Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

М	А	0	0	0	0	4	2	1	9	1	9

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 1

Фамилия Егоров

Имя Никита

Отчество Викторович

Дата рождения 07.12.2002 **Класс** 9

ОУ, местоположение КГАОУ „Школа космонавтики", Зато. Железногорск

Предмет Математика

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 8-913-172-5467 **Подпись** Егор

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	2	1	9	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	6	8	74

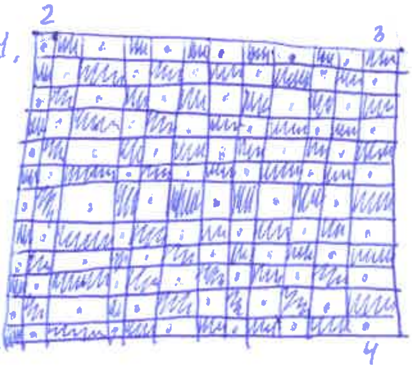
№3

1) Заметим, что в доске 12X12 всего 12·12=144 клетки. Так же заметим, что существует (на данной доске) 24 диагоналей из нечётного числа клеток (4 диагонали по 1 кл; 4-по 3 кл; 4-по 5 кл; 4-по 7 кл; 4-по 9 кл, и 4-по 11 кл). Остальные диагонали ~~зако~~ состоят из
~~2) Докаж~~ четного числа клеток. все вертикали (столбцы) и горизонтали (строки) состоят из чётного числа клеток — двенадцати (по условию).

2) Докажем вспомогательное утверждение — все 24 „нечётных" диагоналей не имеют общих клеток. (Наглядность дальнейших рассуждений установлена на рис 1).

Для простоты ~~расс~~ произведем раскраску (как на рис 1, т.е. закрашенные ~~пустые~~ клетки и клетки с точками.) и пронумеруем угловые клетки, как на рисунке.

рис 1.



Очевидно, что все „нечётные" диагонали, параллельные диагоналям 1 и 3 — закрашенно ~~черно~~-клетчатые, т.к. сами (1) и (3) — закрашенны, а параллельные „нечётные" диагонали по горизонтали и по вертикали находятся через клетку по горизонтали и вертикали от близлежащих диагоналей с аналогичными свойствами, то есть имеют одинаковую чётность. Из-за одинаковой же четности расположения „нечётные" диагонали, параллельные (2) и (4), как сами они, отмечены точками. Раскраска подвержена свойствам чётности, поскольку в ней всего два цвета. Из-за этого же, мы уверенно можем сказать, что уже рассмотрели все „нечётные" диагонали, т.к. рассмотрели все „нечётные" диагонали каждого из возможных цветов. Из рассмотренных случаев видно, что диагонали либо параллельны, либо разноцветны, т.е. не имеют общих клеток. Утверждение доказанно.

3) Из (1) и (2) существует ровно 24 рассматриваемых набора клеток (в нашем случае — это — диагонали) в которых кол-во клеток нечётно, и все они не имеют общих клеток. Всякое нечётное число представимо в виде n-1, где n — чётное число. Тогда в каждом из 24 наборов должна быть хотя бы одна незакрашенная клетка, тогда существует как минимум 24 незакрашенных клетки, то есть закрашенных максимум (из (1)) 144-24=120. Оценка дана и обоснована. Если существует такой пример, где с фишками ~~закрашенно~~ 120 кл, то ответ на задачу — 120.
Приведем его на рис (2)

(продолжение на листе 2)

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

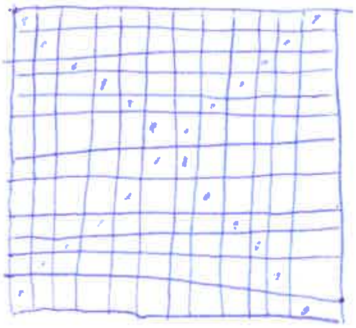
М	А	0	0	0	0	4	2	1	9	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

рис 2



4) Пусть все клетки без фишек обозначены точками, а с фишками — не закрашены.

5) Пример на рис 2 соответствует условию и в нем ~~на~~ доске 120 фишек.

Ответ: 120.

20

№2

1) Пусть в 9„а" — x мальчиков и y девочек, а в 9„б" — a мальчиков и $в$ девочек, тогда yx и $ва$ поздравлений от девочек 9„а" и 9„б" соответственно, и $xв$ и ay поздравлений от мальчиков из 9„а" и 9„б" соответственно. Всего поздравлений тогда $xy+aв+вx+ay$ ~~по условию,~~ что по условию равно 437.

2) Из (1) составим и преобразуем равенство $xy+aв+вx+ay=437$, тогда
$x(в+y)+a(в+y)=437$, то есть
$(x+a)(в+y)=437$.

20

3) Пусть $x+a=m$, а $y+в=n$, тогда всего в 9„а" и 9„б" — m мальчиков и n девочек, ~~и~~ (по условию и из (1)), тогда $mn=437$, а искомое число обучающихся $m+n$.

4) Заметим, что $437=23\cdot19$. 23 и 19 — простые числа. Поскольку число учеников в классах ~~не~~ может быть только натуральным, то $m\cdot n=23\cdot19$.

5) Из (4) ~~значений~~ набор значений m и n всего два:

1. $n=23$; $m=19$
2. $n=19$; $m=23$.

В обоих случаях искомая сумма (из (3) это $m+n$ (т.к. в классах обучаются только мальчики и девочки)) равна $19+23=23+19=42$

Ответ: 42.

№1

1) Заметим, что по условию не обязательно, чтобы числа были различны. Приведём соответствующую условию последовательность чисел:

$-5 \quad 3 \quad 3 \quad -5 \quad 3 \quad 3 \quad -5 \quad 3 \quad 3 \quad -5$

2) Заметим, что в каждой тройке подряд идущих чисел из примера в пункте (1) в разном порядке расположены числа $-5 \quad 3 \quad 3$. Их сумма $-5+3+3=1>0$, значит последовательность действительно соответствует условию.

(продолжение на листе 3)

3) Сумма всех чисел равна $-5+3+3-5+3+3-5+3+3-5=-2<0$, значит сумма всех 10 чисел быть отрицательной может.

Ответ: да, может.

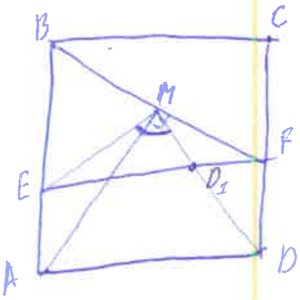
20

№ 4

Дано:
$ABCD$ − квадрат; $E \in AB$; $F \in CD$; $EF \parallel AD$; M − точка; $AM \perp BF$

Найти: $\angle EMD$

рис 1



Решение.

1) Пусть $\angle MAD = \alpha$, тогда $\angle MAB = 90°-\alpha$; $\angle ABM = 180°-90°-\alpha-90°=\alpha$; $\angle CBF = 90°-\alpha$;
$\angle BFC = 180°-90°-\alpha-90°=\alpha$; $\angle EFM = 90°-\alpha$, т.к. $\angle EFC = 90°$, т.к. $EF \parallel AD$ по условию. ~~Аналогично~~
~~$\angle MEF =$~~ Пусть $\angle MDA = \beta$, тогда аналогично $\angle$ ~~EMF~~ $FEM = 90°-\beta$.

2) Заметим, что MD − секущая между $AD \parallel EF$, значит $\angle MD_1E$, где D_1 − точка пересечения EF и MD, равен $\angle MDA$, то есть равен β.

3) $\angle EMD_1 = \cancel{\beta+90} \; 180°-\beta-(90°-\beta)=90°$. Из (2) D_1 лежит на MD, тогда $\angle EMD_1 = \angle EMD = 90°$.

Ответ: 90°

Если $\angle EMD = 90°$, это так.
Но пока что угол неизвестен.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	2	1	9	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$

$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{1764}=\frac{1}{2^2\cdot3^2\cdot7^2}$

$xy=2^2\cdot441(x+y)$.

Поскольку $x\cdot y$ равен чётному числу, x и y, по условию, чётны.

2) Составим таблицу кратности, неучитывая делитель $(x+y)$, для чисел x и y, в которой будут использованы простые делители числа 1764, т.е. 2^2; 3^2 и 7^2.

табл 1

x	y
$2\cdot3$	$2\cdot3\cdot7^2$
$2\cdot3\cdot7$	$2\cdot3\cdot7$
$2\cdot7$	$2\cdot7\cdot3^2$
$2\cdot3^2$	$2\cdot7^2$
$2\cdot7^2$	$2\cdot3^2$
$2\cdot3^2\cdot7$	$2\cdot7$
$2\cdot7^2\cdot3$	$2\cdot3$
2	$2\cdot7^2\cdot3^2$
$2\cdot7^2\cdot3^2$	2

В таблице представлены все 9 возможных расстановок известных делителей, после чего известно, что $\frac{xy}{1764}=x+y$ (из 1). Из того что и y и x - чётны, для каждого набора делителей из таблицы существует ровно одна пара чисел, т.к. получается система из двух линейных уравнений от двух переменных.

Ответ: 9

эти значения x и y не удовл. ур-ю

$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot7^2}\neq\frac{1}{1764}$ и т.д.

Надо брать делители 1764^2.

8

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

КГЭУ
Адрес площадки проведения

М	А	0	0	0	0	5	2	8	4	1	9

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия БАРИЕВ

Имя Раиль

Отчество РУСТЕМОВИЧ

Дата рождения 06. 10. 03 **Класс** 9

ОУ, местоположение гимназия №2, г. Казань

Предмет математика

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 10. 03. 19

Номер телефона 89047640455 **Подпись** Бар

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 5 2 8 4 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10}$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	–	4	64

$$+\begin{cases} x_1+x_2+x_3>0 \\ x_2+x_3+x_4>0 \\ \vdots \\ x_8+x_9+x_{10}>0 \end{cases}$$

$x_1+x_{10}+2(x_2+x_9)+3(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)>0$ (по условию) (1)

Допустим, что сумма может быть отрицательной, тогда $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_9+x_{10}<0$. (2)

В этом случае, если из (1) − (2), тогда у нас получается $x_7+x_2+x_9+2(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)>0$. (3)

Выражение (3) в свою очередь является суммой

$x_2+x_3+x_4>0$

$x_3+x_4+x_5>0$

$x_5+x_6+x_7>0$

$x_6+x_7+x_8>0$

$x_7+x_8+x_9>0$

Следовательно, никаких противоречий нет, т.е. сумма может быть отрицательной.

20

Например:

−4 −3 8 −4 −3 8 −4 −3 8 −4

№ 2.

девочек из 9 „а" класса возьмём, как „x"

мальчиков из 9 „а" − „y"

девочек из 9 „б" − „z"

мальчиков из 9 „б" − „w"

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

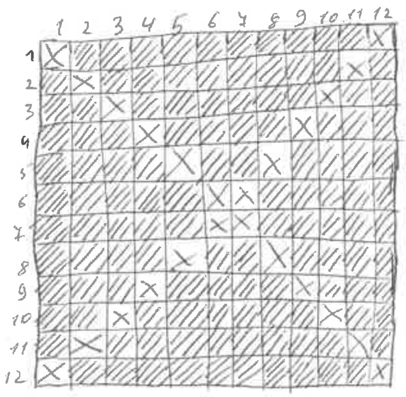
Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 5 2 8 4 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

Тогда по правилу умножения комбинаторики девочки из 9 „а" написали xy поздравлений,
мальчики из 9 „б" — xw
девочки из 9 „б" — zw
мальчики из 9 „а" — yz
А в общем они написали 437 поздравлений, т.е.
$xy + xw + zw + yz = 437$.
$xy + xw + zw + yz = x(y+w) + z(y+w) = (x+z)(y+w) = 437$
$437 = 19 \cdot 23 = (x+z)(y+w) = 437$
А т.к. нам надо найти $(x+z)+(y+w)$, то $(x+z)+(y+w) =$
$= 19 + 23 = 42$

Ответ: Всего в этих двух классах учится 42 ученика.

№ 3



▨ – фишка

☒ – фишка не может стоять на этом месте.

Угловые клетки сразу помечаем ☒, т.к. они сами считаются диагоналями, а если на них будет ▨, то на них будет нечётное количество ~~диагон~~ фишек.
На нечётных диагоналях (↙↗) количество клеток то же нечётное, следовательно на одну из них нельзя ставить, поэтому помечаем ☒ (12 шт. минимум)

По аналогии с другими диагоналями (↖↘), помечаем по одной ☒ (12 шт. минимум)
Минимальное количество ☒ = 24.
Общее кол-во клеток = 144.
Следовательно максимальное количество ▨ = 120.
Ответ: 120 фишек

20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 8 | 4 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$$

$$\frac{1764x}{x-1764}=y$$

ОДЗ: $x\neq 0$ $y\neq 0$ $x\neq 1764$

$x;y\in N \Rightarrow x>1764$.

N – натуральные числа

$x\,\vdots\,1764$, иначе $y\notin N \Rightarrow x=1764K$

$$\frac{1764^2\cancel{K}}{1764(K-1)}=y=\frac{1764K}{K-1}$$

Так как $K\not\vdots(K-1)$, то $1764\,\vdots\,(K-1)$, чтобы $y\in N$

$1764=2^2\cdot3^2\cdot7^2$

$K=2$ $y=3528$ $x=3528$ V

$K=4$ $y=2352$ $x=7056$ V

$K=3$ $y=2646$ $x=5292$ V

$K\neq$ остальные, т. к. тогда $K-1$ не будет кратен делителям 1764 и сам не будет делителем 1764.

Ответ: 3.

4

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	5	0	7	7	1	9

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Сёмушкина

Имя Екатерина

Отчество Ивановна

Дата рождения 28.11.2002 **Класс** 9

ОУ, местоположение МАОУ Лицей №9 "Лидер", г. Красноярск

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.19

Номер телефона +79831661188 **Подпись** Катюта

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	0	7	7	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	~~15~~	20	20	4	~~79~~

20 15

2 класса а б

девочки $\boxed{x}$ $x \cdot y$ $\boxed{a}$ $a \cdot b$

мальчики $\boxed{y}$ $y \cdot a$ $\boxed{b}$ $b \cdot x$

фотографии, которые они сделали

$$xy + ya + ab + bx = 437$$

$$y(x+a) + b(x+a) = 437$$

$$(y+b)(x+a) = 437$$

рассмотрим это число. его можно представить в виде множителей 19·23 и так как оба этих числа простые, то у нас 2 варианта (однако это не создает разных ответов)

$$(y+b)(x+a) = 437$$

$y+b$	$x+a$
19	23
23	19

20

$23 + 19 = 42$ человека в двух классах

Ответ: 42.

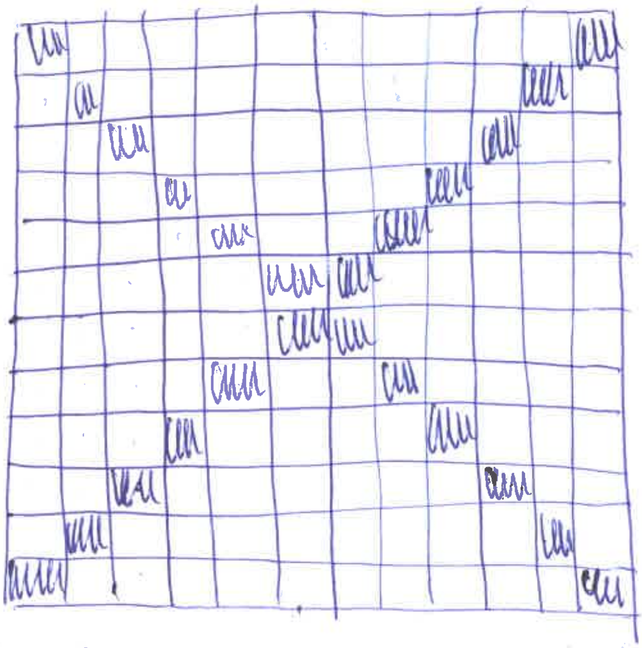
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 7 | 7 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3



Доска 12×12
в каждой строке / столбце / диагонали — четное кол-во

во всех строках и столбцах изначально четное количество клеток, поэтому надо либо убирать тоже четное, либо не делать ничего.

во всех диагоналях кроме главных нечетное кол-во, поэтому убирать там нужно тоже нечетное (чтобы было четно). в главных диагоналях по 12 клеток, убираем четное кол-во

Оценка проведена нечетко.

Когда мы убираем по одной клетке из диагонали, она одновременно убирается и из строки со столбцом (где нужно убрать четное), причем нам выгоднее когда одна клетка задействована во многих пересечениях и убирать по минимуму, чтобы осталось как можно больше фишек.

Идеальный вариант — по одной клетке убрано из диагоналей, и ни одной из строк и столбцов, но так не может быть, сместим все убранные клетки на главные диагонали (их 2, поэтому в каждой диагонали будет убрано 1 клетка, а в строках и столбцах по 2, кроме главных — там мы убираем всё). (12·12) (2 диагонали)
таким образом, 144 − 24 = 120.

