Математика. 2 класс

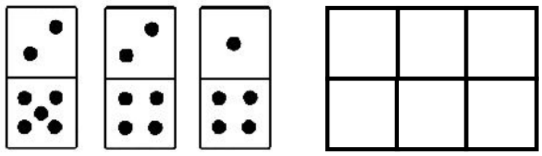
1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

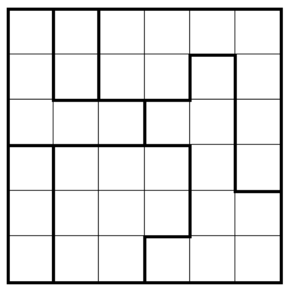
1. В ряду чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ на центральном месте находится число 5. Какое число стоит на центральном месте в ряду $3, 4, 5, 6, \ldots, 20, 21$?

2. Расположите три доминошки в прямоугольнике, изображенном на рисунке, так, чтобы суммы точек во всех вертикальных рядах были одинаковыми и суммы во всех горизонтальных рядах также были одинаковыми.



3. Бельчонок собрал целую корзину ягод: 16 ягод малины, 24 ягоды черники и 40 ягод ежевики. Но оказалось, что среди ягод малины и черники 12 плохих, среди ягод черники и ежевики – 33 плохих, а среди ягод малины и ежевики – 35 плохих. Сколько ягод оказались хорошими?

4. Расположите на рисунке справа в каждой строке, в каждом столбце и в каждой выделенной области ровно одну точку. Точки не должны быть в клетках, которые соприкасаются стороной или углом.



5. Мама Саши, Кати, Маши, Лены и Дины днём принесла 7 пирожных, но к вечеру пирожных осталось 5. Саша сказала: «Я знаю, что одно пирожное съела Катя». Катя заявила: «Да ты, что, Саша, ты сама съела пирожное! А второе пирожное съела Маша». Лена заметила: «Никто не ел два пирожных». А Дина ответила: «Я бы смогла, но два пирожных не ела». Те, кто съел пирожные, говорят правду, а кто не ел – неправду. Кто же съел пирожные?

Математика. 2 класс

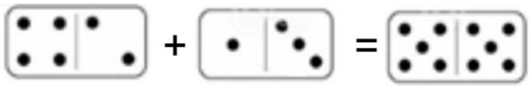
2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

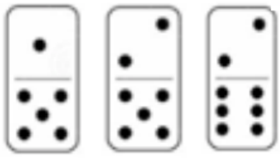
Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. В тетради в ряд выписаны все числа от 8 до 25. Сколько раз написана цифра 1?

2. На рисунке представлен пример на сложение чисел $42 + 13 = 55$ с помощью доминошек.

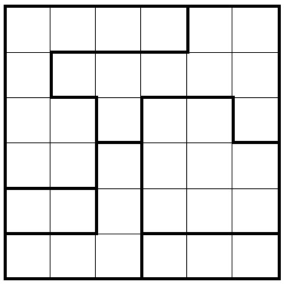


Составьте самостоятельно с помощью доминошек, изображенных ниже, правильный пример на сложение двух двухзначных чисел.



3. Бельчонок собрал целую корзину ягод: 18 ягод малины, 25 ягод черники и 47 ягод ежевики. Но оказалось, что среди ягод малины и черники 23 плохих, среди ягод черники и ежевики – 38 плохих, а среди ягод малины и ежевики – 29 плохих. Сколько ягод оказались хорошими?

4. Расположите на рисунке справа в каждой строке, в каждом столбце и в каждой выделенной области ровно одну точку. Точки не должны быть в клетках, которые соприкасаются стороной или углом.



5. Четверо бельчат Боря, Вася, Гена и Дима говорят по очереди, и если кто-то сказал правду, следующий врёт, а если кто-то соврал, то следующий говорит правду. Дима сказал: «Мне подарили орех». После него Гена сказал: «Мне подарили гриб». Боря возразил: «Нет, гриб подарили Диме». И, наконец, Дима добавил: «А Васе подарили жёлудь». Кому-то из бельчат действительно подарили орех. Кому, если каждому досталось по одному подарку?

Математика. 3 класс

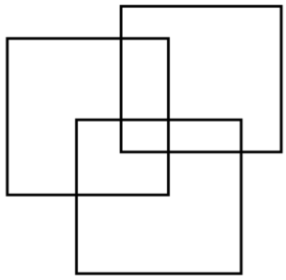
1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Чтобы пройти пешком от начала дорожки до конца и назад, Олегу требуется 36 минут. Если он вперёд идёт пешком, а назад едет на скейтборде, то дорога занимает 23 минуты. За сколько минут Олег проедет туда и назад на скейтборде?

2. В фигуре, образованной пересечением трёх квадратов, есть 7 частей. Расставьте в этих частях числа $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ так, чтобы суммы чисел в трёх больших квадратах были равны.

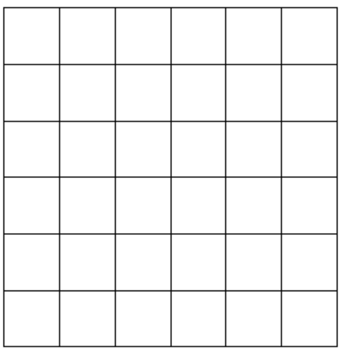


3. В четырёх кучках лежат орехи: в первой кучке 2, во второй – 3, в третьей – 4, в четвертой – 7 орехов. Бельчонок может одновременно добавлять по одному ореху в любые три кучки, например: $2, 3, 4, 7 \rightarrow 3, 3, 5, 8,$ и делать так сколько угодно раз. Если ему удастся сделать так, чтобы орехов в кучках было поровну, то какое наименьшее число орехов будет добавлено?

4. В обувной магазин пришли необычные покупатели.

И жуки и пауки
Покупали башмаки.
Восемь ног у паука,
На две меньше у жука.
У жуков и паучков
Вместе двадцать семь голов,
И всего они купили ровно двести башмаков.
Сколько было там жуков?

5. Закрасьте в квадрате 6×6 некоторые клетки так, чтобы в каждом столбце было ровно 3 закрашенных клетки, а в каждой строке или 1 или 4 закрашенных клетки.



