим P. На продолжении отрезка AB за точку Aвыбрали точкуQ так, что $AQ = DP$. На продолжении отрезка CD за точку D выбрали точку R так, что $AP = DR$. Докажите, что прямые PE и QR перпендикулярны.
Решение. Докажем, что треугольники PDRи QAPравны. По условию, $AQ = DP, AP = DR$.



Угол, дополняющий угол PAQ до 180°, измеряется половиной дуги BC, так же, как и угол, дополняющий до 180° уголPDR, поэтому $\angle PAQ = \angle PDR$. Следовательно $\Delta\, PDR$=ΔQAP, и $QP = PR$. Докажем, что треугольники EDRи EAPравны.$\angle EDR = 180° - \angle EDC$(как смежные углы). $\angle EAP = 180° - \angle EDC$ (как противоположные углы вписанного четырехугольника). Следовательно, $\angle EDR = \angle EAP$. По условию,$AE = DE, AP = DR$.Следовательно $\Delta\, EDR = \Delta\, EAP$, и $EP = ER$.Докажем, что треугольники QAEи PDEравны.По условию,$AE = DE, AQ = DP$.Угол PDE измеряется половиной дуги BAE. УголQAEизмеряется полусуммой дуг BA и AE, то есть половиной дуги BAE. Значит, $\angle QAE = \angle PDE$, и $\Delta\, QAE$= $\Delta\, PDE$, откуда $EQ = EP$. Учитывая равенство $EP = ER$, получаем, что точка Eявляется центром описанной окружности треугольника QPR, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре стороны QR. Но ранее было доказано, что $QP = PR$, то есть QR – основание равнобедренного треугольника, и серединный перпендикуляр совпадает с высотой, то есть проходит через точку P.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15-18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Найдите все пары (a, b)натуральных чисел, для которых $27ab + (1 - a + b)^3 = 0$.
Ответ.$(a, b) = ((v + 1)^3, v^3)$, где v– любое натуральное число.
Решение. Из уравнения следует, что a и b должны быть взаимно простыми. Действительно, если p – их общий простой делитель, то p делит $1 - a + b$, а значит, является делителем 1. Кроме того, $1 - a + b$ делится на 3. Имеем $ab = \left(\frac{a-b-1}{3}\right)^3$. В частности, произведение ab – точный куб. Следовательно, каждый из сомножителей должен быть точным ку-

бом: $a = u^3, b = v^3$для некоторых натуральных чисел u, v. В этом случае уравнение упрощается до $3uv + 1 - u^3 + v^3 = 0$.Теперь заметим, что левую часть можно разложить на множители: $3uv + 1 - u^3 + v^3 = (1 - u + v)(u^2 + v^2 + uv + u - v + 1)$. Имеем $u^2 + v^2 + uv + u - v + 1 > 0$, поэтому $1 - u + v = 0, u = v + 1$.Таким образом, получаем $(a, b) = ((v + 1)^3, v^3)$, где vможет быть любым натуральным числом.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Решение не закончено или содержит ошибку – 10 баллов. Получен верный ответ, но не доказано, что нет других ответов – 10 баллов. Верный ответ записан путем обобщения нескольких примеров, не доказано, что формула подходит для любых значений, и что нет других ответов – 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*