20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	0	7	7	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$ x, y — натуральные числа одной чётности

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{1764}$$

разложим 1764 на множители: $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7$

$\frac{xy}{x+y}=1764$ Нам необходимо, чтобы произведение искомых чисел делилось на их сумму и в итоге получалось 1764,

$$xy=1764(x+y).$$

Числа x, y — натуральные и поэтому $x+y\neq1$, а $\frac{1}{1764}$ — результат сокращения дроби

Все варианты, если $xy=1764$, но так как $xy=1764(x+y)$, в данный момент они не подходят

x	y
2	882
~~3~~	~~588~~
~~7~~	~~252~~
~~4~~	~~441~~
6	294
14	126
~~9~~	~~203~~
~~21~~	~~84~~
~~49~~	~~36~~

x	y
~~12~~	~~147~~
~~28~~	~~63~~
18	98
42	42
~~1~~	~~1764~~

не подходят под "одинаковая чётность"

$$\underbrace{xy}_{\vdots 1764}=\underbrace{(x+y)1764}_{\vdots 1764}$$

Вернемся к варианту с сокращением дроби

$\frac{(x+y):1764}{xy:1764}=\frac{1}{1764}$, такое возможно только если уравнение примет вид $\frac{1764^n}{1764^{2n}}$, где n — четное число, конкретно в нашем случае $\frac{(x+y):1764}{xy:1764}=\frac{1}{1764}$

$x+y=1764$

$xy=1764^2$

[ПРОДОЛЖЕНИЕ НА ЛИСТЕ 5]

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

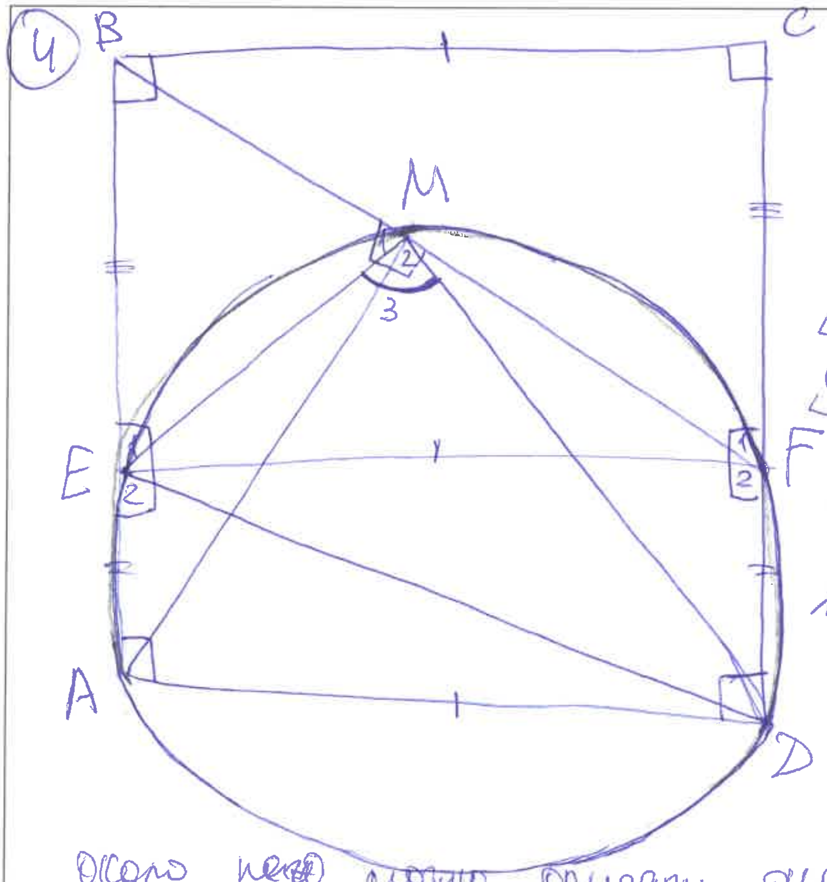
Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	0	7	7	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4



ABCD – квадрат

AB = BC = CD = DA

△EDA и △DEF – равные (по углу и 2 сторонам).

△BFE и △FBC – равные (по углу и 2 сторонам)

все они прямоугольные.

~~прямые углы~~.

EFDA – прямоугольник (по условию)

Около него можно описать окружность, все углы в нём прямые

$\angle M_{1 и 2}$ – прямой (как перпендикуляр к BF), рассмотрим угол M_3. точка M лежит на окружности, т.к. M_1 и M_2 – прямые.

если M_3 не будет прямым, тогда точка M не сможет лежать на окружности $\Rightarrow$ $M_3 = 90°$

Ответ: 90°

20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	0	7	7	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(1) Да, может

сумма трех идущих подряд = +
сумма всех = −

−4 2 3 −4 2 3 −4 2 3 −4

$-4 \cdot 4 = -16$
$(2+3) \cdot 3 = 15$) сумма всех = −1

20

$-4+2+3=1$) сумма каждой тройки = 1.

(3) ПРОДОЛЖЕНИЕ

x		y
2	·	882
6	·	294
14	·	126
18	·	98
42	·	42

остальные варианты

Изначально мы рассматривали, что $xy=1764$, а сейчас, что $(xy)^2=1764^2$, а $x+y=1764$. Все варианты опять подходят под первое условие, $(xy)^2=1764^2$, но ни одно под второе

4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	0	0	0	0	5	6	6	8	1	9

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Влашкин

Имя Игорь

Отчество Олегович

Дата рождения 12.03.2003 **Класс** 9

ОУ, местоположение школа №145, Красноярск

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона [redacted] **Подпись** Влашкин

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	6	6	8	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	16	20	0	1	57

Задача №1.

Решение:

$-0,9; -1,9; 3; -0,9; -1,9; 3; -0,9; -1,9; 3; -0,9$

Ответ: Да, сумма всех 10 чисел может быть отрицательной, вот пример этой последовательности.

Проверка:

$-0,9 - 1,9 + 3 - 0,9 - 1,9 + 3 - 0,9 - 1,9 + 3 - 0,9 =$

$= -2,8 + 3 - 2,8 + 3 - 2,8 + 3 - 0,9 = 0,6 - 0,9 = -0,3.$

Так же можно составить множество аналогичн. последовательностей, при чередовании 1го числа a; 2го b; 3го c при этом $a<0$; $b<0$; $c>a+b$ и одном условии. $|a|>3(a+b+c)$; только при этих условиях можно составить типовую последовательность из ~~чисел~~ чисел, причем сумма любых трех подряд идущих чисел положительна, а сумма всех 10 чисел отрицательна.

20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	6	6	8	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

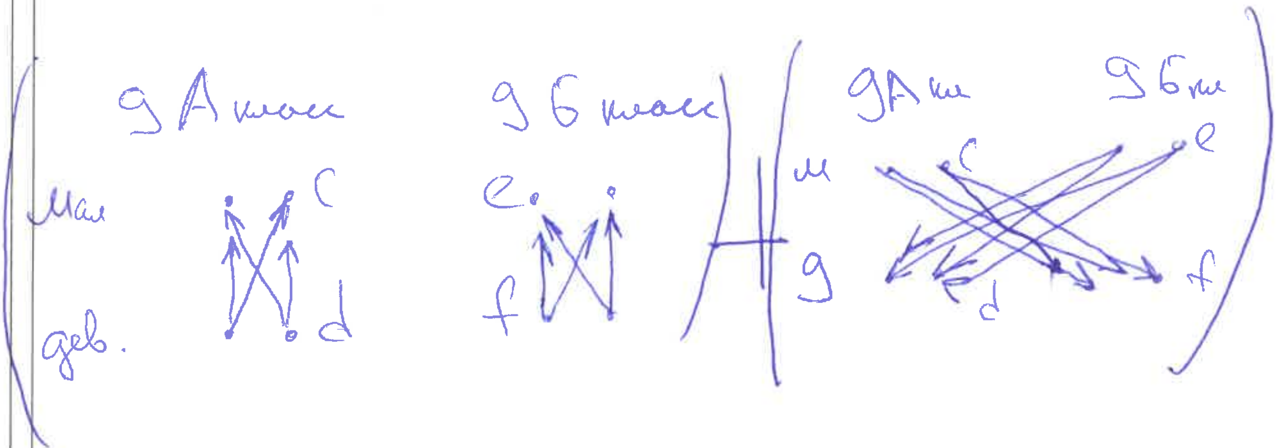
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2.

Дано:

кол-во всех поздравлений 437.

кто, кого поздравлял.



чтобы получить кол-во всех поздравлений нужно: Пусть „c" – мальчики 9А; „d" – девочки 9А, „e" – мальчики 9Б; „f" – девочки 9Б.

$(c\cdot d)+(e\cdot f)+(c\cdot f)+(d\cdot e)=437$

	9А	9Б
мал	10	13
дев	9	10

Реш-е подбором, а вдруг есть другие решения?

16

$(10\cdot 9)+(13\cdot 10)+(10\cdot 10)+(13\cdot 9)=$

$=90+130+100+117=437$

Кол-во учеников в 9А и 9Б $=c+d+e+f=10+9+13+10=42$

Ответ: Вместе учеников в двух классах = 42 ученика, ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	5	6	6	8	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

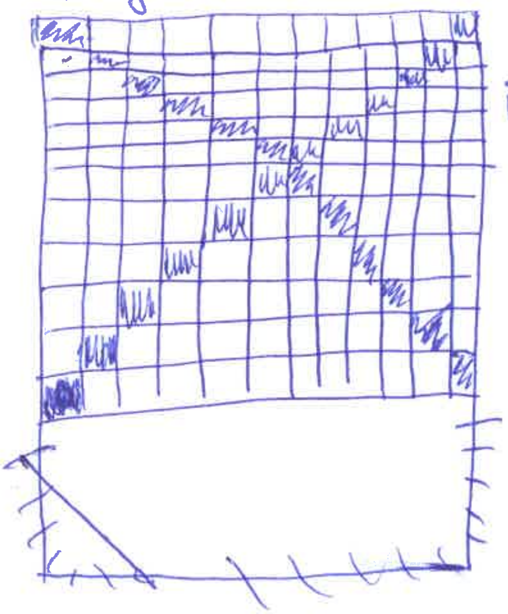
Задача №3.

Чтобы определить максимальное кол-во фишек на поле 12×12, при условии что по горизонтали кол-во фишек либо четно либо 0; Так же по вертикали и горизонтали, угловые клетки – тоже ~~диагонали~~ ~~их~~ диагонали.

Решение.

Т.к. угловые клетки явл диаг. а по услов там должно быть четное кол-во, то – все фишки с угловых клеток следует убрать. Всего у поля 24 диагонали 2 пары диагоналей с 1 клеткой; 2 пары с 2 клетками ... ... 2 пары диагоналей с 12 клетками, поэтому максимально рационально будет просто исключить 2 диагонали по 12 клеток с поля, для получения максимального кол-ва фишек

Рисунок:



□ (пустая клетка) – стоит 1 фишка

■ (закрашенная клетка) стоит 0 фишек

Кол-во всех клеток = 12·12 = 144.

12·2=24 144−24=120.

Ответ: Наибольшее число фишек на доске = 120.

20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	5	6	6	8	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$$

$(x;y)$ - найти кол-во ~~ответа~~ пар. с одинаковой четностью

$$\begin{array}{r} \times\ 1764 \\ 3 \\ \hline 5292 \end{array} \qquad \frac{1}{1764}=\frac{3}{5292}=\frac{1}{5292}+\frac{1}{2646}=\frac{1}{1764}$$

1

$$\cancel{\frac{1}{1764}\cdot\frac{1}{5}=}$$

$$\cancel{\begin{array}{r} \times\ 1764 \\ 5 \end{array}}$$

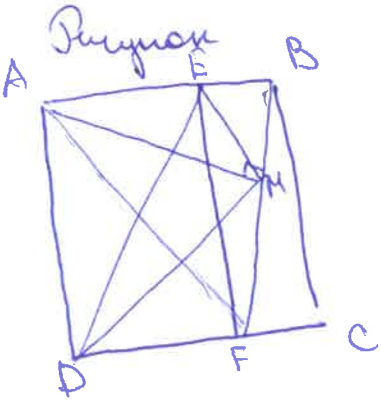
$$\begin{array}{r} \times\ 1764 \\ 7 \\ \hline 12348 \end{array} \qquad \frac{1}{1764}=\frac{7}{12348}\cancel{=\frac{1}{12348}+\frac{6}{12348}}$$

$$\begin{array}{r|l} 12348 & 6 \\ -12 & \\ \hline 34 & \\ -32 & \\ \hline 28 & \end{array}$$

Ответ: 1 пара $(x;y)$ имеет одинаковую четность, $(5292;2646)$

Задача №4.

Рисунок



Дано: $\boxtimes ABCD$
$EF \parallel AD$
$AM \perp BF$
Найти: $\angle EMD$

0

?

Ответ: $\angle EMD = 90°$. т.к. $\triangle EMD$ прямоугольный

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	4	9	2	1	1	9

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Прачик

Имя Ксения

Отчество Александровна

Дата рождения 17. 01. 2003 **Класс** 9

ОУ, местоположение Лицей №9 "Лидер", г. Красноярск

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 89029630041 **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	9	2	1	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Да, может

$-9 \quad 5 \quad 5 \quad -9 \quad 5 \quad 5 \quad -9 \quad 5 \quad 5 \quad -9$

В любой тройке подряд идущих чисел набор чисел одинаков: 5, 5, −9 : $5+5-9=1$

$1>0$.

$-9\cdot 4=-36 \qquad 5\cdot 6=30$

$30-36=-6$

$-6<0$

20

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	10	90

№2

9 А
a – девочек
в – мальчиков

9 Б
c – девочек
d – мальчиков

Т.к каждая девочка ~~[illegible]~~ поздравила своего одноклассника => количество ~~[illegible]~~ поздравлений для мальчиков в каждом классе будет соответсвенно равно $aв$ и cd.

Аналогично, т.к каждый мальчик поздравил каждую девочку из другого класса => общее количество поздравлений для девочек будет равно da и $вc$ соответсвенно.

Т.к всего поздравлений было 437 => можно составить уравнение:

$aв+cd+da+вc=437$

$a(в+d)+c(в+d)=437$

$(a+c)(в+d)=437$

$437 \cdot 1$ } невозможен т.к из условия следует, что в каждом классе есть
$1 \cdot 437$ } и мальчики и девочки, что не выполнятся

$19 \cdot 23$

$23 \cdot 19$

Общее количество учеников в двух классах равно

$\underbrace{a+в+c+d}$ $= 19+23=42$ (23, 19)

20

Ответ: 42

Лист 1 из 4

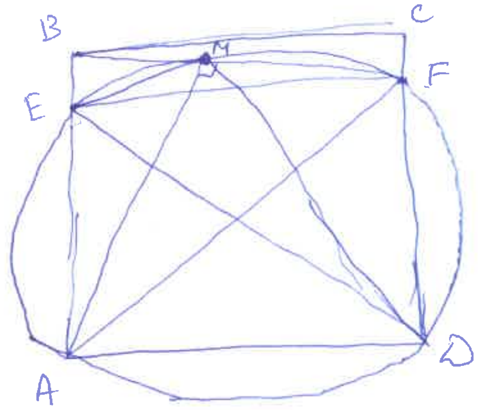
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 4 9 2 1 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: ABCD - квадрат
EF ∥ AD ; AM ⊥ BF

Найти: ∠EMD - ?

Решение:

Рассмотрим четырёхугольник AEFD. ∠A = 90° (по ~~условию~~ свойству (ABCD - квадрат)), ∠D = 90° (по условию ~~свойство~~ □).
Т.к EF ∥ AD по условию => ∠AEF = 180° - ∠EAD = 180° - 90° = 90° как односторонние углы при EF ∥ AD и секущей EA.
∠EFD = 180° - ∠FDA = 180° - 90° = 90° (как односторонние углы при EF ∥ AD и секущей FD. => EFDA - прямоугольник и т.к сумма противоположных углов равна 180° => около EFDA можно описать окружность.

Проведём FA. Т.к ∠D = 90° (по условию) и является вписанным углом => он опирается на диаметр окружности. => FA - диаметр.

Рассмотрим ∠AMF. ∠AMF = 90° т.к AM ⊥ BF и т.к ∠AMF опирается на диаметр => AMF является вписанным углом и точка M принадлежит окружности.

Проведем ED. Т.к ∠A = 90° (по условию) и является вписанным углом => опирается на диаметр => ED - диаметр.

