

## ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

### 5 КЛАСС

Общее количество баллов **100**. Решение каждой задачи оценивается **Жюри** из **20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

#### Вариант 1

1. Бельчонок хочет поместить в каждую клетку квадрата  $5 \times 5$  либо один гриб (Г), либо один орех (О) так, чтобы в любом квадрате  $3 \times 3$  оказалось ровно 8 грибов. Помогите ему это сделать.

**Ответ.** См. рисунок. (Существует много других способов разложения.)

Г	Г	Г	Г	Г
Г	Г	Г	Г	Г
Г	Г	О	Г	Г
Г	Г	Г	Г	Г
Г	Г	Г	Г	Г

**Комментарий.** Верный ответ без объяснений – 20 баллов.

2. На доске записаны все числа от 1 до 300 включительно. Вера раскрашивает в оранжевый цвет только те числа, у которых общий делитель с числом 99 больше 1. Сколько всего чисел станут оранжевыми?

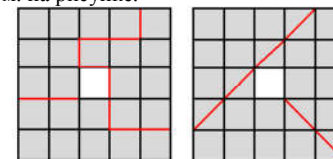
**Ответ.** 118.

**Решение.** Вера красит оранжевым числа, кратные 3 или 11. Среди чисел от 1 до 300 кратно 3 каждое третье, их 100; кратно 11 каждое одиннадцатое, их 27. Числа, кратные 33, мы посчитали дважды, их 9. Вера закрасила:  $100 + 27 - 9 = 118$  чисел.

**Комментарий.** Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Верный ответ без объяснений – 4 балла.

3. Торт имеет форму квадрата  $5 \times 5$ , изображенного на рисунке, с вырезанным в центре квадратиком  $1 \times 1$ . Покажите, как разделить торт на три куса, имеющие равные периметры и равные площади, двумя разными способами.

**Ответ.** Примеры см. на рисунке.



**Комментарий.** Верный ответ без объяснений – 20 баллов.

4. На день рождения бельчонок Вася получил мешок с орехами и начал есть их вместе с друзьями Димой, Гошей и Лёшей. Дима съел меньше всех орехов, а Гоша – больше всех. Лёша съел чётное число орехов, в 3 раза больше, чем Дима и в 2 раза меньше, чем Гоша. Все остальные орехи съел Вася. Могло ли в мешке быть 65 орехов?

**Ответ.** Не могло.

**Решение.** Пусть Дима съел какую-то часть орехов, тогда Лёша съел в 3 раза больше, чем Дима. То есть три таких части. Так как по условию Лёша съел чётное число конфет, то будем считать, что он съел  $6x$ , тогда Дима –  $2x$ , а Гоша –  $12x$ . Тогда все вместе они съели  $20x$  орехов. А Вася съел все остальное, то есть  $65 - 20x$ . При этом Вася должен был съесть меньше Гоши и больше Димы. То есть меньше  $20x$  и больше  $2x$ , откуда имеем  $2x < 65 - 20x < 12x$ .

Дима ( $2x$ )	Вася ( $65 - 20x$ )	Гоша ( $12x$ )
2	45	12
4	25	24
6	5	36

Остальные случаи невозможны. Но и эти случаи не подходят, поскольку в первых двух Вася съел больше Гоши, а в последнем – меньше Димы.

**Комментарий.** Полное правильное решение – 20 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 4 балла.

5. В лесу живут бельчата-рыцари и бельчата-лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды 20 бельчат, среди которых 10 рыцарей и 10 лжецов, встали в ряд на поляне. Всем бельчатам задали два вопроса: «Сколько лжецов слева от тебя?» и «Сколько лжецов справа от тебя?». Каждый бельчонок назвал два числа. Какое наибольшее число раз среди 40 ответов могло встретиться одно и то же число, и что это за число?

**Ответ.** 38 чисел 5.

**Решение.** Оценка. Пусть все бельчата-рыцари сказали какое-то одинаковое число – это 20 совпадений. Если предположить, что все бельчата-лжецы сказали какое-то одно и то же число (как бельчата-рыцари – от 0 до 10), то для одного бельчонка-лжеца ответ справа и для одного бельчонка-лжеца ответ слева окажутся правдой, значит, хотя бы 2 ответа из 40 не могут совпадать с остальными. Пример. Десять бельчат-рыцарей в центре, по пять бельчат-лжецов по краям.

**Комментарий.** Предложена реализация – 8 баллов, сделана оценка – 12 баллов, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-6 балла. Правильный ответ без обоснования – 2 балла.

## Вариант 2

1. Бельчонок раскладывает в клетки квадрата  $5 \times 5$  восемь орехов (О) и семнадцать грибов (Г) так, чтобы рядом с каждым орехом (т.е. в клетках, соседних по стороне) было ровно 2 гриба. Покажите, как это можно сделать.

