ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

2 КЛАСС

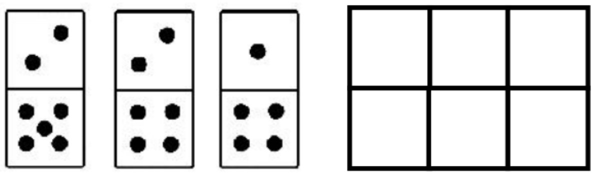
Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

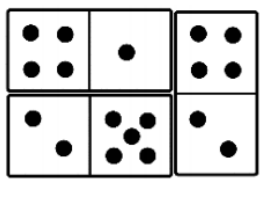
Вариант 1

1) В ряду чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ на центральном месте находится число 5. Какое число стоит на центральном месте в ряду $3, 4, 5, 6, \ldots, 20, 21$?
Ответ. 12.
Решение. Заметим, что в ряду 19 чисел и $19 = 2 \times 9 + 1$, значит, в списке чисел от 3 до 21 перед средним числом стоит 9 чисел, и после него – 9 чисел, а среднее число – это 12.

2) Расположите три доминошки в прямоугольник на рисунке так, чтобы суммы точек во всех вертикальных рядах были одинаковыми и суммы во всех горизонтальных рядах также были одинаковыми.

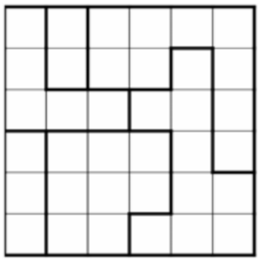


Решение. См. рисунок. Поскольку все вертикальные суммы одинаковы, можно сосчитать, сколько всего точек и разделить на 3. $(7 + 6 + 5): 3 = 6$ – такова сумма в каждой вертикали. Но поскольку хотя бы одну такую сумму дает доминошка целиком, то это доминошка $4 - 2$. Чтобы найти сумму по горизонталям, нужно количество всех точек разделить на 2.

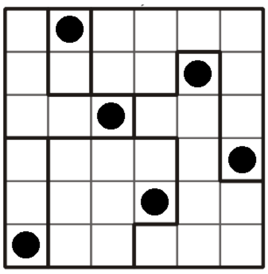


3) Бельчонок собрал целую корзину ягод: 16 ягод малины, 24 ягоды черники и 40 ягод ежевики. Но оказалось, что среди ягод малин и черники 12 плохие, среди ягод черники и ежевики – 33 плохих, а среди ягод малины и ежевики – 35 плохих. Сколько ягод оказались хорошими?

Ответ. 40.
Решение. Всего ягод набрано $16 + 24 + 40 = 80$. Теперь посчитаем все плохие ягоды: $12 + 33 + 35 = 80$. Но каждая плохая ягода считается дважды, значит, плохих ягод половина от этого числа – 40. А хороших остается $80 - 40 = 40$.



4) Расположите на рисунке справа в каждой строке, каждом столбце и каждой выделенной области ровно одну точку. Точки не должны быть в клетках, которые соприкасаются стороной или углом.
Решение. См. рисунок.

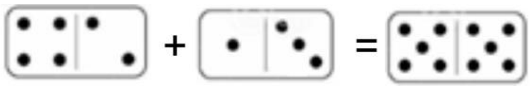


5) Мама Саши, Кати, Маши, Лены и Дины днём принесла 7 пирожных, но к вечеру пирожных осталось 5. Саша сказала: «Я знаю, что одно пирожное съела Катя». Катя заявила: «Да ты, что, Саша, ты сама съела пирожное! А второе пирожное съела Маша». Лена заметила: «Никто не ел два пирожных». А Дина ответила: «Я бы смогла, но два пирожных не ела». Те, кто съел пирожные, говорят правду, а кто не ел – неправду. Кто же съел пирожные?
Ответ. Дина и Лена.
Решение. Если Саша права, то она и Катя съели по одному пирожному. Тогда Катя должна говорить правду, но она ошибается, два пирожных уже съедены и Маша пирожное не ела. Противоречие. Значит, Саша не ела пирожное и, значит, Катя не ела. Тогда и Маша не ела. Если Лена не ела пирожных, то 2 пирожных съела Дина, и она должна говорить правду, но она говорит, что не ела 2 пирожных, противоречие. Значит, Лена съела пирожное, поэтому она говорит правду: она съела только одно пирожное, а второе – Дина.

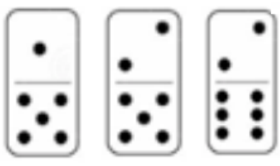
Вариант 2

1) В тетради в ряд выписаны все числа от 8 до 25. Сколько раз написана цифра 1?
Ответ. 12.
Решение. По одной единице есть в числе 10 и во всех числах от 12 до 19 и числе 21, а в числе 11 единиц две. Всего получается 12 единиц.

2) На рисунке представлен пример на сложение чисел $42 + 13 = 55$ с помощью доминошек.



Составьте самостоятельно с помощью доминошек, изображенных ниже, правильный пример на сложение двух двухзначных чисел.



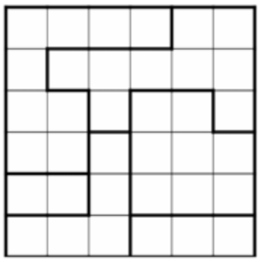
Ответ. $25 + 26 = 51$.

3) Бельчонок собрал целую корзину ягод: 18 ягод малины, 25 ягод черники и 47 ягод ежевики. Но оказалось, что среди ягод малин и черники 23 плохие, среди ягод черники и ежевики – 38 плохих, а среди ягод малины и ежевики – 29 плохих. Сколько ягод оказались хорошими?

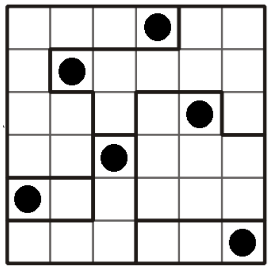
Ответ. 45.

Решение. Всего ягод набрано $18 + 25 + 47 = 90$. Теперь посчитаем все плохие ягоды: $23 + 38 + 29 = 90$. Но каждая плохая ягода считается дважды, значит, плохих ягод половина от этого числа – 45. А хороших остается $90 - 45 = 45$.

4) Расположите на рисунке справа в каждой строке, каждом столбце и каждой выделенной области ровно одну точку. Точки не должны быть в клетках, которые соприкасаются стороной или углом.



Решение. См. рисунок.



5) Четверо бельчат Боря, Вася, Гена и Дима говорят по очереди, и если кто-то сказал правду, следующий врёт, а если кто-то соврал, то следующий говорит правду. Дима сказал: «Мне подарили орех». После него Гена сказал: «Мне подарили гриб». Боря возразил: «Нет, гриб подарили Диме». И, наконец, Дима добавил: «А Васе подарили жёлудь». Кому-то из бельчат действительно подарили орех. Кому, если каждому досталось по одному подарку?

Ответ. Орех у Бори.

Решение. Заметим, что бельчата врут и говорят правду через одного. Если Дима сказал правду, что орех у него, то Боря тоже сказал правду, что Диме подарили гриб – противоречие. То есть Дима соврал, и ореха у него нет. Тогда Гена говорит правду, и у него гриб, значит, ореха у него тоже нет. Второй раз Дима говорит правду, и, значит, у Васи ореха нет. Получается, что орех у Бори.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

3 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

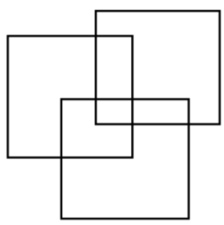
1. Чтобы пройти пешком от начала дорожки до конца и назад, Олегу требуется 36 минут. Если он вперёд идёт пешком, а назад едет на скейтборде, то дорога занимает 23 минуты. За сколько минут Олег проедет туда и назад на скейтборде?

Ответ. 10.

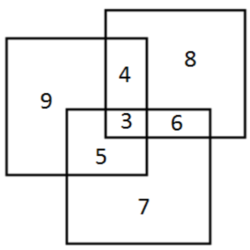
Решение. Дорога пешком в одну сторону занимает $36:2=18$ минут. Тогда на скейтборде в одну сторону Олег проедет за $23-18=5$ минут, а в обе стороны за 10 минут.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В конце верного решения есть одна ошибка – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

2. В фигуре, образованной пересечением трёх квадратов, есть 7 частей. Расставьте в этих частях числа $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ так, чтобы суммы чисел в трёх больших квадратах были равны.



Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

3. В четырёх кучках лежат орехи: в первой кучке 2, во второй – 3, в третьей – 4, в четвертой – 7 орехов. Бельчонок может одновременно добавлять по одному ореху в любые три кучки, например: $2, 3, 4, 7 \to 3, 3, 5, 8,$ и делать так сколько угодно раз. Если ему удастся сделать так, чтобы орехов в кучках было поровну, то какое наименьшее число орехов будет добавлено?

Ответ. 24.

Решение.

$$2, 3, 4, 7 \to 3, 4, 5, 7 \to 4, 5,6, 7 \to 5, 6, 7, 7 \to 6, 7, 8, 7 \to$$
$$\to 7, 8, 8, 8 \to 8, 8, 9, 9 \to 9, 9, 9, 10 \to 10, 10, 10, 10.$$

Доказывать минимальность не требуется, но вытекает она из того, что требуется не меньше 15 орехов, чтобы сравнять числа 2 и 7. Изначальная сумма равна 16. Будем прибавлять числа, кратные 3, начиная с $15: 16 + 15 = 3$; $16 + 18 = 34$; $16 + 21 = 37$; $16 + 24 = 40$, и мы впервые получили число, делящееся на 4.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть одна ошибка, влияющая на ответ – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

4. В обувной магазин пришли необычные покупатели.

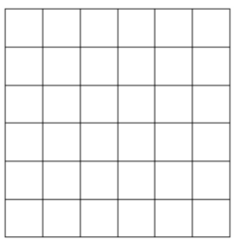
И жуки и пауки
Покупали башмаки.
Восемь ног у паука,
На две меньше у жука.
У жуков и паучков
Вместе двадцать семь голов,
И всего они купили ровно двести башмаков.
Сколько было там жуков?

Ответ. 8.

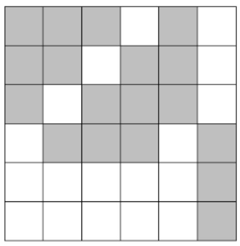
Решение. Пусть сначала все купят по 6 башмаков. Получается $27 \cdot 6 = 162$ башмака. Остаётся $200 - 162 = 38$ башмаков. Их купят паучки, по 2 бащмака каждый, то есть паучков $38: 2 = 19$. Тогда жуков $27 - 19 = 8$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

5. Закрасьте в квадрате 6×6 некоторые клетки так, чтобы в каждом столбце было ровно 3 закрашенных клетки, а в каждой строке или 1 или 4 закрашенных клетки.



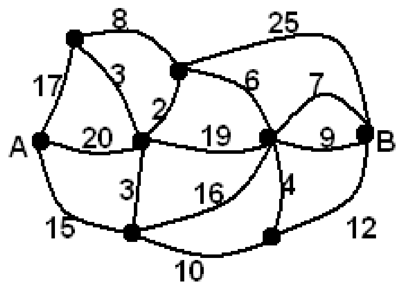
Ответ. Например, так:



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

Вариант 2

1. Бельчонок идёт из точки A в точку B. На каждой тропинке написано, за сколько минут он её проходит. За какое самое маленькое время бельчонок сможет пройти из A в B?



Ответ. 33 минуты.

Решение. $15 + 3 + 2 + 6 + 7 = 33$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Маршрут указан правильно, но сумма не посчитана, или посчитана неверно – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла.*

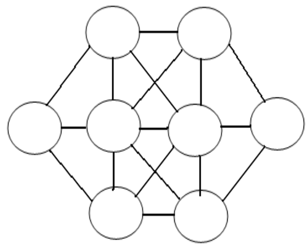
2. В одной кастрюле 6 порций гречневой каши, в другой 6 порций пшённой каши. Саша ест гречневую кашу, а Маша пшённую. Они взвесили свои порции вместе с тарелками, оказалось, что у Саши тарелка с кашей весит 480 граммов, а у Маши 450 граммов. На сколько меньше весит кастрюля с пшённой кашей, чем с гречневой? Все порции одной каши, тарелки и кастрюли одинаковые.

Ответ. 180 граммов.

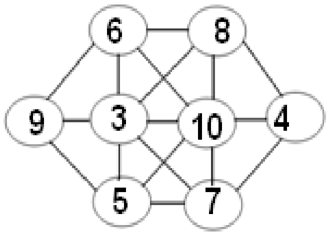
Решение. Вес тарелок уравновешивается, поэтому без тарелок порция пшённой каши весит на 30 граммов меньше. Вес кастрюль тоже уравновешивается, поэтому кастрюля с пшённой кашей весит на $30 \cdot 6 = 180$ граммов меньше, чем с гречневой кашей.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

3. Расставьте в кружках числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 так, чтобы разность между числами в кружках, соединенных отрезками, не была бы меньше 2.



Ответ. См.рисунок.



Комментарий. *Верная расстановка – 20 баллов. Расстановка с одной ошибкой – 5 баллов, если ошибок больше одной – 2 балла.*

4. В обувной звериный магазин пришли 12 покупателей.

Каждому из индюков
Нужна пара башмаков.
Каждый шестиногий жук
Покупает по шесть штук.
А слонята по четыре,
(И которые пошире).
Приходил один кальмар,
Сразу взял себе пять пар.
Вместе все они купили 38 башмаков.
Сколько было индюков?

Ответ. 9.

Решение. 38 башмаков – это 19 пар. Вычтем 5 пар, которые купил кальмар. Остаётся 14 пар. Пусть 11 покупателей (кроме кальмара) купят по паре, останутся 3 пары, которые должны купить жуки и слонята. У каждого слонёнка уже есть одна пара, а надо две пары. У каждого жука уже есть одна пара, а надо три. Значит, три пары можно поделить между ними только так: жук всего один, он покупает ещё 2 пары, и слонёнок всего один, он покупает 1 пару. Число индюков равно $12 - 1 - 1 - 1 = 9$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 18 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 2 балла.*

5. У Михаила 5 собак: шпиц, пудель, терьер, овчарка, дог. Ему надо перевезти их через реку. Лодка вмещает Михаила и двух собак. Если собаки остаются одни на любом берегу, то некоторые дерутся: шпиц дерётся с пуделем, пудель с терьером, терьер с овчаркой, овчарка с догом. Эти пары собак нельзя оставлять вместе без хозяина. Может ли Михаил за несколько поездок на лодке перевезти всех собак?
Ответ. Да.
Решение. Сначала Михаил перевезёт пуделя и овчарку, и оставит их на другом берегу. Потом он перевезёт шпица и дога, а пуделя и овчарку увезёт назад. После этого Михаил может перевезти терьера. Теперь на другом берегу шпиц, терьер, дог, которые не дерутся. Их можно оставить одних, и съездить за пуделем и овчаркой.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

4 КЛАСС

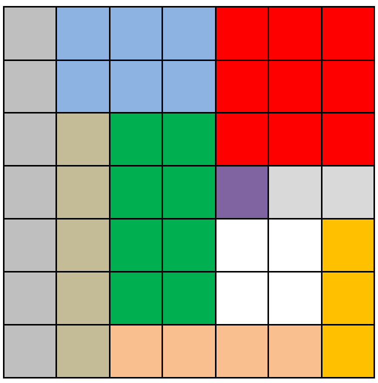
Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1) На доске записаны три двузначных числа, причем одно из них в разряде десятков содержит цифру 5, второе – 6, а третье – 7. Петя выбрал из этих чисел два и сложил их, затем Вася, а потом Коля также выбирали по два числа и складывали. В итоге у Пети получилось 147, а у Васи и Коли – различные трехзначные числа, начинающиеся на 12. Какие числа могли быть записаны на доске первоначально?
Ответ. Например, $51, 69, 78$.

2) Разрежьте клетчатый квадрат 7×7 по линиям сетки на 10 различных прямоугольников. (*Квадрат тоже является прямоугольником.*)
Ответ. См. рисунок.



3) В гостинице в продаже есть карты для входа в столовую на 2, 4 и 6 дней. Карты на 2 и 6 дней вместе стоят дороже, чем две карты на 4 дня, а две карты на 2 дня не дороже, чем одна карта на 4 дня. Что стоит дороже: одна карта на 6 дней или три карты на 2 дня?
Ответ. Дороже одна карта на 6 дней.
Решение. По условию вместо карт на 6 дней и 2 дня выгоднее купить две карты на 4 дня, а свою очередь, вместо каждой из карт на 4 дня можно без потери в деньгах купить две карты на 2 дня. Значит, карты на 6 дней и 2 дня дороже четырех карт на 2 дня, откуда получаем, что одна карта на 6 дней дороже трех карт на 2 дня.

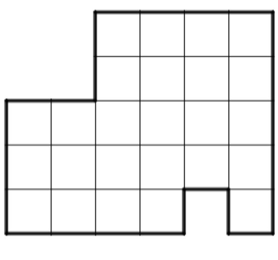
4) В $9:00$ из «тихого» леса в «шумный» лес выбежал бельчонок Сёма. Одновременно навстречу ему из «шумного» леса выбежал бельчонок Тима. Известно, что до момента встречи Сёма успел пройти треть пути между лесами, однако, если бы Сёма выбежал на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Сёма и Тима встретились? *Скорости бельчат постоянны.*
Ответ. 10 часов 20 минут.
Решение. За одно и то же время (до встречи) Сёма прошел треть пути, а Тима две трети пути — в два раза больше, чем Сёма. Следовательно, скорость Тимы в 2 раза больше, чем скорость Сёмы. Половину пути Сёма проходит на 1 час дольше, чем Тима, а весь путь на 2 часа дольше. При этом на весь путь он тратит в 2 раза больше времени. Следовательно, на весь путь Сёма потратит 4 часа, а Тима – 2 часа. Треть пути Сёма пройдет за $\frac{4}{3}$ часа. Следовательно, время их встречи 10 часов 20 минут.

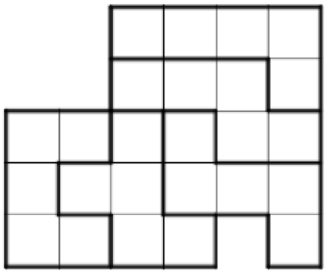
5) Катя, Лена, Маша, Надя проходили тест, в котором было 6 вопросов и на каждый вопрос можно было отметить: « $+$ » или « $-$ ». В итоге девочки получили следующие последовательности ответов:
Катя: $-, -, +, +, +, +$;
Лена: $+, -, -, +, +, +$;
Маша: $-, -, -, +, +, +$;
Надя: $-, +, -, -, -, -$;
Оказалось, что у Кати два неверных ответа, а у Лены только два верных. Сколько верных ответов у Маши, и сколько у Нади?
Ответ. По 3 ответа.
Решение. Заметим, что на первый и третий вопросы Катя с Леной ответили по-разному, а на остальные одинаково. Значит, в вопросах с номерами $2, 4, 5$ и 6 они сделали одинаковое количество ошибок, а так как у Лены на две ошибки больше, чем у Кати, то на вопросы 1 и 3 она ответила неверно. Следовательно, и Маша, и Надя на первый вопрос ответили верно, а на третий – неверно. В вопросах $2, 4, 5$ и 6 у Кати две ошибки и два правильных ответа, а так как Маша на эти вопросы дала такие же ответы, а Надя – противоположные, то у каждой из них ещё по два верных ответа.

Вариант 2

1) На доске написаны цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Используя каждую цифру ровно один раз, составьте три трехзначных числа A, B и C так, чтобы $A + B = C$ и у одного из этих чисел в разряде десятков есть цифра 8.
Ответ. Например, $162 + 783 = 945$.

2) Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, по линиям сетки на пять частей одинаковой площади и одинакового периметра, но различной формы.
Ответ. См. рисунок.





3) Полная бочка варенья весит столько же, сколько Малыш и Карлсон вместе. Малыш залез в бочку, и оттуда вытекло столько варенья, сколько весит сам Малыш. Затем Малыш вылез из бочки. Оказалось, что в бочке осталась половина варенья и полупустая бочка весит 40 килограммов. Сколько весит пустая бочка, если Малыш на 10 кг легче Карлсона?
Ответ. 10 кг.
Решение. По условию «Малыш + Карлсон = пустая бочка + варенье», также известно, что «Малыш = половина варенья», значит, «Малыш + Малыш = варенье». Тогда «Малыш + Карлсон = пустая бочка + Малыш + Малыш». Карлсон на 10 кг тяжелее Малыша, то есть «Карлсон = Малыш + 10». Получаем «Малыш + Малыш + 10 = пустая бочка + Малыш + Малыш». Значит, пустая бочка весит 10 кг.