Т.к ∠EMD опирается на ED и точка M принадлежит окружности => ∠EMD является вписанным углом, который равен 90°

Ответ: ∠EMD = 90°

20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

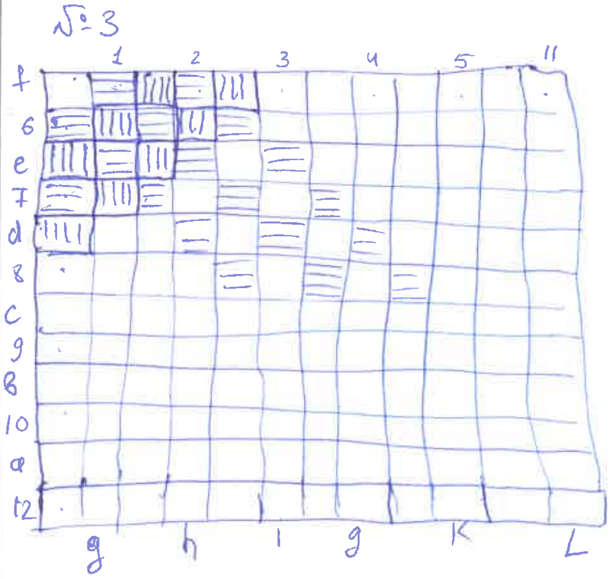
Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	9	2	1	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



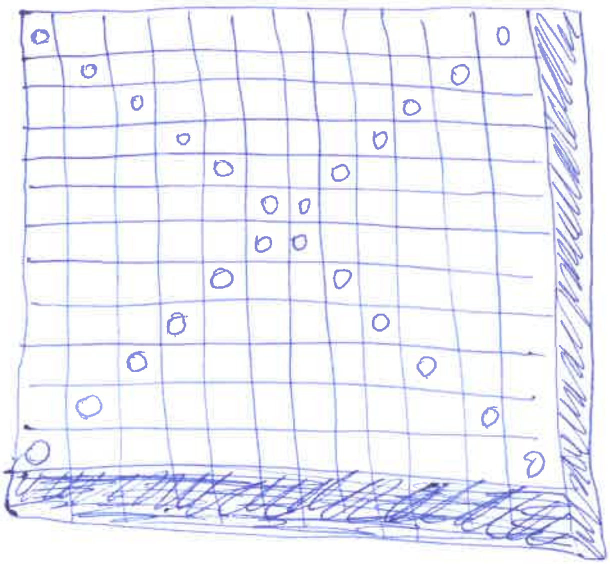
Рассмотрим диагонали в которых нечетное количество клеток.

От левого верхнего угла к нижнему правому: ↘ – направление. таких диагоналей 12, на чертеже отмечены цифрами

От нижнего левого угла к верхнему правому: 12 диагоналей, отмечены буквами

Диагонали одного направления не пересекаются т.к являются параллельными, но так же ни одна из диагоналей направленных в разные стороны не пересекаются. => Т.к всего диагоналей 24 и из каждой диагонали нужно убрать как минимум одну фишку => ~~[illegible]~~ максимальное количество фишек на доске равно $12 \cdot 12 = 144 - 24 = 120$ фишек

Пустые клетки обозначены $\boxed{0}$



20

Ответ: 120 фишек

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 4 9 2 1 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$

$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{1764}$; $1764x+1764y=xy$

$1764x-xy=-1764y$

$x(1764-y)=-1764y$

$X=\frac{1764y}{y-1764}$

Аналогично $y=\frac{1764x}{x-1764}$

Т.к X и y - натуральные числа по условию =>

$(y-1764)\vdots 1764 \Rightarrow y\vdots 1764$, $y\neq 1764$

$(x-1764)\vdots 1764 \Rightarrow x\vdots 1764$ $x\neq 1764$ } => x, y - четные

$X=\frac{1764\cdot 1764\cdot K}{(K-1)\cdot 1764}=\frac{1764K}{K-1}$ K - коэффициент при y. Во сколько раз $y>1764$

$K\not\vdots(K-1) \Rightarrow$ т.к X - натуральное число $\Rightarrow 1764\vdots(K-1)$

1764	2
882	2
441	9 (3·3)
49	7
7	7
1	1

Множители 1764:

2, 3, 4, 6, 9, 12, 14, 18, 21, 27, 49, 63, 36, 28, 42, 54, 441, 882, 1764, 147, 294, 588, 98, 196, 152

Количество пар равно количеству множителей 1764, что ~~6+6+6+6+6+6+6+6~~ равно 25.

Неверно.

Множители могут объединяться в пары.

16

Кроме того, Вам нужны только четные

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	0	0	0	0	5	1	2	3	1	9

г. Красноярск, СФУ
Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Блинов

Имя Даниил

Отчество Геннадьевич

Дата рождения 17.04.2003 **Класс** 9

ОУ, местоположение лицей N9 «Лидер», г. Красноярск

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона [redacted] **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 5 1 2 3 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	6	20	–	66

Задача №2

Пусть в 9-ом „А" x девочек и y мальчиков, а в 9-ом „Б" a девочек и b мальчиков. Т.к. каждая девочка поздравила каждого своего одноклассника, а каждый мальчик поздравил каждую девочку из другого класса, ~~то получаем уравнение:~~ а всего поздравлений получилось 437, то получаем уравнение:

$$xy + ya + ab + bx = 437$$

$$y(x+a) + b(x+a) = 437$$

$$(y+b)(x+a) = 437$$

$437 = 19 \cdot 23$; получаем:

$$(y+b)(x+a) = 437$$

	$(y+b)$	$(x+a)$
①	1	437
②	437	1
③	19	23
④	23	19

Т.к. в классе должно быть минимум 2 человека, чтобы соблюдалось условие, получаем, что вариант ① и ②

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

неподходят. ⇒ В 9 „А" — 19 учеников, В 9 „Б" — 23 ученика, или наоборот.

Таким образом всего учеников в 2-ух классах: 19 + 23 = 42 ученика

Ответ: 42 ученика

20

Задача N 1

Обозначим данную последовательность как $x_1, x_2, x_3 \dots x_{10}$. Получаем

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}$

\+ \+ \+ \+ \+ \+ \+ \+

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}<0$?

Нам нужны такие ~~ен~~ отрицательные числа, сумма которых ~~будет меньше одного положительного числа~~. будет больше противоположного необходимого нам положительного числа, т.е. чтобы при сложении тройки подряд идущих чисел было положительное число. Также нужно использовать минимально возможное кол-во положительных чисел.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 5 1 2 3 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Приведём пример, основываясь на вышесказанном:

$$\begin{array}{cccccccccc} -5 & -1 & 7 & -5 & -1 & 7 & -5 & -1 & 7 & -5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array}$$

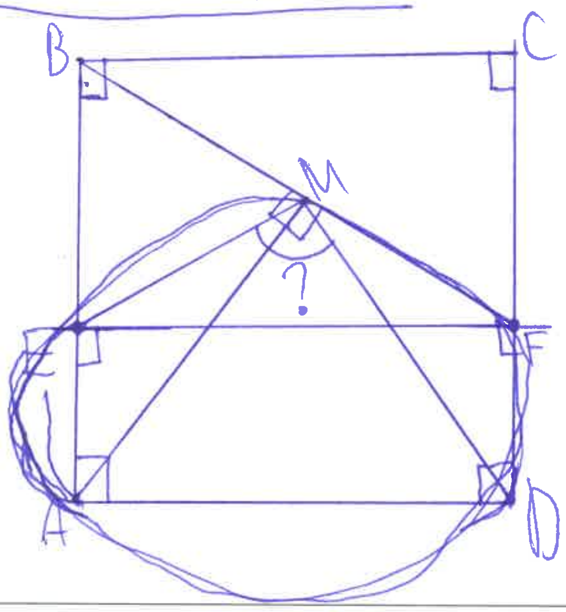
Как видим, сумма любых трёх подряд идущих чисел равна: $-5+(-1)+7=1$. Также заметим, что сумма всех чисел равна:

$-5+(-1)+7+(-5)+(-1)+7+(-5)+(-1)+7+(-5)=$
$=21-23=-2 \Rightarrow$ сумма всех 10 чисел может быть отрицательной.

20

Ответ: да, может.

Задача N 4



Дано: ABCD – квадрат
EF ∥ AD
т. E ∈ AB
т. F ∈ CD
EF ∩ CD = F
AM ⊥ BF
Найти: ∠EMD = ?
Решение:

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Докажем, что AEFD - прямоугольник. ∠A и ∠D равны 90° по условию (ABCD - квадрат). EF || AD => ∠DAE и ∠AEF - односторонние углы при секущей AE => ∠DAE + ∠AEF = 180° => => ∠AEF = 180° - ∠DAE = 180° - 90° = 90°. Т.к. сумма углов в ~~4-ёх угольн~~ четырёхугольнике равна 360°, то получаем:

$\angle DAE + \angle AEF + \angle EFD + \angle FDA = 360°$

$\Downarrow$

$\angle EFD = 360° - \angle DAE - \angle AEF - \angle FDA =$
$= 360° - 90° - 90° - 90° = 90° \Rightarrow$ AEFD - прямоугольник.

2) ~~Вот~~ Около любого прямоугольника можно описать окружность. Опишем её около AEFD. Как видно по чертежу, не совсем понятно, лежит ли точка M на окружности или нет. Докажем, что точка M лежит на окружности:

~~Т.Е и Т.D~~ Т. A и Т.F точно принадлежат данной окружности. ∠AMF = 90° (по условию). Т.к. ~~он~~ ∠AMF опирается на ◡AF, а т. A и т.F принадле-

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

жат окружности и $\angle AMF = 90^\circ$, то т. M — лежит на окружности. ~~Если бы~~ Предположим, что т. M лежит выше окружности. Тогда $\angle AMF < 90^\circ$, но это не так. Если же т. M лежит ниже окружности, то $\angle AMF > 90^\circ$, что так же противоречит условию.

3) Таким образом т. M лежит на окружности, описанной около прямоугольника AEFD.

4) Заметим, что $\angle AMF$ опирается на противоположные вершины прямоугольника AEFD. $\angle EMD$ так же опирается на противоположные вершины того же прямоугольника. $\Rightarrow \angle EMD = \angle AMF = 90^\circ$

20

Ответ: $\angle EMD = 90^\circ$

Задание №~~4~~3

~~Приведём пример такой таблицы:~~

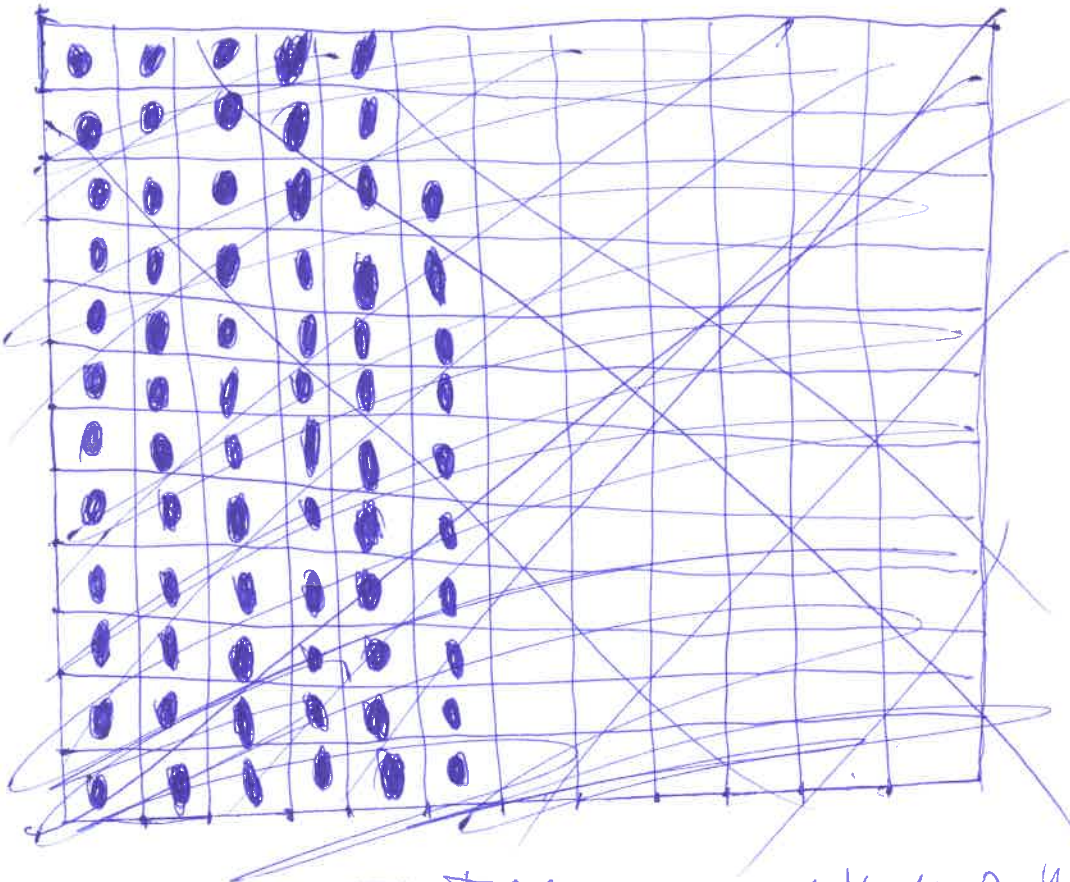
~~Такая доска~~ Фишки на доске должны непременно располагаться симметрично, чтобы добиться наибольшего количества. То есть необходимо разбить доску на квадраты 6×6:

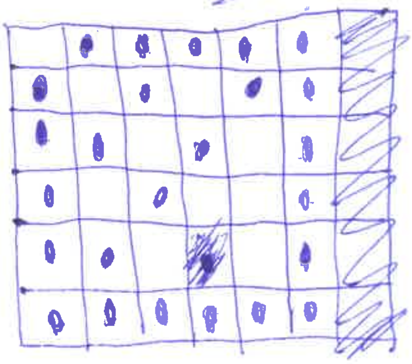
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА0000512319

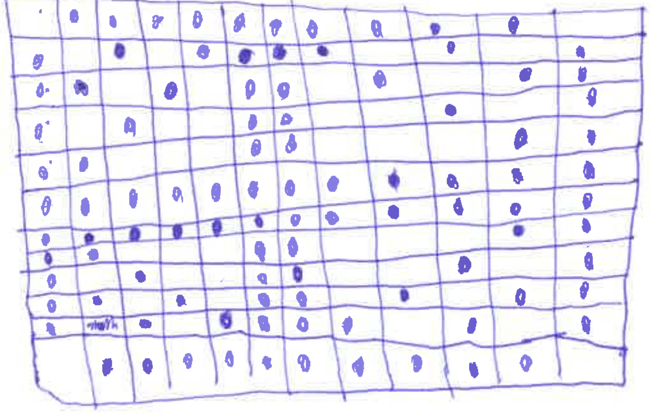
Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа





Также отмечу, что угловые клетки ~~[illegible]~~ задевать нельзя, т.к. они являются диагональю, состоящей из 1-ой клетки. Если туда поставить фишку, возникнет противоречие. Таким образом получаем таблицу:



фишек в этой таблице всего 100

Ответ: 100

6

это не max

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	4	9	6	9	1	9

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия БИРЮКОВ

Имя ЕГОР

Отчество СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 23.07.2003 **Класс** 9

ОУ, местоположение МАОУ лицей №9 „Лидер", г. Красноярск

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона +79138307088 **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	4	9	6	9	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	6
20	20	10	20	1	71

№1

Да, может.

Например, если ряд ~~два~~ чисел будет выглядеть так: $-5\,3\,3\,-5\,3\,3\,-5\,3\,3\,-5$

Сумма любых трёх подряд идущих чисел будет равна 1.

А сумма всех чисел будет равна $-5\cdot4+3\cdot6=-20+18=$

$=-2$

20

№2

Пусть в 9а: x-мальчиков, y-девочек

в 9б: a-мальчиков, b-девочек

Тогда девочки 9а сделали xy поздравлений, девочки 9б сделали ab поздравлений. мальчики 9а сделали xb поздравлений, мальчики 9б ay поздравлений. ~~составим~~ Т.к всего было сделано 437 поздравлений, то составим мат. модель:

$xy+ab+xb+ay=437$

$xy+xb+ab+ay=437$

$x\cdot(y+b)+a\cdot(y+b)=437$

$(x+a)\cdot(b+y)=437$

Разложим число 437 на множители

1 437

437 1

19 23

23 19

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 4 9 6 9 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Множители 43 и 1 не удовлетворяют задаче, т.к
сумма мальчиков в двух классах не может быть равна 1,
как и сумма девочек в двух классах равна.
Множители 19 23 подходят. Следовательно как сумма
они будут принадлежать, кол-во людей в двух классах
останется неизменным.
Таким образом, учеников в этих двух классах 19+23=42

20

Ответ: 42 ученика в двух классах

№3

Всего клеток на этой доске 12·12 = 144.
По условию в каждой диагонали должно быть чётное
число фишек и угловая клетка считается за диагональ.
Таким образом там не будет стоять фишек.
Будем заполнять доску фишками по диагоналям.
Доска состоит из 2-ух видов диагоналей с чётным ~~кол-вом~~
кол-вом клеток и нечётным. Чётные диагонали будем
заполнять полностью, а нечётные будем заполнять фишками
так, чтобы клетка по середине оставалась пустой.
Так заполним всю доску, кроме угловых клеток.
У нас останется одна ~~от~~ абсолютно пустая диагональ
от одной угловой клетки до другой. Она будет соответство-
вать условию, т.к в ней будет 0 фишек. Но также
в условии сказано, что в каждом ряду и строке должно
быть чётное кол-во фишек. Но если будет пустая вся
одна диагональ от одной угловой клетки до другой, то
в каждом ряду и строке будет 11 фишек. Максимум насколько
можно заполнить каждую строку и столбец это 11 фишек.
Но как мы её заполнить не можем из-за ~~д~~ уже пустой
одной диагонали от угловой до угловой клетки. Соответственно,
нам нужно сделать так, чтобы в каждой ~~ряду~~ строке и столбце

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 9 | 6 | 9 | 1 | 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

стало ещё на 1 клетку меньше. Это мы можем сделать полностью освободив вторую диагональ от угловой до угловой клетки. Таким образом мы добьёмся максимально допустимого числа фишек. Больше сделать нельзя, т.к либо будет заполнена угловая клетка, которую нельзя заполнять, либо ~~перед~~ кол-во фишек в каком либо диагонали, параллельной стороне станет нечётным. (длина диагонали от угловой до угловой клетки = 12 клеток)

Таким образом максимальное кол-во фишек $144 - 4 - 12 \cdot 2 = 116$ неверный ответ.