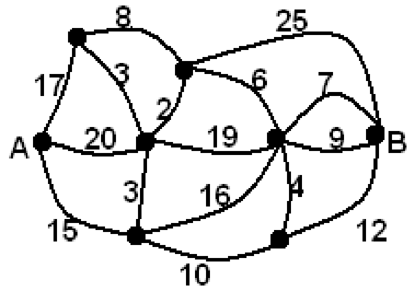
Математика. 3 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

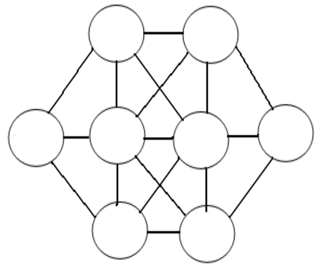
Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Бельчонок идёт из точки A в точку B. На каждой тропинке написано, за сколько минут он её проходит. За какое самое маленькое время бельчонок сможет пройти из A в B?



2. В одной кастрюле 6 порций гречневой каши, в другой 6 порций пшённой каши. Саша ест гречневую кашу, а Маша пшённую. Они взвесили свои порции вместе с тарелками, оказалось, что у Саши тарелка с кашей весит 480 граммов, а у Маши 450 граммов. На сколько меньше весит кастрюля с пшённой кашей, чем с гречневой? Все порции одной каши, тарелки и кастрюли одинаковые.

3. Расставьте в кружках числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 так, чтобы разность между числами в кружках, соединенных отрезками, не была бы меньше 2.



4. В обувной звериный магазин пришли 12 покупателей.

Каждому из индюков
Нужна пара башмаков.
Каждый шестиногий жук
Покупает по шесть штук.
А слонята по четыре,
(И которые пошире).
Приходил один кальмар,
Сразу взял себе пять пар.
Вместе все они купили 38 башмаков.
Сколько было индюков?

5. У Михаила 5 собак: шпиц, пудель, терьер, овчарка, дог. Ему надо перевезти их через реку. Лодка вмещает Михаила и двух собак. Если собаки остаются одни на любом берегу, то некоторые дерутся: шпиц дерётся с пуделем, пудель с терьером, терьер с овчаркой, овчарка с догом. Эти пары собак нельзя оставлять вместе без хозяина. Может ли Михаил за несколько поездок на лодке перевезти всех собак?

Математика. 4 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. В тетради записаны три двузначных числа, причем одно из них в разряде десятков содержит цифру 5, второе – 6, а третье – 7. Петя выбрал из этих чисел два и сложил их, затем Вася, а потом Коля также выбирали по два числа и складывали. В итоге у Пети получилось 147, а у Васи и Коли – различные трехзначные числа, начинающиеся на 12. Какие числа могли быть записаны на доске первоначально?

2. Разрежьте клетчатый квадрат 7×7 по линиям сетки на 10 различных прямоугольников. (*Квадрат тоже является прямоугольником.*)

3. В гостинице в продаже есть карты для входа в столовую на 2, 4 и 6 дней. Карты на 2 и 6 дней вместе стоят дороже, чем две карты на 4 дня, а две карты на 2 дня не дороже, чем одна карта на 4 дня. Что стоит дороже: одна карта на 6 дней или три карты на 2 дня?

4. В $9{:}00$ из «тихого» леса в «шумный» лес выбежал бельчонок Сёма. Одновременно навстречу ему из «шумного» леса выбежал бельчонок Тима. Известно, что до момента встречи Сёма успел пройти треть пути между лесами, однако, если бы Сёма выбежал на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Сёма и Тима встретились? *Скорости бельчат постоянны.*

5. Катя, Лена, Маша, Надя проходили тест, в котором было 6 вопросов и на каждый вопрос можно было ответить: « $+$ » или « $-$ ». В итоге девочки получили следующие последовательности ответов:
Катя: $-, -, +, +, +, +$;
Лена: $+, -, -, +, +, +$;
Маша: $-, -, -, +, +, +$;
Надя: $-, +, -, -, -, -$;
Оказалось, что у Кати два неверных ответа, а у Лены только два верных. Сколько верных ответов у Маши, и сколько у Нади?

Математика. 4 класс

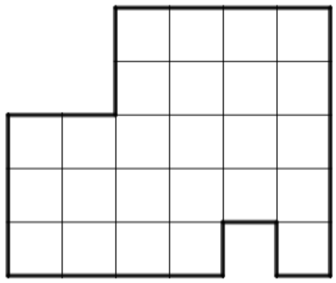
2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. На доске написаны цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Используя каждую цифру ровно один раз, составьте три трехзначных числа A, B и C так, чтобы $A + B = C$ и у одного из этих чисел в разряде десятков есть цифра 8.

2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, по линиям сетки на пять частей одинаковой площади и одинакового периметра, но различной формы.



3. Полная бочка варенья весит столько же, сколько Малыш и Карлсон вместе. Малыш залез в бочку, и оттуда вытекло столько варенья, сколько весит сам Малыш. Затем Малыш вылез из бочки. Оказалось, что в бочке осталась половина варенья и полупустая бочка весит 40 килограммов. Сколько весит пустая бочка, если Малыш на 10 кг легче Карлсона?

4. Бельчата Сёма и Тима пошли искать жёлуди к старому дубу. Тима все время шёл с постоянность скоростью – 3 км/ч. Сёма же сперва шёл рядом, но в $13:50$ убежал вперед – проверить, нет ли у старого дуба какой-либо опасности. Он увеличил скорость до 5 км/ч, добежал до дуба, мгновенно все проверил и побежал обратно, встретив Тиму в $14:05$. Дальше Тима шёл один. В какое время у дуба был Сёма, а в какое Тима?

5. У каждой из девочек Кати, Лены и Маши не более двух браслетов. Как-то раз у них состоялся такой разговор: Катя: «У Лены два браслета». Лена: «У Маши два браслета». Маша: «У Кати два браслета». Катя: «У нас два браслета на троих». Лена: «У нас три браслета на троих». Маша: «У нас четыре браслета на троих». Оказалось, что каждая соврала столько раз, сколько у неё браслетов. Сколько браслетов у каждой из девочек?