4) Бельчата Сёма и Тима пошли искать жёлуди к старому дубу. Тима все время шёл с постоянность скоростью – 3 км/ч. Сёма же сперва шёл рядом, но в 13:50 убежал вперед – проверить, нет ли у старого дуба какой-либо опасности. Он увеличил скорость до 5 км/ч, добежал до дуба, мгновенно все проверил и побежал обратно, встретив Тиму в 14:05. Дальше Тима шёл один. В какое время у дуба был Сёма, а в какое Тима?
Ответ. Сёма был у дуба в 14:02, Тима – в 14:10.
Решение. Сёма бегал от дуба и обратно 15 минут (четверть часа). За это время он пробежал 1,25 км, а Тима прошёл 0,75 км. Вместе же они прошли удвоенный путь от места старта Сёмы до дуба. Следовательно, расстояние от места старта Сёмы до дуба – 1 км. Это расстояние Сёма пробегает за 0,2 часа, то есть за 12 минут, а Типа за 20 минут. Следовательно, Тима был у дуба в 14: 10, а Сёма в 14: 02.

5) У каждой из девочек Кати, Лены и Маши не более двух браслетов. Как-то раз у них состоялся такой разговор: Катя: «У Лены два браслета». Лена: «У Маши два браслета». Маша: «У Кати два браслета». Катя: «У нас два браслета на троих». Лена: «У нас три браслета на троих». Маша: «У нас четыре браслета на троих». Оказалось, что каждая соврала столько раз, сколько у неё браслетов. Сколько браслетов у каждой из девочек?
Ответ. У Кати и Маши по одному браслету, у Лены два браслета.
Решение. Мысленно расположим девочек по кругу и будем считать, что Лена следует за Катей, Маша за Леной, а Катя за Машей. Предположим, что у какой-то девочки вообще нет браслетов. Тогда она дважды сказала правду, и у следующей девочки два браслета, поэтому она дважды солгала. Следовательно, у третьей девочки не два браслета. Но и не ноль (иначе следующая за ней первая девочка имела бы два браслета). Значит, у третьей девочки один браслет, а всего у девочек три браслета. Но неверных утверждений в этом случае не три, а четыре. Итак, у каждой девочки либо два браслета, либо один. Если у всех по одному браслету, то неверных утверждений ровно три. С другой стороны, неверны все утверждения, кроме пятого. Значит, у кого-то из девочек два браслета. Тогда она дважды лгала, и у следующего за ней один браслет. А предыдущая сказала про ней правду, а у предыдущей тоже один браслет. Всего браслета четыре, и ложных утверждений тоже четыре: два из первых трех и два из вторых трех. Маша сказала во второй раз правду, а Лена и Катя солгали. Значит, в первый раз Маша лгала, и у неё и у Кати по одному браслету. А у Лены два.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

5 КЛАСС

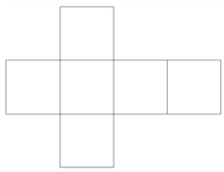
Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

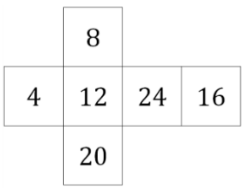
Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. На рисунке изображена развертка куба, состоящая из 6 квадратиков. Расставьте в квадратиках числа 4, 8, 12, 16, 20, 24, чтобы после того, как из развёртки сложили куб, сумма чисел на противоположных гранях была бы одинаковой.



Ответ. Например, так:



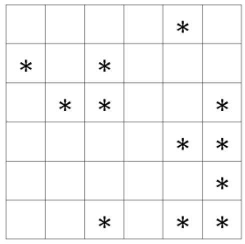
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл.*

2. Мама, папа и девять детей встали в ряд на прямой дорожке. Мама и папа стоят рядом на расстоянии 1 метра друг от друга. Могут ли дети встать так, что суммарное расстояние всех детей до мамы равно суммарному расстоянию всех детей до папы? Если да, приведите пример; если нет, объясните, почему.
Ответ. Нет.
Решение. Пусть мама стоит левее папы. Тогда ребёнок, стоящий левее мамы, находится на 1 метр ближе к маме, чем к папе, а ребёнок, стоящий правее папы, находится на 1 метр ближе к папе, чем к маме. Чтобы суммы расстояний были равны, надо, чтоб слева от мамы

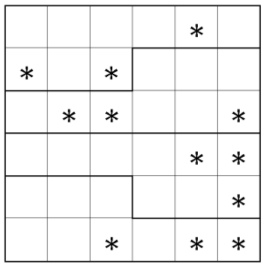
и справа от папы стояло поровну детей. Но мама и папа стоят рядом, а девятерых детей нельзя разделить поровну.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Указано, что 9 детей нельзя разделить на равные группы, но полного доказательства нет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Не учтено, что мама и папа стоят рядом – 1 балл. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

3. Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из одинаковых клеток, на 4 равные части так, чтобы в частях было одинаковое количество звёздочек.



Ответ.См. рисунок.



Комментарий. *Верное разбиение – 20 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл.*

4. Один из четверых бельчат разбил банку с мёдом. Серый заявил, что банку разбил Черныш. Но Черныш утверждал, что виноват Огнехвост. Рыжик сказал, что он не разбивал банку, а Огнехвост – что Черныш врёт. Только один из бельчат сказал правду. Кто сказал правду, и кто разбил банку?

Ответ. Правду сказал Огнехвост, разбил банку Рыжик.

Решение. Черныш и Огнехвост друг другу противоречат. Значит, один из них говорил правду. Так как правду говорил всего один, то Серый и Рыжик соврали. Значит, Рыжик разбил банку. Черныш сказал, что виноват Огнехвост, значит, он тоже соврал. Остаётся Огнехвост, он сказал, что Черныш врёт, и это правда.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Пропущен один вариант – 15 баллов. Рассмотрен только один вариант, дающий ответ – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

5. На поляне растёт на 6 кустов меньше, чем деревьев. Прилетели птицы, и сели и на кусты, и на деревья. Сели они так, что на всех деревьях их было поровну, и на всех кустах поровну, но на дереве по крайней мере на 10 птиц больше, чем на кусте. На деревьях всего сидело 128 птиц. Сколько было кустов?

Ответ.2.

Решение. Деревьев не меньше 7, так как их на 6 больше, чем кустов. На одном дереве птиц не меньше, чем 11, так как по крайней мере на 10 птиц больше, чем на одном кусте. Деревьев не может быть 12 или больше, так как тогда птиц на деревьях было бы $12 \cdot 11 = 132$ или больше. Значит, деревьев может быть 7 или 8 или 9 или 10 или 11. Но из них только число 8 является делителем числа 128. Значит, деревьев 8, а кустов на 6 меньше, то есть 2.

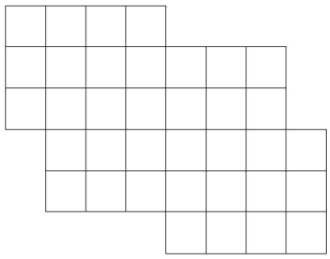
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

Вариант 2

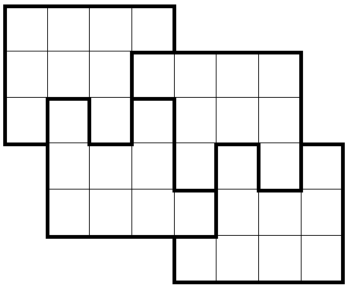
1. Сеня задумал два числа, потом вычел из большего меньшее, сложил оба числа и разность, и получил 68. Каким было большее из задуманных чисел?
Ответ.34.
Решение.Вычитаемое плюс разность равно уменьшаемому. Поэтому удвоенное уменьшаемое равно 68.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Результат получен на основе примеров и замечена, но не объяснена закономерность – 15 баллов. Результат получен на основе одного примера – 10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

2. В кедре два дупла. Бельчонок, сидящий перед вторым дуплом, сказал:
1) в другом дупле нет орехов,
2) хотя бы в одном дупле есть орехи.
Рыжие бельчата всегда говорят правду, а серые всегда врут. Какого цвета этот бельчонок?
Ответ. Рыжий.
Решение. Предположим, что он серый, тогда обе фразы – неправда. Если вторая фраза ложна, то орехов нет ни в одном дупле. А если первая фраза ложна, то в другом дупле есть орехи, противоречие. Пусть бельчонок рыжий, тогда оба утверждения – правда. Тогда из второго следует, что где-то орехи есть, а из первого – что в первом дупле орехов нет. Значит, орехи во втором дупле.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Рассмотрен только один вариант, дающий ответ – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

3. Разрежьте по линиям сетки фигуру, состоящую из одинаковых клеток, на 4 равные части.



Ответ. Например, так.



Комментарий. *Верное разбиение – 20 баллов. Показана одна часть, а разбиения нет – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл.*

4. На каждую из клеток доски 6×6 заползли муравьи и сидят неподвижно. Количества муравьев в клетках, соседних по стороне, отличаются на 1. На одной из клеток сидит 4 муравья, на другой – 14 муравьев. Заполните всю доску числами, показывающими, сколько муравьев в каждой клетке.
Ответ. С точностью до поворота:

9	10	11	12	13	14
8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9

Решение. От одной клетки до другой можно проложить путь, состоящий из не болеечем 10 переходов. Поскольку $14-4=10$, числа 4 и 14 стоят в максимально удаленных клетках – противоположных углах. После этого таблица заполняется однозначно.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Обоснование неполное – 15 баллов. Только ответ (заполненная таблица) без обоснования – 10 баллов.*

5. На детском празднике было 8 детей. Взрослые приготовили 16 пакетов с конфетами. В первом была 1 конфета, во втором 2 конфеты, и так далее, в 16-м пакете было 16 конфет. Каждому из восьми детей дали по одному пакету в начале праздника, и по одному пакету в конце праздника. Могло ли оказаться так, что каждому ребёнку досталось поровну конфет, причём в начале и в конце праздника было роздано одинаковое количество конфет?
Ответ. Да.
Решение. Сначала разделим пакеты на пары с равной суммой:

Начало	1	2	3	4	5	6	7	8
Конец	16	15	14	13	12	11	10	9

Каждый столбец в таблице соответствует одному ребёнку, значит, каждый получит по 17 конфет. Пусть первая строка соответствует подаркам, розданным в начале праздника, а вторая – в конце праздника. Надо сделать суммы равными, сейчас они отличаются на $(16-1)+(15-2)+(14-3)+(13-4)+(12-5)+(11-6)+(10-7)+(9-8)=15+13+11+9+7+5+3+1=64$. Если мы перевернем первый и восьмой столбцы, сумма в первой строке увеличится на 16, и настолько же она увеличится, если перевернуть второй и седьмой столбцы. Поскольку вторая строка на столько же уменьшится, суммы станут равными. При этом каждый ребёнок по-прежнему получит 17 конфет.

Начало	16	15	3	4	5	6	10	9
Конец	1	2	14	13	12	11	7	8

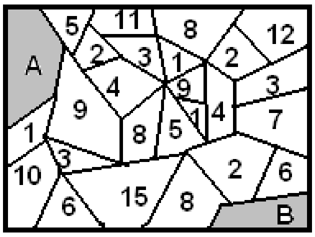
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть значительное продвижение – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение, но не указано распределение пакетов – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ «да» без объяснений – 0 баллов.*

Вариант 3

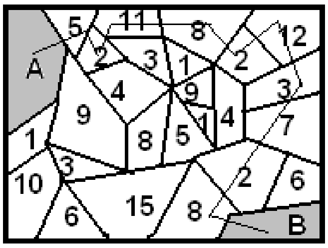
1. По кругу стоят семеро детей: Аня, Боря, Вася, Гена, Даша, Ева, Женя. Начиная с кого-то из детей, каждый третий по часовой стрелке уходит, а отсчет продолжают, пока не останется один человек. Например, если отсчёт начинают с Ани (Аня – первая), то уходит Вася, в следующей тройке Гена – первый, а Ева третья, она уходит, потом уходит Боря, и т.д. С кого надо начинать считать, чтобы осталась Ева?
Ответ. С Васи.
Решение. Начнём считать с Ани. Останется Гена. Значит, нужен сдвиг на 2 человека, и надо начинать с Васи. Тогда дети уходят в таком порядке: Даша, Аня, Гена, Боря, Женя, Вася.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, но верная последовательность выбывающих детей не указана – 5 баллов. Только верный ответ без объяснений – 1 балл.*

2. Бельчонок идёт из точки A в точку B. По дороге он проходит через полянки. На рисунке указано, сколько на каждой полянке растёт грибов. Когда бельчонок заходит на полянку, он собирает полностью все грибы, и идёт на какую-нибудь соседнюю полянку, а на пустые полянки никогда не возвращается. Он прошёл из AвB, и собрал ровно 60 грибов. Напишите по порядку, сколько грибов он собрал на каждой полянке.



Решение. Например, так: $5+2+11+8+2+12+3+7+2+8=60$.



Комментарий. *Верный пример – 20 баллов. Сумма не равна 60 – 1 балл.*

3. В первой четверти Маша и Лена получили вместе 23 пятёрки, Света и Маша получили вместе 18 пятёрок, а Света и Лена получили вместе 15 пятёрок. Сколько пятёрок получила каждая из девочек?

Ответ. Маша – 13, Лена – 10, Света – 5.

Решение. Все три девочки вместе получили половину от $(23+18+15)=28$ пятёрок. Значит, Света получила $28-23=5$ пятёрок, Маша получила $18-5=13$ пятёрок, Лена получила $23-13=10$ пятёрок.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

4. Расставьте в клетках квадрата 6×6 числа $1, 2, 3$ так, чтобы все 12 сумм по строкам и столбцам были разными.

Ответ. Например, так

3	3	3	3	3	3	**18**
3	3	3	3	3	1	**16**
3	3	3	3	1	1	**14**
3	3	2	1	1	1	**11**
3	2	1	1	1	1	**9**
2	1	1	1	1	1	**7**
17	**15**	**13**	**12**	**10**	**8**	

Комментарий. *Верная расстановка – 20 баллов. В расстановке есть совпадающие суммы – 5 баллов.*

5. Мама, папа, Вася и Нина лепили пельмени. Мама и Нина слепили на 4 пельменя больше, чем папа и Вася, а мама и папа – на 2 больше, чем Вася и Нина. Потом Вася и мама ушли, а Нина и папа продолжали лепить с той же скоростью, и каждый налепил ещё в два

раза больше пельменей, чем сначала. Кто теперь налепил больше пельменей, мама и папа вместе или Вася и Нина вместе?
Ответ. Поровну.
Решение.Две мамы, Нина и папа слепили на 6пельменей больше, чем два Васи, Нина и папа, значит, мама слепила на 3 пельменя больше, чем Вася. Тогда Нина слепила на 1 пельмень больше, чем папа. После перерыва Нина слепила на 2 пельменя больше, чем папа, а всего вместе на 3 пельменя больше, чем папа. У мамы осталось на 3 пельменя больше, чем у Васи. Поэтому мама и папа налепили столько же пельменей, сколько Вася и Нина.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ получен на основе примера – 15 баллов. Ход решения (или рассмотрения примера) в целом верный, но содержит ошибку, из-за которой ответ неверен – снимается 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

Вариант 4

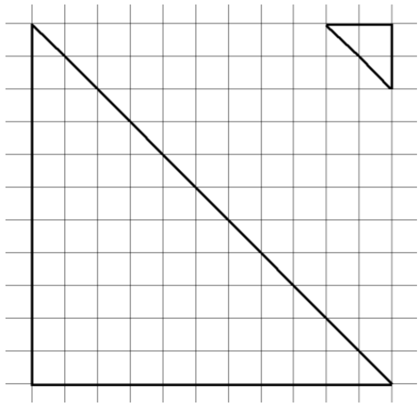
1. В классе 28 учеников. У 17 есть дома кошка, у 10 есть собака. У 5 учеников нет ни кошки, ни собаки. У скольки учеников есть и кошка, и собака?
Ответ.4.
Решение. Учеников с кошками или собаками $28 - 5 = 23$. Если сложить $17 + 10 = 27$, то получается больше 23за счёт тех, у кого есть и кошка, и собака, их посчитали два раза. Их число равно $27 - 23 = 4$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

2. У Бельчонка есть несколько пакетов с орехами. В двух – по 2 ореха, в трёх – по 3 ореха, в четырёх – по 4 ореха, в пяти – по 5 орехов. Помогите бельчонку расставить пакеты на двух полках так, чтобы на них было поровну как пакетов, так и орехов.
Решение. Например, $5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 2 + 2 = 27$ орехов в 7 пакетах – первая полка, $5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 = 27$ орехов в 7 пакетах – вторая полка.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

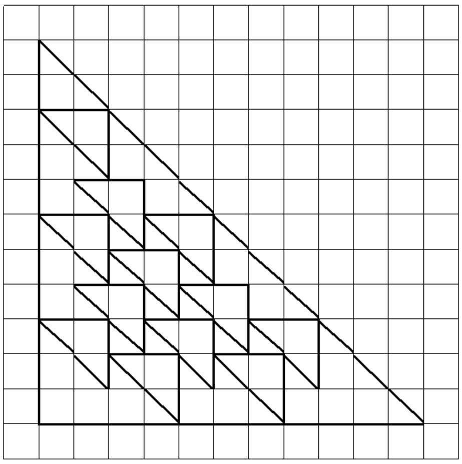
3. Вася, Дима, Коля и Сергей, которые учатся в 5, 6, 7 и 8 классах, решили организовать рок-группу. Среди них есть саксофонист, клавишник, барабанщик и гитарист. Вася играет на саксофоне и учится не в 8 классе. Клавишник учится в 6 классе. Барабанщика зовут не Дима, Сергей – не клавишник и не ученик 5 класса. Дима учится не в 6 классе, а барабанщик – не в 8 классе. В каком классе учится Дима и на каком инструменте он играет?
Ответ. Дима учится в 8 классе и играет на гитаре.
Решение. По условию на саксофоне играет Вася, а Дима – не барабанщик. Но Дима и не клавишник, поскольку учится не в 6 классе, поэтому он играет на гитаре. Так как Сергей – не клавишник, то он является барабанщиком, а клавишником – Коля. Следовательно, Коля учится в 6 классе. Сергей учится не в 5 классе, а так как он барабанщик, то и не в 8-м. Значит, он семиклассник. Поскольку Вася учится не в 8 классе, то он из 5 класса, а в 8 классе учится Дима.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов (несколько таблиц считаются обоснованием). Только ответ, в том числе и данный в виде итоговой заполненной таблицы при отсутствии пояснений, как она заполнялась – 10 баллов.*

Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.

4. На клетчатой бумаге нарисованы большой и маленький треугольники (все клетки квадратные одинакового размера). Сколько маленьких треугольников можно вырезать из большого треугольника? Треугольники нельзя поворачивать и переворачивать (у большого треугольника прямой угол слева внизу, у маленького треугольника прямой угол справа вверху).



Ответ. 12.
Решение. См. рисунок.



Комментарий. *Верный рисунок с 12 треугольниками – 20 баллов. Неверный ответ с рисунком – 1 балл. Любой ответ без рисунка – 0 баллов.*

5. В ряд выписаны в порядке возрастания все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Под каждым числом этого ряда записано произведение его цифр. С получившимсярядом проделывают ту же самую процедуру и так далее. Сколько нечётных чисел будет находиться в пятом ряду?
Ответ.19.
Решение. Заметим, что если число содержит в своей записи чётную цифру, то произведение цифр будет чётным. Но тогда и во всех последующих рядах произведение будет чётным. Найдем все произведения двух цифр в таблице умножения, записываемые с помощью нечётных цифр:

$$1 = 1 \cdot 1;\quad 3 = 1 \cdot 3;\quad 5 = 1 \cdot 5;\quad 7 = 1 \cdot 7;$$
$$9 = 1 \cdot 9;\quad 9 = 3 \cdot 3;\quad 15 = 3 \cdot 5;\quad 35 = 5 \cdot 7;$$

Все остальные произведения содержат чётные цифры. Следовательно, произведения из нечётных цифр будут только под числами, состоящих из указанных цифр. Список чисел: $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, 35, 51, 53, 57, 71, 75, 91$– всего 19 штук.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном ходе решения записано одно лишнее число или пропущено одно число – 18 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

6 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

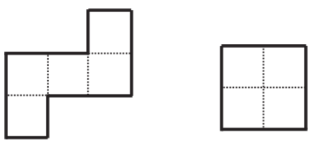
1) Найдите три решения ребуса $\text{МА} = \text{Р} \times \text{К} = \text{Е} + \text{Р}$, в котором буквы заменены цифрами так, чтобы равенства стали верными (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры).