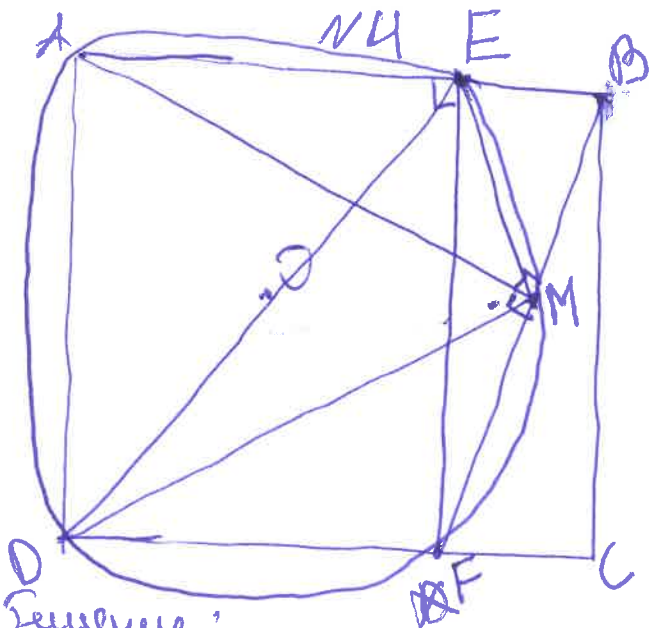
посчитано 2 раза?

Ответ: 116

Частично оценка, частично описание примера, а в чистом виде нет ни того ни другого.

10

№4



Решение:

Рассмотрим четырёхугольник AEFD

$\angle A = \angle D = 90$ (по условию)

т.к $AD \parallel EF$ (по условию) $\Rightarrow EF \perp AB$ (т.к $AD \perp AB$ по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF \perp DC$ (т.к $AB \parallel DC$ по условию) $\Rightarrow \angle AEF = \angle EFD = 90^\circ$.

$\angle A + \angle DFE = \angle AEF + \angle D$

$90^\circ + 90^\circ = 90^\circ + 90^\circ$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M A 0 0 0 0 4 9 6 9 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$180° = 180°$ => ~~что~~ ~~4~~ около 4EFD можно описать окружность (что и требовалось)

Опишем около ∡EFD окружность (O; r). Т.к вершины четырёхугольника около которого описана эта окружность лежат на этой окружности, то проведём диаметр ED. Таким образом ∠EMD будет опирающийся на диаметр а его градусная мера будет равна 90°, если он будет являться вписанным. Он будет являться вписанным, если точка M лежит на окр (O; r).

Проведём диаметр ∡F. По условию AM ⊥ BF => ∠AMF опирается на диаметр ∡F и => ∠AMF = 90°. т.к мы точно знаем, что ∠∡MF = 90° (из доказ выше) => ∠AMF является вписанным => M ∈ окр (O; r)

=> точка M лежит на окр (O; r) => ∠EMD - вписанный => ∠EMD = 90° (т.к опирается на диаметр ED.

20

Ответ: 90°

№5

~~$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$~~

~~Преобразуем данное уравнение~~

~~$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$~~ ~~$xy \neq 0$~~ ~~$x \neq 0 \quad y \neq 0$~~

~~$\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{1764}$~~ ~~$1764xy \neq 0$~~ ~~$x \neq 0 \quad y \neq 0$~~

~~$\frac{1764(y+x)}{1764\,xy}=\frac{xy}{1764\,xy}$~~

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

МА000049691 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Отбросим знаменатель~~

~~$1764(y+x)=xy$~~

~~$1764=\frac{xy}{y+x}$~~

~~$\frac{xy}{y+x}=1764$~~

~~Разложим 1764 на множители~~

~~$y+x\neq 0$~~

1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

№5

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$$

преобразуем данное уравнение

$x\neq 0$
$y\neq 0$

$$\frac{1}{x}^{\backslash 1764y}+\frac{1}{y}^{\backslash 1764x}-\frac{1}{1764}^{\backslash xy}=0$$

$$\frac{1764y+1764x-xy}{1764xy}=0$$

1

$1764y+1764x-xy=0$

$1764\cdot(x+y)\ 4-xy=0$

Лист 5 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	9	6	9	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$1764 \cdot (x+y) = xy$

$1764 = \frac{xy}{x+y}$

xy должно делиться на 1764

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г.Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

M	A	0	0	0	0	5	6	5	2	1	9

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Мильбергер

Имя Валерия

Отчество Дмитриевна

Дата рождения 30.01.2004 **Класс** 9

ОУ, местоположение КГБОУ „КМжг-и"

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.19

Номер телефона 89024689397 **Подпись** ________

ИНСТРУКЦИЯ. Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | 5 | 2 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	0	60

№1 ,0,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0

Чтобы сумма десяти чисел была < 0, рассмотрим случай, при котором в строке максимальное количество отрицательных чисел

↓

в любой тройке чисел может быть максимум 2 отрицательных числа

↓

тогда при сложении разобьём строку на тройки, в каждой из которых (в подряд идущие числа) будет минимальная сумма (к примеру, 1)

↓

тогда последнее число, невошедшее в тройки должно быть −3

Пример:

$-6; -2; 9; -6; -2; 9; -6; -2; 9; -5$ $\quad \Sigma = -2$

20

Ответ: да, может

№2

Пусть количество мальчиков из 9 „а" класса = c,
количество мальчиков из 9 „б" класса = d,
количество девочек из 9 „а" класса = a,
количество девочек из 9 „б" класса = в

М → Д → М → Д
М → Д, Д → М, М → Д

всего 437 поздравлений

тогда мальчики из „А" класса написали девочкам из „Б" класса c·в поздравлений,
мальчики из „Б" класса написали девочкам из „А" класса d·a поздравлений,

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 5 6 5 2 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

„девочки из „А" класса написали мальчикам из „А" класса $a \cdot c$ поздравлений

девочки из „Б" класса написали мальчикам из „Б" класса $b \cdot d$ поздравлений

$cb + da + ac + bd = 437$

$c(a+b) + d(a+b) = 437$

$(a+b)(d+c) = 437$

$437 = 23 \cdot 19$

$a+b=23, \; c+d=19$

$a+b+c+d$ (кол-во учеников в 2-х классах)

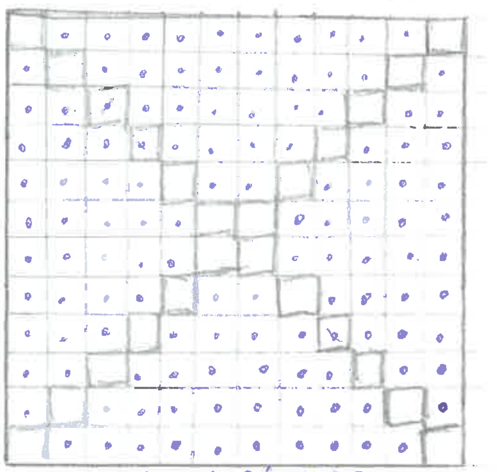
$a+b+c+d = 23+19 = 42$ (ученика)

Ответ: 42 ученика

20

№3

12×12



• примерное расположение.

„•" – фишка

„□" – пустая клетка

• в каждой второй диагонали нечетное количество ~~[illegible]~~ клеток ⟹ одна из клеток останется пустой

• в данном квадрате $24 \cdot 2 = 48$ диагоналей

⇓

24 клетки – пустые

в каждом столбце 2 пустых клетки из диагоналей

• тогда наибольшее возможное число фишек равно 120

$12 \cdot 12 = 144$ (клетки) – всего

$144 - 24 = 120$ клеток (с фишками)

Ответ: 120

20

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

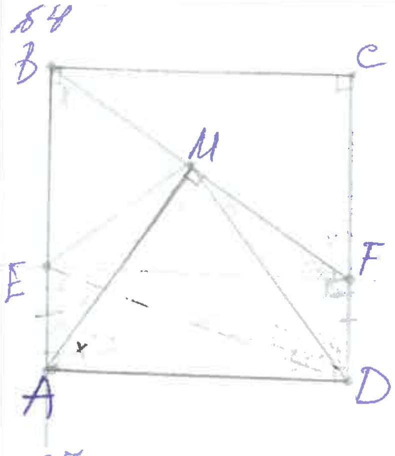
Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	5	6	5	2	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: ABCD – квадрат, $EF \parallel AD$, $AM \perp BF$

Найти: $\angle EMD$

Решение

$\angle EMD = \angle AMF = 90^\circ$

Реш. нет

Ответ: 90°

0

№5

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1765}$$

$xy = 3528$?

3528 делится на все ? четные кроме 10, 20, 30, ...

не делится на 16, 18, ...

$3528 : 2 = 1765$

$1765 - 352 = 1413$

Ответ: 1413

0

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	4	8	3	9	1	9

г Красноярск, СФУ
Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 1

Фамилия ВЕДЕРНИКОВ

Имя Ярослав

Отчество Владимирович

Дата рождения 22.01.2003 **Класс** 9

ОУ, местоположение МАОУ КУГ №1 „Универс" , Красноярск

Предмет Математика

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 89631845597 **Подпись** Вед

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	4	8	3	9	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	15	20	2	1	58

задача №1)

Ответ: Да, может.

Пример:

$\frac{-10}{63}, \frac{-10}{63}, \frac{21}{63}, \frac{-10}{63}, \frac{-10}{63}, \frac{21}{63}, \frac{-10}{63}, \frac{-10}{63}, \frac{21}{63}, \frac{-10}{63}$

20

сумма любых 3-х подряд идущих $= \frac{1}{63}$, что больше 0, а сумма всех $= -\frac{7}{63}$, что < 0

задача №2)

Обозначим: X - мальчики 9А, y - девочки 9А

X1 - мальчики 9Б, y1 - девочки 9Б

$\Rightarrow$ Если каждая девочка написала мальчику из своего ~~другого~~ класса, то девочки из 9А написали: ~~y · x~~ y · x (открыток), а девочки из 9Б y1 · x1 (открыток), $\Rightarrow$

Если каждый мальчик написал девочке из другого класса, то мал. из 9А = X · y1, а из 9Б = x1 · y (открыток) $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \cdot x + y1 \cdot x1 + x \cdot y1 + x1 \cdot y = 437$

$\Rightarrow y(x+x1) + y1(x+x1) = 437$

$\Rightarrow (x+x1)(y+y1) = 437.$

437 = 19 · 23

(437 - простое число, т.к. людей не может быть отр. кол-во)

$\Rightarrow$ одна скобка = 1, а другая = 437

$\Rightarrow$ Сумма всех учеников все равно = 438

15

Ответ: 438

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 8 | 3 | 9 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

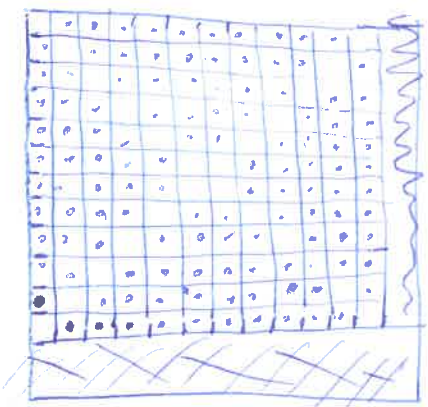
задача №3)

1) Рассмотрим все диагонали в которых нечетное кол-во клеток. , их у нас будет по 6 с каждого угла (включая угловую диагональ (из 1 клетки)) итого = 24 нечетных диагонали.

Эти диагонали не пересекаются друг с другом!

В каждой из этих диагоналей мы не можем поставить дамку в хотя бы одну из клеток, так как надо чтобы было нечетное кол-во дамок. ⇒ т.к. мы максимизируем, докажем, что существует расстановка, где мы не поставим дамку в 24 клетки.

Пример:



Мы ставим дамки во все клетки, кроме 2 главных диагоналей

всего = 12·12 = 144 144 − 24 = 120

⇒ Ответ:

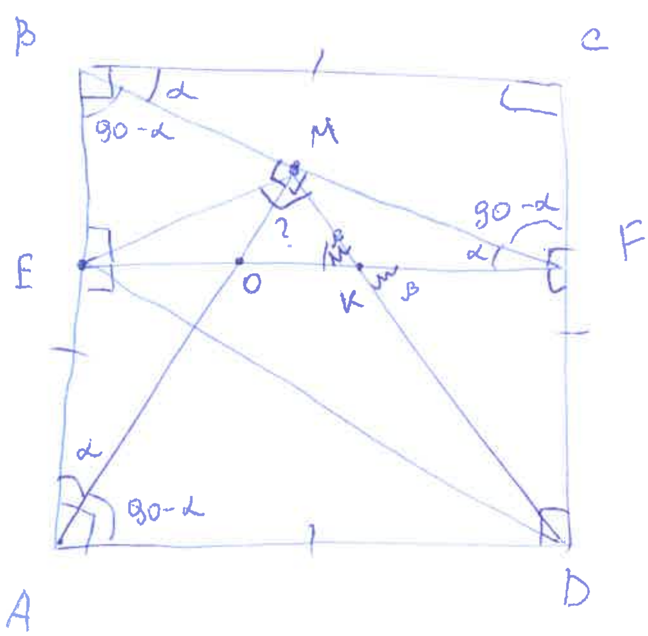
Макс кол-во дамок на доске = = 120

20

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	4	8	3	9	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



Решение:

$\triangle EBF = \triangle FBC$, т.к. BF - общая, $EF = BC$ (т.к. $EF \parallel AD$. в квадрате)

и $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$. т.к. $EF \parallel AD$, $AD \parallel BC \Rightarrow EF \parallel BC$.

$\triangle OMF \sim \triangle EBF$ ~~$\triangle FBB$~~ (по 2∠ $\angle OFM$ и $\angle EFB$ - совпадают,

$\angle OMF = \angle BEF = 90°$

$\Rightarrow \triangle OMF \sim \triangle EBF \Rightarrow \frac{BF}{OF} = \frac{OM}{EB} = \frac{MF}{EF}$.

т.к. $\triangle OMF \sim \triangle EBF$, а $\triangle EBF = \triangle BCD \Rightarrow \triangle OMF \sim \triangle EBF$.

Пусть $\angle EKM = \beta \Rightarrow \angle DBF = \beta$?

из всего вмещающего подобия $\Rightarrow \frac{DK}{BKM} = \frac{FK}{KE}$, $\angle\beta = \angle\beta$

$\Rightarrow \triangle EMK \sim \triangle DKF \Rightarrow \angle EMK = 90°$ Откуда это?

$\Rightarrow \angle EMD = 90°$

2

$\Rightarrow$ Ответ: $\angle EMD = 90°$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 4 8 3 9 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задача №5)

$1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1764} \Rightarrow y + x = \frac{xy}{1764} \Rightarrow \frac{xy}{y+x} = 1764$

Одно из чисел, x, y должно быть кратно 1764.

$\frac{1}{1764} = z$, а $x = \frac{1}{2z}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{2z}$. – первая пара.

Если $x = \frac{1}{3z} \Rightarrow y = \frac{1}{1{,}5z}$ – вторая пара.

это натуральные числа?

Если $x = \frac{1}{4z} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{4}{3}z}$ – третья пара

Если $x = \frac{1}{5z} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{5}{4}z}$

Четность числа не соблюдена, $\Rightarrow$ таких пар бесконечно много.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Н	А	0	0	0	0	4	9	1	3	1	9

г. Красноярск, СФУ
Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Фомин

Имя Георгий

Отчество Владимирович

Дата рождения 30.06.2002 **Класс** 10

ОУ, местоположение г. Красноярск МАОУ Лицей №9

Предмет Математика

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 89135771680 **Подпись** Фом

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	9	1	3	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$n+22>n \Leftrightarrow n \neq (n+22):1$ и любого другого делителя

~~Наи~~ Два наибольших делителя $(n+22)$ равны: $(n+22):2$ и $(n+22):3$, при условии, что делитель не равен $n+22$.

$(n+22):2+(n+22):3 \geq n$

$3n+66+2n+44 \geq 6n$

$n \leq 110$

Проверим для $n=110$, $n+22=110+22=132$

$132:2+132:3=66+44=110=n$

Ответ: 110.

+20б

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	16	2	78

30

№2.

5 дней – 100 орехов

Вт – орехов бельчонок ~~съел~~ ~~за~~ нашел во вторник

Ср – орехов он ~~съел~~ ~~за~~ нашел в среду

Чт – орехов он ~~съел~~ ~~за~~ нашел в четверг

Пт – орехов он нашел в пятницу

Сб – орехов он нашел в субботу

$Вт \geq Ср \geq Чт \geq Пт \geq Сб$

наим. $Вт+Чт+Сб$ – ?