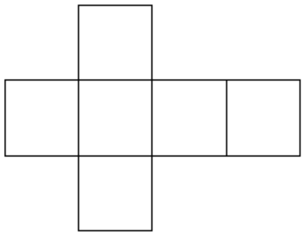
Математика. 5 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

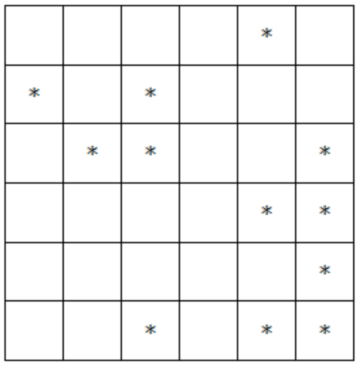
Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. На рисунке изображена развертка куба, состоящая из 6 квадратиков. Расставьте в квадратиках числа 4, 8, 12, 16, 20, 24, чтобы после того, как из развёртки сложили куб, сумма чисел на противоположных гранях была бы одинаковой.



2. Мама, папа и девять детей встали в ряд на прямой дорожке. Мама и папа стоят рядом на расстоянии 1 метра друг от друга. Могут ли дети встать так, что суммарное расстояние всех детей до мамы равно суммарному расстоянию всех детей до папы? Если да, приведите пример; если нет, объясните, почему.

3. Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из одинаковых клеток, на 4 равные части так, чтобы в частях было одинаковое количество звёздочек.



4. Один из четверых бельчат разбил банку с мёдом. Серый заявил, что банку разбил Черныш. Но Черныш утверждал, что виноват Огнехвост. Рыжик сказал, что он не разбивал банку, а Огнехвост – что Черныш врёт. Только один из бельчат сказал правду. Кто сказал правду, и кто разбил банку?

5. На поляне растёт на 6 кустов меньше, чем деревьев. Прилетели птицы, и сели и на кусты, и на деревья. Сели они так, что на всех деревьях их было поровну, и на всех кустах поровну, но на дереве по крайней мере на 10 птиц больше, чем на кусте. На деревьях всего сидело 128 птиц. Сколько было кустов?

Математика. 5 класс

2 вариант

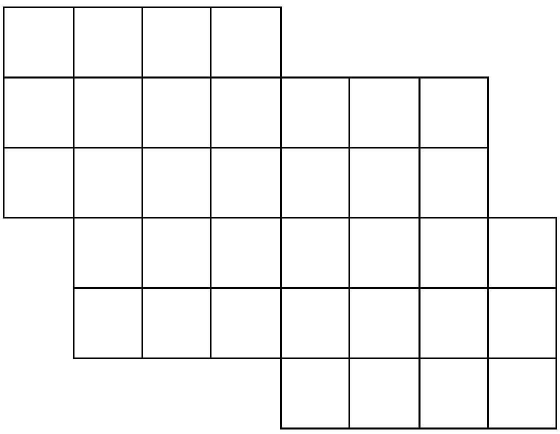
Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Сеня задумал два числа, потом вычел из большего меньшее, сложил оба числа и разность, и получил 68. Каким было большее из задуманных чисел?

2. В кедре два дупла. Бельчонок, сидящий перед вторым дуплом, сказал:
1) в другом дупле нет орехов,
2) хотя бы в одном дупле есть орехи.
Рыжие бельчата всегда говорят правду, а серые всегда врут. Какого цвета этот бельчонок?

3. Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из одинаковых клеток, на 4 равные части.



4. На каждую из клеток доски 6×6 заползли муравьи и сидят неподвижно. Количества муравьев в клетках, соседних по стороне, отличаются на 1. На одной из клеток сидит 4 муравья, на другой – 14 муравьев. Заполните всю доску числами, показывающими, сколько муравьев в каждой клетке.

5. На детском празднике было 8 детей. Взрослые приготовили 16 пакетов с конфетами. В первом была 1 конфета, во втором 2 конфеты, и так далее, в 16-м пакете было 16 конфет. Каждому из восьми детей дали по одному пакету в начале праздника, и по одному пакету в конце праздника. Могло ли оказаться так, что каждому ребёнку досталось поровну конфет, причём в начале и в конце праздника было роздано одинаковое количество конфет?

Математика. 5 класс

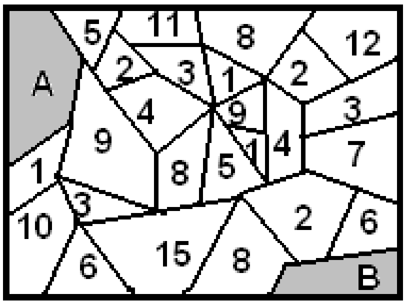
3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. По кругу стоят семеро детей: Аня, Боря, Вася, Гена, Даша, Ева, Женя. Начиная с кого-то из детей, каждый третий по часовой стрелке уходит, а отсчет продолжают, пока не останется один человек. Например, если отсчёт начинают с Ани (Аня – первая), то уходит Вася, в следующей тройке Гена – первый, а Ева третья, она уходит, потом уходит Боря, и т.д. С кого надо начинать считать, чтобы осталась Ева?

2. Бельчонок идёт из точки A в точку B. По дороге он проходит через полянки. На рисунке указано, сколько на каждой полянке растёт грибов. Когда бельчонок заходит на полянку, он собирает полностью все грибы, и идёт на какую-нибудь соседнюю полянку, а на пустые полянки никогда не возвращается. Он прошёл из A в B, и собрал ровно 60 грибов. Напишите по порядку, сколько грибов он собрал на каждой полянке.



3. В первой четверти Маша и Лена получили вместе 23 пятёрки, Света и Маша получили вместе 18 пятёрок, а Света и Лена получили вместе 15 пятёрок. Сколько пятёрок получила каждая из девочек?

4. Расставьте в клетках квадрата 6×6 числа $1, 2, 3$ так, чтобы все 12 сумм по строкам и столбцам были разными.

5. Мама, папа, Вася и Нина лепили пельмени. Мама и Нина слепили на 4 пельменя больше, чем папа и Вася, а мама и папа – на 2 больше, чем Вася и Нина. Потом Вася и мама ушли, а Нина и папа продолжали лепить с той же скоростью, и каждый налепил ещё в два раза больше пельменей, чем сначала. Кто теперь налепил больше пельменей, мама и папа вместе или Вася и Нина вместе?