Ответ. 1) $10 = 2 \times 5 = 8 + 2$, 2) $12 = 3 \times 4 = 9 + 3$, 3) $12 = 4 \times 3 = 8 + 4$.

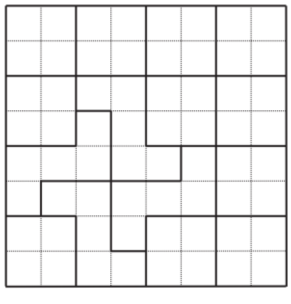
2) У Волка в наборе имеются гирьки массами 90 г, 91 г, 92 г ..., 100 г. Заяц положил на одну чашу весов гирьку массой 121 г. Может ли Волк уравновесить чаши весов, используя несколько гирь из своего набора?

Решение. Заметим, что $121 = 100 + 9 + 7 + 5 = 100 + (99 - 90) + (98 - 91) + (97 - 92)$. Тогда один из вариантов уравновесить: $121 + 90 + 91 + 92 = 100 + 99 + 98 + 97$.

3) Заполните квадрат размером 8×8 фигурками, изображенными на рисунке, так, чтобы были использованы только фигурки каждого из указанных видов. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Накладывать фигурки друг на друга нельзя.



Решение.



4) Сколькими способами можно переставить буквы слова «ВЕКТОР» так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?
Ответ. 0 способов.
Решение. Будем выставлять буквы слева по порядку. На первое место можно поставить любую букву. Поставим гласную (2 варианта), тогда на второе место идёт согласная (4 варианта), на третье – оставшаяся гласная (1 вариант), затем – любая из оставшихся согласных (3 варианта), дальше гласная, но вариантов выбрать гласную больше не осталось. Получаем, что таких расстановок нет. Также невозможен и случай, если на первое место поставить согласную.

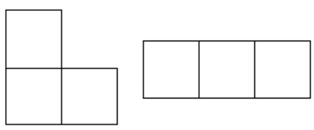
5) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 10 жителей, причем известно, что среди них есть хотя бы один разбойник и хотя бы один купец. Какое наибольшее количество из сидящих за столом может сказать: «Один из моих соседей разбойник, а другой – купец»?
Ответ. 9.
Решение. Предположим, что все сидящие за столом смогли сказать такую фразу. Тогда рядом с разбойником должны сидеть либо два разбойника, либо два купца. Но если рядом с каким-то разбойником будет сидеть два разбойника, то с его соседом-разбойником также рядом должны сидеть два разбойника. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что все сидящие за столом разбойники; по условию это невозможно. Значит, рядом с каждым разбойником должны сидеть два купца. А рядом с каждым купцом должны сидеть один разбойник и один купец. Таким образом, рассадка за столом восстанавливается однозначно: ... $- Р - К - К - Р - К - К - \cdots$. Но тогда число сидящих за столом должно делиться на 3, а 10 на 3 не делится. Поэтому все 10 человек не смогли сказать требуемую фразу. Покажем, что 9 из 10 сидящих за столом могли сказать требуемую фразу. Это могло произойти, если люди за столом сидят следующим образом: $-Р - К - К - Р - К - \breve{К} - К - Р - К - К -$. Среди них только купец $\breve{К}$ не мог сказать требуемую фразу.

Вариант 2

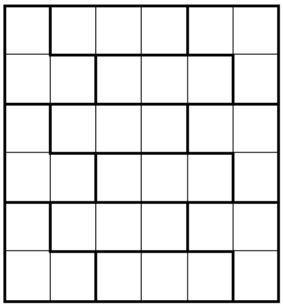
1) Найдите три решения ребуса $КА = Р \times Ь = Е + Р$, в котором буквы заменены цифрами так, чтобы равенства стали верными (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры).
Ответ. 1) $10 = 2 \times 5 = 8 + 2$, 2) $12 = 3 \times 4 = 9 + 3$, 3) $12 = 4 \times 3 = 8 + 4$.

2) У Волка в наборе имеются гирьки массами 90 г, 91 г, 92 г ..., 100 г. Заяц положил на одну чашу весов гирьку массой 115 г. Может ли Волк уравновесить чаши весов, используя несколько гирь из своего набора?
Решение. Заметим, что $115 = 100 + 7 + 5 + 3 = 100 + (98 - 91) + (97 - 92) + (96 - 93)$. Тогда один из вариантов уравновесить: $115 + 91 + 92 + 93 = 100 + 98 + 97 + 96$.

3) Заполните квадрат размером 6×6 фигурками, изображенными на рисунке, так, чтобы каждая фигурка граничила (имела общий отрезок) с фигурками обоих типов. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Накладывать фигурки друг на друга нельзя.



Решение.



4) Сколькими способами можно переставить буквы слова «ТЕРМИН» так, чтобы в нём гласные не стояли рядом и согласные тоже не стояли рядом?
Ответ. 0 способов.
Решение. Будем выставлять буквы слева по порядку. На первое место можно поставить любую букву. Поставим гласную (2 варианта), тогда на второе место идёт согласная (4 варианта), на третье – оставшаяся гласная (1 вариант), затем – любая из оставшихся согласных (3 варианта), дальше гласная, но вариантов выбрать гласную больше не осталось. Получаем, что таких расстановок нет. Также невозможен и случай, если на первое место поставить согласную.

5) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 12 жителей, каждый из них сказал: «Среди моих соседей есть разбойник». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть купец»?
Ответ. 8.
Решение. Заметим, что два разбойника не могут сидеть рядом (иначе каждый из них сказал бы правду). Значит, никакой разбойник не может сказать вторую фразу. С другой стороны, три купца также не могут сидеть рядом (иначе средний солгал бы, говоря, что у него есть сосед-разбойник). Значит, среди любых трех сидящих подряд есть разбойник, т.е. не более двух из них могут сказать вторую фразу. Разбивая сидящих на четыре тройки сидящих подряд, получаем, что не более $4 \cdot 2 = 8$ человек могли сказать вторую фразу. Ровно 8 (купцов) из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу, если за столом люди сидят в таком порядке: РККРККРККРКК.

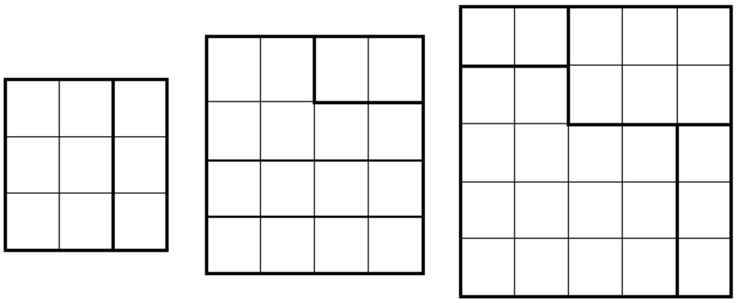
Вариант 3

1) Найдите три решения ребуса $** + ** = 17*$, в котором звёздочки заменены цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр различные.
Ответ. 1) $82 + 93 = 175$, 2) $82 + 94 = 176$, 3) $84 + 92 = 176$.

2) На доске подряд записаны все целые числа от 1 до 20. Заяц посчитал сумму всех этих чисел, получил число 210 и заметил, что оно делится на 1, 2, 3, 5, 6, 7. Может ли Волк стереть с доски не более шести чисел так, чтобы новая сумма делилась на 1, 2, 3, 4, 5, 6?
Ответ. Вариантов несколько. Например, если стереть $11, 12, 13, 17, 18, 19$.
Решение. Число, меньшее 210, должно делиться на $1, 2, 3, 4, 5, 6$, т.е. быть кратным 60, значит, это только 60, 120 и 180. Получить 60, удалив не более 6 слагаемых нельзя, а 120 и 180 можно. В первом случае необходимо удалить числа, суммарное значение которых равно $210 - 120 = 90$. Например, 6 чисел: 11 и 19, 12 и 18, 13 и 17. Во втором случае удаляются те числа, которые в сумме дают $210 - 180 = 30$. Например, 20 и 10.

3) Даны два квадрата 3×3 и 4×4. Как разрезать каждый из них на две части так, чтобы из получившихся четырёх частей можно было сложить квадрат?

Решение.



4) Кузнечик прыгает по числовой прямой вправо на 2 или на 3. Ему запрещено попадать на простые числа. Сколькими способами он может попасть с 1 на 36? *Простое число – это натуральное число больше* 1*, у которого есть всего два делителя: единица и само число.*

Ответ. 48 способов.

Решение. Есть пять «обязательных» чисел: 4, 6, 12, 18, 30 – и четыре неоднозначных участка: $6-12$, $12-18$, $18-30$ и $30-36$. Каждый участник, кроме $18-30$, проходится двум способами (3 прыжка по 2 или 2 прыжка по 3). Длинный участок $18-30$ хочется разбить на 2 коротких. У нас нет числа в промежутке, на которое кузнечик обязательно наступит. Однако, перепрыгнув через простое число 23, кузнечик наступит либо на 24, либо на 25. На оба числа в одном способе он наступить не может, поэтому либо будет пара участков $18-24$, $24-30$, либо пара $18-25$, $25-30$. Каждый из участков $18-24$ и $24-30$ проходится двумя способами, $18-25$ единственным способом $18-20-22-25$, а $25-30$ двумя способами ($25-27-30$ и $25-28-30$). Поэтому участок $18-30$ проходится $2\cdot 2+1\cdot 2=6$ способами, а весь маршрут – $2\cdot 2\cdot 6\cdot 2=48$ способов.

5) В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Однажды за круглым столом собралась компания из 25 жителей, каждый из них сказал: «У меня есть сосед разбойник». Какое наименьшее число разбойников может быть среди этих 25 жителей?

Ответ. 9.

Решение. Заметим, что три купца не могут сидеть рядом, так как в этом случае средний купец соглал бы. Значит, среди любых трёх сидящих подряд человек есть разбойник. Возьмем какого-нибудь разбойника, а остальных 24 человек разобъем на 24 тройки сидящих рядом. Так как в каждой тройке есть хотя бы один разбойник, общее число разбойников в круге не меньше 1+8=9. Ровно 9 разбойников могут сидеть, например, так:

$$-\text{Р}(\text{КРК})(\text{КРК})\ldots(\text{КРК})-.$$

Вариант 4

1. В некоторый день в мешке было несколько орехов. На следующий день в этот мешок добавили столько же орехов, сколько там было, но восемь орехов забрали. На третий день снова добавили столько же орехов, сколько там уже стало, но восемь забрали. То же самое произошло и в четвертый день, и после этого в мешке орехов не осталось. Сколько орехов было в мешке в самом начале?

Ответ. 7 орехов.

Решение. В начале четвертого дня в мешке было $(0+8):2=4$ ореха. Значит, в начале третьего дня их было $(4+8):2=6$, а в самом начале – $(6+8):2=7$.

2. Поставьте вместо точек (•) числа 6, 7, 8, 9, 52, 100 (надо использовать все числа), а вместо звёздочек (*) какие-нибудь знаки арифметических операций из набора (+, −, ×, :) так, чтобы получилось верное равенство

$$\bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet * \bullet = 623.$$

Если потребуется, можно расставить скобки.

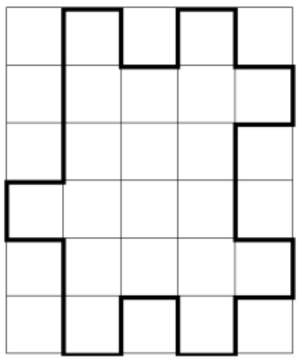
Ответ. Например, так: $(100 - 6) \times 7 - 52 + 8 + 9 = 623$.

3. Все 10 гантелей веса 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 19, 23, 24 килограммов необходимо разложить на три стойки так, чтобы вес гантелей на первой стойке был в два раза меньше, чем вес гантелей на второй стойке. А вес гантелей на второй стойке в два раза меньше, чем вес гантелей на третьей стойке. Можно ли это сделать?

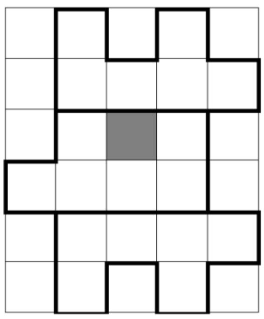
Ответ. Нельзя.

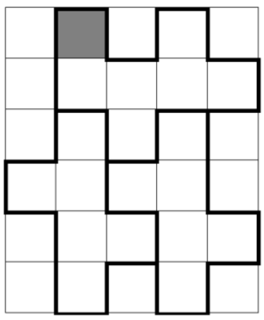
Решение. Предположим, нам удалось решить задачу. Тогда, если общий вес гантелей на первой стойке равен N кг, то общий вес гантелей на второй стойке будет $2N$ кг, а на третьей стойке — еще вдвое больше, то есть, $4N$ кг. Тогда общий вес всех гантелей должен равняться $N + 2N + 4N = 7N$ кг. С другой стороны, общий вес всех гантелей равен 4 + 5 + 6 + 9 + 10 + 11 + 14 + 19 + 23 + 24 = 125 кг. Это число не делится на 7, следовательно, это сделать нельзя.

4. Из фигуры, изображенной на рисунке, необходимо убрать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать на три равные части. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно переворачивать и поворачивать. Приведите два примера, где убираются разные клетки.



Решение.





5. Шестиклассники обсуждали, сколько лет их директору. Аня сказала: «Ему больше 38 лет». Боря сказал: «Ему меньше 35 лет». Вова: «Ему меньше 40 лет». Галя: «Ему больше 40 лет». Дима: «Боря и Вова правы». Саша: «Вы все ошибаетесь». Оказалось, что мальчики и девочки ошиблись одинаковое количество раз. Можно ли узнать, сколько лет директору?

Решение. Заметим, что Аня и Вова не могут ошибаться одновременно, поэтому Саша ошибается. Также ошибается хотя бы один из пары «Аня-Боря» и хотя бы один из пары «Вова-Галя». Таким образом, ошибившихся не меньше трёх, а в силу чётности их ровно четверо: два мальчика и две девочки. Значит, правы не больше одной девочки и не больше двух мальчиков. Дима фактически подтверждает слова Бори. Однако Боря, Дима и Вова не могут быть правы одновременно, поэтому Боря и Дима ошибаются и из мальчиков прав только Вова, а из девочек – только Аня. Отсюда следует, что директору 39 лет.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

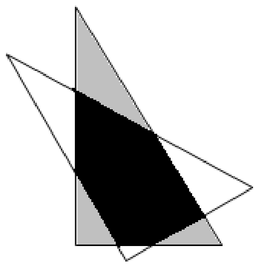
7 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1



1. Два одинаковых треугольника наложили друг на друга так, что в пересечении образовался шестиугольник (см. рисунок). Докажите, что площади серых и белых частей равны.

Решение. Площадь первого треугольника равна сумме площади чёрного шестиугольника и белых частей; площадь второго треугольника равна сумме площади чёрного шестиугольника и серых частей. Но площади треугольников равны.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

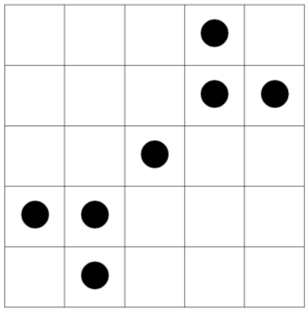
2. Бельчонок насушил грибов: 85% белых грибов, а остальные рыжики. Потом он съел часть белых грибов, теперь рыжики составляли 30% оставшихся грибов. Какую часть грибов съел бельчонок?

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Решение. Рыжики составляли 15% грибов, потом процент рыжиков увеличился в 2 раза, значит, число грибов уменьшилось в 2 раза.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Уравнение верно составлено, но не доведено до верного решения – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

3. В некоторых 7 клетках таблицы 5×5 стоят кляксы. Если убрать любые две строки и любые два столбца, останется хотя бы одна клякса. Нарисуйте, как могут быть расположены кляксы.
Ответ. Например, так.



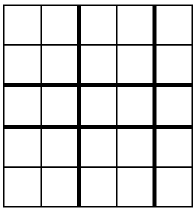
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов.*

4. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2022. Арина поделила каждое чётное число на два, а каждое нечётное умножила на три. Могла ли сумма чисел не измениться?
Ответ. Нет.
Решение. Пусть сумма чётных чисел равна A, а сумма нечётных чисел равна B. Тогда $A + B = \frac{A}{2} + 3B$, откуда $A = 4B$ и вся сумма равна $5B$. Но 2022 не делится на 5.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Уравнение верно составлено, но не решено верно – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

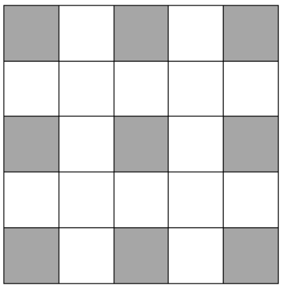
5. Вася сложил четыре числа попарно. Четыре наибольшие из шести полученных сумм равнялись $20, 16, 13, 9$. Найдите две оставшиеся суммы и определите, какие числа мог складывать Вася.
Ответ. Суммы равны 2 и 6. Числа: $-0{,}5;\ 2{,}5;\ 6{,}5;\ 13{,}5$ или$-2{,}5;\ 4{,}5;\ 8{,}5;\ 11{,}5$.
Решение.Обозначим числа a, b, c, d; Пусть $a \leq b \leq c \leq d$. Самая большая сумма получается при складывании dи c, следующая по величине – при складывании dи b. То есть $d + c = 20,\ d + b = 16$. Дальше возможны варианты. 1) $d + a = 13,\ c + b = 9$ или 2) $d + a = 9,\ c + b = 13$.
В варианте 1) $c = 20 - d,\ b = 16 - d,\ c + b = 20 - d + 16 - d = 9$, откуда $d = 13{,}5$.Тогда $c = 20 - 13{,}5 = 6{,}5,\ b = 16 - 13{,}5 = 2{,}5, a = 13 - 13{,}5 = -0{,}5$.Оставшиеся суммы равны $a + b$ =2 и $a + c = 6$.
В варианте 2)$c = 20 - d, b = 16 - d, c + b = 20\ d + 16 - d = 13$,откуда $d = 11{,}5$. Тогда $c = 20 - 11{,}5 = 8{,}5,\ b = 16 - 11{,}5 = 4{,}5, a = 9 - 11{,}5 = -2{,}5$.Оставшиеся суммы равны $a + b = 2$ и $a + c = 6$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы за верное решение распределяются так: найден только один набор чисел – 9 баллов, найден второй набор – 10 баллов, найдены суммы – 1 балл, эти баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только ответ без решения – 1 балл.*

Вариант 2

1. В квадрате 5×5 закрасьте как можно больше клеток чёрным, чтобы выполнялось условие: любой отрезок, соединяющий две чёрные клетки, обязательно проходит и через белую клетку.
Ответ. Докажем, что нельзя закрасить больше 9 клеток. Разобьем квадрат на 9 частей:



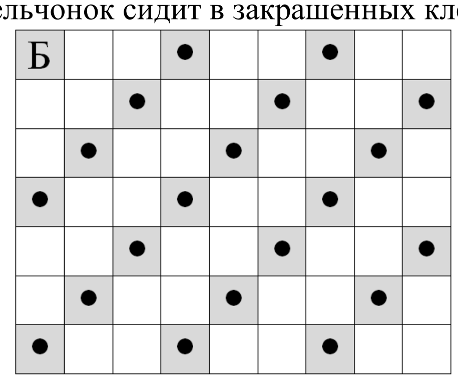
В каждой части нельзя закрасить больше одной клетки.
9 клеток можно закрасить так:



Комментарий. *Верное решение, включающее обоснование того, что число закрашенных клеток максимально, и рисунок – 20 баллов. Неполное обоснование того, что число закрашенных клеток максимально – 15 баллов. Только ответ в виде рисунка – 10 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

2.У бельчонка был запас кедровых и еловых шишек, кедровые составляли 60%. В августе он набрал ещё еловых шишек, теперь кедровые составляли 20%. В сентябре бельчонок набрал ещё кедровых шишек, теперь кедровые шишки составляли 80%. Во сколько раз увеличилось общее число шишек за два месяца?
Ответ.12.
Решение. В августе процент кедровых шишек уменьшился в 3 раза, значит, общее число шишек увеличилось в 3 раза. В сентябре процент еловых шишек уменьшился с 80% до 20%, значит, общее число шишек увеличилось в 4 раза. Всего за два месяца общее число шишек увеличилось в $3 \cdot 4 = 12$ раз.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Уравнение верно составлено, но не доведено до верного решения – 10 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

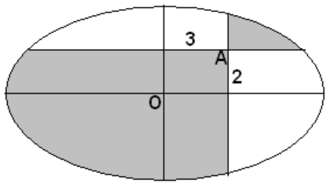
3. В прямоугольнике размером 7×9 клеток в некоторых клетках сидит по одному бельчонку так, чтобы в каждом прямоугольнике 2×3 (или 3×2) сидит ровно 2 бельчонка. Нарисуйте, как они могут сидеть.
Ответ. Например, так (21 бельчонок сидит в закрашенных клетках).