Решение: т.к. $Вт \geq Ср$, а $Чт \geq Пт$ $\Rightarrow Вт+Чт+Сб \geq Ср+Пт \Rightarrow$
$\Rightarrow Вт+Чт+Сб=$ наим, только тогда, когда $Вт+Чт+Сб=Ср+Пт=50$

+20б

Приведем пример на 50:
Во вторник он нашел 50 орехов, в среду тоже 50, а в остальные дни по 0.

Ответ: 50

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	9	1	3	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Дано:

x, y, z - возрастающая арифм прогрессия

$\Downarrow$

$x = y - d$

$z = y + d$

$$\begin{cases} x^2 = n+29 \\ y^2 = n+301 \\ z^2 = n+605 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-d)^2 = n+29 \\ y^2 = n+301 \\ (y+d)^2 = n+605 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2yd + d^2 = n+29 \\ y^2 = n+301 \\ y^2 + 2yd + d^2 = n+605 \end{cases}$$

Найти: n

Решение:

1) сложим первое выражение в системе с третьим

$$+\begin{array}{l} y^2 - 2yd + d^2 = n+29 \\ y^2 + 2yd + d^2 = n+605 \end{array}$$

$$2y^2 + 2d^2 = 2n + 634$$

заменим y^2 на $n+301$:

+2б

$$\cancel{2n} + 602 + 2d^2 = \cancel{2n} + 634$$

$$2d^2 = 32$$

$d = 4$, $d \neq -4$, т.к. прогрессия возрастающая

2) подставим $d = 4$ в первое выражение $(y^2 - 2yd + d^2 = n+29)$

$$y^2 - 8y + 16 = n + 29$$

заменим y^2 на $n+301$:

$$\cancel{n} + 301 - 8y + 16 = \cancel{n} + 29$$

$$8y = 288$$

$$y = 36$$

3) подставим $y = 36$ во второе выражение $(y^2 = n+301)$

$36^2 = n + 301 \Rightarrow n = 36^2 - 301$

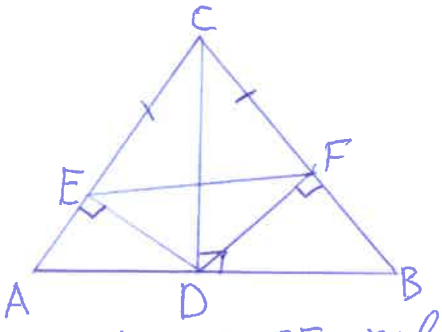
$n = 1296 - 301 = 995$

Ответ: $n = 995$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 4 9 1 3 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)



№4. Δ – треугольник

Дано: ΔABC; $\angle C = 120°$; $S_{ABC} = 12\sqrt{3}$;
CD, DE, FD – высоты; ΔCEF – равнобедр.

Найти: P_{EFC}

Решение: 1) т.к. ΔCEF – равнобедренный, а $\angle C = 120° \Rightarrow \angle CEF = \angle CFE =$
$= 30° \Rightarrow CE = FC$

2) $\angle AED = 90°$, т.к. ED – высота и $\angle DFB = 90°$, т.к. DF – высота

3) $\angle FED = 180° - \angle AED - \angle CEF = 180° - 90° - 30° = 60°$ и
$\angle EFD = 180° - \angle DFB - \angle CFE = 180° - 90° - 30° = 60°$

4) Рассмотрим ΔEFD
$\angle EFD = 60°$ и $\angle FED = 60° \Rightarrow \angle EDF = 60° \Rightarrow \Delta EFD$ – равностор. $(EF = FD = ED)$

5) Рассмотрим ΔCED и ΔCDF
а) CD – общая
б) $CE = CF$ (по условию)
в) $ED = FD$

$\Downarrow$

$\Delta CED = \Delta CDF$ (по трем сторонам)

$\Downarrow$

$\angle ECD = \angle FCD = \frac{120°}{2} = 60°$, как соответственные элементы в равных треугольниках

$\Downarrow$

CD и высота, и биссектриса

$\Downarrow$

ΔABC – равнобедренный $(AC = BC) \Rightarrow \angle CAB = \angle CBA = 30°$

6) $\angle CEF = \angle CAB = 30°$, как соответственные углы при секущей AC и
$\angle CFE = \angle CBA = 30°$, как соответственные углы при секущей BC

$\Downarrow$

$EF \parallel AB$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 4 9 1 3 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

7) Рассмотрим $\triangle AED$

$\angle EDA = 180° - \angle DEA - \angle EAD = 180° - 90° - 30° = 60°$

8) Рассмотрим $\triangle DFB$

$\angle FDB = 180° - \angle DFB - \angle FBD = 180° - 90° - 30° = 60°$

9) Рассмотрим прямоугольные $\triangle CFD$ и $\triangle EAD$

а) $\angle EDA = \angle FCD = 60°$

б) $ED = FD$

$\Downarrow$

$\triangle CFD = \triangle EAD$ (по острому углу и катету)

$\Downarrow$

$CF = EA$ (как соответвенные элементы) $\Rightarrow AC = 2EC$

10) Рассмотрим прямоугольные $\triangle CED$ и $\triangle FDB$

а) $\angle EDB = \angle ECD = 60°$

б) $FD = ED$

$\Downarrow$

$\triangle CED = \triangle FDB$ (по острому углу и катету)

$\Downarrow$

$FB = CE$ (как соответственные элементы) $\Rightarrow BC = 2CF$

11) Рассмотрим $\triangle ECF$ и $\triangle ACB$

а) $\angle C$ - общий

б) $\frac{BC}{CF} = \frac{AC}{EC} = 2$

$\Downarrow$

$\triangle ACB \sim \triangle ECF$ с коэффициентом подобия ~~2~~ 4. ?! ✓

12) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin(\angle C) \cdot AC \cdot CB$, а т.к. $AC = CB \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin(120°) \cdot AC^2$

$\frac{1}{2}\sin(120°) \cdot AC^2 = 12\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC^2 = 12\sqrt{3} \Rightarrow AC^2 = 48 \Rightarrow AC = CB = 4\sqrt{3}$

13) ~~AB^2~~ = по теореме косинусов

~~$AB^2 = 48 + 48 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$~~ $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos(\angle C)$

$AB^2 = 48 + 48 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos(120°) \Rightarrow AB^2 = 96 - 48 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 96 + 48 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 12$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 4 9 1 3 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

14) $P_{ABC} = 12 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3}$ $3+\sqrt{3}+\sqrt{3} = 3+2\sqrt{3}$

15) $P_{CEF} = \frac{P_{ABC}}{K}$, где K - коэффициент подобия $(K=2)$

+16б

$P_{CEF} = \frac{12+8\sqrt{3}}{2} = 6 + 4\sqrt{3}$

Ответ: $P_{EFC} = 6 + 4\sqrt{3}$

№5.

$f(x) = 2|x-a| + |x-b| + c$, $a < b$

$f(x) \leq 3$ является промежутком длины 2

пример:

$x \geq b$

$f(x) = 3x - 2a - b + c$

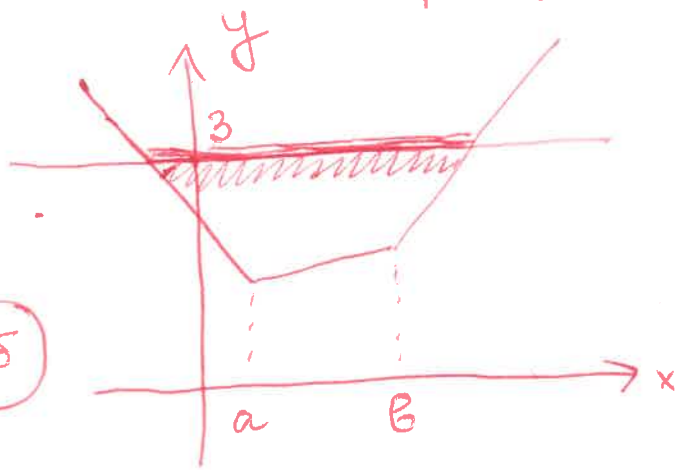
$a \leq x < b$ $|x-a|$

$f(x) = x - 2a + b + c$

2б

$x < a$

$f(x) = 2a + b + c - 3x.$



Если $f(x) \leq 3$ промежуток имеет определенную длину, то это возможно только при $a \leq x < b$ почему?

$f(x) = x - 2a + b + c$

$x - 2a + b + c \leq 3$

$x + b > 2a$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	4	9	1	8	1	9

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Сурунец

Имя Вадим

Отчество Васильевич

Дата рождения 14.03.2002 **Класс** 10

ОУ, местоположение г. Красноярск, лицей №9

Предмет Математика

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 89082205550 **Подпись** Су

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

т.к n – наибольшее $\Rightarrow$ если a и b – делители $n+22$, то и a, b – max делители, но наибольший делитель $n+22$ – $n+22$, но т.к $n < n+22 \Rightarrow a, b < n+22 \Rightarrow$ если $n+22 \vdots 2 \vdots 3$, то a и b = $\frac{n+22}{2}$; $\frac{n+22}{3}$, т.к это наибольшие делители $n+22$, не считая самого $n+22$:

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	20	100

30

$$\frac{n+22}{2} + \frac{n+22}{3} = n$$

$$\frac{5n+110}{6} = n$$

$$6n = 5n+110$$

$n = 110 \Rightarrow n+22 = 132$ – подходит, т.к $132 \vdots 2$ и $132 \vdots 3$

$$\frac{132}{2} + \frac{132}{3} = 66+44 = 110$$

+20б

Ответ: $n = 110$.

№3

т.к x, y, z – последовательные члены возрастающей прогрессии, то

$$\begin{cases} x = a+d \\ y = a+2d \\ z = a+3d \end{cases} \quad \begin{cases} a>0 \\ d>0 \end{cases}$$, т.к прогрессия возрастающая

по условию: $(a+d)^2 = n+29 = a^2+2ad+d^2$ (1); $(a+2d)^2 = n+301 = a^2+4da+4d^2$ (2); $(a+3d)^2 = n+605 = a^2+6ad+9d^2$ (3)

Вычтем из (3) (2) $\Rightarrow 2ad+5d^2 = 304$, аналогично отнимем из (2) (1) $\Rightarrow \cancel{n}+301-\cancel{n}+29 = \cancel{a^2}+4da+4d^2-\cancel{a^2}-2ad-d^2 = 272 = 2ad+3d^2 \Rightarrow$ т.к $2ad+5d^2 = 304$ и $2ad+3d^2 = 272 \Rightarrow$

$$\cancel{2ad}+5d^2-\cancel{2ad}-3d^2 = 304-272$$

$$2d^2 = 32$$

$$d^2 = 16$$

$d = 4$, т.к $d>0$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 4 9 1 8 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

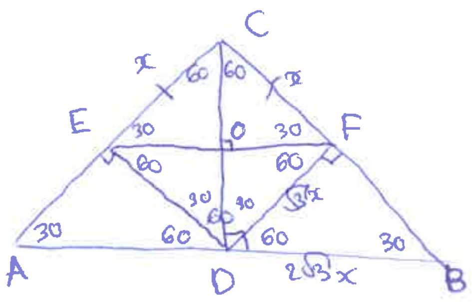
$\Rightarrow$ т.к $d=4$, то $2ad+5d^2=8a+80=304 \Rightarrow 8a=224 \Rightarrow a=28$

$x=a+b=28+4=32$ +20б

$n+29=x^2 \Rightarrow n=x^2-29=32\cdot 32-29=1024-29=995$

Ответ: $n=995$

№4



EFC – равнобедренный

$S_{ABC}=12\sqrt{3}$

$\angle C=120$ +20б

т.к EFC – равнобедренный, то $\angle CFE=\angle CEF$

$\Rightarrow$ т.к $\angle C+\angle CFE+\angle CEF=180$ и $\angle C=120$

$\Rightarrow \angle CFE=\angle CEF=\frac{60}{2}=30$

т.к по условию $DF\perp CB$ и $DE\perp AC \Rightarrow \angle FED=90-\angle CEF=60$ и

$\angle DFE=90-\angle CFE=60 \Rightarrow$ т.к $\angle FED+\angle DFE+\angle EDF=180$, то

$\angle EDF=60$ и $\triangle EFD$ – равносторонний

Рассмотрим $\triangle CED$ и CFD: $CF=CE$ по условию, CD – общая, $FD=ED$, т.к $\triangle EFD$ – равносторонний $\Rightarrow$ по 3 признаку $\triangle CED=\triangle CFD \Rightarrow$

$\angle DCF=\angle DCE$.

Итак, $\angle C=120$ и $\angle DCF=\angle DCE \Rightarrow$ т.к $\angle DCF+\angle DCE=\angle C \Rightarrow$

$\angle DCF=\angle DCE=60 \Rightarrow CD$ – биссектриса и высота (по условию) $\Rightarrow$

$\triangle ABC$ – равнобедренный и $\angle CBA=\angle CAB=30$, т.к $\angle C=120$

Пусть $CE=CF=x \Rightarrow$ т.к $\triangle CEF$ - равнобедренный и CO – биссектриса, то

$CO\perp EF \Rightarrow CO=\frac{CF}{2}=\frac{x}{2}$, т.к $\triangle CDF$ – прямоугольный и $\angle CFO=30$

$\Rightarrow$ по теореме Пифагора $FO=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}x}{2} \Rightarrow EF=2FO=\sqrt{3}x$, т.к

CO – медиана в равнобедренном $\triangle CEF \Rightarrow EF=FD=ED=\sqrt{3}x$

т.к $CO\perp EF \Rightarrow \angle FOD=90 \Rightarrow \triangle DOF$ – прямоугольный $\Rightarrow DO=\sqrt{DF^2-OF^2}=$

$=\sqrt{3x^2-\frac{3x^2}{4}}=\frac{3x}{2} \Rightarrow CD=CO+OD=\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}=\frac{4x}{2}=2x$. В $\triangle DFB$ $\angle DFB=$

$=90$ и $\angle FBD=30 \Rightarrow DB=2DF=2\sqrt{3}x=AB=2DB=4\sqrt{3}x$, т.к CD – медиана высота и биссектриса в $\triangle ABC$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	4	9	1	8	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$S_{ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{2x \cdot 4\sqrt{3}x}{2} = 12\sqrt{3}$

$4x^2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

$4x^2 = 12$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$

$P_{CEF} = CE + EF + CF = x + x + 2FO = 2x + \sqrt{3}x = 2\sqrt{3} + 3$

Ответ: $P_{CEF} = 2\sqrt{3} + 3$

N 5

$f(x) = 2|x-a| + |x-b| + c, \quad a<b$

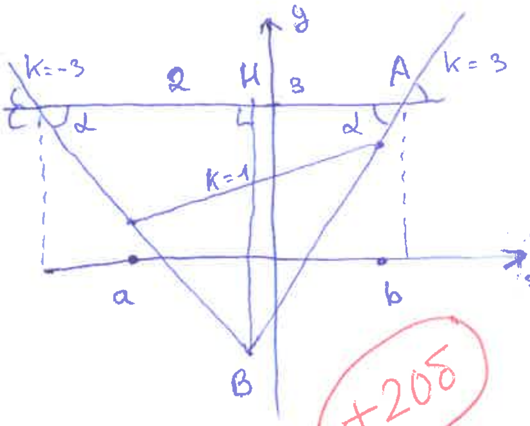
Рассмотрим 3 случая: (k - угловой коэффициент)

1) $x<a<b \Rightarrow f(x) = 2a - 2x + b - x + c = -3x + 2a + b + c \Rightarrow k_1 = -3$

2) $a<x<b \Rightarrow 2x - 2a + b - x + c = x - 2a + b + c \Rightarrow k_2 = 1$

3) $a<b<x \Rightarrow 2x - 2a + x - b + c = 3x - 2a - b + c \Rightarrow k_3 = 3$

Нарисуем схематичный график функции $f(x)$

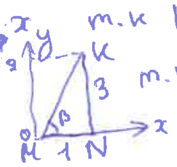


продлим части функции с угловыми коэффициентами 3 и -3 до пересечения. получим треугольник ABC.