Математика. 5 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

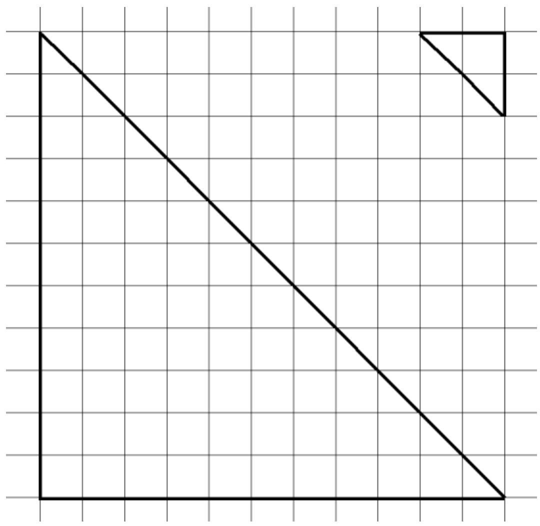
Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. В классе 28 учеников. У 17 есть дома кошка, у 10 есть собака. У 5 учеников нет ни кошки, ни собаки. У скольки учеников есть и кошка, и собака?

2. У Бельчонка есть несколько пакетов с орехами. В двух – по 2 ореха, в трёх – по 3 ореха, в четырёх – по 4 ореха, в пяти – по 5 орехов. Помогите бельчонку расставить пакеты на двух полках так, чтобы на них было поровну как пакетов, так и орехов.

3. Вася, Дима, Коля и Сергей, которые учатся в 5, 6, 7 и 8 классах, решили организовать рок-группу. Среди них есть саксофонист, клавишник, барабанщик и гитарист. Вася играет на саксофоне и учится не в 8 классе. Клавишник учится в 6 классе. Барабанщика зовут не Дима, Сергей – не клавишник и не ученик 5 класса. Дима учится не в 6 классе, а барабанщик – не в 8 классе. В каком классе учится Дима и на каком инструменте он играет?

4. На клетчатой бумаге нарисованы большой и маленький треугольники (все клетки квадратные одинакового размера). Сколько маленьких треугольников можно вырезать из большого треугольника? Треугольники нельзя поворачивать и переворачивать (у большого треугольника прямой угол слева внизу, у маленького треугольника прямой угол справа вверху).



5. В ряд выписаны в порядке возрастания все натуральные числа от 1 до 100 *включительно.* Под каждым числом этого ряда записано произведение его цифр. С получившимся рядом проделывают ту же самую процедуру и так далее. Сколько нечётных чисел будет находиться в пятом ряду?

Математика. 6 класс

1 вариант

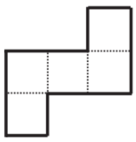
Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

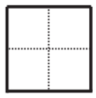
Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Найдите три решения ребуса $МА = Р \times К = Е + Р$, в котором буквы заменены цифрами так, чтобы равенства стали верными (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры).

2. У Волка в наборе имеются гири массами 90 г, 91 г, 92 г ..., 100 г. Заяц положил на одну чашу весов гирю массой 121 г. Может ли Волк уравновесить чаши весов, используя несколько гирь из своего набора?

3. Заполните квадрат размером 8×8 фигурками, изображенными на рисунке, так, чтобы были использованы только фигурки каждого из указанных видов. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Накладывать фигурки друг на друга нельзя.





4. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ВЕКТОР» так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?

5. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 10 жителей, причем известно, что среди них есть хотя бы один разбойник и хотя бы один купец. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей разбойник, а другой – купец»?

Математика. 6 класс

2 вариант

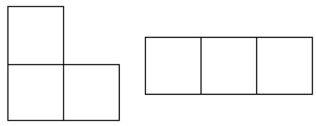
Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Найдите три решения ребуса $КА = Р \times Ь = Е + Р$, в котором буквы заменены цифрами так, чтобы равенства стали верными (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры).

2. У Волка в наборе имеются гири массами 90 г, 91 г, 92 г ..., 100 г. Заяц положил на одну чашу весов гирю массой 115 г. Может ли Волк уравновесить чаши весов, используя несколько гирь из своего набора?

3. Заполните квадрат размером 6×6 фигурками, изображенными на рисунке, так, чтобы каждая фигурка граничила (имела общий отрезок) с фигурками обоих типов. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Накладывать фигурки друг на друга нельзя.



4. Сколькими способами можно переставить буквы слова «ТЕРМИН» так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?

5. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 12 жителей, каждый из них сказал: «Среди моих соседей есть разбойник». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть купец»?

Математика. 6 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Найдите три решения ребуса $** + ** = 17*$, в котором звёздочки заменены цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр различные.

2. На доске подряд записаны все целые числа от 1 до 20. Заяц посчитал сумму всех этих чисел, получил число 210 и заметил, что оно делится на 1, 2, 3, 5, 6, 7. Может ли Волк стереть с доски не более шести чисел так, чтобы новая сумма делилась на 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3. Даны два квадрата 3×3 и 4×4. Как разрезать каждый из них на две части так, чтобы из получившихся четырёх частей можно было сложить квадрат?

4. Кузнечик прыгает по числовой прямой вправо на 2 или на 3. Ему запрещено попадать на простые числа. Сколькими способами он может попасть с 1 на 36? *Простое число – это натуральное число больше* 1*, у которого есть всего два делителя: единица и само число.*

5. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 25 жителей, каждый из них сказал: «У меня есть сосед разбойник». Какое наименьшее число разбойников может быть среди этих 25 жителей?

Математика. 6 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. В некоторый день в мешке было несколько орехов. На следующий день в этот мешок добавили столько же орехов, сколько там было, но восемь орехов забрали. На третий день снова добавили столько же орехов, сколько там уже стало, но восемь забрали. То же самое произошло и в четвертый день, и после этого в мешке орехов не осталось. Сколько орехов было в мешке в самом начале?

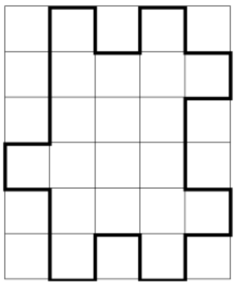
2. Поставьте вместо точек (•) числа 6, 7, 8, 9, 52, 100 (надо использовать все числа), а вместо звёздочек (*) какие-нибудь знаки арифметических операций из набора $(+,\ -,\ \times,\ :)$ так, чтобы получилось верное равенство

$$\bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet = 623.$$

Если потребуется, можно расставить скобки.

3. Все 10 гантелей веса 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 19, 23, 24 килограммов необходимо разложить на три стойки так, чтобы вес гантелей на первой стойке был в два раза меньше, чем вес гантелей на второй стойке. А вес гантелей на второй стойке в два раза меньше, чем вес гантелей на третьей стойке. Можно ли это сделать?