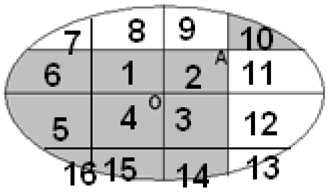
Комментарий. *Верный пример – 20 баллов.*

4. Подберите к числу 34 ещё пять натуральных чисел так, чтобы выполнялись два условия:
(1) среди шести чисел нет трёх чисел, имеющих общий делитель (больше единицы);
(2) среди любых трёх чисел из этих шести найдутся два числа, имеющие общий делитель (больше единицы).
Ответ. Например, $6, 34, 35, 51, 55, 77$.
Решение. Поскольку $34 = 2 \cdot 17$, возьмем простое число 3 и добавим числа $2 \cdot 3 = 6$ и $17 \cdot 3 = 51$. Числа $6, 34, 51$ удовлетворяют условиям. Построим еще одну тройку, чисел, используя простые числа $5, 7, 11$, получим числа $35, 55, 77$. Эти числа также удовлетворяют условиям. Объединим тройки чисел, условие (1) выполняется. При выборе трёх чисел хотя бы два числа будут из одной тройки, поэтому у них есть общий делитель, то есть условие (2) тоже выполняется.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Только верный ответ без объяснений – 1 балл. Решение начато, но допущены принципиальные ошибки – 1 балл.*

5. Миша хотел разрезать торт по осям симметрии (см. рисунок), но промахнулся, и провёл разрезы не через точку O, а через точку A, отстоящую от осей симметрии на 2 и на 3 сантиметра. На сколько площадь кусков, закрашенных серым, больше площади незакрашенных кусков?



Ответ. 24 см^2.
Решение. Проведём вертикальную и горизонтальные прямые симметрично имеющимся прямым относительно центра O. Торт разобьётся на 16 кусков; пронумеруем их, как на рисунке. Площадь закрашенной области равна сумме площадей областей $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 14 + 15 + 16$. Площадь белой области равна сумме площадей областей $7 + 8 + 9 + 11 + 12 + 13$. По симметрии, площади некоторых областей равны: $1 = 2 = 3 = 4, 5 = 6 = 11 = 12, 7 = 10 = 13 = 16, 8 = 9 = 14 = 15$. Разность площадей закрашенной и белой областей равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 14 + 15 + 16 - (7 + 8 + 9 + 11 + 12 + 13) = 1 + 2 + 3 + 4 = 4 \cdot 6 = 24$ см^2.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Задача решена для прямоугольника – 15 баллов. В верном решении допущена арифметическая ошибка – 15 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл.*

Вариант 3

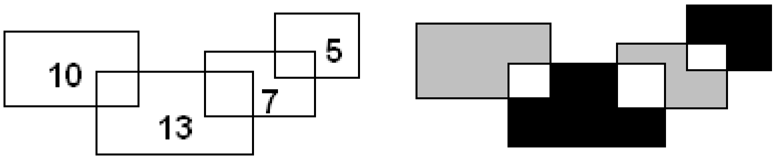
1. После того, как вытянули репку, осталась куча земли. Дедка убрал половину кучи, Бабка убрала треть оставшейся земли, Внучка – четверть остатка, Жучка – пятую часть остатка, Кошка – шестую часть, Мышка – седьмую. Какая часть кучи осталась?
Ответ. $\frac{1}{7}$.
Решение. Сначала осталась половина кучи, потом $\frac{2}{3}$ остатка, потом $\frac{3}{4}$ нового остатка, и так далее. В конце осталась $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$ часть первоначальной кучи.

Комментарий. Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.

2. Диана написала двузначное число, и приписала к нему двузначное число, которое получилось перестановкой цифр первого числа. Оказалось, что разность между первым и вторым числом равна сумме цифр первого числа. Какое четырехзначное число написано?
Ответ. 5445.
Решение. Разность между такими числами всегда делится на 9, так как $10a + b - (10b + a) = 9(a + b)$. Эта разность равна сумме двух цифр, поэтому она не больше 18. Но она не может равняться 18, так тогда и первое, и второе число равнялось бы 99. Поэтому разность двух чисел равна 9, и число десятков двух чисел отличается не больше, чем на 1. Но сумма цифр десятков двух чисел – это сумма цифр первого числа, и она равна 9. Очевидно, подходят только цифры 4 и 5.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство неполное – 10 баллов. Задача решена подбором, не доказано, что других вариантов нет – 5 баллов. В ответе есть и число* 4554 – снимается 1 балл. *Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

3. На детский праздник приготовили пирожные: 10 эклеров, 20 корзиночек, 30 шоколадных брауни, 40 трубочек. Какое наибольшее число детей сможет взять три разных пирожных?
Ответ. 30.
Решение. Из эклеров, корзиночек и брауни надо взять хотя бы 2 пирожных, а их всего вместе 60, то есть не больше 30 детей смогут взять три разных пирожных. Они могут сделать это так: 10 детей возьмут эклер, брауни и трубочку, 20 детей возьмут корзиночку, брауни и трубочку.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство, что 30 – наибольшее значение – 10 баллов, пример – 10 баллов. Если доказательство недостаточно обосновано, то снимается 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

4. Четыре прямоугольника имеют площади, показанные на рисунке. Какая площадь больше, серая или чёрная, и на сколько?



Ответ. Чёрная площадь больше на 1.
Решение. Пусть белые площади равны a, b, c (слева направо). Тогда суммарная серая площадь равна $10 - a + 7 - b - c$, а суммарная чёрная площадь равна $13 - a - b + 5 - c$. Разность между ними равна $13 - a - b + 5 - c - (10 - a + 7 - b - c) = 1$. Суммарная чёрная площадь больше на 1.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Обоснование неполное – 10 баллов. Только ответ без обоснования – 0 баллов.*

5. На 900 карточках записаны все натуральные числа от 1 до 900. Карточки, на которых записаны квадраты целых чисел, убирают, а оставшиеся перенумеровывают, начиная с 1.

Потом операцию удаления квадратов повторяют. Сколько раз придётся повторить эту операцию, чтобы удалить все карточки?

Ответ. 59.

Решение. При первой операции удалится 30 карточек, останется $900 - 30 = 30 \cdot 29$ карточек. Поскольку $30 \cdot 29 > 29^2$, все квадраты, кроме 30^2, остались. При второй операции удалится 29 карточек. Останется $30 \cdot 29 - 29 = 29^2$карточек. Таким образом, за две операции перешли от числа 30^2 к числу 29^2. Запишем в общем виде: при первой операции удалится n карточек, останется $n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2$, при второй операции удалится $n - 1$ карточка. Останется $n^2 - n - (n-1) = (n-1)^2$, то есть за две операции всегда переходят от числа n^2 к числу $(n-1)^2$. Всего среди чисел от 1 до 900 содержится 30 квадратов, между ними 29 переходов. Чтобы дойти до единственной карточки потребуется $2 \cdot 29$ операций, и ещё одна, чтобы удалить последнюю карточку с номером 1.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Ошибки в подсчете числа вариантов при верной идее решения – снимается 5 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Андрей и Коля не ровесники, но в декабре прошлого года каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Сколько лет им сейчас?

Ответ.7 и 25.

Решение.

Обозначим год рождения $\overline{abcd}$, тогда 2021 – $\overline{abcd} = a + b + c + d$, или $1001a + 101b + 11c + 2d = 2021$. При $a = 2$ получаем $101b + 11c + 2d = 19$, то есть $b = 0$, $11c + 2d = 19$. Цифра c должна быть нечётной и не больше 1, то есть $c = 1$, тогда $d = 4$, $\overline{abcd} = 2014$.

При $a = 1$ получаем $101b + 11c + 2d = 1020$, $11c + 2d \leq 99 + 18 = 117$, то есть $101b \geq 903$, откуда $b = 9$, $11c + 2d = 111$. При этом $11c \geq 93$, значит, $d = 9$. Тогда $d = 6$, $\overline{abcd} = 1996$.

Проверка. 1) $2021 - 2014 = 7$, сумма цифр числа 2014 равна 7. 2) $2021 - 1996 = 25$, сумма цифр числа 1996 равна 25.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы распределяются так: найден только один ответ – 7 баллов, найден второй ответ – 7 баллов, доказано, что других решений нет – 6 баллов, эти баллы суммируются. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только ответ без решения – 1 балл.*

2. Тетрадка стоит 10 рублей. Восемь детей купили тетрадки, у каждого осталось разное количество рублей (не нулевое), но ни у кого не хватало на ещё одну тетрадку. Дети сложили оставшиеся рубли, и их хватило в точности ещё на несколько тетрадок. Сколько денег оставалось у каждого из детей до складывания?

Ответ. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

Решение. Возьмём все возможные ненулевые остатки при делении на 10: 1, 2, ..., 9. Сумма всех 9 остатков равна 45. Надо исключить один остаток так, чтобы сумма оставшихся была кратна 10. Очевидно, есть только одна возможность: исключить остаток 5.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

3. Найдите всевозможные значения периметра прямоугольника, если известно, что его можно разрезать на три прямоугольника, периметр каждого из которых равен 10, а длины сторон – целые числа.
Ответ. $14, 16, 18, 22$ или 26.
Решение. Возможны два вида разрезания.
1) Линии разреза параллельны. Обозначим через x длину стороны одного из прямоугольников разбиения, тогда несложно выразить остальные стороны. В этом случае $1 \leq x \leq 4$, поэтому периметр исходного прямоугольника равен $2(2x+5) = 14$, 18, 22 или 26.
2) Линии разреза перпендикулярны. Аналогично, обозначив через x длину стороны одного из прямоугольников, найдем длины остальных сторон. Тогда $1 \leq x \leq 2$, поэтому периметр исходного прямоугольника равен $2(10-x) = 16$ или 18.
Комментарий. *По 4 балла за каждый верный ответ.*

4. Бельчата Пушистик и Лохматик съели корзину ягод и пакет семечек, в котором было больше 50, но меньше 65 семечек, начав и закончив одновременно. Сначала Пушистик ел ягоды, а Лохматик – семечки, потом (в какой-то момент) они поменялись. Лохматик ел ягоды в шесть раз быстрее Пушистика, а семечки – только в три раза быстрее. Сколько семечек съел Лохматик, если ягод Лохматик съел в два раза больше Пушистика?
Ответ. 54.
Решение. Разделим ягоды на 3 равные части. Каждую часть Лохматик ел в 6 раз быстрее Пушистика, но частей две, значит он затратил на ягоды только в 3 раза меньше времени чем Пушистик. Значит, Пушистик ел семечки втрое меньше времени, чем Лохматик. Поскольку Пушистик ест втрое медленнее, то он съел семечек в 9 раз меньше Лохматика. Разделив семечки в отношении $9:1$, видим, что Пушистику досталась 10-я часть, отсюда нетрудно понять, что в пакете было 60 семечек. Поэтому Пушистик съел 6 семечек, а Лохматик – 54.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Из шести неразличимых на вид орехов два искусственных (настоящие орехи весят одинаково, искусственные орехи тоже одинаково и легче настоящих). Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо отдать один орех. Если отданный орех настоящий, весы показывают правильный результат, а если искусственный – могут показать всё, что угодно. Как найти (и не отдать) один настоящий орех?
Решение. Пронумеруем орехи числами от 1 до 6. Положим на одну чашу весов 1-й и 2-й орехи, на другую – 3-й и 4-й и сравним их, отдав 6-й орех. Возможны два исхода:
1) весы оказались в равновесии;
2) одна из чаш, например, с 1-м и 2-м орехами, перевесила.
В любом случае среди 1-го, 2-го и 5-го орехов не более одного искусственного. Действительно, если 6-й орех искусственный, то в любой тройке орехов, не содержащей его, не более одного искусственного. А если 6-й орех настоящий, то в первом случае на каждой чаше было по одному настоящему и одному искусственному ореху, а во втором случае 1-й и 2-й орехи настоящие. Сравним теперь 1-й и 2-й орехи, отдав 5-й. В случае равенства оба ореха на весах настоящие, а если перевесила одна из чаш, то на ней настоящий орех.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В обосновании есть пробелы – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 1 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1) Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а объем численно равен его площади поверхности?
Ответ. Да, существует.
Решение. Подходит, например, куб $6 \times 6 \times 6$. И площадь поверхности, и объем численно равны 216.

2) Оба корня квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ увеличили на 3, после чего получились корни трехчлена $x^2 - 2px - q$. Найдите p и q.
Ответ. $p = 2$, $q = -\frac{3}{2}$.
Решение. Пусть u и v – корни трехчлена $x^2 + px + q$. Тогда по теореме Виета $u + v = -a$ и $uv = b$. По условию $u + 3$ и $v + 3$ – корни трехчлена $x^2 - 2px - q$. Тогда по теореме Виета

$$2p = (u + 3) + (v + 3) = u + v + 6 = 6 - p,$$
$$-q = (u + 3)(v + 3) = uv + 3(u + v) + 9 = q - 3p + 9.$$

Следовательно,

$$p = 2 \text{ и } 2q = 3p - 9 = -3,$$

откуда $q = -\frac{3}{2}$. Поскольку полученное q отрицательно, у найденного трехчлена $x^2 + px + q$ есть два корня.

3) Серединные перпендикуляры к диагоналям LN и KM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают сторону KN в точках P и Q соответственно (P лежит между K и Q). Оказалось, что $LP \parallel MQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.

Решение. Серединный перпендикуляр к диагонали LN (проходящий через точку P) является биссектрисой угла LPN. Аналогично, второй серединный перпендикуляр – биссектриса угла KQM. Из параллельности прямых LP и MQ следует, что эти серединные перпендикуляры перпендикулярны друг другу. Действительно, $\angle LPQ + \angle PQM = 180^{\circ}$, так как $LP \parallel MQ$. Пусть O – точка пересечения этих перпендикуляров, тогда $\angle OPQ + \angle PQO = 90^{\circ}$, а значит, $\angle POQ = 90^{\circ}$, т.е. $OP \perp OQ$. Ну а раз перпендикуляры к диагоналям перпендикулярны, то и сами диагонали KM и LN тоже перпендикулярны.

4) Числа $1, 2, 3, \dots, 9, 10$ записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали следующие суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т.д. Последняя сумма S_{10} равняется сумме всех чисел. Какое наибольшее возможное количество простых чисел может оказаться среди сумм $S_1, S_2, \dots, S_{10}$?
Ответ.7.
Решение. Прибавление нечётного числа меняет чётность суммы на противоположную, а среди чётных чисел только 2 – простое число. Пусть b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 – нечётные числа в том порядке, как они выписывались в строку. Тогда при прибавлении b_2 и прибавлении b_4 получающиеся суммы S_k и S_n – чётные числа, большие 2. Поэтому S_k, S_n и $S_{10} = 55$ – составные числа. Пример в таблице показывает расположение в строку чисел ровно с 7 простыми суммами.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	7	6	4	2	9	1	3	5	10	8
S_i	**7**	**13**	**17**	**19**	28	**29**	32	**37**	**47**	55

5) Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?
Ответ. 4 очка.
Решение. Всего в турнире было сыграно $6 \cdot 5 : 2 = 15$ матчей. Пусть за победу начислялось x очков, было k результативных встреч и $15 - k$ ничьих. Тогда суммарно команды набрали $xk + 2(15 - k)$ очков. По условию эта сумма равна $12 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 52$, откуда $(x - 2)k = 22$. Тогда из ограничения $k \leq 15$ получаем, что $x > 3$. Команда, занявшая последнее место, одержала хотя бы одну победу, иначе она набрала бы не больше 5 очков. Но так как $x > 3$, то и болееодного матча она выиграть не могла, поэтому одержала ровно одну победу. Значит, за победу в матче начислялось целое число очков, причём не большее 6. Теперь из равенства $(x - 2)k = 22$ понятно, что $x = 4$. Пример турнира, удовлетворяющего условию, приведен в таблице.

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Сумма**
1		0	0	4	4	4	12
2	4		4	0	1	1	10
3	4	0		0	1	4	9
4	0	4	4		0	0	8
5	0	1	1	4		1	7
6	0	1	0	4	1		6

Вариант 2

1) Существует ли прямоугольный параллелепипед, все стороны которого выражаются целыми числами, а площадь его поверхности численно равна сумме длин всех его рёбер?
Ответ. Да, существует.
Решение. Подходит, например, куб $2 \times 2 \times 2$. И площадь поверхности, и сумма длин рёбер численно равны 24.

2) Квадратный трехчлен $x^2 + 3px + p$ имеет корни u и v, а квадратный трехчлен $x^2 - 4qx + q$ имеет корни $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$. Найдите p и q.
Ответ. $p = -\frac{4}{3}$, $q = -\frac{3}{4}$.
Решение. По условию u и v – корни трехчлена $x^2 + 3px + p$. Тогда по теореме Виета $uv = p$ и $u + v = -3p$. По условию $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$ – корни трехчлена $x^2 - 4qx + q$. Тогда по теореме Виета $\frac{1}{uv} = q$ и $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 4q$, откуда

$$pq = uv \cdot \frac{1}{uv} = 1 \text{ и } 4q = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = -\frac{3p}{p} = -3.$$

Стало быть, $q = -\frac{3}{4}$ и $p = \frac{1}{q} = -\frac{4}{3}$. Поскольку свободные члены найденных трехчленов отрицательны, оба трехчлена имеют по два корня.

3) Серединные перпендикуляры к диагоналям KM и LN выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекают прямую LM в точках P и Q соответственно (P лежит на продолжении отрезка LM за точку L, а Q – за точку M). Оказалось, что $KP \parallel NQ$. Докажите, что $LN \perp KM$.
Решение. Задача решается аналогично задаче 3 варианта 1.

4) Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?
Ответ. Не могла.
Решение. Предположим, что сумма произведений могла равняться 1001. Сумма двух чисел (в данном случае – этих произведений) может быть нечётной, только когда одно из них чётно, а другое – нечётно. Значит, одно из произведений чётно, а другое нечётно. Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение нечётно, то оба числа должны быть нечётными, при этому одно из них должно давать остаток 1 при делении на 4, а другое – остаток 3 при делении на 4. Тогда остаток от деления их произведения на 4 равен $1 \cdot 3 = 3$. Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение чётно, то оба числа должны быть чётными. Тода их произведение даёт остаток 0 при делении на 4. Таким образом, сумма двух произведений будет дават остаток 3 при делении на 4. Получили противоречие, так как 1001 даёт остаток 1 при делении на 4.

5) Шесть команд провели турнир – каждая команда сыграла с каждой по разу. За ничью начислялось 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Шесть команд набрали соответственно 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очков. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу?
Ответ. 2,5 очка.
Решение. Всего в турнире было сыграно $6 \cdot 5 : 2 = 15$ матчей. Пусть за победу начислялось x очков, было k результативных встреч и $15 - k$ ничьих. Тогда суммарно команды набрали $xk + 2(15 - k)$ очков. По условию эта сумма равна $10 + 7 + 6 + 6 + 3 + 3 = 35$, откуда $(x - 2)k = 5$. Следовательно, $x > 2$. Команда, набравшая 6 очков, выиграла хотя бы один матч, иначе она набрала бы не больше 5 очков. Из ограничения $x > 2$ следует,

что она моглы выиграть не более двух матчей. Значит, x – целое или полуцелое число, в таком случае k – делитель числа 10. С другой стороны, $k \geq 4$, поскольку у каждой из первых четырёх команд есть хотя бы одна победа. Следовательно, возможны только два варианта.