т.к $|k_1| = |k_3|$, то $\angle CAB = \angle ACB = \alpha$

$\Rightarrow \triangle ACB$ - равнобедренный и $AC = 2$

т.к $k_3 = 3$, то найдем $\sin\alpha$



т.к $k_3 = 3$, то $\alpha = \beta$ в $\triangle MNK$, где $KN = 3$ и $MN = 1$ ~~т.к~~ $\frac{3}{1} = 3$, т.е MK - отрезок на функции $y = 3x$, где $k = 3$

$MK = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

+20б

В $\triangle ABC$ опустим высоту BH, т.к $\triangle BCA$ - равнобедренный то $AH = \frac{1}{2}AC = 1 \Rightarrow$ т.к $\sin\alpha = \frac{1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow AB = \sqrt{10}$

$\Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$, но т.к AC - отрезок на линии $y = 3$, то точка B лежит на координатной оси x. Т.к график $f(x)$ лежит выше B, иначе он сам является треугольником, что невозможно т.к $k_2 = 1$

то ордината точки $B = 0$, $\Rightarrow f(x) > 0$ при всех x, т.к лежит выше точки B с ординатой $= 0$.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	4	9	1	8	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Дни недели: ВТ, СР, ЧТ, ПТ, СБ

орехи: a, b, c, d, e

по условию: $a \geq b \geq c \geq d \geq e$ и $a+b+c+d+e=100$

найти $\min a+c+e$. Заметим, что $a+c+e$ минимальна в случае когда $b+d$ – максимально. Т.к $b \geq d$, то рассмотрим случай когда b – максимально, т.к $a \geq b \geq c \geq d \geq e$, то a – самое большое число $\Rightarrow$ b – максимально, тогда когда $= a \Rightarrow b = a \Rightarrow b+a = 2a$

Рассмотрим 2 случая: (если $b<a$, то $b+d$ – не будет максимальной)

1) $2a = 100 \Rightarrow a = 50$ и $b+d = 50$, т.к $c, d, e = 0 \Rightarrow a+c+e = 50$

2) $2a < 100 \Rightarrow a < 50$, т.к $2a < 100$, то $c+d+e = 100-2a$, d будет максимальным при c и e минимальных, $e \geq 0 \Rightarrow e = 0$ (т.к это минимальное значение). По условию $c \geq d \Rightarrow d$ – максимально при $c=d$, т.к d в любом случае меньше c и чем больше будет c, тем меньше d, а минимальное значение c этой

$\Rightarrow c = d$ и $c+d = 100-2a \Rightarrow d = \frac{100-2a}{2} \Rightarrow b+d = a + \frac{100-2a}{2} =$

$= \frac{2a+100-2a}{2} = \frac{100}{2} = 50$, т.е максимальная сумма $b+d = 50$.

$\Rightarrow$ минимальное значение суммы $a+c+e = 100-50 = 50$

+20б

Ответ: 50.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

М	А	0	0	0	0	4	1	2	8	1	9

г. Красноярск, СФУ
Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 1

Фамилия Дубасов

Имя Александр

Отчество Анатольевич

Дата рождения 21.05.2002 **Класс** 10

ОУ, местоположение г. Боготол, МБОУ СОШ №4

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 1 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 89620736751 **Подпись** Дубасов

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

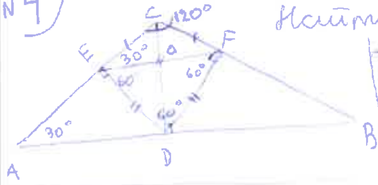
Н	А	0	0	0	0	4	1	2	8	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4) Дано: ΔABC; $\angle C=120°$, $S=12\sqrt{3}$; CD – бис; $DE \perp AC$; $DF \perp BC$; $EC=FC$.

Найти: $P_{\Delta EFC}$



Решение: 1) ΔEFC: т.к. $\angle ECF=120°$, то только $EC=CF$; $\angle CFE=\angle CEF=\frac{180-120}{2}=30°$; тогда $\angle DEF=\angle DFE=60°=$ $=\angle FDE$; следовательно, ΔDEF – равносторонний

2) Очевидно, $EF \perp CD$, т.к. CD соединяет вершины Δ-ов с общим основанием $\Rightarrow EF \parallel AB$; $\angle CEF=\angle CAB \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta EFC$ по двум углам ($\angle C$ общ)

3) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sin 120°\cdot AC\cdot CB$, где $AC=CB$; +20б

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AC^2=12\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}AC^2}{4}=12\sqrt{3}$; $AC^2=48$; $AC=4\sqrt{3}$.

4) ΔADE: $\angle EAD=30° \Rightarrow \frac{ED}{AD}=\frac{1}{2}$; и т.к. $AD=\frac{1}{2}AB$, а $ED=EF$, то

$\frac{EF}{AB}=\frac{1}{4} \Rightarrow k=\frac{1}{4}$ (коэф. пропорц.)

1	2	3	4	5	Σ
20	20	0	20	0	60

5) $CF=4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}=\sqrt{3}=CE$;
$ED=\frac{1}{2}EF=EC\cdot\cos 30°=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=1,5$; $EF=3$ $\Big\}$ $P=2\sqrt{3}+3$ 3а

Ответ: $2\sqrt{3}+3$

№2) Пусть во вт, ср, чт, пт, сб собрано a, b, c, d, e орехов соотв., тогда $a+b+c+d+e=100$ и $a \geq b \geq c \geq d \geq e$.

1) $a+c+d=\min$, если $b+d=\max$; найдем $(b+d)_{max}$;

2) $b \leq a$; $d \leq c \Rightarrow b+d \leq a+c$, тогда $(b+d)_{max}=a+c$ +20б

3) Всего 100 орехов, поэтому максимально может быть $b+d=a+c=\frac{100}{2}=50$ (выходит, что в субботу бельчонок не нашел ни одного ореха – по условию это допустимо)

4) $\Rightarrow (b+d)_{max}=50$, а $(a+c+e)_{min}=100-50=50$

5) Пример: 25, 25, 25, 25, 0.

Ответ: 50 орехов

№1) Наибольшие делители числа $n+22$, очевидно, – $\frac{n+22}{2}$ и $\frac{n+22}{3}$ (потому что 2 и 3 наименьш.). Сложим их:

$\frac{n+22}{2}^{\llcorner 3}+\frac{n+22}{3}^{\llcorner 2}=n^{\llcorner 6}$; $3n+66+2n+44=6n$; $\Rightarrow n=110$

Ответ: 110 +20б

Лист 1 из 1

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Зеленогорск, МБОУ „Лицей №174" | МА0000511219

Площадка проведения (город, ОУ) | Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 2

Фамилия АНОСОВ

Имя АЛЕКСЕЙ

Отчество ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 09.01.2002 **Класс** 10

ОУ, местоположение МБОУ „Лицей №174", г. Зеленогорск

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 03.03.2019

Номер телефона 8-913-584-25-03 **Подпись** Ан

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № №2 | MA0000511219

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	2	0	62

30

№1

a, b – натуральные числа, делители числа n+24.

если $n+24 \vdots a$, то $n+24 \vdots \frac{n+24}{a}$

если $n+24 \vdots b$, то $n+24 \vdots \frac{n+24}{b}$

получим уравнение:

1) $\frac{n+24}{a} + \frac{n+24}{b} = n$

$\frac{nb+24b+na+24a}{ab} = n$, $abn = nb+24b+na+24a$

2) $\boxed{n = \frac{24(a+b)}{ab-a-b}}$

Из первого уравнения мы знаем, что чем больше $\frac{n+24}{a} + \frac{n+24}{b}$, то тем больше n, значит чтобы максимизировать данные делители мы должны брать делители a и b как можно меньшие.

если взять a или b равные 1, то n+24 + натуральный делитель > n, значит минимальное значение для a = 2.

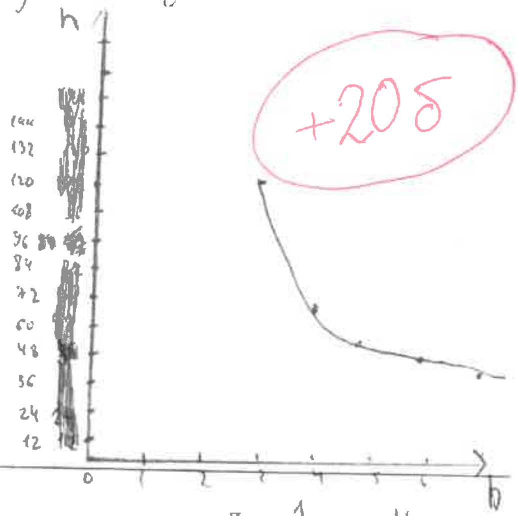
построим график функции

$n = \frac{24(2+b)}{b-2}$

b	1	2	3	4	5	6	7
n	-72	∅	120	72	56	48	43,2

при b = 1,2 значения нас не интересуют а на интервале [2;+∞) функция убывает следовательно максимум n = 120

Ответ: 120



+20б

Лист 1 из 4

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M A 0 0 0 0 5 1 1 2 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$a \geq b \geq c \geq d \geq e$

$a+b+c+d+e=120$

$\min(a+c+e)=?$

$b+d=120-a+c+e$

т.к $a+c+e \to \min$, то $120-\min \to \max$

значит чем меньше $a+c+e$, тем больше $d+b$

мы можем свести задачу к поиску $\max(b+d)$

$\max(b+d)=\max(b)+\max(d)$

поскольку b не может быть более a,

а d не может быть больше c,

то $\max(b)=a, \max(d)=c$

$\max(b+d)=a+c$

получаем, что $2\cdot\max(b+d)+e=120$

$2\cdot\max(b+d)=120-e$

чем меньше e, тем больше $b+d$, значит $e=0$.

$2\cdot\max(b+d)=120$

$\max(b+d)=60$

$a+c=60$

$\min(a+c+e)=\min(60+0)=\underline{60}$

Ответ: 60.

+20б

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | М А 0 0 0 0 5 1 1 2 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Т.к. x, y и z являются последовательными членами арифметической прогрессии, то их можно заменить таким образом:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x \\ y&=x+a \\ z&=x+2a \end{aligned}}$$

1) $x^2=n+37$

2) $(x+a)^2=n+301$

3) $(x+2a)^2=n+597$

вычтем из 2 выражение первое:

$$\begin{aligned} &x^2+2xa+a^2=n+301 \\ -\ &x^2=n+37 \\ \hline &2xa+a^2=264 \end{aligned}$$

4) $\boxed{x=\frac{264-a^2}{2a}}$

вычтем из 3 второе

$$\begin{aligned} &x^2+4xa+4a^2=n+597 \\ -\ &x^2+2xa+a^2=n+301 \\ \hline &\boxed{2xa+3a^2=296} \end{aligned}$$

подставим x.

$2\cdot\frac{264-a^2}{2a}\cdot a+3a^2=296$

$264-a^2+3a^2=296$

$264-a^2+3a^2=296$

$264+2a^2=296$

$2a^2=296-264$

$2a^2=32$

$a^2=16$

$a=\pm\sqrt{16}=\pm4$

поскольку арифметическая прогрессия возрастающая, то $a>0$

$\boxed{a=4}$

подставив в выражение (4) можем вычислить x.

$x=\frac{264-16}{8}=\frac{248}{8}=31$ $\boxed{x=31}$

подставив x в (1) уравнение найдём n:

$n=x^2-37=961-37=924$

Ответ: $n=924$

+20б

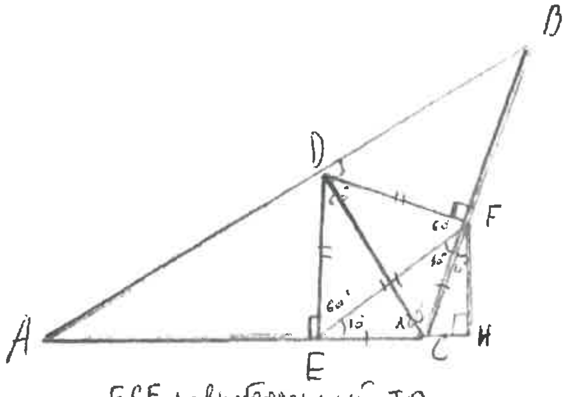
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 МА00005 11219

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Т.К. $\triangle ECF$ равнобедренный, то

$\angle E = \angle F = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$

$\angle EEC + \angle EFD = 90°$

$\angle EFD = 90° - 30° = 60°$

$\angle CEF + \angle FED = 90°$

$\angle FED = 90° - 30° = 60°$

$\triangle DEF$ - равносторонний ✓

Вспомогательные утверждения! решение начато, но продвижения незначительны.

2 б.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

М	А	0	0	0	0	5	6	6	9	1	9

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Боков

Имя Адам

Отчество Исрапилович

Дата рождения 05.07.2002 **Класс** 10

ОУ, местоположение МАОУ Лицей №9, г. Красноярск

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 04 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.19

Номер телефона 89659004781 **Подпись** Боков

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | 6 | 9 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

+20б

• Ответ: $n = 110$

• Пример: $n=110$, $n+22=132$; $\frac{132}{2}+\frac{132}{3}=66+44=110=n$, n равно сумме двух натуральных делителей $n+22$.

• Почему нельзя больше? $n < n+22$, $\Rightarrow$ делитель $\frac{n+22}{1}$ мы не можем использовать. Тогда, наиб. делители $n+22$ будут равны $\frac{n+22}{2}$ и $\frac{n+22}{3}$. Каждое натуральное число больше предыдущего на 1. Если имеем какое-то N_i и N_{i+1} (два последоват. натур. числа), то $\left|\frac{N_i}{2}-\frac{N_{i+1}}{2}\right| = \frac{1}{2}$, а $\left|\frac{N_i}{3}-\frac{N_{i+1}}{3}\right|=\frac{1}{3}$; значит, разница суммы наиб.($\neq 1$) делителей двух последоват. натуральных чисел равна или меньше $\frac{5}{6}$ (если на 2 или 3 не делится), т. е. сумма двух наибольших $\neq$ самому числу делителей увел. не более чем на $\frac{5}{6}$ с каждым натуральным числом. Значит, при увеличении n на 1, сумма наиб. $\neq$ самому числу делителей $n+22$ увел. не более чем на $\frac{5}{6}$, т. е. при $n > 110$ сумма двух любых делителей $n+22$ будет меньше n. (т.к. с каждым след. n оно само увел. на 1, а $\frac{n+22}{2}+\frac{n+22}{3}$ увел. на $\frac{5}{6}$).

Ответ: n наиб. $= 110$

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	20	6	86

30 ✓

№2

• Ответ: 50.

• Пример: вт. − 25, ср. − 25, чт. − 25, пт. − 25, сб. − 0.

• Почему нельзя меньше? Пусть во вт. собрал a, в ср. собрал b, в чт. − c, пт. − d, сб. − e $\Rightarrow a+b+c+d+e=100$. Допустим, $a+c+e<50$, тогда $b+d>50$. Знаем, что $b \leq a$, $d \leq c$.

+20б

Тогда $b+d \leq a+c$, $\Rightarrow$ ~~$b+d \leq a+c$~~ $50 < b+d \leq a+c$, или $50 < a+c$. Но т.к. $a+c+e<50$, то выходит, что $a+c+e<50<a+c$, или $a+c+e<a+c$, что невозможно. Значит, $a+c+e \geq 50$.

Ответ: наим. число орехов в вт., чт., сб. − 50 шт.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | МА00005669 19

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Т.к. x, y, z – последоват. члены арифметич. прогрессии, то пусть $x=a$, тогда пусть $y=a+b$, $z=a+2b$.

$$\begin{cases} a^2 = n+29 \\ (a+b)^2 = n+301 \\ (a+2b)^2 = n+605 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = n+29 & (1) \\ a^2+2ab+b^2 = n+301 & (2) \\ a^2+4ab+4b^2 = n+605 & (3) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $2ab+b^2 = 272$ (4)

$(3)-(2)$: $2ab+3b^2 = 304$ (5)

$(5)-(4)$: $2b^2 = 32$

$b^2 = 16$

$b = 4$ (т.к. прогрессия возрастающая, $b \neq -4$)

$(2)-(1)$: $2a\cdot 4 + 4^2 = 272$

$8a+16 = 272$

$8a = 256$

$a = 32$

+20б

Исходя из (1): $n = a^2 - 29 = 1024 - 29 = 995$

Проверка:

$$\begin{cases} 1024 = 995+29 & (1)' \\ 1296 = 995+301 & (2)' \\ 1600 = 995+605 & (3)' \end{cases}$$

Ответ: $n = 995$

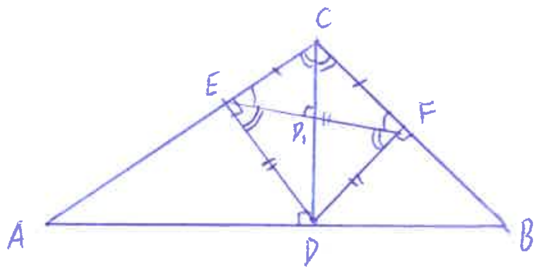
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1   М А 0 0 0 0 5 6 6 9 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: $\triangle ABC$. $\angle C = 120^\circ$. $S_{ABC} = 12\sqrt{3}$

CD – высота. DE, DF – высоты.

$\triangle CEF$ – равнобедр. $CE = CF$ (т.к. $\angle C = 120^\circ$, то только он может быть напротив основания, ведь сумма углов $\triangle$-ка $= 180^\circ$)

Найти: P_{CEF}.

Решение: • т.к. $\triangle CEF$ – равнобедр., то $\angle CEF = \angle CFE$ – углы при основании. $\angle CED = \angle CFD = 90^\circ$ – т.к. высоты. $\Rightarrow$ $\angle DEF = \angle DFE = 90^\circ - \angle CEF =$ $= 90^\circ - \angle CFE$, $\Rightarrow$ $\triangle DEF$ – равнобедр. ($DE = FD$, $\angle DEF = \angle DFE$).