4. Из фигуры, изображенной на рисунке, необходимо убрать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать на три равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать. Приведите два примера, где убираются разные клетки.



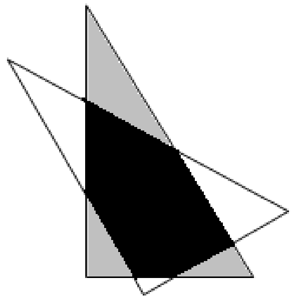
5. Шестиклассники обсуждали, сколько лет их директору. Аня сказала: «Ему больше 38 лет». Боря сказал: «Ему меньше 35 лет». Вова: «Ему меньше 40 лет». Галя: «Ему больше 40 лет». Дима: «Боря и Вова правы». Саша: «Вы все ошибаетесь». Оказалось, что мальчики и девочки ошиблись одинаковое количество раз. Можно ли узнать, сколько лет директору?

Математика. 7 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.



1. Два одинаковых треугольника наложили друг на друга так, что в пересечении образовался шестиугольник (см. рисунок). Докажите, что площади серых и белых частей равны.

2. Бельчонок насушил грибов: 85% белых грибов, а остальные рыжики. Потом он съел часть белых грибов, теперь рыжики составляли 30% оставшихся грибов. Какую часть грибов съел бельчонок?

3. В некоторых 7 клетках таблицы 5×5 стоят кляксы. Если убрать любые две строки и любые два столбца, останется хотя бы одна клякса. Нарисуйте, как могут быть расположены кляксы.

4. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2022. Арина поделила каждое чётное число на два, а каждое нечётное умножила на три. Могла ли сумма чисел не измениться?

5. Вася сложил четыре числа попарно. Четыре наибольшие из шести полученных сумм равнялись $20, 16, 13, 9$. Найдите две оставшиеся суммы и определите, какие числа мог складывать Вася.

Математика. 7 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

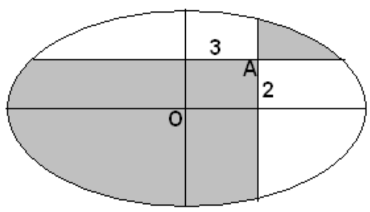
1. В квадрате 5×5 закрасьте как можно больше клеток чёрным, чтобы выполнялось условие: любой отрезок, соединяющий две чёрные клетки, обязательно проходит и через белую клетку.

2. У бельчонка был запас кедровых и еловых шишек, кедровые составляли 60%. В августе он набрал ещё еловых шишек, теперь кедровые составляли 20%. В сентябре бельчонок набрал ещё кедровых шишек, теперь кедровые шишки составляли 80%. Во сколько раз увеличилось общее число шишек за два месяца?

3. В прямоугольнике размером 7×9 клеток в некоторых клетках сидит по одному бельчонку так, чтобы в каждом прямоугольнике 2×3 (или 3×2) сидит ровно 2 бельчонка. Нарисуйте, как они могут сидеть.

4. Подберите к числу 34 ещё пять натуральных чисел так, чтобы выполнялись два условия:
(1) среди шести чисел нет трёх чисел, имеющих общий делитель (больше единицы);
(2) среди любых трёх чисел из этих шести найдутся два числа, имеющие общий делитель (больше единицы).

5. Миша хотел разрезать торт по осям симметрии (см. рисунок), но промахнулся, и провёл разрезы не через точку O, а через точку A, отстоящую от осей симметрии на 2 и на 3 сантиметра. На сколько площадь кусков, закрашенных серым, больше площади незакрашенных кусков?



Математика. 7 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

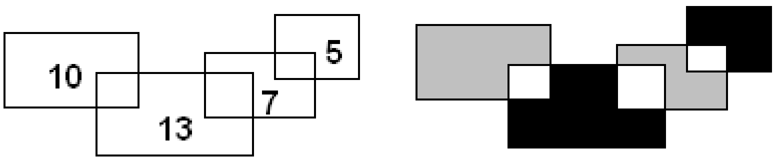
Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. После того, как вытянули репку, осталась куча земли. Дедка убрал половину кучи, Бабка убрала треть оставшейся земли, Внучка – четверть остатка, Жучка – пятую часть остатка, Кошка – шестую часть, Мышка – седьмую. Какая часть кучи осталась?

2. Диана написала двузначное число, и приписала к нему двузначное число, которое получилось перестановкой цифр первого числа. Оказалось, что разность между первым и вторым числом равна сумме цифр первого числа. Какое четырехзначное число написано?

3. На детский праздник приготовили пирожные: 10 эклеров, 20 корзиночек, 30 шоколадных брауни, 40 трубочек. Какое наибольшее число детей сможет взять три разных пирожных?

4. Четыре прямоугольника имеют площади, показанные на рисунке. Какая площадь больше, серая или чёрная, и на сколько?



5. На 900 карточках записаны все натуральные числа от 1 до 900. Карточки, на которых записаны квадраты целых чисел, убирают, а оставшиеся перенумеровывают, начиная с 1. Потом операцию удаления квадратов повторяют. Сколько раз придётся повторить эту операцию, чтобы удалить все карточки?

Математика. 7 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Андрей и Коля не ровесники, но в декабре прошлого года каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Сколько лет им сейчас?

2. Тетрадка стоит 10 рублей. Восемь детей купили тетрадки, у каждого осталось разное количество рублей (не нулевое), но ни у кого не хватало на ещё одну тетрадку. Дети сложили оставшиеся рубли, и их хватило в точности ещё на несколько тетрадок. Сколько денег оставалось у каждого из детей до складывания?

3. Найдите всевозможные значения периметра прямоугольника, если известно, что его можно разрезать на три прямоугольника, периметр каждого из которых равен 10, а длины сторон – целые числа.

4. Бельчата Пушистик и Лохматик съели корзину ягод и пакет семечек, в котором было больше 50, но меньше 65 семечек, начав и закончив одновременно. Сначала Пушистик ел ягоды, а Лохматик – семечки, потом (в какой-то момент) они поменялись. Лохматик ел ягоды в шесть раз быстрее Пушистика, а семечки – только в три раза быстрее. Сколько семечек съел Лохматик, если ягод Лохматик съел в два раза больше Пушистика?