1) $k = 5, x = 3$. Но в этом случае команда, набравшая 10 очков, должна была одержать ровно три победы, т.е. $k \geq 6$. Противоречие.

2) $k = 10, x = 2{,}5$. Пример такого турнира приведен в таблице.

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Сумма**
1		2,5	2,5	0	2,5	2,5	10
2	0		2,5	2,5	1	1	7
3	0	0		2,5	2,5	1	6
4	2,5	0	0		1	2,5	6
5	0	1	0	1		1	3
6	0	1	1	0	1		3

Вариант 3

1) Существует ли прямоугольный треугольник, гипотенуза которого численно равна половине его площади?

Ответ. Да, существует.

Решение. Таких треугольников довольно много. Докажем, что существует равнобедренный. Составим уравнение, обозначив его сторону за a: $\frac{a^2}{2} = 2\sqrt{2}a$. Оно, очевидно, имеет решение $a = 4\sqrt{2}$.

2) Квадратный трехчлен $px^2 + qx + r$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $3px^2 + 2(p+q)x + (q+r)$ также имеет два корня.

Решение. По условию дискриминант первого трехчлена положителен: $q^2 - 4pr > 0$. Рассмотрим дискриминат второго трехчлена:

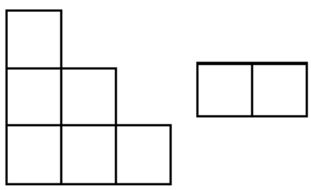
$$4(p+q)^2 - 4 \cdot 3p(q+r) = 4(p^2 + 2pq + q^2 - 3pq - 3pr) =$$
$$= 4p^2 - 4pq + 4q^2 - 12pr > 4p^2 - 4pq + q^2 = (2p-q)^2 \geq 0.$$

Он положителен, следовательно, у второго трехчлена также есть два корня.

3) Известно, что в трапеции $KLMN$ боковая сторона KL равна основанию LM. Точки P и Q – середины оснований KN и LM соответственно, причем точка P лежит на биссектрисе угла L. Докажите, что $LN = 2PQ$.

Решение. Пусть Q_1 – середина KL. Треугольники LPQ и LPQ_1 равны по двум сторонам и углу ($\angle PLQ = \angle PLQ_1$, $LQ = LQ_1$ как половины равных отрезков LK и LM, сторона LP общая). Значит, $PQ_1 = PQ$. Но PQ_1 – средняя линия в треугольнике KLN. Значит, $2PQ_1 = LN$.

4) Квадрат размером 100×100 клеток разбит на фигурки двух типов, изображённые на рисунке. Может ли оказаться, что фигурок из шести клеток ровно 333? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ. Не могла.

Решение. Назовём первую фигурку – лесенкой. Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски в два цвета – чёрный и белый. Тогда клеток чёрного и белого цветов будет одинаковое количество. Заметим, что в каждом прямоугольнике 2×1

будет по одной чёрной и белой клетке. Это означает, что суммарно во всех лесенках количество клеток чёрного и белого цвета должно быть одинаковым. Но в каждой лесенке будет либо 4 белые и 2 черные клетки, либо 4 черные и 2 белые клетки. Пусть x – количество лесенок первого вида, а y – второго вида. Тогда суммарное количество белых клеток в лесенках равно $4x + 2y$, а чёрных – $2x + 4y$. Отсюда следует, что $4x + 2y = 2x + 4y$, т.е. $x = y$. Это означает, что общее количество лесенок $2x$ чётно и поэтому не может равняться 333.

5) Несколько команд провели турнир по гандболу – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Если по итогам две команды набрали одинаковое число очков, более высокое место присуждалось команде, у которой больше разница между числом забитых и пропущенных мячей. Три первые команды набрали соответственно 7, 5 и 3 очков. Сколько очков набрала последняя команда?
Ответ. 2 очка.
Решение. Пусть в турнире участвовало n команд, тогда было разыграно $n(n-1)$ очков. Последние $n-2$ команды (т.е. все, кроме занявших первые два места) набрали не более чем по 3 очка каждая. Значит, $n(n-1) \le 7 + 5 + 3(n-2)$, откуда $n \le 5$. Победившая команда набрала 7 очков, поэтому она провела не меньше четырёх игр. Следовательно, всего было 5 команд, которые разыграли между собой $5 \cdot 4 = 20$ очков.
Пусть четвёртая (по итогам чемпионата) команда набрала x очков, а последня – y очков. Тогда общее число разыгранных очков равно $7 + 5 + 3 + x + y = 20$, откуда следует, что $x + y = 5$. Так как $y \le x \le 3$, получаем, что $x = 3, y = 2$. Значит, команда, занявшая последнее место, набрала 2 очка. Пример турнира, удовлетворяющего условию задачи, приведён в таблице.

Команда	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Сумма**
1		2	2	2	1	7
2	0		2	1	2	5
3	0	0		1	2	3
4	0	1	1		1	3
5	1	0	0	1		2

Вариант 4

1. На доске нарисован прямоугольник. Известно, что если его ширину увеличить на 30%, а длину уменьшить на 20%, то его периметр останется неизменным. Как изменился бы периметр исходного прямоугольника, если его ширину уменьшили бы на 20%, а длину увеличили бы на 30%?
Ответ. Увеличится на 10%.
Решение. Обозначим ширину исходного прямоугольника a, а высоту b. В первом случае измененные ширина и длина будут $1{,}3a$ и $0{,}8b$ соответственно. По условию $2(a+b) = 2(1{,}3a + 0{,}8b)$, откуда $b = 1{,}5a$. Это значит, что исходный периметр равен $2(a + 1{,}5a) = 5a$. Во втором случае периметр будет $2(0{,}8a + 1{,}3b) = 2(0{,}8a + 1{,}3 \cdot 1{,}5a) = 5{,}5a$. Это число больше $5a$ на $0{,}5a$, то есть на 10%.

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ux - v$ имеет различные ненулевые корни p и q, а квадратный трехчлен $x^2 + px - q$ – различные ненулевые корни u и v. Найдите всевозможные значения p, q, u и v.
Ответ. $p = -1, q = 2, u = -1, v = 2$.
Решение. Применив к обоим уравнениям теорему Виета, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} p+q=-u, \\ u+v=-p, \\ pq=-v, \\ uv=-q. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, после сокращения получаем: $q=v$. Подставив q вместо v в третье и четвёртое уравнения и сократив на $q \neq 0$, получаем, что $p=u=-1$. Теперь из первых двух уравнений находи $q=v=2$.

3. В трапеции $KLMN$ основание LM в два раза короче KN. Внутри трапеции отмечена такая точка O, что $KL=OL$. Докажите, что прямая, соединяющая точку M с серединой отрезка ON, перпендикулярна OK.
Решение. Пусть P – середина ON, Q – середина KO. Отрезок QP – средняя линия треугольника KON, поэтому $QP \parallel KN \parallel LM$ и $QP=\frac{1}{2}KN=LM$. Следовательно, $QLMP$ – параллелограмм и $LQ \parallel MP$. С другой стороны, отрезок LQ является медианой равнобедренного треугольника KLO, поэтому$LQ \perp KO$. Таким образом $MP \perp KO$.

4. Миша в течение недели каждый день срывал по яблоку и взвешивал его. Все яблоки весили по-разному, но вес каждого яблока был равен целому числу граммов и колебался от 221 грамма до 230 граммов (включительно). Миша также вычислял средний вес всех сорванных яблок, и он каждый раз был целым числом. Яблоко, сорванное в седьмой день, весило 225 граммов. Сколько весило яблоко, сорванное в шестой день?
Ответ. 230 граммов.
Решение. Каждое яблоко весило 220 граммов плюс целое число от 1 до 10. Из чисел от 1 до 10 надо выбрать 7 чисел, так, чтобы их сумма делилась на 7. Одно из этих чисел равно 5, из чисел 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 надо выбрать 6. Самая малая сумма шести из этих чисел равна 23, самая большая равна 44. Прибавляя 5, получаем числа от 28 до 49. В этом промежутке находится 4 числа, кратные 7: 28, 35, 42, 49. При этом сумма весов за первые 6 дней должна быть кратна 6. Из чисел 23, 30, 37, 44 этому условию удовлетворяет только число 30. Таким образом, общий вес за первые 6 дней был равен $220 \cdot 6+30$ (далее будем писать просто 30, а число, кратное 220, прибавим в конце). При этом сумма весов за первые 5 дней должна быть кратна 5. Возможный интервал за 5 дней: от 16 до 40, подходят числа 20, 25, 30, 40. Но общий вес за 5 дней меньше, чем за 6, поэтому он меньше 30, то есть 20 или 25. Однако разность между 30 и 25 равна 5, а число 5 уже использовано. Поэтому вес яблок за 5 дней равен $220 \cdot 5+20$, значит, яблоко, сорванное в 6-й день, весило $220 \cdot 6+30-(220 \cdot 5+20)=230$ граммов. Это значение допустимо, так как яблоки, сорванные за неделю, могли весить 221, 223, 222, 226, 228, 210, 205 граммов.

5. Несколько команд провели турнир по хоккею – каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» одержала больше всех побед и набрала меньше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло принимать участие в турнире?
Ответ. 6 команд.
Решение. В турнире из n команд «Бельчата» набрали меньше среднего количества, т. е. не больше $n-2$ очков. Значит, какая-то команда набрала больше среднего, т. е. не меньше n очков. Для этого ей пришлось одержать хотя бы одну победу. Следовательно, «Бельчата» одержали не меньше двух побед, т. е. набрала не меньше 4 очков. Поэтому $n \geq 6$. Пример для шести команд см. в таблице.

Команда	1	2	3	4	5	Бельчата	Сумма
1		1	1	1	1	2	6
2	1		1	2	1	0	5
3	1	1		1	2	0	5
4	1	0	1		1	2	5
5	1	1	0	1		2	5
Бельчата	0	2	2	0	0		4

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

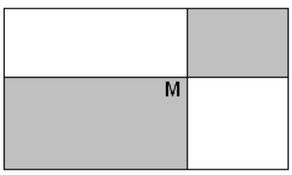
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

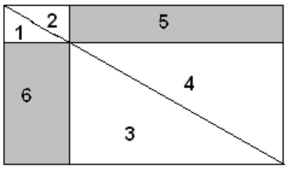
Вариант 1

1. Найдите все целые a, при которых модуль числа $|a^2-3a-6|$ равен простому числу.
Ответ. -1; 4.
Решение. Число a^2-3a всегда чётное (как разность двух чётных или двух нечётных), поэтому простое число $|a^2-3a-6|$ может равняться только 2. Уравнение$a^2-3a-6=2$, или $a^2-3a-8=0$, не имеет целых корней. Решая уравнение $a^2-3a-6=-2$, находим корни $a_1=-1, a_2=4$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Установлено только, что простое число равно 2 – 2 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

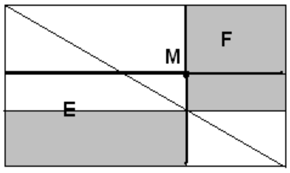
2. Внутри прямоугольника выбрана точка M и через неё проведены прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Оказалось, что площади серых прямоугольников равны (см. рисунок). Найдите геометрическое место точек M.



Ответ. Диагонали прямоугольника.
Решение. Выберем любую точку на диагонали, и проведём через неё прямые (см.рисунок). Поскольку прямоугольник делится диагональю на два равных треугольника, их площади равны: $S_2+S_5+S_4=S_1+S_6+S_3$. Но $S_1=S_2$, $S_3=S_4$. Следовательно, $S_5=S_6$.



Покажем, что никакие другие точки, кроме точек диагоналей, не удовлетворяют условию. Пусть точка M не принадлежит диагонали. Прямоугольники с вершиной M обозначим E и F. Проведем из точки M отрезок к какой-нибудь диагонали. Серым закрашены равновеликие прямоугольники. Легко видеть, что прямоугольник E является частью одного из равновеликих прямоугольников, а прямоугольник F содержит равновеликий прямоугольник, поэтому площади E и F не могут быть равны.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что условие выполняется для точек, лежащих на диагонали – 18 баллов, доказано, что никакие другие точки, кроме точек диагонали, не удовлетворяют условию – 2 балла, баллы суммируются. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Верный ответ, но обоснование недостаточно – 2 балла. Решение начато, продвижение незначительно – 1 балл.*

3. Алиса написала несколько положительных целых чисел. Саша переписал эти числа и добавил одно целое число, меньше всех чисел Алисы. Каждый из них нашёл сумму и произведение своих чисел и поделил сумму на произведение. У Саши получилось число в 5 раз меньше, чем у Алисы. Какое число он мог добавить?

Ответ. 6 или -20.

Решение. Обозначим сумму Алисы a, произведение Алисы b, добавленное число c. Тогда условие можно записать так: $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{bc}\cdot 5$, или $ac=5a+5c$. Разложим на множители: $(a-5)(c-5)=25$. Множитель $a-5$ является делителем 25 и может принимать значения $\pm1, \pm5, \pm25$. Тогда $c-5$ принимает значения $\pm25, \pm5, \pm1$. Пары (a, c) принимают значения $(6,30), (4,-20), (10,10), (0,0), (30,6), (-20,4)$. Сразу отбросим невозможные пары, где c не меньше a. Остаются пары $(a;\ c)$: $(30;\ 6), (4;\ -20)$. Для каждой из этих пар существует набор чисел, удовлетворяющий условиям. Для $c=6$: $15, 15, 6$. Действительно, $\frac{30}{225}=\frac{30+6}{225\cdot 6}\cdot 5=\frac{2}{15}$. Для $c=-20$: $2, 2, -20$. Действительно, $\frac{4}{4}=\frac{4-20}{4(-20)}\cdot 5=1$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: за каждое найденное значение – 10 баллов; если значения найдены подбором, и не доказано, что в данной области других значений нет – по 8 баллов за одно значение. Найдены все значения, но отрицательные отброшены – 18 баллов. Есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 2 балла. Дан верный ответ без объяснений – 0 баллов.*

4. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как $AD:BC\ =3:2$, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. На стороне AB выбрана точка K так, что $KA:AB=3:5$. Из точки K проведён перпендикуляр к CD, пересекающий отрезок CD в точке P. Докажите, что $\angle KPA=\angle KPB$.

Решение. Из условия следует, что $KA : KB=3:2$. Треугольники KDA и KBC подобны как прямоугольные с пропорциональными катетами, поэтому $\angle KCB=\angle KDA$. Четырёхугольник $ADPK$ вписанный, так как $\angle KPD=\angle KAD=90°$, следовательно, $\angle KDA=\angle KPA$ (эти углы опираются на одну дугу). Аналогично, поскольку четырёхугольник $KPCB$ вписан в окружность, получаем, что $\angle KCB = \angle KPB$, а тогда и $\angle KPA = \angle KPB$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Баллы раскладываются так: доказано подобие треугольников KDA и KBC– 5 баллов; доказано, что четырехугольники вписанные – 12 баллов, сделан окончательный вывод – 3 балла. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

5. Натуральные числа, кратные 3, покрасили в два цвета: красный и синий, так, что сумма синего и красного числа – красная, а произведение синего и красного числа – синее. Сколькими способами можно раскрасить числа, чтобы число 546 было синим?

Ответ. 7.

Решение. Докажем, что все синие числа кратны одному и тому же числу. Сначала докажем, что произведение двух синих чисел – синее. Предположим, что утверждение не верно. Пусть a и b – два таких синих числа, что их произведение равно красному числу. Пусть d – некоторое красное число (можно взять и $d = ab$). Тогда $a + d$ – красное. Отсюда следует, что $a \cdot b + b \cdot d = b(a + d)$– синее, так как синее число b умножили на красное число $a + d$. Число $b \cdot d$ тоже синее, а число $a \cdot b$ по предположению красное. Получили, что сумма синего и красного числа – синее, что противоречит условию. Следовательно, предположение не верно, и произведение любых двух синих чисел – синее число. Вместе с условием это означает, что произведение синего числа и любого – синее число.

Пусть a_0 – наименьшее синее число, a – произвольное синее число. Его можно представить как $a = k \cdot a_0 + r$, где $0 \le r < a_0$. Остаток r не может быть синим числом, так как a_0 – наименьшее синее число. Произведение $k \cdot a_0$, по доказанному, синее число. Стоящая справа сумма синего и красного по условию красное число, но в левой части равенства синее число; противоречие. Следовательно, остаток $r = 0$, и произвольное синее число нацело делится на наименьшее синее число. Число $546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$. Рассматриваются только числа, кратные 3, и синими среди них могут быть все числа, кратные 6, или кратные 21, или кратные 39, или кратные 42, или кратные 78, или кратные 273, или кратные 546; всего 7 способов.

Комментарий. *Найдены все способы – 20 баллов. Установлено, что синие числа кратны делителям числа 546, но верный ответ не получен – 15 баллов. В отсутствии общего решения найден хотя бы один способ – 5 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Решение начато, есть небольшое продвижение – 2 балла.*

Вариант 2

1. Сумма двух чисел равна 2022. Если у первого числа стереть последнюю цифру 5, а ко второму числу справа приписать цифру 1, то сумма изменённых чисел станет равна 2252. Найдите исходные числа.

Ответ. 1815 и 207.

Решение. Обозначим исходные числа x и y. Составим систему

$$\begin{cases} x + y = 2022, \\ \dfrac{x-5}{10} + 10y + 1 = 2252. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x = 1815, y = 207$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Верный ответ найден подбором, не показано, что других значений нет – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

2. Периметр треугольника равен 4. Докажите, что сумма квадратов длин сторон больше 5.

Решение.Если треугольник равносторонний со стороной $a = \frac{4}{3}$, то неравенство выполняется, так как $3a^2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3} > 5$. Пусть произвольный треугольник имеет стороны $a + x,\ a + y,\ a + z,$ где $x + y + z = 0$. Тогда

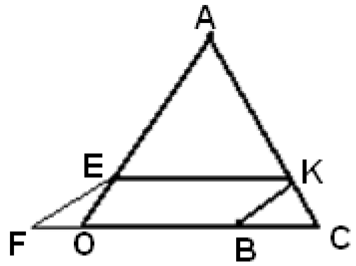
$$(a + x)^2 + (a + y)^2 + (a + z)^2 = 3a^2 + 2a(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 \geq 3a^2 > 5.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Без доказательства используется тот факт, что сумма квадратов наименьшая, когда слагаемые равны – 7 баллов. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

3. Два бельчонка находятся в точках A и B, и начинают одновременно скакать по мымAO и BO по направлению к точке O (пройдя точку O, каждый продолжает движение по своей прямой). Расстояние $AO = 120$ метров, $BO = 80$ метров, угол $AOB = 60°$. У бельчат постоянная одинаковая скорость. Каково наименьшее расстояние между бельчатами во время движения?

Ответ.$20\sqrt{3}$ метров.

Решение. Пусть бельчата пройдут расстояние $d = AE = BF$. Проведём через точку Eпрямую, параллельную OB, и отложим на ней отрезок EK, равный AE. Проведём прямую AK, пусть она пересекает прямую OB в точке C.



Треугольник AEK равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний, значит, подобный ему треугольник AOC тоже равносторонний, $OA = OC = AC = 120$. Четырёхугольник $EKBF$ – параллелограмм, так как $EK = AE = BF$, и $EK||OB$.

Значит, расстояние между бельчатами, равное EF, равно BK, где K – текущая точка на прямой AC. Прямая AC определяется точками A и C, равноотстоящими от точки O на 120 метров. Таким образом, надо найти кратчайшее расстояние от фиксированной точки B до прямой AC. Это расстояние измеряется по перпендикуляру, то есть бельчата будут ближе всего друг к другу, когда BK перпендикулярно AC. В прямоугольном треугольнике BKC гипотенуза BC равна $120 - 80 = 40$ метров, $\angle BCK = 60°$ значит, кратчайшее расстояние равно $40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ (метров).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении ответ неверный из-за ошибки в вычислениях в конце – 19 баллов. Рассмотрены 3 варианта расположения бельчат, выбран правильный, но в нём не доказана минимальность – 15 баллов. В решении есть ошибки – 10 баллов. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

4. Найдите наименьшее натуральное $n > 1$, для которого сумма никаких двух натуральных степеней не является точным квадратом натурального числа.

Ответ.4.

Решение. Для $n = 2$: $2^1 + 2^1 = 2^2$. Для$n = 3$: $3^3 + 3^2 = 6^2$ Пусть $n = 4$. Предположим, существуют такие $m,\ k$, что $4^m + 4^k = a^2$.