Т.к. $\angle C = 120^\circ$, $\angle E = \angle F = 90^\circ$, то в четырёхугольнике $CEFD$ $\angle D =$ $360 - 120 - 90 - 90 = 60^\circ$, $\Rightarrow$ $\triangle DEF$ – равностор. (всем углы $= 60^\circ$). Поскольку сумма противоположных углов в $CEFD$ $= 180^\circ$, то около него можно описать окружность. Значит, $\angle DEF = \angle DCF$, $\angle EFD = \angle ECD$ (опир. на одни дуги), $\Rightarrow$ $\angle ECD = \angle DCF$, ведь $\angle EFD = \angle DEF$. Тогда CD_1 (D_1 – пересечение CD с EF) – медиана, биссектриса и высота в $\triangle ECF$ (т.к. он – равнобедр.). Т.к. $EF \perp CD$ и $AB \perp CD$, то $EF \parallel AB$, $\Rightarrow$ $\angle CAB = \angle CEF$, а т.к. $\angle C$ – общий, то $\triangle ABC \sim \triangle CEF$.

• Рассмотрим $\triangle ABC$. $S_{ABC} = 12\sqrt{3} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}bc \sin\alpha$.

$\frac{1}{2}ah = \frac{AB \cdot CD}{2}$, $\Rightarrow$ $AB \cdot CD = 24\sqrt{3}$. $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{AC \cdot BC}{2} \cdot \sin 120^\circ =$

$= \frac{AC \cdot BC \cdot \sqrt{3}}{4}$ (т.к. $\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$), $\Rightarrow$ $AC \cdot BC = \frac{12\sqrt{3} \cdot 4}{\sqrt{3}} = 48$.

• Т.к. $\triangle ABC \sim \triangle CEF$, то $\triangle ABC$ – равнобедр., $AC = BC$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $AC = BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Т.к. $\angle C = 120^\circ$, то $\angle A = \angle B = 30^\circ$. Напротив $\angle 30^\circ$ лежит катет, $= \frac{1}{2}$ гипотенузы, $\Rightarrow$ $CD = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3}$.

Т.к. CD – высота в равнобедр. $\triangle$-ке, то $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ равновеликие, $\Rightarrow$ $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}$. Тогда $DE = \frac{2S_{ACD}}{AC}$ (т.к. высота) $=$ $= \frac{12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3$. Т.к. $\triangle DEF$ – равностор., то $EF = ED = DF = 3$. Т.к. $\triangle ABC \sim \triangle CEF$, то $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CF}$; $AB = \frac{2S_{ABC}}{CD} = \frac{2 \cdot 12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 12$, $\Rightarrow$ $\frac{AB}{EF} = \frac{12}{3} = 4$. Тогда $CE = CF =$ $\frac{AC}{4} = \frac{BC}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, тогда $P_{EFC} = CE + CF + FE = 3 + 2\sqrt{3}$ +20б

Ответ: $P_{CEF} = 3 + 2\sqrt{3}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 5 6 6 9 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$$f(x)=\begin{cases} 2x-2a+x-b+c=3x-2a-b+c, \text{ если } x\geq a, x\geq b; \\ 2a-2x+x-b+c=-x+2a-b+c, \text{ если } x<a, x\geq b \text{ — нельзя, т.к. по усл. } a<b; \\ 2x-2a+b-x+c=x-2a+b+c, \text{ если } x\geq a, x<b; \\ 2a-2x+b-x+c=-3x+2a+b+c, \text{ если } x<b, x<a. \end{cases}$$

$f(x)=2|x-a|+|x-b|+c\leq 3$, ответ — промежуток длиной 2.

Док-ть: $2|x-a|+|x-b|+c>0$, или $2|x-a|+|x-b|>-c$

Если $f(x)\leq 3$:

- $3x-2a-b+c\leq 3$
  $3x\leq 2a+b-c+3$
  $x\leq \frac{2a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}+1$
  (если $x\geq a, x\geq b$)
- $x-2a+b+c\leq 3$
  $x\leq 3+2a-b-c$
  (если $x\geq a, x<b$)
- $-3x+2a+b+c\leq 3$
  $-3x\leq 3-2a-b-c$
  $3x\geq -3+2a+b+c$
  $x\geq -1+\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}$
  (если $x<b, x<a$)

$$\begin{cases} x\leq 1+\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3} & \text{I} \\ x\leq 3+2a-b-c & \text{II} \\ x\geq -1+\frac{2}{3}a+\frac{b}{3}+\frac{c}{3} \end{cases}$$

что-то из этого определяет наиб. значение

опр. наим. значение

наиб. − наим. = 2

Если I опр. наиб. значение: $1+\frac{2a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}+1-\frac{2}{3}a-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}=2-\frac{2c}{3}=2, \Rightarrow c=0.$

в таком случае $f(x)>0$ при $\forall$ знач. (т.к. $a\neq b$, то и $2|x-a|+|x-b|\neq 0$).

Если II опр. наиб. значение: $3+2a-b-c+1-\frac{2}{3}a-\frac{b}{3}-\frac{c}{3}=4+\frac{4}{3}(a-b-c)=2,$

$\Rightarrow a-b-c=-1{,}5, \Rightarrow c=a-b+1{,}5.$ Рассмотрим:

- $x\geq a, x\geq b$: $3x-2a-b>-a+b-1{,}5$; $3x-a-2b>-1{,}5$; но т.к. $3x-a-2b>$
  $>3x-3b\geq 0>-1{,}5$, ч.т.д.
- $x\geq a, x<b$: $x-2a+b > -a+b-1{,}5$; $x-a>-1{,}5$, ч.т.д.
- $x<a, x<b$: $-3x+2a+b > -a+b-1{,}5$; $-3x+3a > -1{,}5$; $-3(x-a)>-1{,}5$, ч.т.д.

все случаи рассмотрены.

6б

Вспомогат. утверждения

не совсем понятно, как это показывают, почему $f(x)>$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Зеленчукская, МБОУ, лицей №124

Площадка проведения (город, ОУ)

М	А	0	0	0	0	5	6	7	3	1	9

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 2

Фамилия [illegible]

Имя Евгений

Отчество Александрович

Дата рождения 6 сентября 2001 **Класс** 11 Б

ОУ, местоположение МБОУ, лицей №124 ~~[illegible]~~ Краснодарский Край, с. Зеленчукская

Предмет Математика

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы** 03.03.2019

Номер телефона 89157350802 **Подпись** [illegible]

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M | A | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 6 | 7 | 3 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	16	8	84

№1

В ряд выписаны дроби $\frac{1}{4097}, \frac{2}{4096}, \ldots, \frac{4096}{2}, \frac{4097}{1}$

Пусть числитель дроби, дающей целое число равен a, а знаменатель равен b, тогда имеет место система

$$\begin{cases} a+b=4098 \\ \frac{a}{b}=n \end{cases} \quad a,b,n\in N \quad a,b\in[1;4097]$$

30

$\frac{a}{b}=n \Rightarrow a=n\cdot b$; подставим значение a в первую часть системы

$n\cdot b+b=4098$

$b\cdot(n+1)=4098$

представим 4098 в виде двух множителей всевозможными способами

$4098=4098\cdot1=2049\cdot2=1366\cdot3=683\cdot6$ и подставим эти значения для b и $(n+1)$

$$\begin{cases} b=4098 \\ n+1=1 \end{cases} \notin ОДЗ;\quad \begin{cases} b=2049 \\ n+1=2 \end{cases} \Rightarrow n=1\ a=b=2049;\quad \begin{cases} b=2 \\ n+1=2049 \end{cases} \begin{matrix} n=2048 \\ a=4096 \end{matrix};$$

$$\begin{cases} b=1 \\ n+1=4098 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=4097 \\ n=4097 \end{matrix};\quad \begin{cases} b=1366 \\ n+1=3 \end{cases} \Rightarrow n=2\ a=2732;\quad \begin{cases} b=3 \\ n+1=1366 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=4095 \\ n=1365 \end{matrix};$$

$$\begin{cases} n+1=683 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n=682 \\ a=4092 \end{matrix};\quad \begin{cases} b=683 \\ n+1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n=5 \\ a=3415 \end{matrix}$$

+20б

Всего целых чисел среди дробей 7: 1, 2, 5, 682, 1365, 2048.

Ответ: 7 чисел.

№2.

Пусть P - стоимость правильного слова без учета стоимости горшка, а Λ - стоимость неправильного слова без учета стоимости горшка. Тогда имеет место система:

$$\begin{cases} 12\cdot(\Lambda+1)=7\cdot(P+1) \\ P=2\Lambda \end{cases} \quad \Lambda,P\in R$$

$12\Lambda+12=7P+7$

$6P+12=7P+7$

$P=5$

$\Lambda=2,5$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	5	6	7	3	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4 Винни 10 нужных горшков ~~мёда~~ и нужно горшков у него хватает на длинно, то есть имеет место ~~неравенство~~ равенство $(P+1)\cdot a+(N+1)\cdot b=20$, где $a,b \in N$, a — кол-во горшков с мёда, b — кол-во горшков неправильного мёда

$\begin{cases} 6\cdot a+3{,}5\cdot b=20 \end{cases}$

единственное решение этого равенства, когда $a,b\in N$, это:

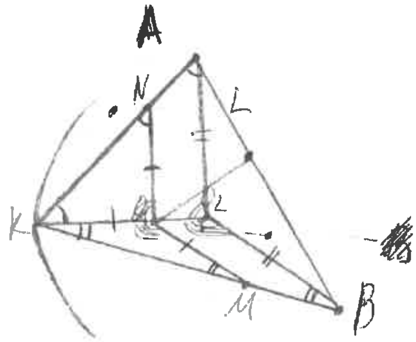
? $a=1,\ b=4$ $6a+3{,}5b=20$

$a+b=5$ $12a+7b=40$

+2б

Ответ: 5 полных горшков.

№3



Дано: $(O_1;r)\cap(O_2;R)=K$

AB — хорда $(O_2;R)$

$AB\cap(O_1;r)=L$

$BK=12$

$AL:BL=2:3$

$AK=?$

Пусть O_1, O_2 — центры малой и большой окружностей соответственно, пусть $(O_1;r)$ пересекает AK в точке N, KB в точке M.

Тогда $\triangle AKO_2 \sim \triangle NKO_1$ (по трём углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow KN:AK=KO_1:KO_2$

Аналогично $\triangle BKO_2 \sim \triangle MKO_1 \Rightarrow KM:BK=KO_1:KO_2 \Rightarrow$ $\Big\}\Rightarrow KN:AK=KM:BK\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AK}=\frac{BM}{BK};\ \frac{AN}{BM}=\frac{AK}{BK}=\frac{KN}{KM}$$

По св-ву касательной и секущей, проведённым из одной точки окружности.

+2б

$AL^2=AN\cdot AK$, $BL^2=BM\cdot BK$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AL^2}{BL^2}=\frac{AN\cdot AK}{BM\cdot BK}=\frac{AK^2}{BK^2}\Rightarrow \frac{AL}{BL}=\frac{AK}{BK}\Rightarrow AK=\frac{AL}{BL}\cdot BK=\frac{2}{3}\cdot 12=8$$

Ответ: 8

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2 | M A 0 0 0 0 5 6 7 3 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

14

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 - члены арифметической прогрессии с шагом q

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$

$a_3 \in \left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$

$\cos a_1 + \cos a_4 = \sin a_2 + \sin a_5$

$q \in \left[0; \frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}}{4}\right]$

$q \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right)$

$a_3 \in ?$

$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a_1 + \cos a_4 = \sin a_1 + \sin a_5$

$2 \cos\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a_1-a_4}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{a_2+a_5}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a_2-a_5}{2}\right)$

$a_1 - a_4 = a_2 - a_5 = -3q$

$\cos -3q = \cos 3q$

$\left(\cos\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) - \sin\left(\frac{a_2+a_5}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{3q}{2}\right) = 0$

$-\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\left(\cos\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) + \cos\left(\frac{a_2+a_5}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{3q}{2}\right) = 0$ $+\frac{\pi}{2}$?!

$a_1 + a_4 + a_2 + a_5 = 4 \cdot a_3 = (a_1 + 2q)$

$a_1 + a_4 - a_2 - a_5 = -2q$

$\cos\left(\frac{2q}{4}\right) = \cos(0{,}5q)$

$2 \cdot \cos\left(\frac{a_1+a_4+a_2+a_5}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{a_1+a_4-a_2-a_5}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{3q}{2}\right) = 0$

$2 \cdot \cos a_3 \cdot \left(\cos\frac{q}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{3q}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a_2+a_5}{2}\right)$

$2\cos\left(\frac{a_1+a_4+\pi+a_2+a_5}{4}\right)$

$\cdot \cos\left(\frac{a_1+a_4-\pi-a_2-a_5}{4}\right) = 0$

$a_3 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\cos\frac{q}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\frac{3q}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$q = \pi + 2\pi n$

$q = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3}$

$\notin$ ОДЗ

$q = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a_1 = -\frac{2\pi}{3}; a_2 = -\frac{\pi}{3}; a_3 = 0; a_4 = \frac{\pi}{3}; a_5 = \frac{2\pi}{3}$

$a_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi n$

$a_3 = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$\frac{3\pi}{4} + \pi n \in \left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$

$\pi n \in \left(-\frac{25\pi}{14}; \frac{7\pi}{14}\right)$

$n \in \left(-\frac{25}{24}; \frac{7}{24}\right)$

$n \in \{-1; 0\}$

$a_3 = \left\{-\frac{5\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right\}$

$2\cos\frac{4a_3+\pi}{4} \cdot \cos\frac{d}{2} \cdot \cos\frac{3d}{2} = 0$

$\cos\left(a_3 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{d}{2} \cdot \cos\frac{3d}{2} = 0$

Ответ: $a_3 = \left\{~~-\frac{5\pi}{8}~~; 0; ~~\frac{3\pi}{8}~~\right\}$

+16 б

в целом верное решение.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 2

M	A	0	0	0	0	5	6	7	3	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$N = 2^n - 32$

$n \in N$

$N \vdots 3$

$N = 2^n - 2^5 = (2^{n-5} - 1) \cdot 2^5 \Rightarrow$ N имеет простые делители 2 и 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{n-5} - 1$ имеет простой делитель 3 и простой делитель p

$2^{n-5} - 1$ кратно 3 только в случае когда $n-5$ — четное, т.е. $(n-5) = 2a$, где $a \in N$

однако в случае если $(n-5) = 2a$, разность $2^{n-5} - 1 = 2^{2a} - 1$ можно представить в виде $(2^a+1) \cdot (2^a-1)$ и если 2^a+1 или 2^a-1 не простые числа, или не представляются значения [illegible], то N имеет больше 3 простых делителей. почему? только они?

Условию задачи удовлетворяют только N, полученные при $n = 9$ и $n = 11$

$n = 11 \rightarrow N = 2^{11} - 32 = (2^6-1) \cdot 32 = 63 \cdot 32 = 9 \cdot 7 \cdot 32 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$ простые делители 2, 3, 7

$n = 9 \rightarrow N = 2^9 - 32 = (2^4-1) \cdot 32 = 15 \cdot 32 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$ простые делители 2, 3, 5

Вспомогат. факты

8б

Ответ: 480; 2016

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г. Красноярск, СФУ

Площадка проведения (город, ОУ)

M	A	0	0	0	0	5	5	7	1	1	9

Шифр (**не заполнять!**)

Вариант № 1

Фамилия Ерахтин

Имя Александр

Отчество Алексеевич

Дата рождения 30.01.2001 **Класс** 11

ОУ, местоположение КГАОУ "Школа космонавтики", г. Железногорск.

Предмет математика

Этап олимпиады заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 8-950-419-99-41 **Подпись** Ерах

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 5 5 7 1 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

№ 1.

$\frac{1}{4061};\ \frac{2}{4060};\ \dots;\ \frac{4060}{2};\ \frac{4061}{1}.$

$a_n = \frac{n}{4062-n},\ n \in N,\ n < 4062$

Пусть $n \vdots (4062-n)$, тогда:

$\frac{n}{4062-n} = k,\ k \in N$. (т.к. в последовательности все числа положительные)

$n = k(4062-n)$

$n = k \cdot 4062 - kn$

$n = \frac{k \cdot 4062}{k+1}$, т.е. $k \cdot 4062 \vdots k+1$.

1	2	3	4	5	Σ
20	12	20	0	6	58

30б

Найдём числа, на которые делится 4062: +20б

$$\begin{array}{r|l} 4062 & 2 \\ 2031 & 3 \\ 677 & 677 \\ 1 & \end{array}$$

k и k+1 это 2 последовательных числа, и они не имеют общих множителей т.к., чтобы они могли иметь общие множители $N \neq 1$, необходимо иметь $N+1$ подряд идущих чисел. Тогда количество подряд чисел, это количество значений которые может принимать значение $k+1$: $3+3+1=7$.

(2; 3; 677) (2·3; 2·677; 3·677) (2·3·677)

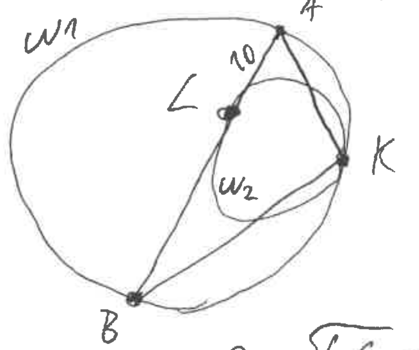
Ответ: 7.