5. Из шести неразличимых на вид орехов два искусственных (настоящие орехи весят одинаково, искусственные орехи тоже одинаково и легче настоящих). Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо отдать один орех. Если отданный орех настоящий, весы показывают правильный результат, а если искусственный – могут показать всё, что угодно. Как найти (и не отдать) один настоящий орех?

Математика. 8 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а объем численно равен его площади поверхности?

2. Оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ увеличили на 3, после чего получились корни трехчлена $x^2 - 2px - q$. Найдите p и q.

3. Серединные перпендикуляры к диагоналям LN и KM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают сторону KN в точках P и Q соответственно (P лежит между K и Q). Оказалось, что $LP \parallel MQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

4. Числа $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$ записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали следующие суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т.д. Последняя сумма S_{10} равняется сумме всех чисел. Какое наибольшее возможное количество простых чисел может оказаться среди сумм $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$?

5. Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?

Математика. 8 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а площадь его поверхности численно равна сумме длин всех его рёбер?

2. Квадратный трехчлен $x^2 + 3px + p$ имеет корни u и v, а квадратный трехчлен $x^2 - 4qx + q$ имеет корни $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$. Найдите p и q.

3. Серединные перпендикуляры к диагоналям KM и LN выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают прямую LM в точках P и Q соответственно (P лежит на продолжении отрезка LM за точку L, а Q – за точку M). Оказалось, что $KP \parallel NQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

4. Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

5. Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно $10,\ 7,\ 6,\ 6,\ 3$ и 3 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?

Математика. 8 класс

3 вариант

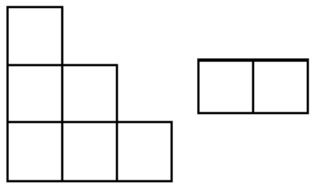
Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Существует ли прямоугольный треугольник, гипотенуза которого численно равна половине его площади?

2. Квадратный трехчлен $px^2 + qx + r$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $3px^2 + 2(p+q)x + (q+r)$ также имеет два корня.

3. Известно, что в трапеции $KLMN$ боковая сторона KL равна основанию LM. Точки P и Q – середины оснований KN и LM соответственно, причем точка P лежит на биссектрисе угла L. Докажите, что $LN = 2PQ$.

4. Квадрат размером 100×100 клеток разбит на фигурки двух типов, изображённые на рисунке. Может ли оказаться, что фигурок из шести клеток ровно 333? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



5. Несколько команд провели турнир по гандболу – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Если по итогам две команды набрали одинаковое число очков, более высокое место присуждалось команде, у которой больше разница между числом забитых и пропущенных мячей. Три команды, ставшие призёрами, набрали соответственно 7 , 5 и 3 очков. Сколько очков набрала последняя команда?

Математика. 8 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. На доске нарисован прямоугольник. Известно, что если его ширину увеличить на 30%, а длину уменьшить на 20%, то его периметр останется неизменным. Как изменился бы периметр исходного прямоугольника, если его ширину уменьшили бы на 20%, а длину увеличили бы на 30%?

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ux - v$ имеет различные ненулевые корни p и q, а квадратный трехчлен $x^2 + px - q$ – различные ненулевые корни u и v. Найдите всевозможные значения p, q, u и v.

3. В трапеции $KLMN$ основание LM в два раза короче KN. Внутри трапеции отмечена такая точка O, что $KL = OL$. Докажите, что прямая, соединяющая точку M с серединой отрезка ON, перпендикулярна OK.

4. Миша в течение недели каждый день срывал по яблоку и взвешивал его. Все яблоки весили по-разному, но вес каждого яблока был равен целому числу граммов и колебался от 221 грамма до 230 граммов (включительно). Миша также вычислял средний вес всех сорванных яблок, и он каждый раз был целым числом граммов. Яблоко, сорванное в седьмой день, весило 225 граммов. Сколько весило яблоко, сорванное в шестой день?

5. Несколько команд провели турнир по хоккею – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» одержала больше всех побед и набрала меньше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло принимать участие в турнире?

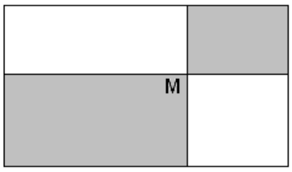
Математика. 9 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Найдите все целые a, при которых модуль числа $|a^2 - 3a - 6|$ равен простому числу.

2. Внутри прямоугольника выбрана точка M и через неё проведены прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Оказалось, что площади серых прямоугольников равны (см. рисунок). Найдите геометрическое место точек M.



3. Алиса написала несколько положительных целых чисел. Саша переписал эти числа и добавил одно целое число, меньше всех чисел Алисы. Каждый из них нашёл сумму и произведение своих чисел и поделил сумму на произведение. У Саши получилось число в 5 раз меньше, чем у Алисы. Какое число он мог добавить?

4. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $AD: BC = 3: 2$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. На стороне AB выбрана точка K так, что $KA: AB = 3: 5$. Из точки K проведён перпендикуляр к CD, пересекающий отрезок CD в точке P. Докажите, что $\angle KPA = \angle KPB$.

5. Натуральные числа, кратные 3, покрасили в два цвета: красный и синий, так, что сумма синего и красного числа – красная, а произведение синего и красного числа – синее. Сколькими способами можно раскрасить числа, чтобы число 546 было синим?

Математика. 9 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Сумма двух чисел равна 2022. Если у первого числа стереть последнюю цифру 5, а ко второму числу справа приписать цифру 1, то сумма изменённых чисел станет равна 2252. Найдите исходные числа.

2. Периметр треугольника равен 4. Докажите, что сумма квадратов длин сторон больше 5.

3. Два бельчонка находятся в точках A и B, и начинают одновременно скакать по прямым AO и BO по направлению к точке O (пройдя точку O, каждый продолжает движение по своей прямой). Расстояние $AO = 120$ метров, $BO = 80$ метров, угол $AOB = 60°$. У бельчат постоянная одинаковая скорость. Каково наименьшее расстояние между бельчатами во время движения?

4. Найдите наименьшее натуральное $n > 1$, для которого сумма никаких двух натуральных степеней не является точным квадратом натурального числа.

5. Можно ли отметить на клетчатой бумаге 5 точек пересечения линий сетки так, чтобы эти точки были вершинами равностороннего пятиугольника?

Математика. 9 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Сколько существует правильных несократимых дробей, у которых сумма числителя и знаменателя равна 100?