Любая степень 4 даёт при делении на 3 остаток 1 (так как $4^m = (3 + 1)^m$). Следовательно, $4^m + 4^k$ даст при делении на 3 остаток 2. Но квадрат целого числа даёт при делении на 3 только остаток 0 или 1.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что $n \geq 4$ – 12 баллов. Доказано, что $n \geq 3$ – 3 балла. Доказано, что $n \leq 5$ – 3 балла. Решение не закончено, но есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

5. Можно ли отметить на клетчатой бумаге 5 точек пересечения линий сетки так, чтобы эти точки были вершинами равностороннего пятиугольника?
Ответ. Нет.
Решение. Предположим, такие целочисленные пятиугольники существуют; возьмём пятиугольник с наименьшей стороной. Выберем начало координат, проведём оси. Каждой стороне будет соответствовать вектор $\bar{a}_i = (x_i, y_i)$, ${x_i}^2 + {y_i}^2 = a^2$. Направление векторов выберем по часовой стрелке, так что $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots \bar{a}_5 = 0$. Тогда $x_1 + x_2 + \cdots x_5 = 0$ и $y_1 + y_2 + \cdots y_5 = 0$. Возведём каждое из двух последних равенств в квадрат, сложим, и подставим ${x_i}^2 + {y_i}^2 = a^2$, получим: $5a^2 = -2 \cdot S$, где S – сумма попарных произведений абсцисс и попарных произведений ординат. Отсюда a^2 делится на 2. Если a^2 делится на 4, то ${x_i}^2$и${y_i}^2$ нацело делятся на 4 (это следует из соотношения ${x_i}^2 + {y_i}^2 = a^2$, и того, что квадрат целого числа даёт при делении на 4 остаток 0 или 1). Значит, существует равносторонний пятиугольник с вершинами в узлах сетки со стороной в 2 раза меньше. Но это противоречит предположению о выборе наименьшего пятиугольника. Если a^2 делится только на 2, но не 4, то для любого ix_iи y_i – нечётные числа. Тогда сумма произведений S – чётное число, так как она содержит чётное количество нечётных чисел (поровну произведений $x_i x_j$ и $y_i y_j$). Поэтому из равенства $5a^2 = -2 \cdot S$ следует, что a^2 делится на 4. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, и искомый пятиугольник не существует.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верный ответ получен из рассмотрения нескольких примеров – 10 баллов. Есть идеи решения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

Вариант 3

1. Сколько существует правильных несократимых дробей, у которых сумма числителя и знаменателя равна 100?
Ответ. 20.
Решение. Рассмотрим уравнение $a + b = 100$. Если aиb имеют общий делитель, то этот делитель имеет и число 100, то есть у aиb, удовлетворяющих уравнению, простыми общими делителями могут быть только 2 и 5. Разобьём все числа на пары $(a, 100 - a)$. Поскольку дробь $\frac{a}{b}$несократима, исключим из чисел от 1 до 100 чётные числа (останется 50 чисел), и числа, кратные 5 (останется 40 чисел). Среди этих 40 чисел каждому числу a соответствует число $100 - a$, так как если a нечётно и не кратно 5, то и $100 - a$ обладает этими свойствами. В числитель дроби будем записывать меньшее из чисел $a, 100 - a$. Получится 20 пар.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Неполное обоснование – 15 баллов. При верном решении одна ошибка в подсчёте – 18 баллов. Решение не закончено или не верно, но есть хорошее продвижение – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

2. У двоих бельчат было одинаковое количество сосновых шишек и одинаковое количество кедровых шишек. Всего шишек у каждого бельчонка было меньше 25. Первый бельчонок набрал ещё столько же сосновых шишек, сколько у него было, и 26 кедровых шишек. У него оказалось больше сосновых, чем кедровых. Второй бельчонок набрал ещё столько же кедровых шишек, сколько у него было, а 4 сосновые съел. У него оказалось больше кедровых, чем сосновых. Сколько сосновых и кедровых шишек было у каждого бельчонка изначально?
Ответ.17 сосновых шишек, 7 кедровых шишек.

Решение. Обозначим число сосновых шишек x и число кедровых шишек y. Запишем условия: $\begin{cases} x+y<25 \\ 2x>y+26 \\ 2y>x-4. \end{cases}$

Сложим второе и третье неравенства: $2(x+y)>x+y+22,$ или $x+y>22$. Но $x+y<25$, поэтому $x+y$ может равняться только 23 или 24. Пусть $x+y=23$. Тогда $y=23-x$, и система примет вид $\begin{cases} 2x>23-x+26 \\ 46-2x>x-4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>\frac{49}{3} \\ x<\frac{50}{3} \end{cases}$. В этом промежутке нет целых чисел.

Пусть $x+y=24$. Тогда $y=24-x,$ и система примет вид

$\begin{cases} 2x>24-x+26 \\ 48-2x>x-4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>\frac{50}{3} \\ x<\frac{52}{3}. \end{cases}$

В промежутке $\left(\frac{50}{3}; \frac{52}{3}\right)$ есть целое число 17. Поэтому $x=17, y=7$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. При верном решении одна ошибка в подсчёте – 18 баллов. Найдено общее число шишек, но решение не закончено – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

3. Сумма m последовательных натуральных чисел равна простому числу p. Чему может равняться m?

Ответ. 1 и 2.

Решение. Сумма m последовательных чисел от k до $k+m-1$ включительно равна $\frac{(2k+m-1)m}{2}$. Эта сумма должна равняться p, то есть множители равны 1 и р. Если $m>2$ и m нечётное, то m равно p. При $m=p$: $\frac{2k+p-1}{2}=1, 2k+p=3$, что невозможно. Если $m>2$ и чётное, то $m/2=p$. В этом случае $m=2p, 2k+2p-1=1,$ то есть $k+p=1$, что невозможно. Таким образом, $m\le 2$. При $m=1$ надо взять одно число p. При $m=2$ получаем $2k+1=p$. Складываются два последовательных числа k и $k+1$, равных соответственно $\frac{p-1}{2}$ и $\frac{p+1}{2}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Найден ответ – 10 баллов, доказано, что других ответов нет – 10 баллов, баллы суммируются. Нет примера реализации – снимается 1 балл для каждого случая. Пропущен без пояснений ответ $m=1$ – снимается 2 балла. Есть пробелы в доказательстве – 15 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

4. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $BC=3$. На середине стороны AB отмечена точка P. Из точки C опущен перпендикуляр CQ на DP. Найдите длину BQ.

Ответ. 3.

Решение. Продлим прямые CB и DP до пересечения в точке M. Треугольники MBP и DAP равны, так как они прямоугольные, имеют равные катеты и равные вертикальные углы. Значит, $MB=AD=BC$. Таким образом, BQ – медиана прямоугольного треугольника MQC, и равна половине гипотенузы MC, то есть 3.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказаны потенциально полезные утверждения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

5. Таблица 7×7 заполняется целыми ненулевыми числами. Сначала по рамке таблицы расставляются отрицательные числа. Дальше клетки заполняются в произвольном поряд-

ке, и очередное число равно произведению поставленных ранее чисел, ближайших к нему по строке или ближайших к нему по столбцу. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть в таблице?

Ответ. 24.

Решение. *Оценка.* Докажем, что в закрашенной области должно стоять хотя бы одно отрицательное число. Пусть это не так. Рассмотрим ту угловую клетку закрашенной области, в которую ставили число последней из четырёх угловых (она закрашена чёрным). По предположению, если в клетках её строки и её столбца и поставлены некоторые другие числа, то они положительные. Поэтому в чёрной клетке должно стоять отрицательное число. Всего отрицательных чисел не меньше $4 \cdot 6 + 1 = 25$, соответственно положительных чисел не больше 24.

−	−	−	−	−	−	−
−	+				+	−
−						−
−						−
−						−
−					+	−
−	−	−	−	−	−	−

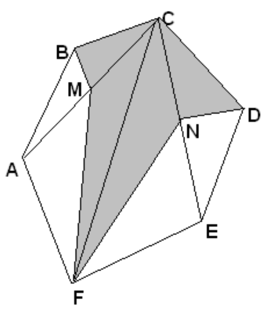
Пример. Будем расставлять числа в закрашенной области в порядке, указанном цифрами. В клетках 1, 2 выберем сомножители по столбцу, в клетках 3, 4 выберем сомножители по строке, получим положительные числа. В клетке 5 – отрицательное число. Все остальные клетки можно заполнить положительными числами, всего их будет 24.

−	−	−	−	−	−	−
−	1				2	−
−						−
−						−
−	4					−
−	5				3	−
−	−	−	−	−	−	−

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Предложен способ заполнения, не являющийся оптимальным – 5 баллов. Если при этом не указана последовательность заполнения клеток – 1 балл.*

Вариант 4

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ точка M – середина отрезка AC, точка N – середина отрезка CE. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$.



Решение. Отрезки BM, FM, FN, DN являются медианами треугольников ABC, ACF, FCE, ECD. Каждая медиана делит соответствующий треугольник на два равновеликих треугольника, ввиду равенства высот и оснований.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказаны потенциально полезные утверждения – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл.*

2. Девять бельчат соревновались в беге на 50 метров, у всех были разные результаты. Потом их разбили на три группы по 3 бельчонка. Первая и вторая группы соревновались между собой по таким правилам: какой-нибудь бельчонок из первой группы бежал с каким-нибудь бельчонком из второй группы. Потом другой бельчонок из первой группы бежал с другим бельчонком из второй группы. И наконец, соревновались оставшиеся бельчата из первой и второй групп. У какой группы больше побед из трёх забегов, та и выиграла. Затем так же соревновались вторая и третья группы, потом первая и третья. Все бельчата бежали с той же скоростью, как в начале, когда соревновались все вместе. Могло ли быть так, что первая группа выиграла у второй, вторая у третьей, третья у первой? Если нет – докажите; если да – покажите, как это могло быть.

Ответ. Да.

Решение. Приведём пример, как это могло быть. Присвоим каждому бельчонку номер от 1 до 9 (1 – самый быстрый, 9 – самый медленный). Пусть в первой группе бельчата с номерами $1, 5, 9$, во второй – с номерами $2, 6, 7$, в третьей – с номерами $3, 4, 8$. Когда соревнуются первая и вторая группы, бельчонок номер 1 выигрывает у номера 2, бельчонок номер 5 выигрывает у номера 6, и первая группа выиграла у второй. Когда соревнуются вторая и третья группы, бельчонок номер 2 выигрывает у номера 3, бельчонок номер 6 выигрывает у номера 8, и вторая группа выиграла у третьей. Когда соревнуются третья и первая группы, бельчонок номер 3 выигрывает у номера 5, бельчонок номер 4 выигрывает у номера 9, и третья группа выиграла у первой.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В примере нарушено условие, что все скорости разные – 15 баллов. Записаны неравенства, но пример реализации отсутствует – 10 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. На доске были записаны два неравенства, каждое из которых выполняется для некоторых чисел $a \geq b \geq c \geq 0$.

$$(1) a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac),$$
$$(2) a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2).$$

Настя считает, что неравенства (1) и (2) равносильны, Петя – что из (1) следует (2), Нина – что из (2) следует (1), Даня – что они все не правы. Чьи высказывания истинны?

Ответ. Дани.

Решение. При $a = 4,\ b = 1, c = 1$ неравенство (1) выполняется, а неравенство (2) – нет, так как $16 + 1 + 1 = 18 \leq 2(4 + 4 + 1) = 18$, но $4^4 + 1^4 + 1^4 = 258 > 2(4^2 1^2 + 4^2 1^2 + 1^2 1^2) = 66$. Значит, из (1) не следует (2).

При $a = 4,\ b = 3, c = -2$ неравенство (2) выполняется, а неравенство (1) – нет, так как $4^4 + 3^4 + 2^4 = 353 \leq 2(4^2 2^2 + 4^2 3^2 + 3^2 2^2) = 488,$ но $16 + 9 + 4 = 29 > 2(12 - 8 - 6) = -4$ Значит, из (2) не следует (1).

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказано, что из (2) не следует (1) – 10 баллов, доказано, что из (1) не следует (2) – 10 баллов. За каждый случай, когда обоснование недостаточно, например, не произведена проверка (решение одного неравенства указано, но не подставлено в другое неравенство), снимается 3 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Окружность, проходящая через вершины L и M трапеции$KLMN$, пересекает боковые стороны KL и MN в точках P и Q соответственно и касается основания KN в точке S. Оказалось, что $\angle LSM = 50^\circ$, а $\angle KLS = \angle SNM$. Найдите $\angle PSQ$.

Ответ.65°.

Решение. Поскольку KS – касательная к окружности, то

$$\angle KSP = \angle SQP = \angle SLP = \angle KLS = \angle SNM.$$

Но $\angle KSP$ и $\angle SNM$ – соответственные углы для прямыхPS и MN, поэтому $PS \parallel MN$ и вписанный четырехугольник $SQMP$ является трапецией. Следовательно, это равнобедренная трапеция и, значит, $\angle PSQ = \angle SPM = \angle SLM$, последнее по вписанности четырёхугольника $SPLM$. Из параллельности прямыхKN и LM имеем

$$\angle SLM = \angle KSL = \angle KSP + \angle PSL = \angle SMP + \angle PML = \angle LMS.$$

Стало быть,

$$2\angle PSQ = 2\angle SLM = \angle SLM + LMS = 180^{\circ} - \angle LSM = 130^{\circ}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Решение не доведено до конца, есть хорошее продвижение – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Бельчонок собрал в лесу 15 орехов весом $50, 51, \ldots, 64$ граммов. Ему известен вес каждого из орехов. С помощью чашечных весов бельчонок пытается доказать своим друзьям, что первый орех весит 50 г., второй – 51 г., третий – 52 г. и т.д. (вначале друзья ничего не знают про веса орехов). Какое наименьшее количество гирь потребуется бельчонку, если и гири, и орехи можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний неограниченно? (Веса гирь известны как бельчонку, так и друзьям. В наличии неограниченный запас гирь весом $1, 2, \ldots, 1000$ г.)

Ответ. Одна гиря.

Решение. Заметим, что вообще без гирь обойтись не удастся, поскольку если вес каждого ореха уменьшить в два раза, то результаты всех взвешиваний не изменятся. Покажем, что бельчонок сможет управиться с помощью одной гири весом в 1 г. Сначала он убедит друзей, что орехи весят n, $(n+1), \ldots, (n+14)$ г. Для этого он положит на одну чашу весов орех массой 51 г., а на другую чашу – орех массой 50 г. и гирю. Весы покажут равенство, и друзья узнают, что взвешенные орехи отличаются ровно на один грамм. Затем тоже самое нужно сделать с орехами весом 52 и 51 и т.д. Наконец, с помощью последнего взвешивания бельчонок покажет друзьям, чему равно n. Для этого он положит на одну чашу весов орехи весом от 50 до 57 г., а на другую – остальные орехи и гирю. Весы вновь покажут равенство. Таким образом, друзья будут знать, что

$$n + (n+1) + \cdots + (n+7) = (n+8) + (n+9) + \cdots + (n+14) + 1.$$

Поэтому, $8n + 28 = 7n + 78$, т.е. $n = 50$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Приведено решение с 2 гирями – 2 балла. Приведено решение с числом гирь больше 2 – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1) Пять членов жюри олимпиады проверяли работы. Первый, второй и четвертый члены жюри вместе могут проверить работы за 20 часов; второй, третьей и пятый вместе – за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме второго члена жюри, то на проверку работ требуется 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всеми членами жюри по сравнению с проверкой работ только вторым членом жюри?

Ответ. В 13 раз.

Решение. За час второй член жюри проверит $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{120}$ всех работ, что в 12 раз меньше, чем за час проверят четыре остальных члена жюри.

2) Ненулевые числа p, q, r являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что уравнение $px^2+2\sqrt{2}qx+r=0$ имеет два решения.

Решение. Из характеристического свойства арифметической прогрессии получаем $q=\frac{p+r}{2}$. Тогда дискриминант интересующего нас квадратного уравнения равен $D=8b^2-4ac=2(a+c)^2-4ac=2a^2+2c^2>0$. Поэтому квадратное уравнение имеет два решения.

3) В таблице 10×10 расставлены различные натуральные числа от 1 до 100. Оказалось, что в каждой строке (слева направо) и в каждом столбце (снизу верх) числа идут в порядке возрастания. Найдите наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца.

Ответ. 735.

Решение. *Оценка.* Заметим, что сумма чисел в последних пяти столбцах таблицы не превосходит $51+52+\dots+100=151\cdot25=3775$. Обозначим через S сумму чисел шестого столбца. Так как каждое число в седьмом столбце больше, чем число в шестом столбце,

находящееся в той же строке, то сумма чисел в седьмом столбце не меньше $S+10$. Аналогично, сумма чисел в восьмом столбце не меньше $S+20$, в девятом – не меньше $S+30$, а в десятом – не меньше $S+40$. Следовательно, $S+(S+10)+(S+20)+(S+30)+(S+40)\leq 3775$, откуда $S\leq 735$.
Пример. В первых пяти столбцах расставим числа от 1 до 50 по строкам, идя снизу вверх, т.е. в первой строке поставим числа $1,2,3,4,5$, во второй – $6,7,8,9,10$ и т.д. Аналогично расставим в последних пяти столбцах числа от 51 до 100. Тогда сумма чисел в шестом столбце будет равна $51+56+\cdots+96=735$.

4) Окружность, построенная на стороне KM остроугольного треугольника KLM как на диаметре, пересекает стороны треугольника KL и LM в точках P и Q соответственно. Касательные к этой окружности, проведенные в точках P и Q, пересекаются в точке R. Докажите, что прямая LR перпендикулярна KM.
Решение. Обозначим углы LKM и LMK соответственно через α и γ, и пусть O – середина KM. В треугольнике KOP стороны OK и OP равны как радиусы, поэтому $\angle KPO=\angle PKO=\alpha$, $\angle KOP=180^{\circ}-2\alpha$. Аналогично, $\angle MOQ=180^{\circ}-2\gamma$. Отсюда $\angle POQ=180^{\circ}-\angle KOP-\angle POQ=2\alpha+2\gamma-180^{\circ}$. В четырехугольнике $OPRQ$ углы P и Q – прямые, значит, $\angle PRQ=180^{\circ}-\angle POQ=360^{\circ}-2\alpha-2\gamma$. Заметим, что $\angle KLM=180^{\circ}-\angle LKM-\angle LMK=180^{\circ}-\alpha-\gamma$, так что $\angle PRQ=2\angle KLM=2\angle PLQ$. Кроме того, $RP=RQ$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки. Из равенства $RP=RQ$ и $\angle PRQ=2\angle PLQ$ следует, что R – центр описанной окружности треугольника PLQ. Значит, $RL=RP$, откуда $\angle PLR=\angle LPR=180^{\circ}-\angle OPR-\angle KPO=90^{\circ}-\alpha$. То есть, LR образует со стороной LK такой же угол, как высота, опущенная из L на KM. Значит, эта высота проходит через R.

5) Печенье макаруны трёх сортов (фисташковые, ванильные, карамельные) упаковывают в стандартные коробки по 20 изделий в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке фисташковых макарунов не менее 2 и не более 12, ванильных тоже не менее 2 и не более 12, а карамельных не менее 3 и не более 14?
Ответ. 90.
Решение. Пусть в наборе x фисташковых, y ванильных, z карамельных макарунов. Тогда нам нужно найти число целочисленных решений уравнения $x+y+z=20$ при дополнительных ограничениях $2\leq x\leq 12$, $2\leq y\leq 12$, $3\leq z\leq 14$. Вычтем по 2 из первых двух неизвестных, и 3 из последней. Это даст уравнение $a+b+c=13$, где a, b, c – целые неотрицательные числа, и ограничены сверху величинами 10, 10, 11. Если ограничений нет, то число решений равно $\bar{C}_3^{13}=C_{15}^2=105$. Отсюда надо вычесть количество лишних решений. Последнее означает $a\geq 11$, или $b\geq 11$, или $c\geq 12$. Эти условия попарно несовместимы. Если $a\geq 11$, то переходим к уравнению $(a-11)+b+c=2$. В целых неотрицательных числах и имеем 6 решений. Аналогично для $b\geq 11$. Для $c\geq 12$ получится $a+b+(c-12)=1$ и решений будет 3. Итого различных наборов $105-6-6-3=90$.