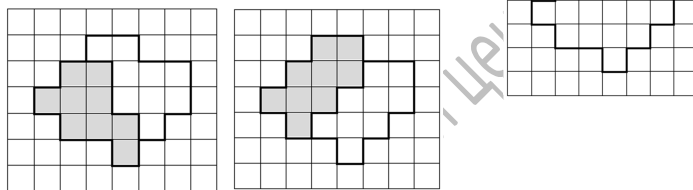
**Ответ.** См. рисунок.

Г	Г	Г	Г	Г
Г	О	О	О	Г
Г	О	Г	О	Г
Г	О	О	О	Г
Г	О	О	О	Г

**Комментарий.** Верный ответ без объяснений – 20 баллов.

2. Торт имеет форму, изображенную на рисунке. Покажите, как разделить торт на два равных куска двумя разными способами.

**Ответ.** Примеры см. на рисунке.



**Комментарий.** Верный ответ без объяснений – 20 баллов.

3. Вася и Петя хотят найти на берегу реки одинаковое количество плоских камушков. После того, как Вася принес 120 камушков, а Петя – 147 камушков, Васе осталось найти камушков в четыре раза больше, чем Пете. Сколько всего камушков должен был найти каждый из них?

**Ответ.** 156 камушков.

**Решение.** К настоящему моменту Петя принес на  $147 - 120 = 27$  камушков больше, чем Вася. Так как мальчики должны были найти одинаковое число камушков, то теперь Вася должен найти на 27 камушков больше, чем Петя. Пусть Пете осталось найти  $x$  камушков, тогда Васе –  $4x$  камушков,  $4x - x = 3x$ , то есть,  $x = 9$ . Значит, Пете осталось собрать 9 камушков и всего он должен собрать  $147 + 9 = 156$  камушков.

**Комментарий.** Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Верный ответ найден подбором, при этом не показано, что не может быть других решений – 12 баллов. Верный ответ без объяснений – 4 балла.

4. Карина, Люда, Марина и Света – ученицы 3, 4, 5, 6 классов. На вопрос, кто кого старше, девочки сказали:

Карина: «Света младше Марины».

Люда: «Карина младше Светы».

Марина: «Света старше Люды».

Света: «Карина старше Марины».

Известно, что если какая-то девочка высказалась про девочку старше её самой, то она соврала. Все остальные утверждения были верными. Определите, кто из девочек в каком классе учится.

**Ответ.** Карина – в 4 классе, Люда – в 6, Марина – в 3, Света – в 5.

**Решение.** Рассмотрим утверждение Карины. Пусть она сказала правду. Тогда Марина старше Светы и Карина старше и Светы, и Марины (иначе ее утверждение было бы

ложным). Тогда утверждение Светы должно быть ложным, так как она говорит про Марину, которая старше. Значит, Марина старше Карины. Но мы уже выяснили, что Карина старше Марины. Значит, такого не может быть и Карина лжет. Это значит, что Марина младше Светы и Карина либо младше и Марины, и Светы, либо старше Марины, но младше Светы. В любом случае Света старше и Марины, и Карины. Значит, она говорит правду, а Марина лжет. Отсюда  $M < K < S < L$ . Проверяем этот вариант. Он подходит.

**Комментарий.** Полное правильное решение – 20 баллов. Верно рассмотрен один из существенных случаев – 12 баллов. Только верный ответ – 4 балла.

5. В лесу живут бельчата-правдивцы и бельчата-лжецы, правдивцы всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды на поляне собрались 2043 бельчат и встали в круг. Каждого из них попросили назвать своего правого соседа, и каждый ответил либо «правдивец», либо «лжец». Могло ли оказаться, что ответов «правдивец» было ровно 2022?

**Ответ.** Не могло.

**Решение.** Рассмотрим пару рядом стоящих и будем считать только то, что сказал левый сосед. Тогда в этой паре левый бельчонок мог сказать «правдивец» в случае только, если пара ПП или ЛЛ. Аналогично левый мог сказать «лжец» только в случаях ЛП и ПЛ. Таким образом, количество ответов «лжец» равно количеству смешанных пар. Множество всех бельчат в круге разбивается на области одного типа П...П и Л...Л. И смешанные пары могут быть только на границе этих областей. Следовательно, количество смешанных пар в точности равно количеству областей. Но количество областей не может быть нечетным, поскольку области правдивцев и лжецов чередуются. Поэтому сказать «лжец» могли только четное число бельчат. Если всего опросили 2043 бельчат, а «правдивец» сказали 2022, значит, «лжец» сказали 21. Но это нечетное число, а, как было доказано выше, такого быть не может.

**Комментарий.** Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 4 балла.

## Вариант 3

1. Бельчонок раскладывает в клетки прямоугольника  $5 \times 6$  десять орехов (О) и двадцать грибов (Г) так, чтобы рядом с каждым орехом (т.е. в клетках, соседних по стороне) было ровно 2 гриба. Покажите, как это можно сделать.