2. У двоих бельчат было одинаковое количество сосновых шишек и одинаковое количество кедровых шишек. Всего шишек у каждого бельчонка было меньше 25. Первый бельчонок набрал ещё столько же сосновых шишек, сколько у него было, и 26 кедровых шишек. У него оказалось больше сосновых, чем кедровых. Второй бельчонок набрал ещё столько же кедровых шишек, сколько у него было, а 4 сосновые съел. У него оказалось больше кедровых, чем сосновых. Сколько сосновых и кедровых шишек было у каждого бельчонка изначально?

3. Сумма m последовательных натуральных чисел равна простому числу p. Чему может равняться m?

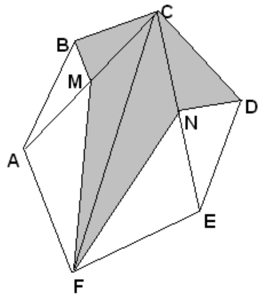
4. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $BC = 3$. На середине стороны AB отмечена точка P. Из точки C опущен перпендикуляр CQ на DP. Найдите длину BQ.

5. Таблица 7×7 заполняется целыми ненулевыми числами. Сначала по рамке таблицы расставляются отрицательные числа. Дальше клетки заполняются в произвольном порядке, и очередное число равно произведению поставленных ранее чисел, ближайших к нему по строке или ближайших к нему по столбцу. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть в таблице?

Математика. 9 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.



1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ точка M – середина отрезка AC, точка N – середина отрезка CE. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$.

2. Девять бельчат соревновались в беге на 50 метров, у всех были разные результаты. Потом их разбили на три группы по 3 бельчонка. Первая и вторая группы соревновались между собой по таким правилам: какой-нибудь бельчонок из первой группы бежал с каким-нибудь бельчонком из второй группы. Потом другой бельчонок из первой группы бежал с другим бельчонком из второй группы. И наконец, соревновались оставшиеся бельчата из первой и второй групп. У какой группы больше побед из трёх забегов, та и выиграла. Затем так же соревновались вторая и третья группы, потом первая и третья. Все бельчата бежали с той же скоростью, как в начале, когда соревновались все вместе. Могло ли быть так, что первая группа выиграла у второй, вторая у третьей, третья у первой? Если нет – докажите; если да – покажите, как это могло быть.

3. На доске были записаны два неравенства, каждое из которых выполняется для некоторых чисел $a \geq b \geq c \geq 0$.

$$(1)\ a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac),$$

$$(2)\ a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2).$$

Настя считает, что неравенства (1) и (2) равносильны, Петя – что из (1) следует (2), Нина – что из (2) следует (1), Даня – что они все не правы. Чьи высказывания истинны?

4. Окружность, проходящая через вершины L и M трапеции $KLMN$, пересекает боковые стороны KL и MN в точках P и Q соответственно и касается основания KN в точке S. Оказалось, что $\angle LSM = 50^\circ$, а $\angle KLS = \angle SNM$. Найдите $\angle PSQ$.

5. Бельчонок собрал в лесу 15 орехов весом $50, 51, \ldots, 64$ граммов. Ему известен вес каждого из орехов. С помощью чашечных весов бельчонок пытается доказать своим друзьям, что первый орех весит 50 г., второй – 51 г., третий – 52 г. и т.д. (вначале друзья ничего не знают про веса орехов). Какое наименьшее количество гирь потребуется бельчонку, если и гири, и орехи можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний неограниченно? (Веса гирь известны как бельчонку, так и друзьям. В наличии неограниченный запас гирь весом $1, 2, \ldots, 1000$ г.)

Математика. 10 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Пять членов жюри олимпиады проверяли работы. Первый, второй и четвертый члены жюри вместе могут проверить работы за 20 часов; второй, третий и пятый вместе – за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме второго члена жюри, то на проверку работ требуется 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всеми членами жюри по сравнению с проверкой работ только вторым членом жюри?

2. Ненулевые числа p, q, r являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что уравнение $px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$ имеет два решения.

3. В таблице 10×10 расставлены различные натуральные числа от 1 до 100. Оказалось, что в каждой строке (слева направо) и в каждом столбце (снизу верх) числа идут в порядке возрастания. Найдите наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца.

4. Окружность, построенная на стороне KM остроугольного треугольника KLM как на диаметре, пересекает стороны треугольника KL и LM в точках P и Q соответственно. Касательные к этой окружности, проведенные в точках P и Q, пересекаются в точке R. Докажите, что прямая LR перпендикулярна KM.

5. Печенье макаруны трёх сортов (фисташковые, ванильные, карамельные) упаковывают в стандартные коробки по 20 печений в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке фисташковых макарунов не менее 2 и не более 12, ванильных тоже не менее 2 и не более 12, а карамельных не менее 3 и не более 14?

Математика. 10 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Шесть членов жюри олимпиады проверяли работы. Без пятого они могут проверить работы за 6 дней. Если бы они проверяли вчетвером без первого и третьего, то все работы были бы проверены за 10 дней. Поскольку второй, четвертый и шестой были заняты, работы были проверены оставшимися за 12 дней. Какой процент всех работ при этом был проверен первым и третьим членами жюри за 4 дня?

2. Квадратные трёхчлены $f = ax^2 + bx + c$ и $g = px^2 + qx + r$ не имеют корней, а их сумма $f + g$ – трёхчлен, имеющий корни. Найдите знак произведения $c \cdot r$.

3. В клетках таблицы 7×7 расставлены числа -1, 0 и 1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы?

4. В треугольнике KLM угол LKM тупой. На стороне LM как на диаметре построена окружность, которая пересекает продолжения сторон LK и MK в точках P и Q соответственно. Через точки P и Q проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке R. Докажите, что прямая LR перпендикулярна KM.

5. Печенье макаруны трёх сортов (шоколадные, малиновые, апельсиновые) упаковывают в стандартные коробки по 20 печений в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке шоколадных макарунов не менее 3 и не более 14, малиновых тоже не менее 3 и не более 14, а апельсиновых не менее 2 и не более 12?

Математика. 10 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. В бассейн ведут две одинаковые трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась, и через неё вода стала поступать вдвое медленнее. Через какое время после этого бассейн заполнится?

2. Приведенный квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из p один из этих корней, а q увеличить в два раза, то полученный квадратный трёхчлен будет иметь корень.

3. Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей?