Вариант 2

1) Шесть членов жюри олимпиады проверяли работы. Все шестеро, исключая пятого, в состоянии проверить работы за 6 дней. Если бы они проверяли вчетвером без первого и третьего, то все работы были бы проверены за 10 дней. Поскольку второй, четвертый и шестой были заняты, работы были проверены оставшимися за 12 дней. Какой процент всех работ при этом был проверен первым и третьим членами жюри за 4 дня?

Ответ. 30%.

Решение. За день члены жюри вместе проверяют $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{40}$ общего количества всех работ. Значит, 1-й и 3-й преподаватели за день проверяют $\frac{7}{40}-\frac{1}{10}=\frac{3}{40}$, а за четыре дня они проверяют 0,3 всего числа работ.

2) Квадратные трёхчлены $f=ax^2+bx+c$ и $g=px^2+qx+r$ не имеют корней, а их сумма $f+g$ – трёхчлен, имеющий корни. Найдите знак произведения $c\cdot r$.

Ответ. $c\cdot r<0$.

Решение. Произведение свободных членов отрицательно. Из условия следует, во-первых, что знаки коэффициентов c и a совпадают, так как в противном случае дискриминант $D_f=b^2-4ac$ был бы неотрицателен. Аналогично, совпадают знаки коэффициентов q и r. Из условия следует, что при всех значениях переменной x функции f и g сохраняют знак. Поэтому если бы эти знаки совпадали, то и сумма $f+g$ сохраняла бы свой знак, а тогда трёхчлен $f+g$ не имел бы корней. Значит, числа a и p, а потому и числа c и r имеют разные знаки.

3) В клетках таблицы 7×7 расставлены числа -1, 0 и 1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы?

Ответ. 11.

Решение. *Оценка.* В квадрат 3×3 можно поместить уголок из пяти клеток. При этом остаётся четыре клетки, поэтому в каждом таком уголке сумма чисел не превосходит 4. Четыре таких уголка, примыкающие к углам таблицы, покрывают 20 из 24 крайних клеток, значит, сумма чисел во всех крайних клетках таблицы не больше $4\cdot 4+4=20$. Рассмотрим два уголка из 13 клеток, примыкающих к противоположным углам таблицы. Они покрывают две угловые клетки по два раза, а остальные крайние клетки – по одному, поэтому сумма чисел в них не превосходит 22. Следовательно, сумма чисел в одном из уголков не больше 11. Так как остальную часть таблицы можно разбить на квадраты 3×3, в каждом из которых сумма чисел равна 0, то сумма чисел во всей таблице не превосходит 11.

Пример см. на рисунке.

1	1	1	1	1	1	1
0	−1	−1	0	−1	−1	0
1	−1	−1	1	−1	−1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	−1	−1	0	−1	−1	0
1	−1	−1	1	−1	−1	1
1	1	1	1	1	1	1

4) В треугольнике KLM угол LKM тупой. На стороне LM как на диаметре построена окружность, которая пересекает продолжения сторон LK и MK в точках P и Q соответ-

ственно. Через точки P и Q проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке R. Докажите, что прямая LR перпендикулярна KM.
Решение. $\angle LQM$ – вписанный и опирается на диаметр LM, поэтому $LQ \perp KM$, отсюда следует, что прямая LR не может быть перпендикулярна KM.

5) Печенье макаруны трёх сортов (шоколадные, малиновые, апельсиновые) упаковывают в стандартные коробки по 20 изделий в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке шоколадных макарунов не менее 3 и не более 14, малиновых тоже не менее 3 и не более 14, а апельсиновых не менее 2 и не более 12?
Ответ. 86.
Решение. Задача решается аналогично задаче 5 варианта 1.

Вариант 3

1) В бассейн ведут две одинаковые трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась, и через неё вода стала поступать вдвое медленнее. Через какое время после этого бассейн заполнится?
Ответ. Через 40 минут.
Решение. Каждая труба за час заполняет треть бассейна. За первый час две трубы заполнили $\frac{2}{3}$ бассейна. После этого вторая труба стала заполнять бассейн со скоростью $\frac{1}{6}$ бассейна в час, следовательно, две трубы вместе – со скоростью $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ бассейна в час. Поэтому оставшуюся треть бассейна они заполнят за $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ часа.

2) Приведенный квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из p один из этих корней, а q увеличить в два раза, то полученный квадратный трёхчлен будет иметь корень.
Решение. Из теоремы Виета следует, что если t_1 и t_2 – корни данного уравнения, то $p=-t_1-t_2$, $q=t_1t_2$. Поэтому новое уравнение имеет вид
$$x^2-(2t_1+t_2)x+2t_1t_2=0.$$
Дискриминант этого уравнения равен
$$D=4t_1^2-4t_1t_2+t_2^2=(2t_1-t_2)^2\geq 0.$$
Значит, у этого уравнения есть корень.

3) Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей?
Ответ. 4 прямоугольника.
Решение. *Оценка.* Пусть прямоугольник разбит на n прямоугольников площади S, тогда $nS=1000$. Если имеется пять или более видов прямоугольников, то $n\geq 5$, а S раскладывается в произведение двух множителей не менее чем пятью способами. Таких пар всего две: $n=10$, $S=100$ и $n=5$, $S=200$. В первом случае 100 раскладывается на множители ровно пятью способами, все они по предположению реализуются. В частности, есть прямоугольники 1×100 и 10×10. Поэтому длина исходного прямоугольника не меньше 100, а ширина не меньше 10. Так как его площадь равна 1000, то размеры прямоугольника в точности 10×100. Но расположить в нём одновременно прямоугольники 1×100 и 10×10 не удастся.
Во втором случае 200 раскладывается в произведение двух множителей шестью способами: 1×200, 2×100, 4×50, 5×40, 8×25 и 10×20. Если присутствует прямоугольник

1×200, то длина исходного прямоугольника не меньше 200, а ширина не больше 5, что исключает наличие прямоугольников 8×25 и 10×20. Пусть прямоугольника 1×200 нет, тогда есть все остальные. Как и выше, одновременное наличие прямоугольников 2×100 и 10×20 однозначно определяет размеры 10×100 исходного прямоугольника. Но в нём невозможно одновременно расположить прямоугольники 2×100 и 10×20.
Пример. Рассмотрим прямоугольник 25×40. Выложим в нём внизу слой прямоугольников 5×8, затем слой прямоугольников 4×10, затем 2×20, затем прямоугольники 1×40 до самого верха.

4) Внутри трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) выбрана точка P так, что $\angle KPL = \angle MPN = 90^{\circ}$, $\angle LKP + \angle MNP = \angle LPM$. Докажите, что в трапецию $KLMN$ можно вписать окружность.
Решение. Обозначим $\alpha = \angle LKP$, $\beta = \angle MNP$. Тогда $\angle LPM = \alpha + \beta$. Пусть Q – середина KL, S – середина MN. Тогда $\angle QPK = \angle LKP$, $\angle NPS = \angle MNP$, $2QP = KL$, $2PS = MN$. Подсчитаем величину того из углов $\angle QPS$ (возможно, он невыпуклый), который содержит внутри себя угол $\angle LPM$:

$$\angle QPS = \angle QPL + \angle LPM + \angle MPS = (90^{\circ} - \alpha) + (\alpha + \beta) + (90^{\circ} - \beta) = 180^{\circ}.$$

Значит, точки Q, P, S лежат на одной прямой. Тогда

$$LM + KN = 2QS = 2QP + 2PS = KL + MN.$$

Это и значит, что трапеция описанная.

5) Вася хочет покрасить клетки прямоугольника 3×4 так, чтобы незакрашенной оставалась или первая строка, или последняя строка, или два средних столбца. Сколькими способами он может это сделать?
Ответ. 532 способа.
Решение. Пусть X – множество раскрасок, при которых не закрашен верхний ряд, Y, – при которых не закрашен нижний ряд и Z, – при которых не закрашены две вертикальный полоски. Поскольку остальные клетки можно независимо или закрасить или нет, то $|X| = |Y| = 2^8$, $|Z| = 2^4$. Аналогично, что $|X \cap Z| = 2^4$, $|X \cap Z| = 2^4$, $|Y \cap Z| = 2^4$, $|X \cap Y \cap Z| = 2^2$. По формуле включений и исключений получаем ответ:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$
$$= 2^8 + 2^8 + 2^6 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^2 = 532.$$

Вариант 4

1. Известно, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Докажите, что для любого нечётного натурального n существуют n различных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа.
Решение. Умножим обе части равенства $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ на 2^3, получим $6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$. Заменим 6^3 на $3^3 + 4^3 + 5^3$, тогда получим равенство $3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$. Последовательно проводя эту операцию, можно получить требуемое представление для любого нечётного натурального n.

2. На 8 шарах написано по числу: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколькими способами можно разложить шары в три коробки так, чтобы ни в одной коробке не было числа и его делителя?
Ответ. 432.
Решение. Числа 5 и 7 можно положить в любую коробку, число способов $3 \cdot 3 = 9$. Числа 2, 4, 8 должны быть в разных коробках, число способов $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Таким образом, числа 2, 4, 5, 7, 8 можно разместить 54 способами. Пусть числа 2 и 3 положены в одну коробку (эта коробка уже выбрана для числа 2). Тогда для числа 9 остается два выбора, и для числа 6 – 2 выбора, всего $54 \cdot 2 \cdot 2 = 216$ способов. Пусть числа 2 и 3 положены в разные коробки, число выборов коробки для 3 равно 2. Тогда коробка для числа 6 выбирается

единственным образом, а коробка для числа 9 – любая из двух, где нет числа 3, всего $54 \cdot 2 \cdot 2 = 216$ способов, итого $216 + 216 = 432$.

3. Трёхзначное число состоит из разных цифр. Между первой и второй цифрами, а также между второй и третьей цифрами, вписали по n нулей. Докажите, что существует больше одного исходного трёхзначного числа такого, что полученное $(2n+3)$-значное число является квадратом целого числа при любых натуральных n.

Ответ. 169 и 961.

Решение. Найдем два таких числа. Пусть исходное число $A = \overline{abc}$. Тогда $A = a \cdot 10^{2n+2} + b \cdot 10^{n+1} + c$. Это выражение является полным квадратом $\left(\sqrt{a} \cdot 10^{n+1} + \sqrt{c}\right)^2$ при условии, что $b = 2\sqrt{ac}$. Поскольку из чисел a и c должен нацело извлекаться корень, для этих цифр подходят значения $0, 1, 4, 9$. Если $a = 1$, $c = 4$, или $c = 1, a = 4,$ то $b = 4$, но цифры должны быть разными. Аналогично, если $c = 0$, то и $b = 0$. Если a и c принимают значения 4 и 9, то b больше 10 и не может быть цифрой. Если $a = 1, c = 9$, получаем число 169. При $a = 9, c = 1$, получаем число 961.

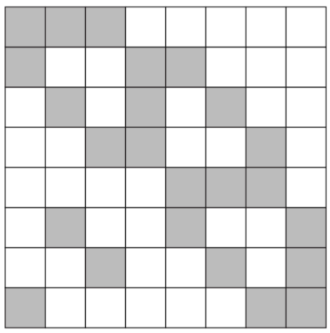
4. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника KLM с углом $\angle L = 30^\circ$. Луч LO пересекает отрезок KM в точке Q. Точка P – середина дуги OM описанной окружности треугольника QOM, не содержащей точку Q. Докажите, что точки K, L, P, Q лежат на одной окружности.

Решение. По отношению к описанной окружности треугольника KLM угол $\angle KLM$, равный 30°, является вписанным, следовательно, центральный угол $\angle KOM = 60^\circ$. Таким образом, треугольник KOM равносторонний. Тогда четырехугольник $KOPM$ составлен из равностороннего и равнобедренного треугольников, линия KP – его ось симметрии, следовательно, KP – биссектриса угла $\angle OKM$. Пусть $\angle OLK = \angle LKO = \alpha$. Тогда $\angle LKP = 30^\circ + \alpha$. Далее, $\angle QOK = 2\alpha$, $\angle OQM = 60^\circ + 2\alpha$ (в обоих случаях подсчитана величина внешнего угла треугольника). Наконец, $\angle LQP = \frac{1}{2}\angle OQM = 30^\circ + \alpha = \angle LKP$. Следовательно, точки K, L, P, Q лежат на одной окружности.

5. Какое наибольшее число клеток квадрата 8×8 можно закрасить так, чтобы центры любых четырёх закрашенных клеток не являлись вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны краям квадрата?

Ответ. 24 клетки.

Решение. Предположим, что отмечено не менее 25 клеток. Будем говорить, что пара отмеченных клеток одной строки покрывает пару столбцов, в которых эти клетки находятся. Запрещённая четвёрка возникает, когда пара столбцов покрыта дважды. Если в одной строке отмечено m клеток, а в другой $n > m + 1$ клеток, то при перекидывании одной отмеченной клетки из второй строки в первую число покрытых пар в первой увеличится на m, а во второй – уменьшится на $n - 1 > m$, т. е. суммарное количество пар уменьшится. Таким образом, минимум пар при данном числе отмеченных клеток достигается, когда максимальное количество клеток в строке отличается от минимального не более чем на 1. Разберём два случая.



1) Есть столбец, в котором отмечено не более двух клеток. Вычеркнем его, при этом останется семь столбцов, т. е. 21 пара. Одно из возможных распределений 23 клеток – семь строк с тремя клетками и одна строка с двумя клетками, что даёт $7 \cdot 3 + 1 = 22$ отмеченные пары. По принципу Дирихле найдётся дважды покрытая пара столбцов. Как показано выше, при другом распределении отмеченных пар будет больше.

2) В каждом столбце отмечено не менее трёх клеток. Так как $8 \cdot 3 < 25$, найдётся строка, в которой отмечено не менее четы-

рёх клеток. Пусть это первые четыре клетки нижней строки. Над ними в каждом из первых четырёх столбцов находится ещё по крайней мере по две клетки – всего не менее восьми. Они расположены в семи строках, следовательно, две из них находятся в одной строке. Вместе с соответствующими клетками нижней строки они образуют запрещённую четвёрку. Пример для 24 клеток см. на рисунке.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

Вариант 1

1. Борис раскладывает 8 белых и 8 чёрных шариков по двум коробкам. Настя наугад выбирает коробку, а потом не глядя берёт из неё шарик. Может ли Борис так разложить шарики по двум коробкам, чтобы вероятность вынуть белый шарик была больше $\frac{2}{3}$?

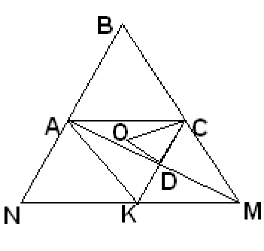
Ответ. Да.

Решение. Борис положит в первую коробку 1 белый шарик, а во вторую все остальные. Тогда вероятность вынуть белый шарик равна $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{15}=\frac{22}{30}>\frac{2}{3}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущены арифметические ошибки – 15 баллов. Рассмотрен частный случай, когда шарики раскладывают поровну – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. На продолжении за точку C стороны BC равностороннего треугольника ABC выбрана точка M, через неё проведена прямая, параллельная AC. Эта прямая пересекает продолжение стороны AB в точке N. Медианы треугольника BNM пересекаются в точке O. Точка D – середина AM. Найдите углы треугольника ODC.

Ответ.$30°, 60°, 90°$.



Решение. Возьмём на NM такую точку K, что $AK \,||\, CM$, тогда $ACMK$ – параллелограмм. Докажем, что треугольники KON и COMравны по двум сторонам и углу между ними. В треугольнике AKN угол N равен $60°, AK \,||\, BC$, то есть треугольник AKN равносторонний, отсюда $NK = NA = MC$. Точка O лежит на оси

рии правильного треугольника NBM, поэтому $NO = OM$. Медианы в правильном треугольнике являются биссектрисами, поэтому $\angle KNO = \angle CMO = 30°$.
Из равенства треугольников KON и COM следует, что $OK = OC$ и треугольник OKC равнобедренный. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, по условию точка D – середина AM, значит, OD – медиана равнобедренного треугольника OKC, то есть является и высотой. Таким образом, $\angle ODC = 90°$.Поскольку OD – биссектриса $\angle KOC$,$\angle DOC = 1/2\,\angle KOC$. Но $\angle KOC = \angle KOM + \angle MOC$. При этом $\angle MOC = \angle KON$, поэтому $\angle KOC = \angle KOM + \angle KON = \angle NOM = 120°$, так как это угол между медианами правильного треугольника. Тогда $\angle DOC = 1/2\,\angle KOC = 60°$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть вычислительные ошибки – 15 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, есть продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

3. На отрезке $[2; 5]$ выбрали три разные точки, для каждой точки перемножили расстояния до двух других точек, получили положительные числа a, b, c. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{8}{9}$.
Решение. Переместим отрезок в точку 0, то есть будем рассматривать отрезок $[0; 3]$. Обозначим взятые точки $0 \leq x < y < z \leq 3$. Тогда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{(y-x)(z-x)} + \frac{1}{(y-x)(z-y)} + \frac{1}{(z-y)(z-x)} \geq \frac{1}{y\cdot 3} + \frac{1}{y(3-y)} + \frac{1}{(3-y)\cdot 3}$ (мы использовали неравенства $-x \leq 0, z \leq 3$). При замене $-x$ на 0, а z на 3 все знаменатели увеличились, а обратные им величины уменьшились. $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{3}{y(3-y)} + \frac{1}{(3-y)}\right) = \frac{3-y+3+y}{3y(3-y)} = \frac{2}{y(3-y)}$.Неравенство $\frac{2}{y(3-y)} \geq \frac{8}{9}$равносильно неравенству $(2y-3)^2 \geq 0$, поэтому исходное неравенство верно.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство проведено только частично – 10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

4. Найдите все натуральные числа a, для которых число
$$\frac{a + 1 + \sqrt{a^5 + 2a^2 + 1}}{a^2 + 1}$$
также является натуральным.
Ответ.$a = 1$.
Решение. Обозначим $a + 1 = b, \sqrt{a^5 + 2a^2 + 1} = c$. Запишем многочлен $c^2 - b^2 = a^5 + 2a^2 + 1 - (a + 1)^2 = a^5 + a^2 - 2a$, и поделим его на $a^2 + 1$ «уголком», получим остаток, равный $-(a + 1)$. При $a > 1$ модуль остатка меньше $a^2 + 1$, поэтому остаток не может делиться на $a^2 + 1$ ни при каком $a > 1$. Но если $c^2 - b^2$ не делится на знаменатель $a^2 + 1$, то и $b + c$ не делится. Уравнению удовлетворяет единственное значение $a = 1$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Найдено значение $a = 1$, но не доказано, что других ответов нет – 1 балл. Доказательство начато – ещё 1 балл. Доказательство начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Доказательство проведено только частично – 10 баллов.*

5. Найдите целую часть числа
$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{623} + \sqrt{624}}.$$
Ответ.12.
Решение. Обозначим $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}$. Возьмём число $B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}}$. Число слагаемых одинаково, каждое слагаемое в A больше соот-

ветствующего слагаемого в B, поэтому $A > B$. Избавимся от иррациональности в знаменателях: $A = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{624} - \sqrt{623}$, $B = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{625} - \sqrt{624}$. Очевидно, $A + B = \sqrt{625} - \sqrt{1} = 24$. Оценим $A - B$.

$$A - B = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{\sqrt{622}+\sqrt{623}} - \frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}\right) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{624}+\sqrt{625}} < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} < 1.$$

Подставим $B = 24 - A$: $A - 24 + A < 1$, отсюда $A < 12{,}5$. Но $A > B$, значит, $A > 12$. Следовательно, целая часть числа A равна 12.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Доказательство начато, есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 1 балл.*

Вариант 2

1. Для отбора на соревнования борец Владимир должен был провести три схватки и одержать подряд хотя бы две победы. Его соперниками были Андрей (А) и Борис (Б). Владимир мог выбрать схему встреч: АБА или БАБ. Вероятность Владимира потерпеть поражение в одной схватке от Бориса равна 0,3, а от Андрея 0,4; вероятности постоянны. При какой схеме вероятность отобраться на соревнования больше, и чему равна эта вероятность?

Ответ. АБА; $p = 0{,}588$.

Решение. Пусть Владимир два раза встречается с более слабым соперником, то есть рассмотрим схему БАБ. Тогда $p_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}546$.Пусть Владимир выбирает схему АБА. Тогда $p_2 = 0{,}6 \cdot 07 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}588$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении одна арифметическая ошибка – 18 баллов. При верной схеме допущены вычислительные ошибки – 15 баллов. Не учитывалось, что выигрыши должны быть подряд – 10 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Найдите для всех натуральных $n > 1$ положительные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 3, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} + \cdots + \dfrac{1}{nx_n} = 3. \end{cases}$$

Ответ. При $n = 3$: $x_1 = 1, x_2 = {}^1/_2, x_3 = {}^1/_3$; при $n = 2$: $x_1 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3\mp\sqrt{5}}{4}$. При гих$n$ решений не существует.