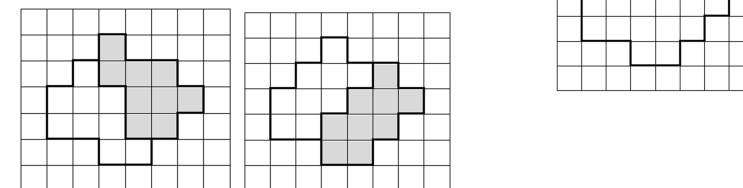
**Решение.** См. рисунок.

Г	Г	Г	Г	Г	Г
Г	О	О	О	О	Г
Г	О	Г	О	О	Г
Г	О	О	О	О	Г
Г	Г	Г	Г	Г	Г

**Комментарий.** Верный ответ без объяснений – 20 баллов.

2. Торт имеет форму, изображенную на рисунке. Покажите, как разделить торт на два равных куска двумя разными способами.

**Ответ.** Примеры см. на рисунке.



**Комментарий.** Верный ответ без объяснений – 20 баллов.

3. Вася и Петя хотят найти на берегу реки одинаковое количество плоских камушков. После того, как Вася принес 130 камушков, а Петя – 163 камушка, Васе осталось найти камушков в четыре раза больше, чем Пете. Сколько всего камушков должен был найти каждый из них?

**Ответ.** 156 камушков.

**Решение.** К настоящему моменту Петя принес на  $163 - 130 = 33$  камушка больше, чем Вася. Так как мальчики должны были найти одинаковое число камушков, то теперь Вася должен найти на 33 камушка больше, чем Петя. Пусть Пете осталось найти  $x$  камушков, тогда Васе –  $4x$  камушков,  $4x - x = 3x$ , то есть,  $x = 11$ . Значит, Пете осталось собрать 11 камушков и всего он должен собрать  $163 + 11 = 174$  камушка.

**Комментарий.** Приведено полное обоснованное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Верный ответ найден подбором, при этом не показано, что не может быть других решений – 12 баллов. Верный ответ без объяснений – 4 балла.

4. Катя, Лена, Маша и Оля – ученицы 3, 4, 5, 6 классов. На вопрос, кто кого старше, девочки сказали:

Катя: «Маша старше Оли».

Лена: «Катя младше Оли».

Маша: «Оля старше Лены».

Оля: «Маша младше Кати».

Известно, что если какая-то девочка высказалась про девочку старше её самой, то она соврала. Все остальные утверждения были верными. Определите, кто из девочек в каком классе учится.

**Ответ.** Катя – в 4 классе, Лена – в 6, Маша – в 3, Оля – в 5.

**Решение.** Рассмотрим утверждение Кати. Пусть она сказала правду. Тогда Маша старше Оли и Катя старше и Оли, и Маши (иначе ее утверждение было бы ложным). Тогда утверждение Оли должно быть ложным, так как она говорит про Машу, которая старше. Значит, Маша старше Кати. Но мы уже выяснили, что Катя старше Маши. Значит, такого не может быть и Катя лжет. Это значит, что Маша младше Оли и Катя либо младше и Маши, и Оли, либо старше Маши, но младше Оли. В любом случае Оля старше и Маши, и Кати. Значит, она говорит правду, а Маша лжет. Отсюда  $M < K < O < L$ . Проверяем этот вариант. Он подходит.

**Комментарий.** Полное правильное решение – 20 баллов. Верно рассмотрен один из существенных случаев – 12 баллов. Только верный ответ – 4 балла.

5. В лесу живут бельчата-правдивцы и бельчата-лжецы, правдивцы всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды на поляне собрались 2037 бельчат и встали в круг. Каждого из них попросили назвать своего правого соседа, и каждый ответил либо «правдивец», либо «лжец». Могло ли оказаться, что ответов «правдивец» было ровно 2020?

**Ответ.** Не могло.

**Решение.** Рассмотрим пару рядом стоящих и будем считать только то, что сказал левый сосед. Тогда в этой паре левый бельчонок мог сказать «правдивец» в случае только, если пара ПП или ЛЛ. Аналогично левый мог сказать «лжец» только в случаях ЛП и ПЛ. Таким образом, количество ответов «лжец» равно количеству смешанных пар. Множество всех бельчат в круге разбивается на области одного типа П...П и Л...Л. И смешанные пары могут быть только на границе этих областей. Следовательно, количество смешанных пар в точности равно количеству областей. Но количество областей не может быть нечетным, поскольку области правдивцев и лжецов чередуются. Поэтому сказать «лжец» могли только четное число бельчат. Если всего опросили 2037 бельчат, а «правдивец» сказали

2020, значит, «лжец» сказали 17. Но это нечетное число, а, как было доказано выше, такого быть не может.

**Комментарий.** Полное правильное решение – 20 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, но в обосновании есть пробелы или неточности – 12-14 баллов. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 6-8 баллов. Только верный ответ – 4 балла.