4. Внутри трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) выбрана точка P так, что $\angle KPL = \angle MPN = 90^\circ$, $\angle LKP + \angle MNP = \angle LPM$. Докажите, что в трапецию $KLMN$ можно вписать окружность.

5. Вася хочет покрасить клетки прямоугольника 3×4 так, чтобы незакрашенной оставалась или первая строка, или последняя строка, или два средних столбца. Сколькими способами он может это сделать?

Математика. 10 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Известно, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Докажите, что для любого нечётного натурального n существуют n различных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа.

2. На 8 шарах написано по числу: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Сколькими способами можно разложить шары в три коробки так, чтобы ни в одной коробке не было числа и его делителя?

3. Трёхзначное число состоит из разных цифр. Между первой и второй цифрами, а также между второй и третьей цифрами, вписали по n нулей. Докажите, что существует больше одного исходного трёхзначного числа такого, что полученное $(2n + 3)$-значное число является квадратом целого числа при любых натуральных n.

4. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника KLM с углом $\angle L = 30^\circ$. Луч LO пересекает отрезок KM в точке Q. Точка P – середина дуги OM описанной окружности треугольника QOM, не содержащей точку Q. Докажите, что точки K, L, P, Q лежат на одной окружности.

5. Какое наибольшее число клеток квадрата 8×8 можно закрасить так, чтобы центры любых четырёх закрашенных клеток не являлись вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны краям квадрата?

Математика. 11 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Борис раскладывает 8 белых и 8 чёрных шариков по двум коробкам. Настя наугад выбирает коробку, а потом не глядя берёт из неё шарик. Может ли Борис так разложить шарики по двум коробкам, чтобы вероятность вынуть белый шарик была больше $\frac{2}{3}$?

2. На продолжении за точку C стороны BC равностороннего треугольника ABC выбрана точка M, через неё проведена прямая, параллельная AC. Эта прямая пересекает продолжение стороны AB в точке N. Медианы треугольника BNM пересекаются в точке O. Точка D – середина AM. Найдите углы треугольника ODC.

3. На отрезке $[2;5]$ выбрали три разные точки, для каждой точки перемножили расстояния до двух других точек, получили положительные числа a, b, c. Докажите, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{8}{9}$.

4. Найдите все натуральные числа a, для которых число
$$\frac{a + 1 + \sqrt{a^5 + 2a^2 + 1}}{a^2 + 1}$$
также является натуральным.

5. Найдите целую часть числа
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}.$$

Математика. 11 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для отбора на соревнования борец Владимир должен был провести три схватки и одержать подряд хотя бы две победы. Его соперниками были Андрей (А) и Борис (Б). Владимир мог выбрать схему встреч: АБА или БАБ. Вероятность Владимира потерпеть поражение в одной схватке от Бориса равна 0,3, а от Андрея 0,4; вероятности постоянны. При какой схеме вероятность отобраться на соревнования больше, и чему равна эта вероятность?

2. Найдите для всех натуральных $n > 1$ положительные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 3, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} + \cdots + \dfrac{1}{nx_n} = 3. \end{cases}$$

3. Докажите, что $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

4. Коля и Влад начертили одинаковые выпуклые четырёхугольники $ABCD$. На стороне AB каждый из них выбрал точку E, на стороне CD каждый выбрал точку F. Коля выбрал точки на серединах сторон, а Влад – на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны AB от A и на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны CD от C. Потом каждый из них отметил середины отрезков AF, DE, BF, CE, получил соответственно точки K, L, M, N, и соединил их в указанном порядке. У каждого получился четырехугольник $KLMN$. Коля считает, что площадь его четырёхугольника больше. Прав ли он?

5. Трое бельчат на завтрак обычно едят кашу: манную (М), пшённую (П), овсяную (О), гречневую (Г). Ни одна каша не нравится всем троим бельчатам, но для каждой пары бельчат есть хотя бы одна каша, которая нравится им обоим. Сколько можно составить разных таблиц, в которых в каждой клетке стоит плюс (если нравится) или минус (если не нравится)?

	М	П	О	Г
Бельчонок 1				
Бельчонок 2				
Бельчонок 3				

Математика. 11 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Сугроб высотой 468 см за первый час уменьшился на 6 см по высоте, за второй час – на 12 см по высоте, ..., за k -й час – на $6k$ см по высоте. За некоторое время T сугроб растаял полностью. Какая часть сугроба по высоте растаяла за время $\frac{T}{2}$?

2. На границе круглой поляны по часовой стрелке отмечены точки A, B, C, D. В точке A находится бельчонок Ан, в точке B – бельчонок Бим, в точке C стоит сосна, в точке D – дуб. Бельчата одновременно начали бежать, Ан к сосне, Бим к дубу. Они столкнулись в точке M, которая находится ближе к сосне, чем к дубу. Верно ли, что если бы Ан побежал из точки A к дубу, а Бим из точки B к сосне, Ан прибежал бы первым? Каждый бельчонок бежит по прямой и со своей постоянной скоростью.

3. Каким числом способов можно разложить 30 яблок в 3 корзинки так, чтобы в первой корзинке лежало меньше яблок, чем во второй, во второй меньше, чем в третьей, и пустых корзинок не было?

4. В выпуклом семиугольнике $ABCDEFG$ рассматриваются семь четырёхугольников, вершинами которых являются четыре последовательные по часовой стрелке вершины семиугольника. Могут ли четыре из семи четырёхугольников быть описанными?

5. Найдите все пары $(x;\, y)$ натуральных чисел, для которых оба числа $x^2 + 8y;\ y^2 - 8x$ являются точными квадратами.

Математика. 11 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Какова вероятность, что в случайной последовательности из 8 единиц и двух нулей между двумя нулями ровно три единицы?

2. Каждый из 8 бельчат бросил шишку в какого-нибудь другого бельчонка, независимо от других. Докажите, что всегда найдётся группа из трёх бельчат, которые не бросили шишку в бельчонка из этой группы.

3. Разрешимо ли уравнение $y^2 + y = x^3 - x$ во взаимно простых натуральных числах?

4. Точки P и Q – середины дуг KL и LM, описанной окружности треугольника KLM, LS – биссектриса этого треугольника. Оказалось, что $\angle KLM = 2\angle KML$ и $\angle PSQ = 90^\circ$. Найдите углы треугольника KLM.

5. Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}.$$