Решение. Обозначим $y_k = kx_k$ и сложим уравнения системы:

$$\left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right) + \left(y_2 + \frac{1}{y_2}\right) + \cdots + \left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = 6.$$

Для положительных чисел справедливо неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$(так как $a^2 + 1 - 2a \geq 0$). Поэтому левая часть не меньше $2n$, отсюда $n \leq 3$. При $n = 3$ каждое из слагаемых равно 2, отсюда $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, и $x_1 = 1, x_2 = {}^1/_2, x_3 = {}^1/_3$. При $n = 2$ получается система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} = 3. \end{cases}$$

$$2x_2 = 3 - x_1, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{3-x_1} = 3, x_1 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3\mp\sqrt{5}}{4}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов, баллы раскладываются так: за решения при каждом найденном значении* n *– 7 баллов, за доказательство, что при* $n > 3$ *решений нет – 6 баллов. В верном решении одна вычислительная ошибка – 19 баллов. При* $n = 2$ *потеряна одна пара корней – снимается 1 балл. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. Докажите, что $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим $S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$. Рассмотрим сумму A семи косинусов:

$$A = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{7\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{7} + \cos\frac{11\pi}{7} + \cos\frac{13\pi}{7}.$$

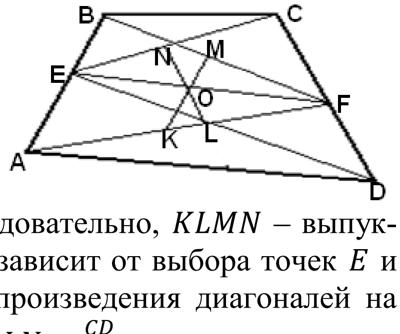
Посколькуcos $\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, $A = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) - 1$. Докажем, что $A = 0$. Проведём из начала координат семь единичных векторов под углами $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \dots, \frac{13\pi}{7}$, и рассмотрим их сумму, это некоторый вектор. При повороте на угол $\frac{2\pi}{7}$ система векторов перейдёт в себя, то есть вектор, равный сумме векторов, не изменится. Но он равен исходному вектору, повёрнутому на угол $\frac{2\pi}{7}$. Следовательно, исходный вектор – нулевой. Каждый $\cos\frac{k\pi}{7}$ равен проекции соответствующего вектора на ось абсцисс, A равно сумме проекций, или, что то же, проекции суммы – нулевого вектора. Таким образом, $A = 0,$ и из уравнения $A = 2S - 1$ получаем, что $S = \frac{1}{2}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Коля и Влад начертили одинаковые выпуклые четырёхугольники $ABCD$. На стороне AB каждый из них выбрал точку E, на стороне CD каждый выбрал точку F. Коля выбрал точки на серединах сторон, а Влад – на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны AB от A и на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины стороны CD от C. Потом каждый из них отметил середины ков AF, DE, BF, CE, получил соответственно точки K, L, M, N, и соединил их в указанном порядке. У каждого получился четырехугольник $KLMN$. Коля считает, что площадь его четырёхугольника больше. Прав ли он?

Ответ. Нет. Площади равны.

Решение. Докажем сначала, что если $KLMN$ – четырёхугольник (а не отрезок или треугольник), то он выпуклый.Поскольку MK – средняя линия треугольника AFB, то отрезок MK пересекает отрезок EF в его середине O. Аналогично, LN – средняя линия треугольника CED, и отрезок LN пересекает отрезок EF в его середине O. Поэтому отрезки LN и KM пересекаются в их внутренней точке О. Следовательно, $KLMN$ – выпуклый четырёхугольник. Докажем теперь, что его площадь не зависит от выбора точек E и F. Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Но диагональ $MK = \frac{AB}{2}$, диагональ $LN = \frac{CD}{2}$, и диагонали параллельны прямымAB и CD, поэтому угол между ними равен углу между прямыми AB и CD. Значит, площадь четырёхугольника не зависит от выбора точек E и F, площади обоих четырехугольников, построенных мальчиками, равны.



Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Не доказано, что четырёхугольник выпуклый – 15 баллов. Есть продвижение – 10 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

5. Трое бельчат на завтрак обычно едят кашу: манную (М), пшённую (П), овсяную (О), гречневую (Г). Ни одна каша не нравится всем троим бельчатам, но для каждой пары бельчат есть хотя бы одна каша, которая нравится им обоим. Сколько можно составить разных таблиц, в которых в каждой клетке стоит плюс (если нравится) или минус (если не нравится)?

	М	П	О	Г
Бельчонок 1				
Бельчонок 2				
Бельчонок 3				

Ответ.132.

Решение. Если двум разным парам нравится одна каша, то каша нравится троим бельчатам, и нарушается первое условие. Из трёх бельчат можно составить три разные пары, этим трём парам нравятся разные каши. Есть 4 способа выбрать эти 3 каши, и $3! = 6$ способов распределить 3 каши между тремя парами. Всего получается 24 варианта распределения каш, которые нравятся парам. С четвёртой кашей могут быть такие варианты: 1) не нравится никому, 2) нравится только одному бельчонку, 3) нравится только одной паре.
В случае 1) общее число вариантов осталось равным 24. В случае 2) число 24 умножается на число выборов бельчонка, которому нравится четвёртая каша, то есть на 3, получаем 72. В случае 3) ситуация такая: есть пара, которой нравится две каши, и две пары, которым нравится две другие каши. Две первые каши можно выбрать числом способов $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$. Пару, которой нравится две первые каши, можно выбрать тремя способами (так как выбираем одну из трёх). Две оставшиеся каши можно распределить между двумя оставшимися парами двумя способами. Всего вариантов в этом случае $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$.
Итак, всего разных таблиц может быть $24 + 72 + 36 = 132$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть вычислительные ошибки – 15 баллов. Рассмотрен частный случай – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Сугроб высотой 468 см за первый час уменьшился на 6 см по высоте, за второй час – на 12 см по высоте, ..., за -й час – на $6k$ см по высоте. За некоторое время T сугроб растаял полностью. Какая часть сугроба по высоте растаяла за время $\frac{T}{2}$?

Ответ.$\frac{7}{26}$.

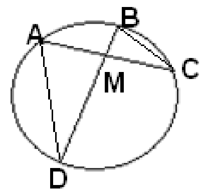
Решение. Из уравнения $6 + 12 + \cdots + 6n = 468$ находим $6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 468$ или $n^2 + n - 156 = 0$. Отсюда $n = 12$, то есть сугроб растаял за 12 часов. За 6 часов он растаял на $6 \cdot \frac{6\cdot 7}{2} = 126$ см по высоте, что составляет $\frac{126}{468} = \frac{7}{26}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Найдена высота* 126 *см, но ответ не получен или неверно вычислен – 18 баллов. Найдено только $T = 12$ – 10 баллов. При верном ходе решения ошибка в формуле – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. На границе круглой поляны по часовой стрелке отмечены точки A, B, C, D. В точке A находится бельчонок Ан, в точке B – бельчонок Бим, в точке C стоит сосна, в точке D – дуб. Бельчата одновременно начали бежать, Ан к сосне, Бим к дубу. Они столкнулись в точке M, которая находится ближе к сосне, чем к дубу. Верно ли, что если бы Ан побежал из точки A к дубу, а Бим из точки B к сосне, Ан прибежал бы первым? Каждый бельчонок бежит по прямой и со своей постоянной скоростью.

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим скорость Ана – v, скорость Бима – u. До точки M бельчата добрались за одинаковое время, значит, $\frac{AM}{v} = \frac{BM}{u}$. Треугольники DAM и CBM подобны (по трём углам).



Поэтому $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BM}$. Но $\frac{AM}{BM} = \frac{v}{u}$, то есть $\frac{AD}{BC} = \frac{v}{u}$, отсюда $\frac{AD}{v} = \frac{BC}{u}$. Значит, бельчата прибегут одновременно.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верное решение не доведено до ответа – 15 баллов. В решении есть неточности – 15 баллов. Решение на основе примера – 10 баллов. Есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3.Каким числом способов можно разложить 30 яблок в 3 корзинки так, чтобы в первой корзинке лежало меньше яблок, чем во второй, во второй меньше, чем в третьей, и пустых корзинок не было?

Ответ.61.

Решение. Рассмотрим уравнение $a + b + c = 30$.Расставим 30 единиц в ряд, выберем два промежутка между единицами, и поставим в них по чёрточке. Число единиц слева от первой чёрточки равно a (число яблок в первой корзине), справа от второй – равно c (число яблок в третьей корзине). Число способов выбрать два промежутка равно $\frac{29 \cdot 28}{2} = 406$. Надо вычесть из этого числа количество случаев, когда среди чисел a, b, c есть равные. Пусть $a = b$. Тогда $2a + c = 30$, это уравнение имеет 14ненулевых решений (c чётное и может изменяться от 2 до 28). Аналогично, будет по 14 случаев, когда $a = c$ или $b = c$. Итак, $406 - 3 \cdot 14 = 364$.Случай $a = b = c$ посчитан один раз в общем числе способов и три раза вычтен, а надо его исключить всего один раз, поэтому требуется прибавить 2. Число $364 + 2 = 366$ равно числу упорядоченных троек различных a, b, c. Но нужен порядок $a < b < c$, поэтому разделим на число перестановок трёх элементов: $\frac{366}{6} = 61$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верное решение не доведено до верного ответа – 15 баллов. В решении есть значительное продвижение – 10 баллов. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

4. В выпуклом семиугольнике $ABCDEFG$ рассматриваются семь четырёхугольников, вершинами которых являются четыре последовательные по часовой стрелке вершины семиугольника. Могут ли четыре из семи четырёхугольников быть описанными?

Ответ. Нет.

Решение.У двух четырёхугольников, соседних по часовой стрелке, есть две общие стороны. Пусть это четырёхугольники $ABCD$ и $BCDE$. Предположим, они оба описанные. Тогда $AB + CD = BC + AD, CD + BE = BC + DE$. Вычитая, получаем: $AB - BE = AD - DE$или $AD + +BE = AB + DE$. Поскольку семиугольник выпуклый, диагонали AD и BEпересекаются во внутренней точке семиугольника; обозначим её O. Тогда $AD = AO + OD$, $BE = BO + OE$. Подставим в полученное ранее равенство:

$$AD + BE = AO + OD + BO + OE = (AO + BO) + (OE + OD) = AB + DE.$$

Но по неравенству треугольника $AO + BO > AB, OE + OD > DE$; противоречие. Таким образом, из двух четырёхугольников, соседних по часовой стрелке, не больше одного может быть описанным. Занумеруем четырёхугольники по кругу от 1 до 7. Очевидно, что

из них нельзя выбрать четыре номера, среди которых нет соседних (если мы выбираем $1, 3, 5$, то номер 7 соседний с 1). Если есть три описанных, то любой, взятый четвёртым, является соседним к какому-нибудь из них, и по доказанному не может быть описанным.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Нет строгого доказательства, что обязательно будут соседние четырехугольники – 18 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Найдите все пары$(x;\ y)$натуральных чисел, для которых оба числа $x^2\ +\ 8y;\ y^2 -\ 8x$ являются точными квадратами.
Ответ.$(x;\ y) = (n;\ n\ +\ 2)$, где n – натуральное число, а также $(7;\ 15)$, $(33;\ 17)$, $(45;\ 23)$.
Решение. Легко проверить, что пары вида $(n;\ n + 2)$, где n – натуральное число, удовлетворяют условию задачи. Пусть$(x;\ y)$ – любая другая пара, удовлетворяющая условию задачи. Рассмотрим два случая.
а) Пусть сначала $y\ <\ x\ +\ 2$. Тогда $x^2 < x^2\ +\ 8y\ < x^2\ +\ 8(x\ +\ 2) =\ (x\ +\ 4)^2$, откуда $x^2 + 8y\ =\ (x + k)^2$, где $k\ \in \{1;\ 2;\ 3\}$. Очевидно, возможен лишь случай $k\ =\ 2$ (по чётности), и тогда $x\ =\ 2y - 1$. Осталось выяснить, при каких натуральных y число $y^2 -$ ло $y^2 -\ 8x = y^2 -\ 16y +\ 8$ будет точным квадратом. Пусть $y^2 -\ 16y +\ 8\ \ = a^2$, гда $y = \frac{16\pm\sqrt{256-4(8-a^2)}}{2} = 8 \pm \sqrt{56 + a^2}$. Число под корнем должно быть точным квадратом: $56 + a^2 = c^2,\ c^2 - a^2 = 56$. Разложим 56 на множители и рассмотрим системы. Учитывая, что $c - a$ и $c + a$ имеют одинаковую чётность, отбросим лишние, останутся системы $\begin{cases} c - a = 4 \\ c + a = 14 \end{cases}, \begin{cases} c - a = 2 \\ c + a = 28 \end{cases}$, откуда $c = 9, a = 5$ или $c = 15, a = 13$. При $a = 5$ значение $y = 8 \pm \sqrt{56 + 25}\ = 8 + 9 = 17$. При $a = 13$ значение $y = 8 \pm \sqrt{56 + a^2}\ = 8 + 15 = 23$. Поскольку $x\ =\ 2y - 1$, получаем пары $(45;\ 23)$ и $(33;\ 17)$.
б) Пусть теперь $y\ >\ x\ +\ 2$, т. е. $x\ <\ y - 2$. Здесь $y\ >\ 4$, и мы имеем $(y -\ 4)^2\ =\ y^2 - 8(y - 2) < y^2 - 8x\ < y^2$. Значит, $y^2 -\ 8x = (y - k)^2$, где $k\ \in \{1;\ 2;\ 3\}$. Опять возможен только случай $k\ =\ 2$ (по чётности), так что $y\ =\ 2x\ +\ 1$. Пусть $x^2\ +\ 16x\ +\ 8 = b^2$, тогда $x = \frac{-16\pm\sqrt{256-4(8-b^2)}}{2} = -8 \pm \sqrt{56 + b^2}$. Выше показано, что число под корнем является точным квадратом только при $b = 5$ или $b = 13$. Тогда $x\ =\ 1$ или $x\ =\ 7$. Получаем пары $(1;\ 3)$ и $(7;\ 15)$, первая из которых входит в множество $\{(n;\ n + 2)\}$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Найдены пары* $(n;\ n\ +\ 2)$, в *исследовании других случаев есть некоторое продвижение – 10 баллов. При любом числе найденных ответов, если не доказано, что нет других решений, то не больше 10 баллов. Найдены только пары* $(n;\ n\ +\ 2)$ *– 5 баллов. Найдены только пары* $(n;\ n\ +\ 2)$ *для чётного или для нечётного* n *– 2 балла. Найдены только отдельные решения, удовлетворяющие условию* $y = x + 2$, *– 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Какова вероятность, что в случайной последовательности из 8 единиц и двух нулей между двумя нулями ровно три единицы?
Ответ.$\frac{2}{15}$.
Решение. Занумеруем позиции в последовательности с первой по десятую. Если один из нулей оказывается на позиции 1 – 4 или 7 – 10, то у него может быть всего один ноль, отстоящий на три цифры. Если один из нулей оказывается на позиции 5 или 6, то у него два таких нуля. Число всех исходов равно $10 \cdot 9 = 90$. Число благоприятных исходов равно $8 + 2 \cdot 2 = 12$. Вероятность равна $\frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении допущены арифметические ошибки – 15 баллов. Неправильный метод подсчёта числителя или знаменателя – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Только верный ответ без решения – 0 баллов.*

2. Каждый из 8 бельчат бросил шишку в какого-нибудь другого бельчонка, независимо от других. Докажите, что всегда найдётся группа из трёх бельчат, которые не бросили шишку в бельчонка из этой группы.

Решение. По принципу Дирихле найдется бельчонок А, в которого бросили не больше 1 шишки (иначе должны были кидать 16 шишек, а их всего 8). Запишем бельчонка А в отдельную группу. Вычеркнем из списка бельчонка, в которогоА кидал шишку, и того, кто кинул шишку в А (если такой есть). Осталось 6 или 7 бельчат. По принципу Дирихле среди оставшихся опять найдется бельчонок Б, в которого бросили не больше 1 шишки. Добавим бельчонка Б в группу к А. Вычеркнем бельчонка, в которого Б кидал шишку, и того, кто кинул шишку в Б (если такой есть). Осталось не меньше 4 бельчат. Все они не кидали шишки в А и Б, и А и Б не кидали шишки в них. Поэтому можно добавить в группу к А и Б любого бельчонка В из этих троих.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть небольшие пробелы в обосновании – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Рассмотрены не все случаи – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. Разрешимо ли уравнение $y^2 + y = x^3 - x$ во взаимно простых натуральных числах?

Ответ. Нет.

Решение. Перепишем уравнение в виде $y(y + 1) = x(x^2 - 1)$.По условию НОД$(x; y) = 1$, поэтому отсюда следует, что $y + 1 = kx$ для некоторого натурального числа k. Тогда $x^2 - 1 = ky$. Исключив y, получим $x^2 - k^2x + k - 1 = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = k^4 - 4k + 4$ должен быть точным квадратом. Однако $(k^2 - 1)^2 < D < (k^2)^2$при $k > 1$. Значит, $k = 1$ и $x = 1$. Но тогда $y(y + 1) = 0$ противоречие.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Записан дискриминант – 15 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Получено соотношение $x^2 - k^2x + k - 1 = 0$ – 10 баллов. Получено соотношение $y + 1 = kx$ – 5 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Точки P и Q – середины дуг KL и LM, описанной окружности треугольника KLM, LS – биссектриса этого треугольника. Оказалось, что $\angle KLM = 2\angle KML$ и $\angle PSQ = 90^\circ$. Найдите углы треугольника KLM.

Ответ.$\angle L = 90^\circ$, $\angle K = \angle M = 45^\circ$.

Решение. По условию $\angle M = \frac{\angle L}{2} = \angle SLM$, т.е. треугольник LSM равнобедренный: $LS = MS$. Кроме этого, $LQ = QM$, так что треугольники LSQ и MSQ равны по трем сторонам, и SQ – биссектриса угла LSM. По условию, прямая SP перпендикулярна этой биссектрисе, поэтому SP – биссектриса угла LSK. Теперь рассмотрим треугольники PKS и PLS. У них есть общая сторона SP, равны стороны $KP = LP$, а также равны углы KSP и LPS. К сожалению, эти углы находятся не между равными сторонами, поэтому первый признак равенства неприменим. Однако это означает, что углы PKS и PLS либо равны, либо дополняют друг друга до 180°. Объясним это с помощью теоремы синусов в треугольниках PKS и PLS:

$$\sin\angle PKS = PS \cdot \frac{\sin\angle PKS}{KP} = PS \cdot \frac{\sin\angle LSP}{LP} = \sin\angle PLS.$$

Во втором случае четырехугольник $KPLS$ оказался бы вписанным, чего не может быть: точка S не лежит на окружности, проходящей через K, L, P. Следовательно, треугольники PKS и PLS все же равны и $KS = MS$.

Итак, $KS = LS = MS$, иными словами, медиана треугольника KLM равна половине стороны KM. Значит, треугольник прямоугольный. А поскольку медианаLS совпадает с биссектрисой, он еще и равнобедренный.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. Доказаны некоторые полезные соотношения – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}.$$

Решение. Представим каждое слагаемое $\frac{k}{n^2+k}$ в левой части неравенства в виде разности $\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{n^2(n^2+k)}$ и сложим почленно полученные равенства:

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\left(\frac{1}{n^2(n^2+1)}+\frac{4}{n^2(n^2+2)}+\cdots+\frac{n^2}{n^2(n^2+n)}\right).$$

Теперь заменим знаменатели у всех слагаемых в скобке на $n^2(n^2+n)$, от этого сумма только вырастет и станет равной

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1+4+\cdots+n^2}{n^2(n^2+n)}=\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3(n+1)}=\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{(2n+1)}{6n^2}$$
$$=\frac{3n^2+n-1}{6n^2}=\frac{1}{2}+\frac{n-1}{6n^2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}.$$

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Получена близкая оценка суммы – 10 баллов. Есть пробелы в обосновании – 15 баллов. В решении есть некоторое продвижение – 5 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 1 балл. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*