Вариант № 1 | M A D 0 0 0 5 5 7 1 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

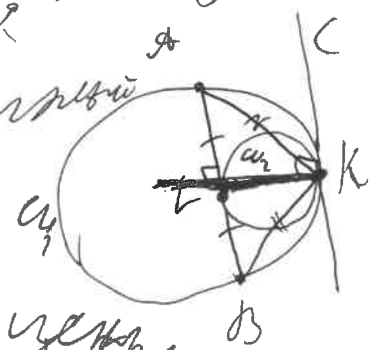


Дано: $\omega_1 \cap \omega_2 = K$, внутр. обр.; AB – хорда в ω_1; $AB \cap \omega_2 = L$; $AL = 10$; $AK : BK = 2 : 5$.

Найти: BL – ?

Решение: Проведём общую касательную ~~I Пров~~ в точку K, через точку C.

I 1) Допустим, что $AB \parallel KC$, тогда:



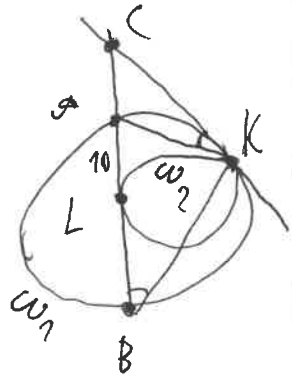
т.к. AB хорда то серединный перпендикуляр к AB будет проходить через центр в ω_1.

2) Также, из центра ω_1 я могу опустить перпендикуляр в точку K (точка касания)

3) Но также L и K это точки касания окружности ω_2 и опустив в эти точки перпендикуляры из центра ω_2 я получаю одну прямую.

4) у нас не может быть два разных перпендикуляра в одну точку одной прямой, тогда

перпендикуляры из центров ω_1 и ω_2 ~~...~~ в точку K это один и тот же перпендикуляр, тогда LA = LB и KL это срединный перпендикуляр в $\triangle ABK$, тогда $\triangle ABK$ – равнобедренный и AK = KB, что противоречит условию задачи.



II Пусть $AB \cap CK = C$, тогда:

1) $CL = CK$, т.к. это касательные из точки C к ω_2.

2) $CK^2 = CA \cdot CB$

$CL^2 = (CL-10)(CL+LB)$

$\cancel{CL^2} = \cancel{CL^2} - 10CL + BL\cdot CL - 10BL$

$BL = \frac{10CL}{CL-10}$.

3) $\angle CKA = \angle KBA$, т.к. $\angle ABK = \frac{1}{2}\smile AK$ и AK – хорда проведённая из точки касания и C – точка касательной.

4) $\triangle CKA \sim \triangle CBK$ ($\angle C$ – общий; (3) пункт), тогда:

$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CK}$

$\frac{2}{5} = \frac{CL-10}{CL}$ (по (1)).

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	5	5	7	1	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$2CL = 5CL - 50$

$CL = \frac{50}{3}$

+20б

вернёмся к (2) используя (4):

$2)\ BL = \frac{10\,CL}{CL-10} = \frac{10 \cdot 50}{3(\frac{50}{3}-10)} = \frac{500}{50-30} = \frac{50\cancel{0}}{2\cancel{0}} = 25.$

Ответ: $BL = 25.$

№3. 2

н – цена неправильного мёда без горшка.

П – цена правильного мёда без горшка.

Г – цена горшка.

Составим систему уравнений и найдём цену неправильного и правильного мёда в горшке, выраженную через горшки:

$\begin{cases} 3н = П \\ 13(н+Г) = 6(П+Г)\ (1) \end{cases}$

$1)\ 13н + \cancel{13}^{7}Г = 6П + \cancel{6Г}$

$\begin{cases} 3н = П \\ \cancel{13н} + 7Г = \cancel{18}^{5}н \end{cases}$

$\begin{cases} 3н = П \\ н = \frac{7}{5}Г \end{cases}$

$12/5\,a + 26/5\,в = 28$

$6a + 13в = 70$

$\begin{cases} П = \frac{21}{5}Г \\ н = \frac{7}{5}Г \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} П + Г = \frac{26}{5}Г \\ н + Г = \frac{12}{5}Г \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(П+Г) = 26Г \\ 5(н+Г) = 12Г \end{cases}$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М А 0 0 0 0 5 5 7 1 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Мы видим, что целое число горшков наполненных мёдом мы получим, если отдадим пчёлам 26 или ~~12 горшков~~ горшков, т.к. у нас всего 28 горшков то если мы потратим 5 горшков правильного мёда, то у нас останется ещё 2 горшка, если мы возьмём 5 горшков неправильного мёда, то у нас останется ещё 18 горшков, их нам не хватит для того, чтобы купить правильного мёда, тогда возьмём ещё 5 горшков неправильного мёда и того 10 горшков, и у нас осталось 2 горшка.

не рассмотрены случаи все!

+12б

Ответ: 5 правильного мёда или 5 неправильного мёда или 10 неправильного мёда.

обменять так, чтобы пустых горшков не осталось!

№5.

$N=9^n-1=(9-1)(9^{n-1}+9^{n-2}+\dots+9+1)=8\cdot(9^{n-1}+\dots+1)$

~~отсюда~~ из данного выражения видно, что простой множитель 2 нам даёт 8, значит: $(9^{n-1}+9^{n-2}+\dots+9+1)\vdots 13^n\cdot 2^k\cdot p^s$, где все переменные ~~целые и не отрицатель~~ натуральные, но: p – простое, а k целое не отрицательное.

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 МА000055 7119

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Посмотрим остатки от деления 9^n на 13:

$$\underbrace{\begin{matrix} 9^0 & 9^1 & 9^2 \\ 1 & 9 & 3 \end{matrix}}_{13}\ \begin{matrix} 9^3 \\ 1. \end{matrix}$$

значит при $n \vdots 3$ у нас появляется простой множитель 13. Посмотрим, появляется ли ещё один множитель.

Пусть $n=3$: $N=9^3-1=8(9^2+9+1)=8\cdot 91=8\cdot 13\cdot 7$.

Мы нашли невый множитель, посмотрим остатки:

$$\underbrace{\begin{matrix} 9^0 & 9^1 & 9^2 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}}_{7}\ \begin{matrix} 9^3 \\ 1 \end{matrix}$$

также при $n \vdots 3$ у нас появляется ещё один простой множитель 7.

Проверим делимость на 5:

$$\underbrace{\begin{matrix} 9^0 & 9^1 \\ 1 & 4 \end{matrix}}_{5}\ \begin{matrix} 9^2 \\ 1 \end{matrix}$$

Вспомогательные утверждения 6б

почему будет именно три простых делителя ?!

значит каждое второе $n \vdots 3$ даёт третий простой множитель, тогда $n = 6k-3$, $k \in N$.

неверно!

Ответ: $6k-3$, $k \in N$.

Лист 6 из 6

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

M	A	O	O	O	5	7	O	O	1	9

г. Красноярск, СФУ
Площадка проведения (город, ОУ)

Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия Постников

Имя Дмитрий

Отчество Юрьевич

Дата рождения 18.12.2001 **Класс** 11

ОУ, местоположение Красноярск, МАОУ СШ №7.

Предмет Математика

Этап олимпиады Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019.

Номер телефона 8-90?-981-53-19 **Подпись**

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 | 0 | 0 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

1	2	3	4	5	Σ
20	20	20	0	8	68

30 б

Представим ряд в таком виде

$\frac{4062-x}{x}$, где $x \in [1; 4061]$. $x - N$.

Очевидно, что $\frac{4062-x}{x} = \frac{4062}{x} - 1$ — целое тогда, когда x делитель 4062.

$4062 = 1\cdot 4062 = 2\cdot 2031 = 6\cdot 677 = 2\cdot 3\cdot 677 = 3\cdot 1354$

$\Rightarrow$ у него 8 делителей, но 4062 не входит в интервал $[1; 4061] \Rightarrow$

+20 б

Ответ: 7 целых.

№2.

x – прав. мед
y – неправ. мед.
z – горшок.

$$\begin{cases} x = 3y \\ 13(y+z) = 6(x+z) \\ 28z = a(x+z) + b(y+z) \end{cases}$$

$a + b - ?$

$13y + 13z = 18y + 6z \Rightarrow 7z = 5y \Rightarrow y = \frac{7}{5}z$

+20 б

$28z = a\left(3\cdot\frac{7}{5}z + z\right) + b\left(\frac{7}{5}z + z\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 28z = \frac{26az}{5} + \frac{12bz}{5} \Rightarrow 140 = 26a + 12b$

$70 = 13a + 6b$

$70-6=64$ $70-2\cdot6=58$ $70-3\cdot6=52$ $70-4\cdot6=46$

$70-5\cdot6=40$ $70-6\cdot6=34$ $70-7\cdot6=28$ $70-8\cdot6=22$

$70-9\cdot6=16$ $70-10\cdot6=10$ $70-11\cdot6=4$

из чисел: 64, 58, 52, 46, 40, 34, 28, 22, 16, 4, 10 только 52 делится на 13 $\Rightarrow a = \frac{52}{13} = 4$ $b = 3$ $\Rightarrow a+b = 7$.

Ответ: 7 горшков

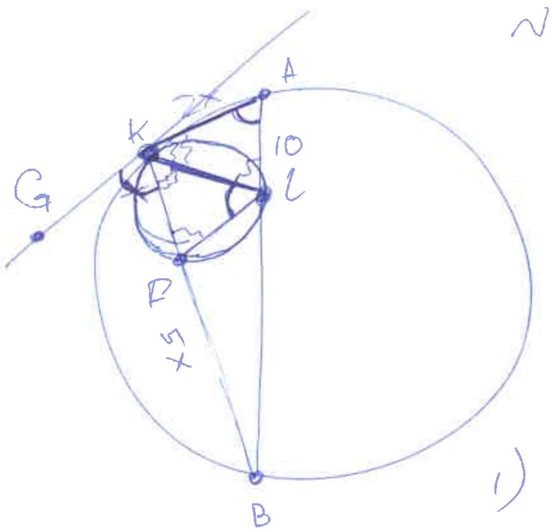
Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | M A 0 0 0 0 5 7 0 0 1 9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



Дано:

$AL = 10$ $\quad \frac{AK}{BK} = \frac{2}{5}$

$BL - ?$

Решение:

1) $\angle KFL = \angle KLA$ (т.к. $\angle KFL$ опирается на дугу, а $\angle KLA$ угол между касательной и этой дугой)

+20б

2) $\angle GKF = \angle KLF$ (т.к. тоже самое (GK – касательная, $\angle KLF$ – опир. на дугу))

3) $\angle GKB = \angle KAB$ (тоже самое)

4) $\Rightarrow \angle KLP = \angle KAL \Rightarrow \triangle LFK \sim \triangle ALK$ (по 2 углам) $\Rightarrow \angle AKL = \angle FKL$

$\Rightarrow$ KL – биссектриса.

$\Rightarrow$ по ~~теореме~~ свойству биссектрисы $\frac{2x}{10} = \frac{5x}{BL} \Rightarrow BL = \frac{5x \cdot 10}{2x} = 25.$

Ответ: $BL = 25$.

№5.

Ответ: 729. ✓ Рассмотрим остатки 9^n от 13

$n =$ 1 2 3 4
ост $=$ 9 3 1 9 $\Rightarrow$ на 13 делятся, те числа у которых n кратно 3.

(т.к. $9^n - 1$). Также заметим тот факт, что любое число вида $9^n - 1$ кратно 2.

Рассмотрим остатки 9^n от 7

$n =$ 1 2 3
ост. 2 4 1 $\Rightarrow$ на 7 делятся все, те же числа, что и на 13

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	7	0	0	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 (продолжение)

$\Rightarrow$ 9^n-1, где $n \vdots 3$ уже имеет 3 простых делителя $\Rightarrow$ если найти ~~хоть~~ еще хоть 1, то оно не будет подходить под условие.

Если рассмотреть остатки при делении 9^n на 5, 11, 19, 23...

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	4	1	4	...								
11	9	4	3	5	1	9	...					
19	9	5	7	6	16	11	4	17	1	9	...	
23	9	12	16	6	8	3	4	13	2	18	1	9 ...

рассмотрены вспомогат. утверждения 8б

То можно заметить, что каждое из них блокирует определенные n. Например:

5 – каждое 2

11 – каждое 5

19 – каждое 9

23 каждое 11

где док-во этого факта в общем виде?

$\Rightarrow$ Если продолжить искать простые множители, то они заблокируют все числа кроме 728, т.к. $728 = 2^3 \cdot 13 \cdot 7$.

№4.

Ответ: ~~4~~ $a_3 = 0$.

только один из ответов, решения нет! 0б

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

г Красноярск, СФУ | М А 0 0 0 0 5 3 3 5 1 9

Площадка проведения (город, ОУ) | Шифр (не заполнять!)

Вариант № 1

Фамилия ГАЯНОВ

Имя НИКИТА

Отчество ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 14.08.2001 **Класс** 11

ОУ, местоположение Г. КРАСНОЯРСК, ЛИЦЕЙ №9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап олимпиады ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы** 10.03.2019

Номер телефона 7913 5545 148 **Подпись** ГН

ИНСТРУКЦИЯ. *Впишите свою фамилию, имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, наименование образовательного учреждения и адрес местоположения, название предмета, этап олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа, дату выполнения работы, контактный телефон.*

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1 | М | А | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 3 | 3 | 5 | 1 | 9 |

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1	2	3	4	5	Σ
20	20	0	8	2	50

3 ~~0~~ 8

1. пусть $f(n)=\frac{n}{4062-n}$ $n\in 1,2\ldots 4061$

получаем указанные дроби

$\frac{n}{4062-n}=\frac{n-4062+4062}{4062-n}=-1+\frac{4062}{4062-n}$

$\frac{4062}{4062-n}\in Z \Rightarrow 4062 \vdots 4062-n$

$4062=2\cdot 3\cdot 677$ 2, 3, 677 – простые.

4062	2
2031	3
677	677
1	

итого, у числа 4062 8 делителей:

1, 2, 3, 6, 677, ~~3385~~, 2031, 1354, 4062

но в знаменателе не может быть 4062

поэтому у нас 7 чисел, т.к. ~~последнее~~

$n=1,2,3\ldots 4061$ +20б

Ответ: 7

2. пусть x – цена прав. мёда

y – цена неправильного мёда

t – цена горшка

a – кол-во горшков с прав медом

b – кол-во горшков с неправ медом

$\begin{cases} x=39 \\ 13(y+t)=6(x+t) \end{cases}$ $\begin{cases} x=39 \\ 6x-13y=7t \end{cases}$ $5y=7t$ $y=\frac{7}{5}t$

$5x=21t$ $x=\frac{21}{5}t$

~~$a=y+t$ (цена меда горшка + сам горшок)~~

~~$a=\frac{12}{5}t$~~

$b=\frac{26}{5}t$

~~$a+b$~~

цена горшка с неправ медом $=\frac{7}{5}t+t=\frac{12}{5}t$

с прав медом $\frac{26}{5}t$

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

M	A	0	0	0	0	5	3	3	5	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a \cdot \frac{26}{5}t + b \cdot \frac{12}{5}t = 28t \quad |:t \neq 0$

$\frac{26}{5}a + \frac{12}{5}b = 28 \quad |\cdot \frac{5}{2}$

$13a + 6b = 70$

$a_0 = 4 \quad b_0 = 3$

$a = 4 + 6n$

$b = 3 - 13n$

+20б

Т.к $\left.\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ одно решение $(4, 3)$

$a+b = 4+3 = 7$

Ответ: 7 горшков

5. $N = 9^n - 1$

$N = 13 \cdot k$

$k = p \cdot q \quad p, q$ - простые

$9^n - 1 = 13k$

$9^n - 13k = 1$

никак не используется условие, что ровно три различных простых делителя!

$728 = 9^3 - 1$

$= 2^3 \cdot 7 \cdot 13$

$9^n \equiv 1 \mod 2$ - нечетное $\Rightarrow 13k$ должно быть четным, чтобы их разница была нечетной

$13k = 26q$

2б

незначит продвижение, решение начато

$9^n - 26q = 1$

$9^n \equiv 1 \pmod 8$

$26q$ в остатке на 8 может давать 0; 2; 4; 6

$1 \equiv 1 \mod 8 \Rightarrow 26q \vdots 8$

Лист 2 из 3

Олимпиада школьников «БЕЛЬЧОНОК»

Вариант № 1

М	А	0	0	0	0	5	3	3	5	1	9

Шифр (НЕ ЗАПОЛНЯТЬ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

тогда $N \vdots 8$, ~~то~~ не состоит из 3 различных чисел.

Ответ решений нет.

~~пусть~~ $a_3 = a$

$a_1 = a - 2b$

$a_2 = a - b$

$a_4 = a + b$

$a_5 = a + 2b$

$$\sin(a-2b) + \sin(a+b) = \cos(a-b) + \cos(a+2b)$$

$$2\sin\left(\frac{2a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{3b}{2}\right) = \cancel{2}\cos\left(\frac{2a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{3b}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3b}{2}\right)\left(\sin\frac{2a-b}{2} - \cos\frac{2a-b}{2}\right) = 0 \quad +$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{3b}{2} = 0 \\ tg\,\frac{2a-b}{2} = 1 \end{array}\right. \qquad b = \frac{\pi}{2} + \cancel{\ldots} \qquad a_3 = 0 \ \checkmark$$

8б вспомогат. утверждения.

Лист 3 из 3